Zeitkontinuierlich

$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,v(t)$

$y(t) = \underline{c}^T x(t) + d\,v(t)$

$h(t) = \underline{c}^T \exp(\underline{A}t)\underline{b} + d\,\delta(t)$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{V(p)} = \underline{c}^T(p\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{b} + d = H(z)$$

$$= \frac{\beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} \dots + \beta_n}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

$(\beta_0 = d)$ $\quad p_{\infty_i} \Rightarrow \lambda_i$

$\mathrm{Re}\{p_{\infty_i}\} < 0$

$x(t) = x_{\text{zero input}}(t) + x_{\text{zero state}}(t)$

$= \exp(\underline{A}(t-t_0))x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(\underline{A}(t-t'))\underline{b}\,v(t')\,dt'$

$y(t) = y_{\text{zero input}}(t) + y_{\text{zero state}}(t)$

$= \underline{c}^T x_{\text{zero input}}(t) + (h * v)(t)$

$= \sum_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i t)\, y_{0i}$

Parallelform:

- Nenner muss ~~…~~ größer als Zähler sein! Partialbruchz.!
- $H(p) = \sum_{i=1}^{n} H_i(p) + d$

Kaskadenform:

$$H(p) = \beta_0 \frac{\prod (n - n_{0i})}{\prod_{i=1} (p - p_{\infty i})} = \prod_{i=1}^{n} H_i(p)$$

- Einzelterme maximal 2. Ordnung
- Nennergrad $\geq$ Zählergrad

--> Kanonische Steuerform $= (\text{Kanonische Beobachterform})^T$

besser ↓

- Sensitivität: Kanonisch < Parallel & Kaskad (Rate der Abweichung der erwünschten Eigenschaften. Schlechte Sens < gute Sen.)

Normalform (EVD)

$\dot{\xi}(t) = \underline{\Lambda}\,\xi(t) + \underline{\mu}\,v(t)$

$y(t) = \underline{\eta}^T \xi(t) + d\,v(t)$

$\underline{A} = \underline{Q}\,\underline{\Lambda}\,\underline{Q}^{-1}$

$\underline{\eta}^T = \underline{c}^T \underline{Q}$

$\underline{\mu} = \underline{Q}^{-1}\underline{b}$

$\xi(t) = \underline{Q}^{-1} x(t)$

$\underline{Q} = [a_1, a_2]$ Eigenvektoren

$(12x - 5y = 0 \to a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix})$

$(\underline{A} - \lambda\underline{I})q = 0$

(Trans allg. $\underline{A}_{neu} = \underline{T}^{-1}\underline{A}\,\underline{T}$)

Transponieren

1

$V(p) \to Y_T(p)$

$Y(p) \to V_T(p)$

$\bullet \to \oplus$, $\oplus \to \bullet$

- kann $H(p)$ vereinfachen
- Vektoren & Matrizen werden Transponiert $\boxed{H(z) = H^T(z)}$

Übertragungsverhalten:

$\lim H(j\omega)$
$\omega \to 0$
$\omega \to \infty$
$\omega \to \sqrt{\dots}$

$\boxed{\begin{aligned} \underline{A}' &= \underline{A}^T \\ \underline{b}' &= \underline{c}^T \end{aligned}}$

$\to \mathcal{C}(b', A') = [b', A'b'] = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix}^T = \mathcal{O}(c^T, A)$

Standardapproximation

von TP zu:

HP: $p \leftrightarrow \frac{1}{p}$ $\qquad a = \frac{1}{B\omega}$

Bandpass: $p \to a(p + \frac{1}{p})$

Bandsperre: $p \to (a(p + \frac{1}{p}))^{-1}$

Umwandlung zu willkürlichen

- Grenzfrequenzen: $p \to \frac{p}{\omega_{grenz}}$

$(\psi = j\tan(\frac{\omega T}{2}) = jp = \tanh(\frac{pT}{2}))$

TP -> HP

$\boxed{\begin{aligned} \hat{H}(\hat{p}) &= H_{TP}(\tfrac{1}{\hat{p}}) \\ H_{HP}(p) &= \hat{H}(\tfrac{p}{\omega_{grenz}}) \end{aligned}}$

$\hat{p} = \frac{p}{\omega_{grenz}}$ ~~ein freq…~~

--> alle Variablen mit $\frac{1}{\omega_{grenz}}$ normalisieren, um dann am Ende wieder zurück zu wandeln.

