$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$

$\sin(x)=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

$\cos(x)=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$

$\sin(x\pm y)=\sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y)$

$\cos(x\pm y)=\cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y)$

$\sinh(x)=\frac{1}{i}\sin(ix)$ | $\cosh(x)=\cos(ix)$

$si=\frac{\sin(x)}{x}$ $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x)=2\cos^2x-1$

$\cos(ct)\cos(kt)=\frac{1}{2}\cos((c+k)t)+\frac{1}{2}\cos((c-k)t)$

$|z|^2$: $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$ auch sin

$\cos(t+\gamma)=\frac{1}{2}e^{i\gamma}e^{it}+\frac{1}{2}e^{-i\gamma}e^{-it}$

$\int_a^b f'g\,dx=[f\cdot g]_a^b-\int_a^b fg'\,dx$

$Re(z)=\frac{z+\bar z}{2}$, $Im(z)=\frac{z-\bar z}{2}$

$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\bar z}{|z|^2}$, $\mathbb{C}^x=\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$

$f*(g+h)=f*g+f*h$

f,g stü. st. $\to f*g$ stetig

$(1*f)(t)=c_0(\text{von }f)$

$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{a} & t\in[0,a]\\ 0 & t\in[a,T]\end{cases}\to (f*g)=\frac{1}{T}\frac{1}{a}\int_{t-a}^{a}f(\tau)d\tau$

FR:

$S_f(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k e^{ik\omega t}\to c_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt$

$S_f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k\cos(k\omega t)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(k\omega t)$; $a_0=2c_0$

$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt$; $a_k=c_k+c_{-k}$

$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt$, $b_k=i(c_k-c_{-k})$

gerade: $b_k=0$, $c_k=c_{-k}$; $c_k=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)$

ungerade: $a_k=0$, $c_k=-c_{-k}$; $c_{-k}=\frac{1}{2}(a_k+ib_k)$

f: T-periodisch: $c_{-k}=\bar c_k$;

$\to a_0=2Re(c_0)$

$a_k=2Re(c_k)$, $b_k=-2Im(c_k)$

halbwellensymmetrie: $a_{2n}=b_{2n}=c_{2n}=0$;

$f(t+\frac{T}{2})=-f(t)$

f T-periodisch & stückw. st. diff. $\to$ punktweise:

$\to$ auf jedem $[a,b]$ ohne Sprungstellen gleichmäßig (Partialsummen S_f^n)

Eigenschaften:

Typ	Funktion	Spektrum
Linear	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\{\alpha c_k+\beta d_k\}$
komplex	$\overline{f(t)}$	$\{\bar c_{-k}\}$
Spiegelung	$f(-t)$	$\{c_{-k}\}$
Translation	$f(t+a)$	$\{e^{ik\omega a}c_k\}$
Modulation	$e^{in\omega t}f(t)$	$\{c_{k-n}\}$
Streckung	$f(\gamma t)$ $\gamma>0$	$\{c_k\}$
Ableitung	$f'(t)$	$\{ik\omega c_k\}$
Stammfunktion	$F(t)$	$-\frac{1}{T}\int_0^T t f(t)dt$; $k=0$; $\frac{c_k}{ik\omega}$ sonst

Bei Koeffizientenvergleich T verdoppelt
$\to$ Indizes von ausdruck verdoppeln

$\lim(S_f)$ konv. gg. $\frac{f(-t)+f(+t)}{2}$

$\to$ gg. f, wenn $\lambda=f(t)$.

