Rechenregeln

$(A+B)^T = A^T + B^T$
$(A \cdot B)^T = B^T A^T$
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$\langle a, b+c \rangle = \langle a,b \rangle + \langle a,c \rangle$
$\langle a, \lambda b \rangle = \lambda \langle a,b \rangle$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:
Symmetrisch: $A = A^T$
Schiefsymmetr.: $A = -A^T$
Orthogonal: $AA^T = \mathbb{I}$; $A^T = A^{-1}$
$\langle\ ,\ \rangle = 0$; $\det(A) = \pm 1$

Invertieren: $[A|\mathbb{I}] \to [\mathbb{I}, A^{-1}]$
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Rang(A) = # nicht-0-Zeilen
Basis(row(A)) = nicht-0-Zeilen
Basis(col(A)) = nicht-0-Zeilen
$\to$ von A^T !

Kern$(A) = \{x \in K^n : Ax = 0\}$
Lösung des homogenen LGS
Bild(A) = Erzeugnis der Spalten

$\text{rang}(A) = n - \dim(\text{Kern}(A))$
$\dim(A) = \dim(\text{Kern}(A)) - \dim(\text{Bild}(A))$

A^n: $= SD^nS^{-1}$ (falls Diagonalisierbar)
geg: $x \in \mathbb{R}^n$:
$A^n = \alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k^n v_k$
λ Eigenwerte; $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$

Norm: $\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

$\cos\alpha = \frac{\langle a,b \rangle}{\|a\|\|b\|}$

Determinante: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|A|$

$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$ – nach Spalte j
$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$ – nach Zeile i
$\det(BC) = \det(B) \cdot \det(C) = \det(CB)$
$\det(A) = \det(A^T)$
$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

∘ Spalte $\cdot \lambda = |A| \cdot \lambda$
∘ Vertauschen v. Zeile/Spalt. ändert Vorzeichen von $|A|$

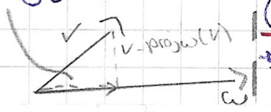
Hauptsatz: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
a) A ist invertierbar
b) $Ax=b$ eindeutig
c) $Ax=0$ nur trivial
d) $SZSF = \mathbb{I}_n$
f) $\text{rang}(A) = n$
g) $\dim(\text{Kern}(A)) = 0$
h) Spalten/Zeilen lin. unab.
i) $\det(A) \neq 0$
j) bijektiv

Untervektorraum
1. $0 \in U$
2. $v + u \in U$
3. $\lambda v \in U$

Basis von V
- $\text{span}(B) = V$
- B lin. unabh.

∘ injektiv: $f(x) = f(y) \to x = y$
surjektiv: $\forall b\ \exists a: f(a) = b$

$\text{proj}_\omega(v) = \frac{\langle v, \omega \rangle}{\langle \omega, \omega \rangle}\omega$



$B \cdot [v]_B = v^*$
Basis von U; Koordinatenvektor; Standart-Basis eines Vektor

Lineare Abbildung
wenn:
1) $f(0) = 0$
2) $f(a+b) = f(a) + f(b)$
3) $f(\lambda a) = \lambda f(a)$
4) Wenn Abbild. Matrix existiert $[f]$

$[f]$ bestimmen: $\begin{bmatrix} | & | & & | \\ f(e_1) & f(e_2) & \ldots & f(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

Eigenwert:
∘ $Av = \lambda v$
∘ $\det(A - \lambda\mathbb{I}_n)$ (char. polynom)
∘ $\text{eig}_\lambda(A - \lambda\mathbb{I}_n) = \text{Kern}(A - \lambda\mathbb{I}_n)$
↳ span{(Eigenvektoren)}
∘ [obere Dreiecksmatrix] ∨ [untere Dreiecksmatrix] EW auf Hauptdiagonalen
∘ EW von $A^{-1} = \frac{1}{\lambda}$
∘ Algebraische Vfh: Potenz im char. Polynom
∘ Geometrische Vfh: $\dim(\text{eig}_\lambda(A))$

Diagonalisierbarkeit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- Algebraische = Geometrische
- $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$

$A = SDS^{-1} \Leftrightarrow D = S^{-1}AS$

1) $p_A(\lambda)$ in Linearfaktoren
2) S besteht aus Eigenvektoren
3) D ist Diagonalmatrix der EW
$\to$ S ist Basis zu der A eine Diagonalmatrix ist

Orthogonale Diagonalisierung: A symmetrisch !
$\to$ S muss Orthonormal sein !
$D = Q^TAQ$ $Q = S$

Lineare Differentialgl.

