

$$\text{Maxwell'sche Gleichungen:}$$

- $\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)$  (Gauß-Gesetz)
- $\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$  (Induktionsgesetz)
- $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$  (Quellenfreiheit)
- $\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$  (Durchflutungsgesetz)

Stokes:  $\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$

Elektr. Energie von diskr. Ladungswert.

$$W_{el} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} \quad \text{mit } \Phi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} \text{ zu } W_{el} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} \Phi(r_i) \Phi(r_j) dr$$

$$I = \int_A \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \text{Wegungsinduktionsgesetz}$$

$$U_{ind} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_A \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a} \right]$$

$$\text{Stokes: } \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{Bilanzgleichung: } \frac{\partial X(v)}{\partial t} = - \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} + \int_V \vec{J} \cdot d\vec{v} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{J} + \vec{J} \cdot \vec{v}$$

Stromdichte  
Produktionsrate  
pro Volumen

richt. anderes Volumenelement. z.B. Änderung der Stromdichte  
Teilchenbilanz in Halbleitern:  $\frac{\partial n}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{J}_n + G_n$  ( $n \rightarrow$  bei Elektronen,  $r \rightarrow$  bei Löchern)

Energiebilanz des Elmag-Feldes:  $\frac{dW_{elmag}}{dt} = - \operatorname{div} \vec{J}_{elmag} + \Pi_{elmag} \quad \Pi_{elmag} = - \int_V \vec{J}_{elmag} \cdot \vec{B} dv$

Pointingvektor:  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  (Leistungsdichte)

magnetisches

$$\text{Vektorpotential: } \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \text{ Umwandlung: } \vec{A}' = \vec{A} - \nabla \phi$$

Umwandlungen müssen zusammen geschehen

$$\text{Skalares elektrisches Potential: } \vec{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \text{ Umwandlung: } \phi' = \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\text{Koordinatenzeichen: } \operatorname{div} \vec{A} + \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{Wellengleichung: } \Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{J} \delta j \quad (\text{2 partielle DGL 2. Ordnung})$$

$$\text{Coulombgleichung: } \operatorname{div} \vec{A} = 0 \Rightarrow \text{Poisson-Gleichung: } \operatorname{div} (\epsilon \nabla \phi) = -\rho$$

$$\text{Normalenkomponente von } \vec{D} \quad \text{Normalenkomponente von } \vec{B} \quad \text{Tangentialkomponente ist}$$

geht stetig über:      geht stetig über:      stetig:  $\vec{E}_1 \times \vec{N} = \vec{E}_2 \times \vec{N}$        $\vec{H}_1 \times \vec{N} = \vec{H}_2 \times \vec{N}$        $\vec{N}$  zeigt von 1 nach 2

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{N} - \vec{D}_1 \cdot \vec{N} = \sigma_{int} \text{ oder } 0 \quad \vec{B}_1 \cdot \vec{N} = \vec{B}_2 \cdot \vec{N}$$

$$\text{Sprungbedingung für Normalenbedingung des Potentials: } \epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_1 - \epsilon_2 \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_2 = \sigma_{int} \quad (\phi \text{ ist längs Materialgrenze stetig}), \sigma(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{n}$$

$$\text{Brechungsgesetz: } \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Randwertprobleme:

Grundansatz:  $\phi_{hom} : \Delta \phi = 0 + \phi_{part.}$  mit homogenen Randbedingungen

$$\text{Dirichlet: } \operatorname{div} (\epsilon \nabla \phi) = -\rho; \phi|_{\partial \Omega} = \phi_D$$

$$\text{Neumann: } \operatorname{div} (\epsilon \nabla \phi) = -\rho; \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = f_n \quad (\text{Vorgabe einer Oberflächenladungsdichte})$$

Spektraldarstellung:  $\operatorname{div} (\epsilon \nabla \phi) = 0$  [homogen] (für inhomogen:  $\phi_{part.}$  nach  $\nabla$ )

1. Eigenfunktionen  $b_n(x_n)$  und Eigenwerte  $\lambda_n$  berechnen: Separationsansatz  $b(\vec{r}) = b_1(x_1) b_2(x_2) b_3(x_3)$

$$1.1 \quad b(\vec{r}) \text{ in } -\Delta b \rightarrow -\frac{b''_1(x_1)}{b_1(x_1)} - \frac{b''_2(x_2)}{b_2(x_2)} - \frac{b''_3(x_3)}{b_3(x_3)} = 0$$

$$1.2 \quad \text{Löse OFG } b''_j(x_j) + \lambda_j b_j(x_j) = 0 \text{ durch Ansatz } b_j(x_j) = A_j \sin(k_j x_j) + B_j \cos(k_j x_j), k_j = \sqrt{\lambda_j}$$

$\rightarrow$  Werte der Variablen in den Eigenfunktionen über Randbedingungen und ggf. über Normiertheitsbedingung

$$\int_0^{x_j} A_j^2 \sin^2(n_j \frac{\pi}{x_j} x_j) dx = A_j^2 \frac{1}{2}$$

$$2. \text{ Greenfunktion aufstellen: } G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}^+}} b_n(\vec{r}) b_{n_1}(\vec{r}_1) b_{n_2}(\vec{r}_2) b_{n_3}(\vec{r}_3)$$

$$\text{mit } b_{n_1 n_2 n_3} = b_{n_1} b_{n_2} b_{n_3} \text{ und } \lambda_{n_1 n_2 n_3} = \lambda_{n_1} + \lambda_{n_2} + \lambda_{n_3}$$

$$3. \text{ Lösung von } \varphi: \varphi(\vec{r}) = \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') d\vec{v}'$$

Das  $f(\vec{r}')$  kommt von  $\operatorname{div} (\epsilon \nabla \varphi) = -f(\vec{r}) = -\rho - \operatorname{div} (\epsilon \nabla \phi^{(0)})$

$$\hookrightarrow \text{eigentlich: } \rho(\vec{r}) = \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{f(\vec{r}')}{\epsilon} d\vec{v}'$$

$$\text{Greenfunktion im Vacuum: } G_{vac}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r_1 - r_1'}$$

$$\text{Punktladung im Vacuum: } p(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Bei inhomogener Poisongleichung teilt man das Potential in glatte Funktion  $\phi^{(0)}$  (die die inhomogenen RB löst) und in  $\varphi$  (die die homogenen RB löst):  $\phi = \phi^{(0)} + \varphi$ . Aber dann meist Orthogonalreihenentwicklung

$$(meist A_n^2 \frac{1}{2}) \rightarrow L$$

$$A_n^2 \int_0^L \cos^2(k_n x) dx = A_n^2 \frac{2k_n x + \sin(2k_n x)}{2k_n}$$

Eindimensional:  $\Delta b(x) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 b(x)}{\partial x^2} = 0 \rightarrow b(x) = c_1 x + c_2$  = homogenes Problem  
 Lösung des inhomogenen Problems über Expansion  $\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Lösung von  $\Delta q = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ :  $q(\vec{r}) = \iiint_{R^3} G_{vac}(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (\text{Coulombintegral})$