- f stückw. st. diff. & endlich viele Sprung: $|c_k|\le C$ $\forall k\in\mathbb{Z}$
- f & st. diff. & d_k von f' beschränkt $|c_k|\le\frac{C}{|k|}$ $\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$
- f stetig mit st. ableitungen, f^{m-1} stückw. st. diff $|c_k|\le\frac{C}{|k|^m}$ $\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

Sägezahn: $f(t)=\begin{cases}0 & t=0\\ \frac{1}{2}(\pi-t) & t\in(0,2\pi)\end{cases}\to c_k\begin{cases}\frac{1}{2ik} & k\neq0\\ 0 & k=0\end{cases}$

$b_k=\begin{cases}\frac{1}{k}\\ 0 & k=0\end{cases}$ $a_k=0$

$f(t)=t^2\ (-\pi,\pi)\to c_k=\begin{cases}\frac{\pi^2}{3} & k=0\\ \frac{2(-1)^k}{k^2} & k\neq0\end{cases}$

$\to a_k=\begin{cases}\frac{4}{k^2}(-1)^k & \text{sonst}\\ \frac{2\pi^2}{3} & k=0\end{cases}$

$f(t)=\cos(ct)\to a_k=\frac{(-1)^k}{\pi}\left(\frac{1}{c+k}+\frac{1}{c-k}\right)\sin(c\pi)$ $\forall k$

$f(t)=|\sin(t)|\ [0,\pi]$: $a_k=\frac{4}{(1-4k^2)\pi}$

LTI (FR)

$y=(h*x)(t)$ Frequenzgang

$h_T(t)=\sum h_k e^{ik\omega t}$ mit $\hat h_k=\frac{1}{P(ik\omega)}$

$P(z)=a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\dots+a_0$

Resonanz: $P(ik\omega)=0$

$f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$: $\|f\|_1=\int|f(t)|dt<\infty$

$f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: $\|f\|_2=\left(\int|f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$

Parseval: $\int|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int|\hat f(\omega)|^2d\omega$

$f\in\mathcal{L}\to\hat f$ und $\check f$ gleichmäßig stetig und:

$|\hat f(\omega)|\le\|f\|_1$

$|\check f(t)|\le\frac{1}{2\pi}\|f\|_1$

$\frac{1}{i\omega}\hat f(\omega)\to F(x)$

Faltung:

$\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)g(x)dx$

periodisch: $\frac{1}{T}\int_0^T f(t-x)g(x)dx$

$f*g\to\{f_k\cdot g_k\}\Rightarrow S_{f*g}(t)=\sum f_k g_k e^{ik\omega t}$

Fourier transformation:

$\hat f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$ | $\check f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

Umkehrsatz: $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ ($\forall$ Stetigkeitsstelle v. f)
(wenn f stü. st. diff. & $\hat f\in\mathcal{L}(\mathbb{R})$)

- Ableitung: $\hat{f'}(\omega)=i\omega\hat f(\omega)-\sum_{k=1}^{N}(f(t_k^+)-f(t_k^-))e^{-i\omega t_k}$ (t_k sind Sprungstellen)
- Dualitätsprinzip I: $\widehat{L[f]}=P(i\omega)\hat f(\omega)$ ($f^{(n)}\in\mathcal{L}$ $\forall n$, $f\in C^m$)
- Dualitätsprinzip II: $\widehat{P(t)f(t)}=P(i\partial_\omega)\hat f(\omega)$
- gerade, wenn: $\hat f(\omega)=2\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)dt$
- ungerade, wenn: $\hat f(\omega)=-2i\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt$

$f(t)=\underbrace{\frac{1}{2}(f(t)+f(-t))}_{\text{gerade}}+\underbrace{\frac{1}{2}(f(t)-f(-t))}_{\text{ungerade}}$

- $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R})$, f reell, $\to\hat f(-\omega)=\overline{\hat f(\omega)}$ $\longrightarrow$ $\hat f(\omega)$ ist reell ..... imaginär

$\to\hat f_g(\omega)=Re(\hat f(\omega))$ $\hat f_u(\omega)=iIm(\hat f(\omega))$

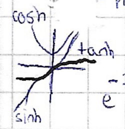
- Faltung: $\widehat{f*g}(\omega)=\hat f(\omega)\cdot\hat g(\omega)$ ($f,g,\hat f,\hat g\in\mathcal{L}$) $\forall\omega\in\mathbb{R}$