Geg: $y'(t) = Ay$; $y(0) = c_1, \ldots y_n(0) = c_n$

1) Eigenwerte & Vektoren von A
2) allg. Lösung: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \ldots$
3) Anfangswert einsetzen und $c_1 - c_n$ ausrechnen
$x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$
4) $c_1 - c_n$ & $\lambda_1 - \lambda_n$ in allg. Lösung einsetzen

Ähnlichkeit: $A \sim B$, $\to P^{-1}AP = B$
- gleiche Determinante
- gleiches char. polynom
- gleiche EW

$\to$ Überprüfen ob Geometrische- & Algebraische VfH gleich sind

Orthogonalität
∘ Orthogonalsystem: $\forall v, \omega \in B: \langle v, \omega \rangle = 0$
∘ Orthogonalbasis: B ist Ortog. System
∘ Orthonormalbasis: B ist " " und $\forall v \in B: \|v\| = 1$
∘ Orthogonalmatrix: $A^TA = \mathbb{I}_n$
- $A^{-1} = A^T$ - $\det(A) = \pm 1$
- Spalten & Zeilen Orthonormalsystem

Gram-Schmidt-Orthonormalisierung
$b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
$b_2 = \frac{b_2'}{\|b_2'\|}$ mit $b_2' = v_2 - \langle v_2, b_1 \rangle b_1$
$b_3 = \frac{b_3'}{\|b_3'\|}$ mit $b_3' = v_3 - \langle v_3, b_1 \rangle b_1 - \langle v_3, b_2 \rangle b_2$

Ortogonale Projektion
1. Basis bestimmen
2. Normiere Basis
3. $v_U = \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + \ldots$
4. $v_{U^\perp} = v - v_U$
5. Abstand von v zu $U = \|v_{U^\perp}\|$

oder:
1. A = (Basisvektoren)
2. $A^TAx^* = A^Tv \to x^* = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$
3. $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$

Kleinste-Quadrate-Problem
für $Ax = b \to A^TAx^* = A^Tb$
Normalengleichung ...
... ist beste Lösung für $\|Ax - b\|$
Bsp: Ausgleichsgerade $g(x) = g_1 x + g_2$
$\to \|Ax - b\| = \left\| \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\|$

Singulärwertzerlegung
$A = U\Sigma V^T$
U = Orthonormal; V = ~~Ortho~~ obere Dreiecksm.

1. Eigenwerte v. A sortieren $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0 \ldots$
2. V ist Orthonorm. Basis der EV
3. $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \cdots \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$
4. $U: u_1 - u_r \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1$ (normiert)
$\to U^{m\times m}\ \Sigma^{m\times n}\ V^{n\times n} = A^{m\times n}$
5. Wenn U zu wenige Vektoren hat, dann mit Gram-Schmidt !

QR-Zerlegung: $A = QR$
$Q = (b_1 \ldots b_n)$ $R = Q^TA$

Beweis $\det A \in \{\cancel{0} 0,1\}$

$\det(A) = \det(A^2) = \det(A)\det(A)$

$\rightarrow \det A(1-\det(A)) = 0$

Sei ~~$\lambda \in$~~ $\lambda \in \mathbb{R}$ ein EW von A zu EV $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dann:

$Av = \lambda v$

$A \cdot Av = A \cdot \lambda v = \lambda Av = \lambda^2 v$

$Av = \lambda^2 v$ $\Rightarrow \lambda \in \{0,1\}$

$\lambda v = \lambda^2 v \rightarrow \lambda(1-\lambda)v = 0$

Determinante ortogonaler Matrizen

$1 = \det(I_n) = \det(Q^T Q) = \det(Q^T)\det(Q)$

$= \det(Q)^2 = \pm 1$

es gilt $U \cap U^\perp = \{0\}$

$\langle 0, u \rangle = 0$ für $u \in U$

$0 \in U^\perp \Rightarrow \{0\} \subseteq U \cap U^\perp$

Sei $v \in U \cap U^\perp \rightarrow \langle u, v \rangle = 0$
für $u = v$ also $\langle v, v \rangle = 0$
$\rightarrow \|v\| = 0$