### Spiegelladungsprinzip 8

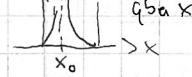
→ Ladung wird an Raumgrenze (Potential=0) gespiegelt

$G_H = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|\vec{r} - S_n \vec{r}'|}$  wenn  $Q=1$ , ansonsten einfach  $Q$   
 $S_n$  bezeichnet die  $n$ -te Spiegelung

$\phi(\vec{r}) = \iiint_H G_H(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$

Potential einer Punktladung:  $\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$

Elektrostatisches Potential einer Punktladung zwischen zwei idealen Platten (gec. def.)



### Stationäre Ströme

$q_\alpha$ : spezifische Ladung

$M_\alpha$ : Beweglichkeit

$n_\alpha$ : Teilchendichte

$D_\alpha$ : Diffusionskoeffizient

Einsteinrelation:  $D_\alpha = \frac{kT}{q_\alpha M_\alpha} \Rightarrow \phi_\alpha = \phi + \frac{kT}{q_\alpha} \ln \left( \frac{n_\alpha}{n_0} \right) \rightarrow \vec{j}_\alpha = q_\alpha n_\alpha \mu_\alpha \vec{E} - q_\alpha D_\alpha \nabla \phi_\alpha$

Driftstrom  
Diffusionsstrom  
Ohm'sches Gesetz

wegen

Für  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$  folgt  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ , also enthält  $\vec{E}$  keine Wirbelfelder, sondern ist reines Gradientenfeld:  $\vec{E} = -\nabla \phi$

$\vec{j}_\alpha = -(q_\alpha n_\alpha \mu_\alpha \nabla \phi + q_\alpha D_\alpha \nabla n_\alpha)$

Gesamtstrom  $\vec{j} = \sum_{\alpha=1}^K \vec{j}_\alpha \wedge \text{Raumladungsdichte } p = \sum_{\alpha=1}^K q_\alpha n_\alpha$

Bilanzgleichung  $\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{q_\alpha} \operatorname{div} \vec{j}_\alpha + G_\alpha$  bedingung:  $\sum_{\alpha=1}^K q_\alpha G_\alpha = 0$  | Hadungserhaltung:  $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial p}{\partial t}$

$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial \phi} \Rightarrow$  lokale Ladungsfunktion  $\Delta p(\vec{r}, t) = p_0(t) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_R}\right)$  mit  $\tau_R = \frac{\epsilon}{\sigma}$  = dielektrische Relaxationszeit  
 (L stört elektrisch neutralen stationären Gleichgewichtszustand)

Quasistationäre Näherung:  $\frac{\partial p}{\partial t} \approx 0$ , da Ausbreitung von Raumladungsdichten wird vernachlässigt, da  $\tau_R$  so kurz (klein) ist

einziges mögliches stationäre Stromproblem ist  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  (gemischtes Randwertproblem)

### Kompartimentmodelle

#### Funktionsale Blöcke

Wechselwirkung zwischen räumlich begrenzten Blöcken über disjunkte, lokalierte Randflächen

Konzentrationshypothese:  $\lambda \gg d$  → allgemeine Bedingungen

Kontakte sind Äquipotentialflächen (keine Ausbreitung von Elmag-Wellen:  $\operatorname{curl} \vec{A} = 0$ )

Modell im ganzen elektrisch neutral ( $Q_{ges} = 0$ )

Kleineverhalten der Bauelemente als algebraisches Gleichungssystem darstellbar

#### Knoten

ideal leitende Verbindung zw.  $M$  Kontaktstellen

(für echten Knoten gilt  $M \geq 3$ )

ist Äquipotentialgebiet

ist meist Ladungszentral

Ausnahme: „speichernde“ Knoten (elektrode)

#### Zweige

Zweigströme sind konzentriert, linienförmig & flusserschließend

Jeder Zweig hat Zweigspannung

$U(K_1, K_2) = \int_{K_1}^{K_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$  ohne Wirkfeld

$U_{ind}(K_1, K_2) = \int_{K_1}^{K_2} \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{s} = - \int_{K_1}^{K_2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$  mit induziertem Wirkfeld

$U(K_1, K_2) = \int_{K_1}^{K_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{K_1}^{K_2} \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{s}$

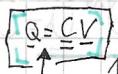
$$E = -\nabla \phi - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{= E_{ind}}$$

Knotenregel:  $\frac{\partial Q_K}{\partial t} = \sum_{j \in K} \frac{\partial \phi}{\partial v_j} \partial v_j = - \sum_{j \in K} \frac{\partial \phi}{\partial v_j} \partial a_j = - \sum_{K' \in \mathcal{N}(K)} \frac{\partial \phi}{\partial v_j} \partial a_j = - \sum_{K' \in \mathcal{N}(K)} I(K, K')$  für  $K \in \mathcal{K}$  ist  $\mathcal{N}(K)$  Menge seiner Nachbarsknoten  
 $\Leftrightarrow 0$  für nichtspeichernde Knoten

Maschenregel:  $\sum_M \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \nabla \phi \cdot ds + \sum_M E_{\text{ind}} ds = 0 + U_{\text{ind}}(M)$  (mit Induktionseffekt) |  $M = \{(K_0, K_1), \dots, (K_n, K_0)\}$  = Masche  
 $\sum_M \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_{j=0}^n \sum_{K_j} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_{j=0}^n U(K_j, K_{j+1})$  |  $\Leftrightarrow U_{\text{ind}}(M) = \sum_{j=0}^n U(K_j, K_{j+1})$   
 $\Rightarrow 0$  wenn kein Induktionsgesetz. Ansonsten

## Kapazitive Speicherelemente

Mehrlektroden-Kondensator Anordnung: Leitende Gebiete  $\Omega_L$  in  $\Omega$   
 $\rightarrow \operatorname{div}(\epsilon \nabla \phi) = 0$  in  $\Omega_L \wedge \phi|_{\partial \Omega_L} = V_L$   
 $\Leftrightarrow$  weil  $\rho = 0$  angegeben



Elektrodenladung:  $Q_k = \sum_{l=0}^n C_{kl} V_l$  mit  $C_{kl} = - \iint_{\Omega_L} \epsilon \nabla \phi_l \cdot d\vec{a} = \iint_{\Omega} \epsilon \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l dv$