Typ	Funktion	FT
Linear	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha\hat f(\omega)+\beta\hat g(\omega)$
komplex	$\overline{f(t)}$	$\overline{\hat f(-\omega)}$
Spiegelung	$f(-t)$	$\hat f(-\omega)$
Translation	$f(t+a)$	$e^{i\omega a}\hat f(\omega)$
Modulation	$e^{i\theta t}f(t)$	$\hat f(\omega-\theta)$
Streckung	$f(ct)$, $c>0$	$\frac{1}{\lvert c\rvert}\hat f\left(\frac{\omega}{c}\right)$

Heaviside Theta

$\theta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{2} & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$ $\lim_{n\to\infty}a_n=\theta(t)$ (wie bei δ-Folge)

$\int\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}d\omega=\text{Arsinh}+C$
$\to$ unbeschränkt



$te^{-t}\to\hat f(\omega)=\frac{1}{(1+i\omega)^2}$

$e^{-\frac{t^2}{2}}\to\hat f(\omega)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

$e^{-t}[0,\infty]\to\hat f(\omega)=\frac{1}{1+i\omega}$

$e^{-|t|}\to\hat f(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$

$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\to\hat f(\omega)=\frac{1}{(a+i\omega)^n}$

$\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4tc^2}\right)\to\hat f(\omega)=e^{-(\omega c)^2t}$

$\frac{1}{2}t^2e^{-t}\to\hat y(\omega)=\frac{1}{2}P(i\omega)\hat f(\omega)=\frac{1}{2}i^2\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\frac{1}{(1+i\omega)}$

Diracsche Delta Distribution

- $\delta[f]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)=f(0)$; $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-a)=f(a)$
- a_n ist δ-Folge, wenn $\lim_{n\to\infty}\hat a_n=1$ oder $\int_{-\infty}^{\infty}a_n dx=1$

Allg. Ableitung: $Df=f'(t)+\sum_{j=1}^{N}(f(t_j^+)-f(t_j^-))\delta(t-t_j)$

Spektraldichte: $\hat{Df}=i\omega f'(t)-\sum_{j=1}^{N}(\quad''\quad)e^{-i\omega t_k}$

$g(t)=\begin{cases}e^{-\sigma t}\cdot f(t) & t\ge0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ $\mathcal{L}[f](s)=\mathcal{F}[g](\omega)$

Laplace-Transformation

$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, $s\in\mathbb{C}$

- höchstens exponentiell wachsend: $|f(t)|\le Ce^{\sigma t}$ $\forall t>0$
  $\to$ Konvergenzabszisse σ_0 ist Infimum aller σ
- Dualitätsprinzip: 1. $\mathcal{L}[f^{(m)}](s)=s^m\mathcal{L}[f](s)-\sum_{k=1}^{m}s^{m-k}f^{(k-1)}(0^+)$
  (für $f\in C^m(\mathbb{R})\wedge f^{(n)}$ LP-transbar für $Re(s)>0$, $\forall n\le m$)
  2. $\mathcal{L}[(-1)^m t^m f(t)](s)=\mathcal{L}[f]^{(m)}(s)$
  (für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ höchst. exp. Wachs. mit $Re(s)>\sigma_0$)
- Integralregel: $g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau\to\mathcal{L}[g](s)=\frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$ ($Re(s)>0$)
- Faltung: $f,g:[0,\infty]\to\mathbb{C}$ $(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$
  $\mathcal{L}[f*g](s)=\mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[g](s)$ (wenn $\int_0^\infty\int_0^\infty|g(t)f(\tau)e^{-s(t+\tau)}|dtd\tau<\infty$)

- Existenzsatz: f stückw. stet. mit höchst exp. ω.
  i) $\mathcal{L}[f](s)$ existiert $\forall Re(s)>\sigma_0$
  ii) $\mathcal{L}[f](s)\to0$ für $Re(s)\to\infty$