~~ω_{pass}~~

Bilineartransformation

$\varphi_{gr} = \tan(\frac{\omega_{gr} T}{2})$ $\qquad \boxed{\psi = \frac{z-1}{z+1}}$ $\qquad (z = e^{pT})$ $(p = j\omega)$

$\psi = \varepsilon + j\varphi \qquad p = \sigma + j\omega$

$$\boxed{H_{neu}\left(\frac{\psi}{\varphi_{gr}}\right) = H_{\text{Original}}\left(\frac{1}{\varphi_{gr}} \frac{z-1}{z+1}\right) \Rightarrow H_{neu}(z)}$$

Richardst. liefert Beziehung zw. complexen Freq. p und Frequenzen ψ

Butterworth: maximal Flach im Passband

Chebyshev: Abweichung von $|H(j\omega)|$ zum gewünschten Wert ist im Passband minimiert. Konstante Welligkeit im Passband

Cauer: konstante Welligkeit in Pass- & Stopband

Bessel: möglichst linearer Phasenverlauf im Passband $\equiv$ möglichst konstante Gruppenlaufzeit.

Berechnung der Impulsantwort

$H(z)$ in h zurücktransformieren

$x[k] = c \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \delta[k-i]$

$(h[k] + 2h[k-1] = \delta[k] + 2\delta[k-1] \Rightarrow$

$h_1[k] + 2h_1[k-1] = \delta[k]$
$h_2[k] + 2h_2[k-1] = 2\delta[k-1]$

da 2 Impulse rechts, ist $x[k]$ überlagert

$(x[k] = x_1[k] + x_2[k])$ $\quad h_1[0] = c_1$, $h_2[0] = c_2$

Zeitdiskret

1. Bandlimitation um spektrale Interferenzen zu vermeiden (Nyquist).
2. D/A Wandler

$H(z) = H(e^{j\omega T})$

$$= \frac{\beta_0 z^n + \beta_1 z^{n-1} + \dots + \beta_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

$h[k] = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{c}^T \underline{A}^{i-1} \underline{b}\,\delta[k-i] + d\,\delta[k]$

$y[k] + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y[k-i] = \sum_{i=0}^{n} \beta_i v[k-i]$

$|z_{\infty_i}| < 1$

$E = \sum_{i=0}^{\infty} |h[k]|^2$

FIR Systeme

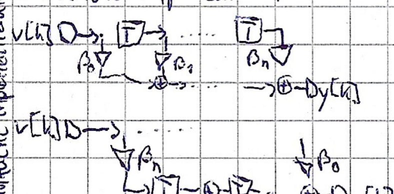
$\forall \alpha_i = 0$, $\forall i: z_{\infty_i} = 0$

$y[k] = \sum_{i=0}^{n} \beta_i v[k-i]$

$H(z) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i z^{-i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i z^{n-i}}{z^n}$

endliche Impulsantwort

einfache Implementierung, immer stabil



Fensterung

Impulsantwort mit endlicher Dauer mit Fenstern Samplen

- zu Grad x: h[k] nur bis k = x

liefert optimalen Koef um Anforderungen an Frequenzgang zu erfüllen

Bsp für n unger. $\beta_i = \beta_{n-i}$

Least Squares Methode

$\underline{t}(\omega_k) = [2\cos(\frac{n}{2}\omega_k T), 2\cos((\frac{n}{2} - 1)\omega_k T), \dots, 2\cos((\frac{n}{2}))]^T$

$\Theta = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N]^T$

$\underline{s} = [H'(\omega_1), H'(\omega_2), \dots, H'(\omega_M)]^T$ $\quad H'(\omega_m) = |H(e^{j\omega_m})|$

$\to \underline{T}\,\underline{\Theta} = \underline{s}$ mit $\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{t}^T(\omega_1) \\ \vdots \\ \underline{t}^T(\omega_M) \end{bmatrix}$

- Case I: $M = N+1$
  $\to$ eindeutige Lösung $\underline{\Theta} = \underline{T}^{-1}\underline{s}$
- Case II: $M > N+1$ (Hohe Matr.) (Lsg. wird geschätzt)
  $\underline{\Theta}_{LS} = \arg\min_{\Theta} \|\underline{T}\Theta - \underline{s}\|_2^2 = (\underline{T}^T\underline{T})^{-1}\underline{T}^T\underline{s}$
- Case III: $M < N+1$ (breites T) (unendliche Lsg.)
  $\underline{\Theta}_{LS} = \arg\min \|\Theta\|_2^2$ n.B. $\underline{T}\,\underline{\Theta} = \underline{s}$
  $\to \underline{\Theta}_{LS} = \underline{T}^T(\underline{T}\,\underline{T}^T)^{-1}\underline{s}$

Linearphasige FIR Filter

- **n ungerade**, $N = \frac{n-1}{2}$, $\beta_i = \beta_{n-i}$:

$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega\frac{n}{2}T} \sum_{i=0}^{N} 2\beta_i \cos((\frac{n}{2} - i)\omega T) =$