Energie in Kondensator:  $W_{el} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n V_k C_{kl} V_l = \frac{1}{2} \underline{V}^T \underline{C} \underline{V} = \underline{V}^T \underline{C} \underline{V}$

$$\frac{\partial W_{el}}{\partial V_k} = Q_k \quad \frac{\partial W_{el}}{\partial V} = \underline{Q} \quad \frac{\partial^2 W_{el}}{\partial V_k \partial V_l} = C_{kl} \quad \frac{\partial^2 W_{el}}{\partial V \partial V} = \underline{C}$$

$$Q_{tot} = \sum_{k=0}^n Q_k = \underline{e}^T \underline{Q} = \underline{e}^T \underline{C} \underline{V} = 0$$

Teilkapazitätskoeffizient:  $K_{kl} = -C_{kl}$ ,  $Q_k = \sum_{l=0}^n K_{kl} U_{lk}$   
 $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$

$$\Phi(\underline{V}) = \sum_{k=0}^n V_k \phi_k \quad \Leftrightarrow \text{superposition aller einzelnen Lösungen}$$

$$\rightarrow \text{Diese Superposition gilt für die RWP. mit } \phi_{lk}|_{\partial \Omega_L} = S_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Maxwellsche Kapazitätsmatrix mit Kapazitätskoeffizienten } C_{kl}$$

$$\rightarrow \text{positiv definit (} W_{el} \geq 0, \text{ alle Eigenwerte } \geq 0\text{)}$$

$$\rightarrow \text{alle Zeilen- und Spaltensummen sind Null (} V' = V + c \in \mathbb{R}^n, \text{ konstante addieren; } c \subseteq e = 0\text{)}$$

(Auf Knoten  $K$  befindliche Ladung  $Q_k$  wird auf in additive Teilladungen aufgespalten und zwischen Knoten  $K$  und  $C=12$  platziert)

## Induktive Speicherelemente

Spule besteht aus  $N$  Leiterschleifen  $C_k$ , mit orientierter Fläche  $S_k$  ( $C_k = \partial S_k$ ) und durch die  $i_k(t)$  fließt.  
 $\rightarrow U_k(t) = -U_{\text{ind},k}(t) + r_k i_k(t)$   $r_k$  ohmischer Widerstand

Spule als Generator: Magnetischer Fluss pro Windungsfläche:  $\Phi(S_k) = \iint_{S_k} \vec{B} \cdot d\vec{a} = I S_k B(t)$  → homogen, zeitveränderlich

$$U_{\text{ind}}(t) = -\frac{\partial \Phi(S_k)}{\partial t} = -\omega \frac{\partial}{\partial t} \Phi(S_k) = -\omega I S_k \frac{\partial B}{\partial t}$$

Kopplungsinductivität  $L_{kl} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \vec{B}_k \cdot \vec{B}_l dv$

Wenn Spule als Generator zum Betreiben einer last  $R_L$  verwendet wird, wird  $U_{\text{ind}}$  generiert und  $I$  (hier widerstandlos)

Deshalb führt auch

Spule als Verbraucher: An Spule wird Spannungsquelle angeschlossen. Diese Spannung generiert  $i(t)$ .  $U(t)$  fließt gegenläufig zu  $U_{\text{ind}}(t)$ . Spulenstrom  $i(t)$  erzeugt Magnetfeld  $B(t) \rightarrow B(t) = c \cdot i(t)$ ,  $c = \text{const.}$

$$U(t) = -U_{\text{ind}}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \omega I S_k \frac{\partial B}{\partial t} = \omega I S_k c \frac{\partial i}{\partial t} \rightarrow (\text{eigen-}) \text{Induktivität}$$

## Induktionskoeffizienten

Modellannahmen: I) induzierte Spannungen werden nur von  $\frac{\partial B}{\partial t}$  verursacht (Ruheinduktion)  
II) Quasistationäre Näherung: Magnetfeld und induzierte Spannung zeitgleich mit erzeugenden Strömen  
 $\rightarrow$  keine retardierungseffekte ( $\frac{\partial B}{\partial t} \approx 0$ )

Transformatorgleichung:  $U_k(t) = r_k i_k(t) + \sum_{l=1}^N L_{kl} \frac{\partial i_l}{\partial t}$  mit  $L_{kl} = \frac{1}{2} \iint_{C_k C_l} \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{a}} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{a}} dv$  (Neumannsche Formel)  
in Leiterschleife  $C_k$  induzierte Spannung  
ohmischer Innenwiderstand d. Leiterschleife  $C_k$

Induktivitätsmatrix:  $\underline{L} \triangleq \text{symmetrisch} \wedge \text{positiv definit} (\lambda > 0)$

Magnetische Feldenergie:  $W_{mag} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N i_k L_{kl} i_l = \frac{1}{2} \underline{I}^T \underline{L} \underline{I}$ ,  $\underline{I}$  = Vektor der Spulenströme

Magnetischer Fluss:  $\Phi(S_k) = \sum_{l=1}^N L_{kl} i_l$  |  $\frac{\partial W_{mag}}{\partial i_k} = \sum_{l=1}^N L_{kl} i_l$  |  $\frac{\partial^2 W_{mag}}{\partial i_k \partial i_l} = L_{kl}$

oder:  $U_1(t) = L_1 \dot{I}_1(t) + M \dot{I}_2(t)$  ( $M = \sqrt{L_1 L_2}$ )

Kopplungsinductivität

Kondensator (Kapazität):  $\hat{I}_c = j\omega C \hat{U}_c$        $\hat{U} = R \hat{I}$        $\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$

Induktivität:  $\hat{U}_L = j\omega L \hat{I}_L$        $\hat{I} = \frac{\hat{U}}{j\omega L}$        $\hat{U} = j\omega L \hat{I}$

Wirkleistung:  $P_w = \text{Re}(z) I^2$       Blindleistung:  $P_B = \text{Im}(z) I^2$

Impedanz / komplexer Scheinwiderstand:  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

reeller Scheinwiderstand:  $R = \text{Re}(Z)$

Admittanz / komplexer Scheinleitwert:  $Y = \frac{1}{Z}$

reeller Scheinleitwert:  $Y = \text{Re}(Y)$

Bauelement	ohmischer Widerstand	Indukt.	Kapazität
$Z$	$R$	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega C}$
$Y$	$\frac{1}{R}$	$\frac{j\omega L}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$	$\frac{1}{j\omega C}$
$ Z $	$R$	$\frac{j\omega L}{2}$	$\frac{j\omega C}{2}$
$\Delta\varphi$	0		$-\frac{\pi}{2}$