$\to\mathcal{L}[f](s)$ beliebig oft diffbar für $Re(s)>\sigma_0$

Typ	Funktion	Laplace
Linear	$\alpha f(t)+\beta f(t)$	$\alpha\mathcal{L}[f](s)+\beta\mathcal{L}[g](s)$
Modulation	$e^{at}f(t)$, $a\in\mathbb{C}$	$\mathcal{L}[f](s-a)$, $Re(s)\ge Re(a)$
Streckung	$f(ct)$, $c>0$	$\frac{1}{c}\mathcal{L}[f](\frac{s}{c})$
Dämpfung	$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$

$\lim_{Re(s)\to\infty}s\mathcal{L}[f](s)=f(0^+)$

$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}s\mathcal{L}[f](s)$

$\mathcal{L}[1](s)=\frac{1}{s}$, $\mathcal{L}[e^{at}]=\frac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}[\cos(\omega t)]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$, $Re(s)>0$

$\mathcal{L}[\sin(\omega t)]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $Re(s)>0$ $\mathcal{L}[t\sin(\omega t)]=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

$\mathcal{L}[u(t)-u(t-a)]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-as}$

$\mathcal{L}[t\cos(\omega t)]=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

$\mathcal{L}[\sin(t)-t\cos(t)]=\frac{2}{(s^2+1)^2}$

$\mathcal{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$

$\mathcal{L}[t^ne^{-t}]=\frac{n!}{(s+1)^{n+1}}$

$\mathcal{L}[\sinh(at)u(t)]=\frac{a}{s^2-a^2}$, $\mathcal{L}[\cosh(at)u(t)]=\frac{s}{s^2-a^2}$

Lineares AWP

$\mathcal{L}[y](t)=a_m y^{(m)}(t)+a_{m-1}y^{(m-1)}(t)+\dots$

1. Berechne $\mathcal{L}[a_m y^{(m)}(t)](s)$ $\forall m$
2. Löse nach $Y(s)$ auf
3. Berechne $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y](s)$

$\sum_{k=0}^{\infty}A^k=(I-A)^{-1}$; $A\in{}^{n\times n}$; $\|A\|<1$

$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$; $e:Mat_{n\times n}(\mathbb{C})\to Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ $(e^A)^{-1}=e^{-A}$

$x'(t)=Ax(t)+b(t)$, $x(0)=x_0$

$e^{tA}=\mathcal{L}^{-1}[R](t)$

1. Eintragsweise Laplace transfor.
$sX(s)-x_0=AX(s)+B(s)$
2. Umschreiben
einfach: $X(s)=R\cdot[x_0+B(s)]$
Vektor; $R=(sI-A)^{-1}$
3. Rücktransformieren
$x(t)=e^{tA}x_0+\int_0^t e^{(t-\tau)A}b(\tau)d\tau$

eig: $x(t)=\underbrace{c_1e^{2t}\binom{1}{0}+c_2e^{2t}\binom{t}{1}}_{\text{allg. lös.}}+\underbrace{e^{2t}\binom{0}{1}}_{\text{spezielle}}$

einfach jede Funktion in $X(s)$ rücktransformieren

$x(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}$

Komplexe Analysis

Diff: $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n-z_0}=c$

$f'(z)=|f'(z)|e^{i\theta}$

Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\wedge\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$\to f'(x+iy)=u_x-iu_y=v_y+iv_x$

$arg(z)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{arg(z)}{n}}$

Potenzreihe:

$P(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$

1. $P(z)$ konvergiert für $z\in B_R(z_0)$
2. divergiert für $z\notin\overline{B_R(z_0)}$
3. konv. gleichm. stetig für $0<r<R$

$R=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ $Q'=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k(z-z_0)^{k-1}$

analytisch: $\exists$ existiert

$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ $\sin(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}$

$\cos(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}$ $\frac{a_0}{1-q}=\sum_{k=0}^{\infty}a_0q^k$ $|z|<1$

Kurvenintegrale

$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ oder $=\sum_{j=0}^{n}\int_{\gamma_j}f(z)dz$ oder $F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$