$= \sum_{i=0}^{N} \beta_i (z^{-i} + z^{-(n-i)}) = z^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=0}^{N} \beta_i (z^{\frac{n}{2}-i} + z^{-(\frac{n}{2}-i)})$

$= \sum_{i=0}^{N} \beta_i z^{-i} + \sum_{i=0}^{N} \beta_i z^{-(n-i)} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \beta_i z^{-i} + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} \beta_i z^{-i}$

- **n ungerade**, $N = \frac{n-1}{2}$, $\beta_i = -\beta_{n-i}$

$H(e^{j\omega T}) = e^{j(-\omega\frac{n}{2}T + \frac{\pi}{2})} \sum_{i=0}^{N} 2\beta_i \sin((\frac{n}{2} - i)\omega T)$

$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ $\quad \varphi(\omega)$ ist lineare Funktion in f

- **n gerade**, $N = \frac{n}{2} - i$, $\beta_i = \beta_{n-i}$ $\quad \frac{n}{2}+1$ Maxima

$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega\frac{n}{2}T}(\beta_{\frac{n}{2}} + \sum_{i=0}^{N} 2\beta_i \cos((\frac{n}{2} - i)\omega T))$

- **n gerade**, $N = \frac{n}{2} - i$, $\beta_i = -\beta_{n-i}$, $\beta_{\frac{n}{2}} = 0$

$H(e^{j\omega T}) = e^{j(-\omega\frac{n}{2}T + \frac{\pi}{2})} \sum_{i=0}^{N} 2\beta_i \sin((\frac{n}{2} - i)\omega T)$

$= \sum_{i=0}^{N} \beta_i (z^{-i} - z^{-(n-i)})$

- Wie Prüfen ob Linearphasig:
  $\to h[k]$ oder Nullstellen symmetrisch oder phase muss linear sein!

$\to \boxed{H(e^{j\omega T}) = e^{j\varphi(\omega)} A(\omega)}$

$\to$ Konstante Gruppenlaufzeit aller Fälle:

$T_{gr} = -\frac{\partial\varphi(\omega)}{\partial\omega} = \frac{nT}{2}$

2

Remez Algorithmus

$\underline{\Theta}_{opt} = \min_{\underline{\Theta} \in \mathbb{R}^m} \max_{\omega \in [0, \frac{\pi}{T}]} \underbrace{|W(\omega)(H'(\omega) - D(\omega))|}_{\Gamma(\omega)}$

Minimierung des gewichteten maximalen Fehlers

$D(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \le \omega < \omega_0 \\ 0 & \omega_0 \le \omega \le \frac{\pi}{T} \end{cases}$ Vorsicht! TP oder HP!

$W(\omega) = \begin{cases} W_d & 0 \le \omega \le \omega_{durch} \\ 0 & \omega_d \le \omega < \omega_{stop} \\ W_s & \omega_{stop} \le \omega \le \frac{\pi}{T} \end{cases}$

Eigenschaften von $\Gamma(\omega)$:

- $|\Gamma(\omega)|$ hat $N+2$ Maxima in $\Omega \in [0, \frac{\pi}{T}]$
  mit $N = \frac{n-1}{2}$, $n \hat{=}$ Systemgrad ($N = \frac{n}{2} - 1$)[gerade]
- alle Maxima haben den selben Wert
- Vorzeichen der Maxima alterniert
  $\Gamma(\Omega_i) = s(-1)^i \Gamma_{max}$

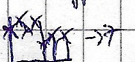
$\rightarrow$ Lösen von $W(\Omega)(H'(\Omega) - D(\Omega)) = s(-1)^i \Gamma_{max}$

Minimalphasige FIR\Allpass

- $\forall i : |z_{0,i}| \le 1$ (im Einheitskreis)

$H_{Ap}(z) = K \frac{z - \frac{1}{z_0^*}}{z - z_0}$, $K = |z_i|$, $|H_{Ap}(1)| \overset{!}{=} 1$

- $|H_{Ap}(e^{j\omega T})|^2 = K^2 \frac{(e^{j\omega T} - \frac{1}{z_0^*})(e^{-j\omega T} - \frac{1}{z_0})}{(e^{j\omega T} - z_0)(e^{-j\omega T} - z_0^*)} = K^2 \frac{1}{|z_0|^2} = C^2$
- nicht realisierbar, da instabil wegen Polstelle $|z_i| > 1$. Aber in Kaskade schon realisierbar aufgrund der Pol-Nullstellen-Kompensation
- $H(z) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i z^{-i} = z^{-n} \beta_0 \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$
- Gruppenlaufzeitminimierung



- Remez minimiert durch die Wahl der Filterkoef. $\underline{\Theta}$ den betragsmäßig größten Fehler $\Gamma(\omega)$ in Frequenzbereich $0 \le \omega \le \frac{\pi}{T}$