Zeigerdarstellung Allgemein:  $\hat{U} = \hat{U}_0 e^{j\omega t}$        $\hat{I} = \hat{I}_0 e^{j\omega t}$  (ist nicht wichtig, da  $\hat{u}_0$  und  $\hat{i}_0$ , sowie  $\hat{U}$  und  $\hat{I}$  die Zeiger eindeutig bestimmen)

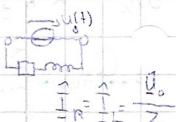
für realen Verlauf:  $u(t) = \text{Im}(e^{j\omega t} \hat{U}) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_0)$  bzw.  $U(t) = e^{j\omega t} \hat{U} = \hat{U} e^{j(\omega t + \varphi_0)}$   
 -> Projektion von  $\hat{U}(t)$  auf imaginäre Achse

$i(t) = \text{Im}(e^{j\omega t} \hat{I}) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$  bzw.  $I(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi_i)}$

!  $\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_i = \arg(Z) = -\arg(Y)$

$\arg(X) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(X)}{\text{Re}(X)}\right)$

- $u(t)$ : Momentanwert
- $\hat{U}$ : Scheitelwert
- $\varphi(t)$ : momentane Phase
- $\varphi_0(t)$ :  $\omega t_0$  Antangspanne



Kirchhoff Regeln für Wechselstrom:  $\sum_{k \in K} \text{Im}(\hat{I}_k(t)) = \text{Im}\left[\sum_{k \in K} \hat{I}_k(t) e^{j\omega t}\right] = 0$

Zählt nur für gesamt  $Z$ !

$\sum_{C \in M} \text{Im}(\hat{U}_C(t)) = \text{Im}\left[\left(\sum_{C \in M} \hat{U}_C(t)\right) e^{j\omega t}\right] = \text{Im}(\hat{U}_e e^{j\omega t}) \quad t \in \mathbb{R}$

( $U_e(t)$  ist Spannungsquelle)

Tiefpass:  $|Z(\omega)|$  steigt mit steigendem  $\omega$  ( $\rightarrow$  mehr Widerstand für hohe  $\omega$ )      (RC Serienschaltung)

Hochpass:  $|Z(\omega)|$  sinkt mit steigendem  $\omega$  ( $\rightarrow$  weniger Widerstand für hohe  $\omega$ )      (RC Parallelschaltung)

Parallel:  $Y_{\text{ges}} = Y_1 + Y_2 + \dots$       Seriell:  $Z_{\text{ges}} = Z_1 + Z_2 + \dots$

-> für niedrige Frequenzen ist Wechselstromwiderstand von C groß, sodass am Kondensator eine hohe Spannung anliegt.  $\rightarrow$  Tiefpass  
  
 -> für hohe Frequenzen ist " "      "      "  $\rightarrow$  Hochpass

Leistung:  $p(t) = u(t)i(t) = P_m - P_{m,0} = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\Delta\varphi) - \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(2\omega t + \varphi_0 + \varphi_i)$

Zeitlicher Mittelwert  $P_m = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\Delta\varphi)$

Wirkleistung  $P_w = \frac{1}{2} \int_0^T p(t) dt = P_m = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \Delta\varphi = \text{Re}(z) I_{\text{eff}}^2 = P_s \cos \Delta\varphi$

Effektivwerte:  $U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt}$        $I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}$   
 $U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{U}$        $I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{I}$

Komplexe Leistung:  $\underline{P} = \frac{1}{2} \hat{U} \cdot \hat{I}^*$        $= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} (\cos \Delta\varphi + j \sin \Delta\varphi)$

$$\begin{aligned} P_w &= R(z) I_{\text{eff}}^2 + j \text{Im}(z) I_{\text{eff}}^2 \\ &= \underline{P} \sin \Delta\varphi \\ &= \underline{P} \sin \Delta\varphi \end{aligned}$$

Leistungsbilanz: Spule:  $(W_{\text{mag}}(t)) = \frac{1}{2} L i(t)^2$   
 momentan gespeicherte Energie  $\uparrow$   
 Kondensator:  $(W_{\text{mag}}(t)) = \frac{1}{2} (U(t))^2$

$$\frac{dW_{\text{mag}}(t)}{dt} = L i(t) \frac{di(t)}{dt} = p(t)$$

$$\frac{dW_{\text{mag}}(t)}{dt} = C_u(t) \frac{du(t)}{dt} = p(t)$$

Leistungsbilanzgleichung:  $p(t) = R_w i(t)^2 + \frac{dW(t)}{dt}$  mit  $R_w = \text{Re}(z)$ ,  $\frac{dW(t)}{dt} = \text{Im}(z) I_{\text{eff}}^2 \sin(2\omega t)$   
 zeitliche Änderung der gespeicherten Energie

Seinleistung:  $P_s = |\underline{P}| = \sqrt{P_w^2 + P_B^2} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$        $[\arg(P) = \arg(z)]$

# Elektromagnetische Wellen

Modellannahmen: keine Raumladung in  $\Omega$ ; außer durch äußere Quellen mit Stromdichte  $\vec{j}_0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{j}_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$

Ausbreitungsmedium ist in Ruhe

• keine Beeinflussung des Stromes durch Magnetfelder (z.B. Halleffekt)

• kein Stromfluss durch Teilchendiffusion und thermische Diffusion

Ausgangspunkt:  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  aus Maxwell eliminieren

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_0$$

Sechskomponentiges elektromagnetisches Wellenfeld:  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \vec{j}_0 \wedge \operatorname{rot} \vec{E} \wedge \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \nabla \left( \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \right) - \Delta \vec{E}$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H}) = -\sigma \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} + \operatorname{rot} \vec{j}_0 \wedge \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H}) = -\Delta \vec{H}$$

$$\Rightarrow \left[ \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla \left( \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \right) - \mu_0 \vec{j}_0 \\ \operatorname{rot} \vec{j}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{für } \sigma=0 \text{ ungedämpft})$$

Inhomogene Wellengleichung für Viererpotential: mit  $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  und  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  (mit  $\sigma=0$ ) (Man kann  $\phi$  und  $\vec{A}$  in Wellengleichung durch alles ersetzen was Maxwell kost)

$$\Rightarrow \left[ \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \\ \mu_0 \vec{j}_0 \end{pmatrix}$$

$\vec{E}$ -Feld und  $\vec{H}$ -Feld erzeugen sich gegenseitig:  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  und  $\operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Ebene Wellen im 3-D Raum ( $\sigma=0, \rho_0=0, \vec{j}_0=0$ )

- Transportieren Feldenergie mit Geschwindigkeit  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

forderung auch für  $\vec{H}$ !