- Standartabschätzung: $|\int_\gamma f(z)dz|\le\max|f(\gamma(t))|\cdot L(\gamma)$, $t\in[a,b]$
- Bogenlänge: $L(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|dt$
- $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ zu $\tilde\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ mit $\tilde\gamma=\binom{Re\,\gamma}{Im\,\gamma}$ $Re(\int_\gamma f dz)=\int_{\tilde\gamma}\binom{u}{-v}d\vec x$ $\to Im(\quad''\quad)=\int_{\tilde\gamma}\binom{v}{u}d\vec x$ mit $f(z)=u+iv$
- Integralsatz Cauchy: $\int_\gamma f(z)dz=0$ für U einfach zusammenhängen, $f\in H(U)$, γ geschlossene Kurve
  Green: $\iint_\Omega Q_x-P_y=\int_{\partial\Omega}\binom{P}{Q}d\vec x$
- Cauchy Integralformel: $f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_r(z_0)}f(z)\cdot\frac{1}{z-\alpha}dz$ $\forall\alpha\in B_r(z_0)$ $|z+2i|=3\to B_3(-2i)$
- Mittelwertsatz: $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{it})dt$ $f\in H(U)$!
- Cauchy für Ableitung: $f^{(k)}(\alpha)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_{\partial B}f(z)\cdot\frac{1}{(z-\alpha)^{k+1}}dz$ $\forall\alpha\in B_r(z_0)$
- Liouville: Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant. Beschränkt: $|f(z)|\le C$
- Taylor Reihen: $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$ $\forall z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<\rho$ in $B_\rho(z_0)$
  $a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=r}f(\xi)\cdot\frac{1}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi$
- Maximum: hat $z\mapsto|f(z)|$ lok. Maximum, dann ist f konstant (U ein Gebiet, $f\in H(U)$)
  jedes lok. Minimum ist Nullstelle. (sonst $\frac{1}{f}$ Maximum)
- Isoliertheit: Jede NS isoliert

Laurentreihen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$

- Hauptteil: $H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z-z_0)^{-k}$
- Nebenteil: $N(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$
- R ist Konvergenzradius von $N(z)$
- $\frac{1}{r}$ ist " von $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k = Q(z)$
- $A_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R\}$
- Ableitung & Stamm. wie bei Potenzr. (bei Stamm muss $c_{-1}=0$)
- $c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$
- $f \in H(A_{r,R}(z_0))$: absolut gleichmäßige Konverg. von $H(z)$ $\forall r' > r$ und von $N(z)$ $\forall r'' < R$
- $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \Rightarrow f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} \frac{g^{(k+m)}(z_0)}{(k+m)!} (z-z_0)^k$
  $\hookrightarrow g: B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph
- $f(z) = g\left(\frac{1}{z-z_0}\right) \Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (z-z_0)^{-k}$ auf $A_{\frac{1}{R},\infty}(z_0)$
  $\hookrightarrow g: B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph

Umrundet $A_{r,R}(z_0)$ eine Singularität von f, dann muss bei f $\frac{1}{2}$ ausgeklammert werden $\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)}$

Isolierte Singularitäten

- hebbar: $c_{-k} = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$
- Pol der Ordnung m: $c_{-m} \neq 0 \wedge c_{-k} = 0 \ \forall k > m$
- wesentlich: unendlich viele $c_{-k} \neq 0$
- Casorati-Weierstrass: (U offen, $f \in H(U)$, z_0 wesentlich) $\to \forall \varepsilon \in \mathbb{C} \ \exists \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, so dass $z_k \to z_0$ und $f(z_k) \to \varepsilon$ für $k \to \infty$
- hebbar wenn $|f(z)| \leq C \ \forall z \in A_{0,r}(z_0), r, C > 0$
- pol wenn $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$

Residuentheorie $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = c_{-1}$

- z_0 Pol m-ter Ord: $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]$

Residuensatz: $\oint_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{a_j}(f)$ (auf γ liegen kein Singularis; innerhalb γ höchstens m singularis)

$\int_0^{2\pi} g(\cos(t), \sin(t)) dt = \oint_{\partial B_1(0)} \frac{f(z)}{iz} dz$, mit $f(z) = g\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$