IIR-Systeme

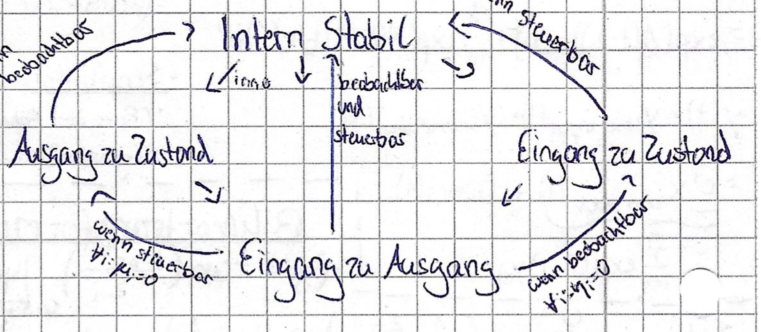
für irgendein $\alpha_i \neq 0$ wird die Impulsantwort unendlich lang

Transformation: TP nach

- HP: $z_{LP} \rightarrow -z_{HP}$, $f_{HP} = f_{LP} + \frac{1}{2T}$
- BP: $z_{LP} \rightarrow -z_{BP}^2$, $f_{BP} = f_{LP}/2 + 1/4T$
- BS: $z_{LP} \rightarrow z_{BS}^2$, $f_{BS} = f_{LP}/2$

- wenn ein Pol eines Teilsystems nicht stabil ist, dann ist ganzes System nicht intern stabil

$\left.\begin{array}{l} x[k] = \xi_0 \lambda^k \underline{q} \\ x(t) = \xi_0 \exp(\lambda t) \underline{q} \end{array}\right\} \lim_{k \to \infty} \|x[k]\|_2^2 = |\xi_0|^2 |\lambda^k|^2 \|\underline{q}\|_2^2$



Stabilität

Beobachtbarkeit

$\det(\underline{O}(\underline{c}^T, \underline{A})) \neq 0$, $\underline{O}(\underline{c}^T, \underline{A}) = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$

$\rightarrow x[0] = \underline{O}(\underline{c}^T, \underline{A})^{-1} y[0]$

von Ausgang $y[k]$ kann eindeutig auf Zustand $\underline{x}[k]$ geschlossen werden.

Steuerbarkeit

$\det(\underline{C}(\underline{b}, \underline{A})) \neq 0$, $\underline{C}(\underline{b}, \underline{A}) = [\underline{b}, \underline{A}\underline{b}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{b}]$

$\rightarrow v[k] = \underline{C}(\underline{b}, \underline{A})^{-1} x[k]$

gewünschter $x[k]$ kann durch $v[k]$ erzwungen werden

Externe Stabilität

$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < M < \infty$

$\rightarrow \lim_{k \to \infty} h[k] = 0$

Asymptotische Stabilität

- Intern: $\forall i : |\lambda_i| < 1$
- alle Eigenwerte stabil
- $\lambda_i = z_{\infty,i} / p_{\infty,i}$
  $\rightarrow$ für $v[k] = 0$

Ausgang-zu-Zustand

- für $|\lambda_i| \ge 1 \Rightarrow \eta_i = 0$
- mit $\underline{\eta}^T = \underline{c}^T \underline{Q}$ ($Q = [a_1, a_2]$)
  $\rightarrow$ i-te Spalte von $\underline{O}(\underline{c}^T, \underline{A})$ gleich 0 und somit system Beobachtbar (O ist dann Singulär)

Eingang zu Zustand

- für $|\lambda_i| \ge 1 \Rightarrow \mu_i = 0$
- mit $\underline{\mu} = \underline{Q}^{-1} \underline{b}$
  $\Rightarrow$ i-te Zeile von $C(\underline{b}, \underline{A})$ gleich 0 und somit Singulär und somit Steuerbar

Eingang zu Ausgang

- für $|\lambda_i| \ge 1 \Rightarrow \eta_i \mu_i = 0$
- System muss vollständig beobachtbar und steuerbar sein um auch intern stabil zu sein
  ($\rightarrow$ Grad System = Grad Nenner)
- $|\lambda| < 1$ sind Pole der ÜF H

Steuernormalform

wenn $\underline{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \dots & \dots & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{bmatrix}$

dann $\underline{\Theta}^T = (\underline{\alpha}^T - \underline{\gamma}^T)$

Diagonalform

wenn in Normalform, wie nach EW:

$\alpha(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)$ | $\gamma(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \kappa_i)$

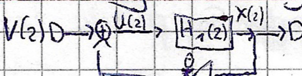
$\rightarrow \Theta_\ell = -\frac{1}{\mu_\ell} \frac{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_\ell - \kappa_i)}{\prod_{i=1, i \neq \ell}^{n} (\lambda_\ell - \lambda_i)}$