- unendliche Ausbreitung  $\vec{k}$  mit  $c_0$  ohne Medium

- Forderung:  $\vec{E}_0(\cdot) \cdot \vec{n} = 0, \vec{E}_0(\cdot) \cdot \vec{k} = 0$ , d.h.  $\vec{E}_0(\cdot) \perp \vec{n}$  ( $\rightarrow \vec{E}_0(\cdot)$  senkrecht auf Ausbreitungsrichtung;  $\rightarrow$  transversal Wellen)

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{Z} \cdot \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

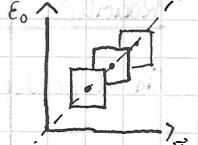
$$\vec{k} = k \cdot \vec{n} \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad \text{aber auch } Z = \frac{|\vec{E}_0|}{|\vec{H}_0|} \text{ Verhältnis der Feldamplituden}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -Z \vec{n} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0 \omega} \vec{k} \times \vec{H}$$

$$\text{Tipp: } \frac{|\vec{k}|}{Z} = \frac{\omega}{c} \frac{1}{2} = \frac{\omega \epsilon_0 \mu_0}{c} = \omega E$$

$$\text{Dispersionsrelation: } \omega(k) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} |\vec{k}| = c |\vec{k}|$$

Phasenebenen: Die Phasenebenen stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\vec{n}$ . Somit sind  $\vec{E}(t, \vec{r}) = E_0(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  und  $\vec{H}(t, \vec{r}) = H_0(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  konstant in/auf jeder Phasenebene



Energiedichte und Leistungsfluss ebener EM-Wellen

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})^2 \quad W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \vec{H}_0 (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} H_0^2 = \frac{1}{2} E_0^2 \quad \text{also } W_{\text{el}} = W_{\text{mag}}$$

$$W_{\text{el}} = W_{\text{el}} + W_{\text{mag}} = 2 \cdot W_{\text{el}} = 2 \cdot W_{\text{mag}}$$

$$\text{Leistungsflussdichte: } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2} \vec{E}_0^2 \cdot \vec{n} \quad (\vec{E}_0^2 = |\vec{E}_0(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})|^2) \quad \text{Zeitliches Mittel: } \frac{1}{T} \int_0^T \dots \, dt$$

$\rightarrow$  durch einsetzen und umformen folgt  $\frac{\partial W_{\text{mag}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = 0$

Rechenregeln für 3D-Wellen:  $\frac{\partial}{\partial x_j} \vec{E}_{0k}(ct - \vec{k} \cdot \vec{r}) = -n_j \vec{E}'_{0k}(ct - \vec{k} \cdot \vec{r})$   
 $\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{0k}(ct - \vec{k} \cdot \vec{r}) = c \vec{E}'_{0k}(ct - \vec{k} \cdot \vec{r})$

# Harmonische Ebene EM-Welle im 3D

$$\rightarrow \vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad \vec{E}_0, \vec{H}_0 \text{ konstante Vektoren}$$

$$\rightarrow \vec{H}(t, \vec{r}) = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

$$\text{Wellenlänge } \lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}, \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}, \quad k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{Kreiswellenzahl}), \quad \text{Frequenz } v = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi \cdot v = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{inverse Dispersionssrelation: } \vec{k}(\omega) = \omega \cdot \frac{1}{c} \vec{n} = \omega \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c} \vec{n}$$

$$\begin{aligned} & \text{linksdrehend} \\ & \left( \vec{k}_1 - \vec{k}_2 \right) = \frac{\pi}{4} \\ & \text{rechtsdrehend} \end{aligned}$$

$$\text{- elliptische Polarisation: } \vec{E}(t, \vec{r}) = E_{01} \vec{e}_1 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1) + E_{02} \vec{e}_2 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_2)$$

Spezialfälle:  $\varphi_1 = \varphi_2$  linear polarisiert mit  $\vec{E}_0 = E_{01} \vec{e}_1 + E_{02} \vec{e}_2$  (in beiden muss entweder sinus oder cosinus sein, also  $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \frac{\pi}{2}$ )

$\varphi_1 = \varphi_2 \pm \frac{\pi}{2}$  zirkular polarisiert mit  $E_0 = E_{01} = E_{02}$

Komplexe Darstellung:  $\vec{E}(t, \vec{r}) = \operatorname{Re} \{ (\underbrace{E_{01} e^{j\varphi_1}}_{\vec{E}_{01}} \vec{e}_1 + \underbrace{E_{02} e^{j\varphi_2}}_{\vec{E}_{02}} \vec{e}_2) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \}$

$$\rightarrow \vec{E}(t, \vec{r}) = \operatorname{Re} \{ \hat{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \}$$

$$\rightarrow \vec{H}(t, \vec{r}) = \operatorname{Re} \{ \hat{\vec{H}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \}$$

$$\hat{\vec{E}}_0 \text{ mit } \vec{k} \cdot \hat{\vec{E}}_0 = 0$$

$$\text{Fourierdarstellung: } \left( \begin{array}{c} \vec{D}(t, \vec{r}) \\ \vec{B}(t, \vec{r}) \end{array} \right) = \operatorname{Re} \int \int \int \left( \begin{array}{c} \hat{\vec{D}}(\vec{k}) \\ \hat{\vec{B}}(\vec{k}) \end{array} \right) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 k$$

$$\text{folgt aus: } \left( \begin{array}{c} \vec{E}(t, \vec{r}) \\ \vec{H}(t, \vec{r}) \end{array} \right) = \operatorname{Re} \int \int \int \left( \begin{array}{c} \hat{\vec{E}}(\omega, \vec{k}) \\ \hat{\vec{H}}(\omega, \vec{k}) \end{array} \right) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \delta(\omega - \omega(\vec{k})) d\omega d^3 k$$

$\hat{\vec{E}}(\vec{k}), \hat{\vec{H}}(\vec{k})$  sind „Entwicklungscoefficienten“ wenn Gesamtwellen Linearkombination von mehreren  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$

Rechenregel für Fourier-transformierte  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(t, \vec{r}) = -j k_i \hat{f}(\omega, \vec{k}), \quad \frac{\partial}{\partial t} f(t, \vec{r}) = j \omega \hat{f}(\omega, \vec{k})$

Komplexe Permittivität:  $\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon(\omega) - j \frac{\sigma(\omega)}{\omega}$

$$\text{komplexe Dispersionssrelation: } \omega(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}(\omega(\vec{k})) \mu(\omega(\vec{k}))}} |\vec{k}|$$