$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_j}(f)$, wenn:
- U offen, enthält obere Halbebene ($\mathrm{Im}(z) \geq 0$)
- $f: U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph
- alle S in oberer Halbebene und nicht auf reeller Achse
- und $\lim_{|z| \to \infty} |z| \cdot |f(z)| = 0$

$\hookrightarrow$ Wenn es S gibt in Unterer Halbebene, dann diese infach weglassen bei der Berechnung

- $g, h \in H(U)$ in Umgebung von z_0 & z_0 einfache Nullstelle von h, d.h. $h(z_0) = 0 \wedge h'(z_0) \neq 0$, dann hat $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ höchst. einen einfachen Pol bei z_0 und: $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

(um $z_0 = -3$) • Konverg. Bereich: $-\frac{5}{z+6} + \frac{9}{z-4} = -\frac{5}{3} \frac{1}{1-\left(-\frac{(z+3)}{3}\right)} - \frac{9}{7} \frac{1}{1-\left(\frac{z+3}{7}\right)} \Rightarrow$
1. $B_3(-3) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+3| < 3\}$
2. $A_{3,7}(-3) = \{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z+3| < 7\}$
3. $A_{7,\infty}(-3) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+3| > 7\}$

Weil geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$

Partielle Differentialgleichungen

- Linear: affin linear bezüglich u & allen partiellen ableitungen (höchstens 1. Potenz)
- semilinear: höchste Ableitung nur in 1. Potenz und nicht von anderer Partieller Ableitung abhängig (alles andere egal)
- quasilinear: höchste Ableitung nur in 1. Potenz, aber Abhängigkeit von anderen partiellen Ableitungen möglich

Seperationsansatz: $x^2 u_{xy} + 3y^2 u = 0$

$u = f(x) g(y) \to x^2 \frac{f'(x)}{f(x)} + 3y^2 \frac{g(y)}{g'(y)} = 0$

$\to f'(x) = \frac{\alpha}{x^2} f(x)$, $g'(y) = -\frac{1}{\alpha} 3y^2$

Trennung der Variablen: $\int \frac{1}{f} df = \int \frac{\alpha}{x^2} dx$, $\int \frac{1}{g} dg = \int -\frac{1}{\alpha} 3y^2 dy$

$\hookrightarrow u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$

2-Dimensionale DFG

Implizite Lösung über $\nabla F(x,y) \begin{pmatrix} a_1(x,y) \\ a_2(x,y) \end{pmatrix} = 0$

$\to F_x(x,y) = -a_2(x,y)$
$\quad F_y(x,y) = a_1(x,y)$
$\hookrightarrow u(x,y) = f(F(x,y))$

Beide Verfahren nur für PDGLn 1. Ordnung

DFG 2. Ordung

kann man als $a_{11} u_{xx} + a_{22} u_{yy} + 2a_{12} u_{xy} = h(x,y,u,u_x,u_y)$ schreiben

$\to A(x,y) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \to \lambda_1, \lambda_2$ (Eigenwerte) ~~det (A - λ) = 0~~

- eliptisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\hookrightarrow \det A(x,y) > 0$
- hyperbolisch $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $\hookrightarrow \det A(x,y) < 0$
- parabolisch $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ $\hookrightarrow \det A(x,y) = 0$

- Bei inhomogenen DFGL: Lösung $u = u_h + u_p$
  $\hookrightarrow$ Bei Seperationsansatz einfach ganz normal Rechnen ∇ (ohne aufteilen)

Charackteristikverfahren: $a_1(x,y,z) u_x + a_2(x,y,z) u_y + a_3(x,y,z) u_z = 0$

1) Charachterische DFG: $\dot{X}(s)_j = a_j(X(s))$
$x'(s) = x(s) = a_1(x,y,z)$
$y'(s) = y(s) = a_2(x,y,z)$
$z'(s) = x(s)^2 + y(s)^2 = a_3(x,y,z)$
(alle x,y,z mit $x(s), y(s), z(s)$ ersetzen)