$\rightarrow \underline{\Theta}^T = \underline{\Theta}_{diag}^T \underline{T}^{-1} = [\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots] \underline{T}^{-1}$

gut wenn man nur einzelne Eigenwerte ändern will. (alle andere Θ_ℓ sind dann 0)

$\rightarrow \Theta_\ell = -\frac{1}{\mu_\ell} (\lambda_n - \kappa_n)$

Stabilisierung durch Ausgangsrückführung



$H(z) = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner} - \text{Zähler} \cdot \Theta}$

nur für Systeme ersten Grades ($\frac{1}{z-3}$)

Zustandsrückführung

Ist Polynom:

$\alpha(z) = \det(z\underline{I} - \underline{A}) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n \rightarrow \underline{\alpha}^T = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$

Soll Polynom:

$\gamma(z) = z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \dots + \gamma_n \overset{!}{=} \det(z\underline{I} - \underline{A} - \underline{b}\underline{\Theta}^T) \rightarrow \underline{\gamma}^T = [\gamma_1, \dots, \gamma_n]^T$

$\rightarrow \underline{\Theta}^T = (\underline{\alpha}^T - \underline{\gamma}^T) \underline{T}(\alpha)^{-1} \underline{C}(\underline{b}, \underline{A})^{-1} \rightarrow$ System muss vollst. steuerbar sein

$\underline{T}(\alpha)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_1 \\ \underline{0} & & & 1 \end{bmatrix}$

$\gamma(z) = (z - z_{\infty,1})(z - z_{\infty,2}) \dots$ gewünschte EW einsetzen

1. d abspalten: $H(z) = H'(z) + d$
2. $H'(z)$ mit fehlenden EW bzw. Polen ergänzen, um vollen Grad zu erlangen ($H'(z) \cdot \left(\frac{z - z_\infty}{z - z_\infty}\right)$)
3. Nenner ~~durch~~ von $H'(z)$ durch γ ersetzen
   $\rightarrow$ d mit in Bruch ziehen

Wichtig: - Zählergrad < Nennergrad (deshalb d abspalten)
- höchster z Grad in Nenner muss 1 haben (nach 2.)

- neue Zustandsmatrix vom Gesamtsystem $A' = A + \underline{b}\underline{\Theta}^T$
- eigentlich betrachten wir d nicht ($\Rightarrow d = 0$), da d nicht die Stabilität beeinflusst.

$\underline{x}[k+1] = \cancel{\underline{A}\underline{x}[k] + \underline{b}(v[k]} (\underline{A} + \underline{b}\underline{\Theta}^T)\underline{x}[k] + \underline{b}v[k]$
$\underline{y}[k] = \underline{c}^T \underline{x}[k] + dv[k]$

Wenn $\underline{\Theta}^T = [0, \frac{1}{8}]$, dann $x_2[k]$ in Bild zum Eingang mit $\frac{1}{8}$ rückführen. Aber nicht zu Durchgriff!

Asymptotischer Beobachter

paralleles System erstellt Schätzfolge $\hat{x}[k]$, die gegen $x[k]$ konvergiert

Fehlerfolge $\tilde{x}[k] = x[k] - \hat{x}[k] = A^k \tilde{x}[0]$ konvergiert jedoch nicht gegen Null, wenn System bereits instabile EW hat.

--> Behandlung durch Rückführung des Ausgangsfehlers

$\rightarrow \tilde{x}[k+1] = (A + f c^T)\tilde{x}[k]$

$f = Q(c^T, A)^{-1} T(k)^{T-1} \cdot (\alpha - \gamma)$

$(Q = Q)$

FIR Observer: $\chi(z) = z^n$, da $H(z) = I$.

Zustandsraum Kompensator

$\tilde{x}[k] = (A + f c^T)\tilde{x}[0]$

$H(z) = c^T(zI - A - b\theta^T)^{-1} b$

Regler und Beobachter können unabhängig voneinander designed werden, da $H(z)$ nicht von f und $\tilde{x}[k]$ nicht von θ abhängt.