Räumlich gedämpfte ebene EM-Welle

in leitendem Ausbreitungsmedium mit  $\sigma(\omega) > 0$

Welle klingt mit  $\tau = -\frac{1}{\operatorname{Im}(\omega(\vec{k}))}$  ab

$\Rightarrow$  komplexer Ausbreitungsvektor  $\tilde{\vec{k}} = \vec{k}(\omega) \vec{n}$  ( $|\vec{n}|=1$ )  $\Rightarrow \tilde{\vec{k}} = \operatorname{Re}(\tilde{\vec{k}}(\omega)) - j(-\operatorname{Im}(\tilde{\vec{k}}(\omega))) = \beta(\omega) - j\alpha(\omega)$

$$\text{komplexer Wellenwiderstand: } \tilde{\zeta}(\omega) = \sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\tilde{\epsilon}(\omega)}} = \frac{\tilde{k}(\omega)}{\omega \tilde{\epsilon}(\omega)}$$

$$\rightarrow \hat{\vec{E}}_0 = -\tilde{\zeta} \vec{n} \times \hat{\vec{H}}_0, \quad \hat{\vec{H}}_0 = \frac{1}{2} \vec{n} \times \hat{\vec{E}}_0$$

$$\begin{aligned} & \text{Phasenmaß } \zeta = \frac{\pi}{2} \\ & \text{Dämpfungsmaß } \zeta = \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

dielektrische Relaxationszeit:  $T_R = \frac{\epsilon}{\sigma}$

aus Näherung  $\omega \epsilon(\omega) \ll \sigma(\omega)$  folgt  $T_R \ll \frac{1}{2\pi}$

$$\rightarrow \text{Dämpfungsmaß } \alpha(\omega) = \sqrt{\frac{\sigma(\omega) \mu \cdot \omega}{2}}$$

$$\text{Eindringtiefe } \Delta z(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\sigma(\omega) \mu \cdot \omega}} = \frac{1}{\alpha(\omega)}$$

$$(\vec{E}(t, \vec{r}) = \operatorname{Re} \{ \vec{E}_0 e^{-\alpha(\omega) z} e^{j(\omega t - \beta(\omega) z)} \}) \rightarrow \Delta z = z_0 \text{ auf } \frac{1}{2}$$

$\rightarrow$  Skin-Effekt: Stromdichte eines Leiters im Inneren niedriger als im Äußeren, da die in den Leiter eindringenden Wechselfelder schon vor erreichen des Leiterinneren stark gedämpft werden ( $\sigma \gg 0 > 0!$ )

## Einfall auf Ebene Materialgrenzschicht

$\vec{H}_h(\vec{r}) = \hat{H}_{h0} e^{-jk_h \cdot \vec{r}}$  wird in  $\vec{H}_T(\vec{r}) = \hat{H}_{T0} e^{-jk_T \cdot \vec{r}}$  und  $\vec{H}_{D0} e^{jk_D \cdot \vec{r}}$  aufgeteilt (analog für  $\vec{E}_h(\vec{r})$ ) auf Grenzfläche hinlaufend

Bedingung für Phasenverlaufes  $\vec{n} \times \vec{k}_h = \vec{n} \times \vec{k}_T = \vec{n} \times \vec{k}_D$

$$\alpha_h = d_T \quad k_1 \sin \alpha_h = k_2 \sin \alpha_D$$

Stetigkeitsbedingung in Materialgrenzschicht:

$$(\vec{H}_h + \vec{H}_T) \times \vec{n} = \vec{H}_D \times \vec{n}$$

$$(\vec{E}_h + \vec{E}_T) \times \vec{n} = \vec{E}_D \times \vec{n}$$

Fall 1:  $\vec{E}_h \parallel \text{Einfallsebene}$ , dann ist  $\vec{H}_h \parallel \text{Grenzfläche}$

- transversal magnetisch,  $E$ -Welle ( $E \perp \text{Grenzschicht}$ )

Fall 2:  $\vec{E}_h \perp \text{Einfallsebene}$ , dann ist  $\vec{H}_h \parallel \text{Einfallsebene}$

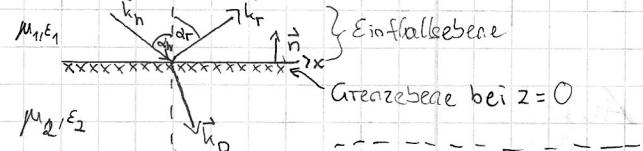
Berechnung der Feldamplitude: (Fall 1):

$$\vec{H}_{h0} = \hat{H}_{h0} \vec{e}_y; \quad \vec{H}_{T0} = \hat{H}_{T0} \vec{e}_y; \quad \vec{H}_{D0} = \hat{H}_{D0} \vec{e}_y$$

Stetigkeitsbedingung:  $\vec{H}_h - \vec{H}_T = \vec{H}_D$

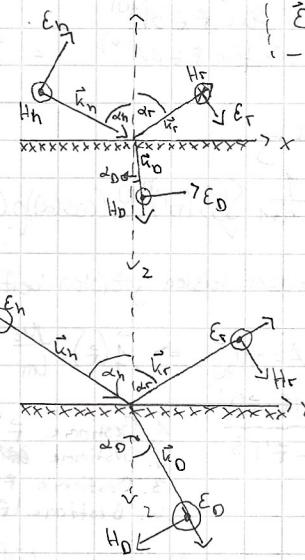
Kreuzprodukt  $\rightarrow Z_1 (\hat{H}_h \cos \alpha_h + \hat{H}_T \cos \alpha_T) = Z_2 \hat{H}_D \cos \alpha_D$

$$\frac{\hat{H}_T}{\hat{H}_h} = \frac{Z_2 \cos \alpha_D - Z_1 \cos \alpha_h}{Z_2 \cos \alpha_D + Z_1 \cos \alpha_h} = \frac{\hat{E}_T}{\hat{E}_h} = r_{||} \rightarrow \frac{\hat{H}_D}{\hat{H}_h} = \frac{Z_1 \cos \alpha_h}{Z_2 \cos \alpha_D + Z_1 \cos \alpha_h} = t_{H||}$$



$$\begin{aligned} \vec{E}_h &= Z_1 \vec{H}_h \times \vec{e}_{un} \\ \vec{E}_T &= Z_1 \vec{H}_T \times \vec{e}_{un} \\ \vec{E}_D &= Z_2 \vec{H}_D \times \vec{e}_{un} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_h &= \vec{k}_h / \mu_1 \omega i \kappa; \quad k_T = \vec{k}_T / \mu_1 \omega i \kappa \\ k_D &= \vec{k}_D / \mu_2 \omega i \kappa; \quad k_D = k_0 \vec{e}_y \\ Z_2 &= \frac{\mu_2}{\epsilon_2} \end{aligned}$$