2) Phasengleichung (nach Variable $\neq 0$)
$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{a_2(x,y(x),z(x))}{a_1(x,y(x),z(x))} = \frac{y(x)}{x}$
$\frac{dz(x)}{dx} = \frac{a_3(x,y(x),z(x))}{a_1(x,y(x),z(x))} = \frac{x^2 + y(x)^2}{x}$

3) Phasengleichung auflösen (Bsp. Trennung der Variablen)
$y(x) = c_1 x$ (einsetzen)
$z(x) = \frac{1}{2}(1 + c_1^2) x^2 + c_2$ (ausrechnen)

4) nach c_1 & c_2 auflösen
$c_1 = \frac{y}{x}$, $c_2 = z - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2$
(wert von c_1 in c_2 einsetzen)

5) Implizite Lösung
$u(x,y,z) = f(F(x,y,z))$
mit $F = \binom{c_1}{c_2}$

Wellengleichung

$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$

Lösung mittels Seperationsansatz.

Lösung mittels Fourier: (Wenn $\Omega = \mathbb{R}$): $\hat{u}_{tt} = -\omega^2 c^2 \hat{u}(\omega, t)$

$\hat{u}(\omega, t) = \alpha_\omega \cos(c\omega t) + \beta_\omega \sin(c\omega t)$

Anfangswerte einsetzen und zurücktransformieren

Allgemeine Ansätze:

$f_x + (\omega c)^2 f(x) = 0 \Rightarrow f(x,y) = \alpha_\omega e^{-(\omega c)^2 x}$

$f_{xx} + (\omega c)^2 f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \alpha_\omega \cos(\omega c x) + \beta_\omega \sin(\omega c x)$

Wärmeleitungsgleichung: $u_t - c^2 u_{xx} = 0$ (bzw. $u_{xx} = \Delta u$)

Dirichlet: Temperatur am Rand. Neumann: Wärmefluss nach außen

Allgemeines:

- $u(x)$ Lösung von Laplace-Gleichung ($\Delta u = 0$)
  $\hookrightarrow u(x)$ ist harmonisch $\wedge$ Realteil einer holomorphen funktion
- Realteil einer holomorphen Funktion nimmt keine Maxima an
  - Eine komplexe holomorphe Funktion $h(x+iy)$ kann in Abhängigkeit von z geschrieben werden, wenn man $y=0$ setzt. Denn laut Identitätssatz ist $h(z) = h(x)$ wenn beide auf $\mathbb{R}$ übereinstimmen.
- Partialbruchzerlegung: r-fache Nullstellen $\to \frac{A}{s-s_i} + \frac{B}{(s-s_i)^2} + \frac{C}{(s-s_i)^3} + \ldots$
  nicht reelle Nullstelle: $\to \frac{Ax+B}{x^2 + p_i x + q_i}$
- $|z - 1 - 2i| = 2 \to B_2(1+2i)$
  $\hookrightarrow |z - m| = r \quad B_r(m)$
- Jedes Polynom, das nicht konstant ist hat min eine NST in $\mathbb{C}$
- $S_f^n = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikt}$ trigonometrische Polynome ? $\to$ nicht gleichmäßig konvergent auf $\gg$ ganz $\mathbb{C}$ «
- Potenzreihen Stammfunktion: $T(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z-z_0)^{k+1}$
- Geometrische Reihe auch möglich für $|q| > 1$, aber dann divergiert sie

$\sqrt{\pi} = 1{,}772\ldots$

$\pi = 3{,}142\ldots$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	0	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0	-1
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1	0
$\tan(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	0	$\mp\infty$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$

$e^{i\pi k} = (-1)^k \quad e^{i\frac{\pi}{2}k} = (i)^k$

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$f(z) = \begin{cases} z^k \sin\left(\frac{1}{z}\right) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ $f(z_n) = 0$ für $z_n = \frac{1}{n\pi}$; $\lim_{n \to \infty} z_n = 0 \to$ Häufungspunkt $\to$ Identitätssatz: ungültig.