$\alpha_{gesamt}(z) = \det(zI - A - f c^T)\det(zI - A - b\theta^T)$

3

$E[Y|X_1] = E[\ldots|X_1]$ nur den Teil von Y betrachten der von X_1 abhängt

Optimierung mit Nebenbedingung

1) Lagrange: $L(x, \lambda) = f(x) + 2\mathrm{Re}\{\lambda^H g(x)\}$

$= f(x) + \lambda^H g(x) + g(x)^H \lambda$

2) $\frac{\partial}{\partial x^*} L(x, \lambda)$

3) $x(\lambda)$ in NB $g(x)$, nach λ umformen

4) λ in $x(\lambda)$ einsetzen

Statistische Signalverarbeitung

$f_X(x, \sigma_x^2) = \prod_{i=1}^{N} f_{X_i}(x_i; \sigma_x^2) = \frac{1}{\pi^N \sigma_x^{2N}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i|^2}{\sigma_x^2}\right)$ für $X \in \mathbb{C}^N$

$X = [X_1, \ldots, X_N], X_i \sim N_c(0, \sigma_x^2)$

$f_{X_i} = \frac{1}{\pi \sigma_x^2} \exp\left(-\frac{|x_i|^2}{\sigma_x^2}\right) = f_{X_i}(x_i; \sigma_x^2)$

$C_N = C_N^{-1}$ Immer Annehmen $\rightarrow C_N^H = C_N$

$C_1 = E[(1 - E[1])(1 - E[1])^H]$

Lineares Gaußmodell

$\theta \Rightarrow \triangleright \rightarrow \oplus \Rightarrow X = H\theta + N$, $H \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\pi^m \det(C_X)} \exp(-(x - H\theta)^H C_N^{-1}(x - H\theta))$

$= \frac{1}{\ldots} \underbrace{\exp(-x^H C_N^{-1} x)}\exp(\underbrace{x^H C_N^{-1} H}\theta + \theta^H \underbrace{H^H C_N^{-1} x}_{g(x)} - \theta^H H^H C_N^{-1} H\theta)$

$\rightarrow f_X(x; \theta) = a(x)\, b(g(x), \theta)$

$\rightarrow t = g(x)$

$T = H^H C_N^{-1} X$ suffizient

Matched Filter

Jede Kombi $G = A^{-1} G_{MF}$ ist wieder suffizient

Linearer Gauß-FIR-Kanal

$s[k] \rightarrow \boxed{h[k]} \rightarrow \oplus \rightarrow X[k]$, $\uparrow N[k]$

$X[k] = (h * s)[k] + N[k] = \sum_{i=0}^{K} h_i s[k-i] + N[k]$

$X[k] = h^T s[k] + N[k]$ mit $s[k] = [s[k], \ldots, s[k-K]]^T$

(natürlich auch mehrfach möglich $\rightarrow h_i[k] = \sum_{m=0}^{M} h_{i,m} s[k-m]$)

$L+1$ aufgenommene Ausgangswerte $(L \geq K)$

Faltungsmatrix, wenn: auf jeder Diagonalen gleiche Filterkoeffizienten oder Nullen

$X[k] = \begin{bmatrix} X[k] \\ \vdots \\ X[k-L] \end{bmatrix} = H\, s[k] + N[k]$

$H = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \ldots & h_K & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & h_0 & \ldots & h_{K-1} & h_K & & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 \\ 0 & & & h_0 & \ldots & & h_K \end{bmatrix}$, $s[k] = \begin{bmatrix} s[k] \\ \vdots \\ s[k-L-K] \end{bmatrix}$, $N[k] = \begin{bmatrix} N[k] \\ \vdots \\ N[k-L] \end{bmatrix}$

N Skalare z.B. bei M Variablen $\rightarrow M \geq N$, $w_{i,opt} \in \mathbb{C}^M$

$H \in \mathbb{C}^{(L+1)\times(K+L+1)}$, $s \in \mathbb{C}^{(K+L+1)\times 1}$, $N \in \mathbb{C}^{(L+1)\times 1}$

Ziel: Schätzen der Sequenz $s[k]$. Aber $s[k]$ unendlich lang

Es gilt zu lösen:

$f_{X[k]}(x; \theta) = f_{N[k]}(x - H s[k])$ wenn $\theta = s[k-d] = e_{d+1}^T s[k]$ die Schätzung ist

$= \frac{1}{\pi^{L+1}\det(C_N)} \exp(-(x - H s[k])^H C_N^{-1}(x - H s[k]))$

$\rightarrow T[k] = e_{d+1}^T H^H C_N^{-1} X[k] = g_{MF}^T X[k]$ wenn $k \leq d \leq L$

$g_{MF}^T = \frac{1}{\sigma_N^2}[h_K^*, \ldots, h_0^*] \rightarrow g_{MF}[k] = \frac{1}{\sigma_N^2} h^*[d-k]$

stellt sicher, dass Ausgangs-Signal wenn es kein Rauschen gibt

Maximum Likelihood Schätzung

$\hat{\theta}_{ML} = \arg\max_\theta (f_X(\hat{x}; \theta))$ $\rightarrow \ln(f_X(\hat{x}; \theta))$

$= \arg\min(-L(\theta; \hat{x}))$

Bei Linearen Gauß:

$\hat{\theta}_{ML} = (H^H C_N^{-1} H)^{-1} H^H C_N^{-1} x$

$E[\hat{\theta}_{ML}] = E[\ldots X] = E[\ldots(H\theta + N)]$

$= \theta$

$\rightarrow$ ML ist erwartungstreu

$\hat{\theta}_{ML} = \theta + N_{ML}$

$C_{N_{ML}} = (H^H C_N^{-1} H)^{-1}$

Maximum A-Posteriori Schätzung (MAP)

θ ist zufällig $\rightarrow \Theta$ mit PDF $f_\Theta(\theta)$

$\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_\theta (f_{X,\Theta}(\hat{x}, \theta))$

$= \arg\max_\theta (f_X(\hat{x}; \theta) f_\Theta(\theta))$

mit $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\pi^n \det(C_\Theta)} \exp(-\theta^H C_\Theta^{-1} \theta)$

$\Rightarrow L(\theta; x) = -(x - H\theta)^H C_N^{-1}(x - H\theta) - \theta^H C_\Theta^{-1}\theta + \gamma$

$\hat{\theta}_{MAP} = (H^H C_N^{-1} H + C_\Theta^{-1})^{-1} H^H C_N^{-1} x$

$\neq \Theta + N_{MAP}$

Lineare Schätzung

Annahme: Systemmodell & Schätzer sind linear

Linearer Schätzer G liefert:

$\hat{\Theta} = GX = G\theta + GN$

- C_N bekannt & $E[N] = 0$.

→ BLUE

minimiert die Varianz des Schätzers mit der Bedingung der Erwartungstreue

$G_{BLUE} = \arg\min_G \mathrm{var}[\hat{\Theta}]$ u.d.N. $E[\hat{\Theta}] = \Theta$ bzw. $GH = I$

$= \arg\min_G \mathrm{spur}(G C_N G^H)$ u.d.N. $\uparrow$ zero forcing Bed.

$G_{BLUE} = (H^H C_N^{-1} H)^{-1} H^H C_N^{-1}$ $= \hat{\theta}_{ML}$ bei linear

$S = GX = G_{BLUE} S + G_{BLUE} N = S + G_{BLUE} N$

Least-Squares-Schätzung

$\hat{\theta}_{LS} = \arg\min_\theta \|x - H\theta\|_2^2 = (H^H H)^{-1} H^H x$

für $C_N = \sigma_N^2 I$: $\hat{\theta}_{LS} = \hat{\theta}_{ML}$

$\hat{\theta}_{LS} = \Theta + N_{LS}$

Mean Minimum Mean-Square Estimator

$MSE = var[\varepsilon] = E[\|\Theta - \hat{\Theta}\|_2^2]$

$= \text{spur}\left(E[(\Theta - GH\Theta - GN)(\cdot)^H]\right)$

$G_{MMSE} = \arg\min_G MSE$

$= (H^H C_N^{-1} H + C_\Theta^{-1})^{-1} H^H C_N^{-1} = \hat{\Theta}_{MAP}$ für linear Gauß

für $C_\Theta = \sigma_\Theta^2 I$: $\lim_{\sigma_\Theta^2 \to 0} G_{MMSE} = 0$ | $\lim_{\sigma_\Theta^2 \to \infty} G_{MMSE} = G_{BLUE}$

minimiert mittleren quadratischen Fehler

Quantisierer

$Q(\hat{s}_{linear}) = \arg\min_{s \in A^n} \|\hat{s}_{linear} - s\|_2^2$

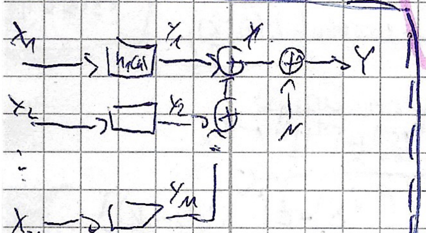
$= [Q(\hat{s}_{linear,1}), Q(s_{linear,2}), \dots, Q(s_{linear,n})]^T$

mit $Q(s_{linear,i}) = \arg\min_{s_i \in A} \|\hat{s}_{linear,i} - s\|_2^2$

Wenn im ML + BLUE Fall $H^H C_N^{-1} H$ diagonal, dann wird ML metrik zu:

$\hat{s}_{ML} = \arg\min(\dots) = Q(\hat{s}_{BLUE})$

$\sum_{i=1}^{n} d_i |\hat{s}_i - s_i|^2 \to \hat{s}_i = \arg\min_{s \in A} d_i |\hat{s}_i - s|^2$



dann: $(h_i * x_i)[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_i[l] x_i[k-l]$

und dann: $= \sum_{l=0}^{L-1} h_i[l] x_i[k-l]$

$Y_i[0] = [h_i[0], 0, \dots, 0] X_i$

$Y_i[B-1] = [h_i[B-1], h_i[B-2], \dots, h_i[0]] X_i$

$\to H_i = \begin{bmatrix} h_i[0] & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ h_i[B-1] & \cdots & h_i[0] \end{bmatrix}$