## Abstrahlung elektromagnetischer Wellen im freien Raum

- zeit harmonische Felder mit Zeitabhängigkeit  $e^{j\omega t}$

! in Maxwell alle  $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$  und  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$   
-> auch in Potentialansätze und Eichungen

Helmholtz-Gleichung:  $\Delta \vec{A} + k_o^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_o$

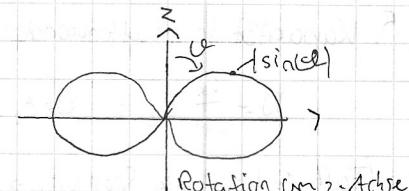
Lösung:  $\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{e^{-jk_o \vec{r} - \vec{r}'}}{4\pi r} \cdot \vec{j}_o(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \quad k_o = \frac{\omega}{c}$

Einfachster Fall: Abstrahlung einer Antenne durch  $\vec{j}_o(\vec{r}) = \vec{I}_o \Delta(\vec{e}_z) \delta(\vec{r})$  (Hertzscher Dipol)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{I}_o \Delta \mu_0 \frac{e^{-jk_o r}}{4\pi r} \vec{e}_z$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega (\vec{A}(\vec{r}) + \frac{1}{k_o^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}))$$

Charakteristik



## Elektromagnetische Wellenleiter und Leitungen

Untere Frequenz von Wellenleitern: Frequenz, ab der Wellenausbreitung möglich ist (z.B. Koaxialleiter: 0 GHz)

- bei Rechteckigen Wellenleitern: einige MHz

Wellentyp ohne untere Grenzfrequenz: TEM-Welle in Koaxialleiter (transversal elektrisch unabhängig)

- Anzahl d. Wellentypen in zylindrischen Leitern ist unendlich

Koaxialleiter:  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\hat{U}_o}{\ln \frac{D}{d}} \cdot \frac{1}{r} \vec{e}_r \cdot e^{-jk_r z}, \quad \vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{I}_o}{\ln \frac{D}{d}} \cdot \frac{1}{r} \vec{e}_r e^{-jk_r z} \quad \text{mit } \frac{\hat{U}_o}{\hat{I}_o} = Z_L = 60 \Omega \quad \left( \ln \frac{D}{d} \right)$

D = Außendurchmesser, d ist Innenradius

## Aufgaben 8

### 1) Aufteilung Greensche:

$$\text{geg: } -\operatorname{div}(\epsilon(\vec{r}) \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}')) = g(\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow \phi(\vec{r}) - \underset{\nu}{\iiint} g(\vec{r} - \vec{r}') \phi(\vec{r}') d\nu' = - \underset{\nu}{\iiint} \operatorname{div} [\epsilon(\vec{r}) \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}')] \phi(\vec{r}') d\nu'$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \text{ für } \vec{r} \in \partial V^{(0)} \quad \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \text{ für } \vec{r} \in \partial V^{(n)}$$

$$= \underset{\nu}{\iiint} \epsilon(\vec{r}) \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla' (\phi(\vec{r}')) d\nu' - \underset{\nu}{\iint} \epsilon(\vec{r}) \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \phi(\vec{r}') d\nu' - \underset{\nu}{\iint} \epsilon(\vec{r}) \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \phi(\vec{r}') d\nu'$$

$$\vec{n} \cdot \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\partial}{\partial n} (G(\vec{r}, \vec{r}')) = 0$$

### 2. Multipolentwicklung

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \underset{\nu}{\iiint} p_n(\cos(\alpha)) \rho(\vec{r}') d\nu' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \underbrace{\frac{1}{r} \underset{\nu}{\iiint} \rho(\vec{r}') d\nu'}_{\text{monopol}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \underset{\nu}{\iiint} \rho(\vec{r}') \cos(\alpha) d\nu'}_{\text{dipol}} \right]$$

Terme mit niedrigen Potenzen leisten größten Beitrag

$$3. \text{ Bio-Savart: } \Delta A = -\mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \underset{\nu}{\iiint} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\nu' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS$$

1. Bestimme  $\vec{r}'$  (Leiterschleifenvektor)
2. Bestimme  $dS$
3. Bestimme  $\vec{r} - \vec{r}'$
4. Bestimme  $|\vec{r} - \vec{r}'|^3$
5. Einsetzen und auflösen

$$\text{Herkunft: } \vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \underset{\nu}{\iiint} \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d\nu' = \operatorname{rot} (f(\vec{r}, \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}, \vec{r}')) = f \operatorname{rot} \vec{j} = \vec{j} \times \operatorname{grad} f = -\vec{j} \times \operatorname{grad} f$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} \underset{\nu}{\iiint} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\nu' \quad \text{für unendliche Linialadung: } \vec{j}(\vec{r}) \rightarrow \vec{J} \underset{A}{\iint} \vec{j} dS = I$$

$$\operatorname{grad} f = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Vektorpotential in großer Entfernung: Taylorentwicklung von Term im Integral von  $\vec{A}(\vec{r})$ .

$$f(\vec{r}') = f(\vec{r}_0) + \frac{\partial f(\vec{r}')}{\partial \vec{r}'} \Big|_{\vec{r}'=\vec{r}_0} (\vec{r}' - \vec{r}_0) + \dots$$

$$\rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} (\vec{r}' - \vec{r}_0) + \dots$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} I \left[ \int \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} dS + \int \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} (\vec{r}' - \vec{r}_0) dS \right]$$

$$\text{Monopol} \rightarrow 0$$

### 4. Wärmetransport

aus Bilanzgleichung  $\operatorname{div} \vec{j}_Q = 0$  (keine Quellen) folgt  $\frac{\partial}{\partial x} k(x) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = C_1 x + C_2$

Ursprung bei  $x=L$  setzen  $\rightarrow T(x)$  in dünner Schicht:  $T(x) = \frac{T_0 - T_1}{L} x + T_1$

Bedingungen:  $T$  stetig  $\rightarrow T(x_1+0^+) = T(x_1+0^-)$

$$\text{Wärmeleitungsgesetz: } \vec{j} = -k_B \frac{\partial T}{\partial x} (x_1 - \varepsilon) = -k_A \frac{\partial T}{\partial x} (x_1 + \varepsilon) = \vec{j} \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \Rightarrow \vec{j}_A = -k_A \frac{\partial T}{\partial x} = -k_A \frac{T_0 - T_1}{L} = \frac{T_1 - T_0}{L}$$