$Y = \sum H_i X_i + N = \underbrace{[H_1, H_2, \dots, H_M]}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_M \end{bmatrix}}_{X} + N$

Korrelationsmatrix: $R_X = E[XX^H]$ über

$C_X = E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^H]$

$E[X \mu_X^H] = E[X] \mu_X^H$

$\hat{X}_n = e_n^T W (HX + N) = w_n^H H X + w_n^H N$

wenn $W = [w_1, w_2, \dots, w_{MB}]^H$

→ Symmetrische Matrizen sind Hermitesch → $C_N = C_N^H$, $R_X = R_X^H$

MIMO-Detektion

$s \Rightarrow H \to \oplus \Rightarrow x$, N

$s \in A^n$

Bsp: $s \in \{-1, 1\}^{10} \to |A|^{10} = 2^{10}$

Suboptimalität: Differenzieren nicht möglich, weil A diskret

Wenn A diagonal: dann muss jeder der 10 Einträge von $\hat{s}$ auf den nächstgelegenen der beiden möglichen Werte -1 und +1 gelegt werden

Random Stuff

Wenn nicht voll. Steuer- & Beob., dann alle Eigenwerte anschauen

$\cancel{|H(e^{j\omega})|^2} =$

$I_C = p C U_C$

$U_L = p L I_L$

Wenn $X_i = [X_i[k], \dots, X_i[k-N]]$

dann $f_{X_1}(x_1) = \prod_{j=1}^{N+1} \frac{1}{\pi \sigma_{X_1}^2} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_{X_1}^2} |x_{1,j}|^2\right)$

$= \frac{1}{(\pi \sigma_{X_1}^2)^{N+1}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_{X_1}^2} \sum_{j=1}^{N+1} |x_{1,j}|^2\right)$

$= \frac{1}{(\pi \sigma_{X_1}^2)^{N+1}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_X^2} \|x_1\|_2^2\right)$

Wenn alle X_i und N Gaußverteilt folgen & $Y|X_1$ lineare Superposition davon ist, dann ist es auch Gaußverteilt

$E[H_1 X_1 + \dots | X_1] = H_1 E[X_1]$

$E[(H_2 X_2 + N) | X_1] = E[H_2 X_2 + N]$

ML Detection

$\hat{s}_{ML} = \arg\max_{s \in A^n} \frac{1}{\pi^m \det(C_N)} \exp\left(-(x - Hs)^H C_N^{-1} (x - Hs)\right)$

bzw. statt x, $\hat{s}_{lin}$ einsetzen, wenn $\hat{s}_{lin}$ Schätzung von x. Im Falle vom BLUE:

$\hat{s}_{ML} = \arg\max_{s \in A^n} \frac{1}{\det(\pi (H^H C_N^{-1} H)^{-1})} \exp\left(-(\hat{s}_{lin} - s)^H H^H C_N^{-1} H (\hat{s}_{lin} - s)\right)$

da $\text{Var}[G_{BLUE} N] = H^H C_N^{-1} H$

$\to \hat{s}_{ML} = \arg\min_s \underbrace{(\hat{s}_{lin} - s)^H H^H C_N^{-1} H (\hat{s}_{lin} - s)}_{= \mu(s)}$

Cholesky Zerlegung:

für $H^H C_N^{-1} H = L^H D L$ (L untere Drei., D Diagonal)

$\mu(s) = \|D^{1/2} (L \hat{s}_{lin} - L s)\|_2^2$

$= \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} \left| e_i^T L \hat{s}_{lin} - s_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} s_j \right|^2$

$\mu_1(s) = d_{1,1} |e_1^T L \hat{s}_{lin} - s_1|^2$

$\mu_2(s) = d_{2,2} |e_2^T L \hat{s}_{lin} - s_2 - l_{2,1} s_1|^2$

BLUE: $\hat{s}_{BLUE} = s + G_{BLUE} N$

Sphere Decoder

MMSE Metrik

$\mu_{MMSE}(s) = (\hat{s}_{MMSE} - s)^H (I + H^H C_N^{-1} H)(\hat{s}_{MMSE} - s)$

$(p - p_1)(p - p_1^*) = p^2 - 2\text{Re}\{p_1\} p + |p_1|^2$

$(p + p_1)(p + p_1^*) = p^2 + 2\text{Re}\{p_1\} p + |p_1|^2$

Hermitesch: $C^H = (C^T)^*$

$C^H = C$?

Kausal: Zählergrad ≤ Nennergrad

$e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = j 2 \sin(\varphi) = e^{j\frac{\pi}{2}} 2 \sin(\varphi)$

3dB Cutoff:

$|H(j\omega_{cut})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$