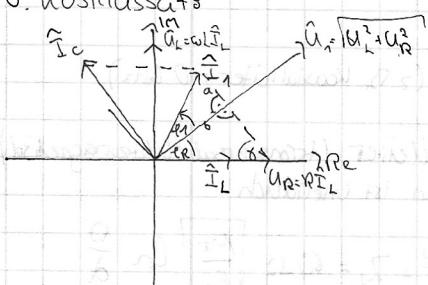
$$\vec{j}_{AB} = -k_B \frac{\partial T}{\partial x} = -k_B \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

### 5. Kapazität in Plattenkondensator

$$D = \frac{Q}{A} \vec{e}_2; \quad D = \epsilon_0 \epsilon \rightarrow \epsilon = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \vec{e}_2 \rightarrow U = \int_0^d \epsilon d\vec{r} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot d \rightarrow Q = \frac{\epsilon_0 A}{d} U$$

(Fall 1: konstante Spannung  $\rightarrow$  nur  $d$  ändert sich. Fall 2: konstante Ladung: Spannung verdoppelt sich (bei 2d))

### 6. Kosinussatz



$$I_1^2 = I_L^2 + I_R^2 - 2 I_L I_R \cos \gamma \quad \text{mit } \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi_R$$

$$\cos \gamma = \sin \varphi_R = \frac{I_L}{I_1} \quad \gamma = \arctan \left( \frac{a}{b} \right) \quad a = I_1 - I_L \sin \varphi_R$$

$$b = I_L \cos \varphi_R$$

Wiel viel Energie wir im zeitlichen Mittel im Verhältnis zu einstrahlender Welle transmittiert?  $\rightarrow \langle S_{\text{int}} \rangle$  mit  $\langle S_{\text{out}} \rangle$  vergleichen

$$\text{Orthogonalität d. Legendre-Polynome: } \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos(\omega)) P_m(\cos(\omega)) \sin \omega d\omega = \begin{cases} 0 & l \neq m \\ 2 & l = m \end{cases}$$

$$[\rho] = \frac{As}{m}, [\varepsilon] = \frac{V}{m}, [\vec{B}] = \frac{As}{m^2}, [\vec{H}] = \frac{A}{m}$$

$$[\vec{J}] = \frac{A}{m}, [\vec{E}] = \frac{V}{m^2}, [\vec{A}] = \frac{A}{m}$$

$$[\vec{E}_0] = \frac{C}{Vm} = \frac{A}{m}$$

Feldlinien von + nach -

	Elektrostatik	stationäre elekt. Strömungen	Magnetostatik	stationärer Wärmefluss
<b>Kontinuumsdarstellung</b>				
Korrespond. Feldgrößen	$(\vec{D}, \varepsilon, \vec{E})$	$(\vec{j}, \sigma, \vec{E})$	$(\vec{B}, \mu, \vec{H})$	$(\vec{J}_Q, \kappa, -\nabla T)$
(Cont)	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$	$\operatorname{div} \vec{j} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{J}_Q = \Pi_Q$
(Pot)	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} (= 0)$	$\operatorname{rot} \nabla T = 0$
treibende Kraft	$\vec{E} = -\nabla \Phi_{\text{el}}$	$\vec{E} = -\nabla \Phi_{\text{el}}$	$\vec{H} = -\nabla \Phi_{\text{mag}}$	$-\nabla T$
Flussgröße	$\vec{D} = -\varepsilon \nabla \Phi_{\text{el}}$	$\vec{j} = -\sigma \nabla \Phi_{\text{el}}$	$\vec{B} = -\mu \nabla \Phi_{\text{mag}}$	$\vec{J}_Q = -\kappa \nabla T$
(Pot) in (Cont)	$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \Phi_{\text{el}}) = -\rho$	$\operatorname{div}(\sigma \nabla \Phi_{\text{el}}) = 0$	$\operatorname{div}(\mu \nabla \Phi_{\text{mag}}) = 0$	$\operatorname{div}(\kappa \nabla T) = -\Pi_Q$
<b>Netzwerkdarstellung</b>				
„Across“-Größe	elektrische Spannung $U$	elektrische Spannung $U$	magnetische Spannung $V_m$	Temperaturgefälle $\Delta T$
	$U = \Phi_{\text{el}}^+ - \Phi_{\text{el}}^-$	$U = \Phi_{\text{el}}^+ - \Phi_{\text{el}}^-$	$V_m = \Phi_{\text{mag}}^+ - \Phi_{\text{mag}}^-$	$\Delta T = T_{\text{heiss}} - T_{\text{kalt}}$
„Through“-Größe	dielektrischer Fluss	elektrischer Strom	magnetischer Fluss	Wärmestrom
	$\Phi_D = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{a}$	$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{a}$	$\Phi_B = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{a}$	$\dot{Q} = \iint_A \vec{J}_Q \cdot d\vec{a}$
lineares Materialgesetz	$U = R_D \Phi_D$	$U = R_{\text{el}} I$	$V_m = R_m \Phi_B$	$\Delta T = R_{\text{th}} \dot{Q}$
Kirchhoffsches Netzwerk	dielektrisches Netzwerk	elektrisches Netzwerk	magnetischer Kreis	thermisches Netzwerk
rot $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	besagt, dass ein zeitabhängiges $B$ -Feld ein elektrisches Feld $E$ induziert. Wegen $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ist dieses quellenfrei, d.h. es ist ein reines Wirbelfeld.			

a)  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  besagt: Das elektrische Feld verursacht im dielektrischen Medium eine (dynamische) elektrische Polarisierung, die sich dem elektrischen Feld überlagert.

b)  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  besagt: Das elektrische Feld erzeugt einen Teilchenstrom.  
Wegen  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  ist dieser quellenfrei, d.h.  $\vec{j}$  ist ein Wirbelstrom.

Dieser entzieht dem elektromagnetischen Feld Energie mit der Verlustleistungsdichte  $p_{\text{Verlust}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma |\vec{E}|^2 > 0$ , wodurch das elektromagnetische Feld gedämpft wird.

(iii)  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  besagt: Das zeitabhängige  $\vec{D}$ -Feld und ggf. der Wirbelstrom  $\vec{j}$  erzeugen ein Magnetfeld  $\vec{H}$ .

Wegen  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$  ist dieses quellenfrei.

(iv)  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  besagt: Das Magnetfeld  $\vec{H}$  verursacht im Medium eine Magnetisierung, die sich dem  $\vec{H}$ -Feld überlagert.

Das resultierende  $\vec{B}$ -Feld wiederum geht in das Induktionsgesetz (i) ein, wodurch die Schleife der felderzeugenden Elementarprozesse selbstkonsistent geschlossen wird.