1

Potenzmenge

$P(A|B) = P(A \cup (A^c|B)) = P(A|B) + P(A^c|B)$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\,d\xi \vee \sum_{\xi \le x} p_X(\xi)$

1

Stochastische Signale

1. Mengenalgebra

1.1. Mengen- und Boolsche Algebra

Kommutativ	$A \cap B = B \cap A$	$A \uplus B = B \uplus A$
Assoziativ	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
	$(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$	
Distributiv	$A \cap (B \uplus C) = (A \cap B) \uplus (A \cap C)$	
	$A \uplus (B \cap C) = (A \uplus B) \cap (A \uplus C)$	
Indempotenz	$A \cap A = A$	$A \uplus A = A$
Absorbtion	$A \cap (A \uplus B) = A$	$A \uplus (A \cap B) = A$
Neutralität	$A \cap \Omega = A$	$A \uplus \emptyset = A$
Dominant	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \uplus \Omega = \Omega$
Komplement	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \uplus \overline{A} = \Omega$
	$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\Omega} = \emptyset$
De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \uplus \overline{B}$	$\overline{A \uplus B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

1.2. Kombinatorik

Mögliche Variationen/Kombinationen um k Elemente von maximal n Elementen zu wählen bzw. k Elemente auf n Felder zu verteilen:

	Mit Reihenfolge	Reihenfolge egal
Mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Permutation von n mit jeweils k gleichen Elementen: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{5}{2} = 10$

1.3. Grundbegriffe

Tupel	$(i,j) \neq (j,i)$ für $i \neq j$
Ungeordnetes Paar	$\{i,j\} = \{j,i\}$
Potenzmenge	$P(\Omega)$ ist Menge aller Teilmengen von Ω

1.4. Integralarten

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax+1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$

$\int \frac{dt}{\sqrt{at+b}} = \frac{2\sqrt{at+b}}{a}$ $\qquad \int t^2 e^{at}\,dt = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3}e^{at}$

$\int te^{at}\,dt = \frac{at-1}{a^2}e^{at}$ $\qquad \int xe^{ax^2}\,dx = \frac{1}{2a}e^{ax^2}$

1.5. Binome, Trinome

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

2. Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathbb{F}, P)$

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ besteht aus
- Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$: Menge aller möglichen **Ergebnisse** ω_i
- Ereignisalgebra $\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \ldots\}$: Menge von Ereignisen $A_i \subseteq \Omega$
- Wahrscheinlichkeitsmaß P

2.1. Ereignisalgebra $\mathbb{F} \subseteq P(\Omega)$

- $\Omega \in \mathbb{F}$
- $A_i \in \mathbb{F} \Rightarrow A_i^C \in \mathbb{F}$
- $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{F} \Rightarrow \bigcup_{i \ge 1}^{k} A_i \in \mathbb{F}$

Daraus folgt:
- $\emptyset \in \mathbb{F}$
- $A_i \backslash A_j \in \mathbb{F}$
- $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathbb{F}$

$|\mathbb{F}| = 2^{\text{Anzahl disjunkter Teilmengen}}$ (muss endlich sein)

2.1.1. σ-Algebra

Entwicklung $k \to \infty$. Unendlich viele Ergebnisse, aber jedes A_i besteht aus abzählbar vielen Ergebnissen. Besitzt mindestens 2 Ereignisse.

2.2. Wahrscheinlichkeitsmaß P

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $\qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2.2.1. Axiome von Kolmogorow

Nichtnegativität: $P(A) \ge 0 \Rightarrow P : \mathbb{F} \mapsto [0,1]$

Normiertheit: $P(\Omega) = 1$

Additivität: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, wenn $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

2.2.2. Weitere Eigenschaften

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0 \qquad P(\Omega) = 1$
- $P(A \backslash B) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$
- $P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \le \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$

$P_X(x) = \begin{cases} 1-p & x=0 \\ p & x=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \rightarrow F_X(x) = (1-p)u(x) + pu(x-1)$

$\rightarrow f_X(x) = (1-p)\delta(x) + p\delta(x-1)$

Bei stückweise errechneter KVF müssen Werte vorheriger Abschnitte zu neuem Abschnitt addiert werden

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

3.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A falls B bereits eingetreten ist:
$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

3.1.1. Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Es muss gelten: $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$ für $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$

Totale Wahrscheinlichkeit: $P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i)\,P(B_i)$

Satz von Bayes: $P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)\,P(B_k)}{\sum_{i \in I} P(A|B_i)\,P(B_i)}$

3.1.2. Multiplikationssatz

$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$

Beliebig viele Ereignisse:
$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$
$= P\left(A_{\pi(1)}\right) P\left(A_{\pi(2)}|A_{\pi(1)}\right) P\left(A_{\pi(3)}|A_{\pi(2)} \cap A_{\pi(1)}\right) \times$
$\cdots \times P\left(A_{\pi(k)}|A_{\pi(k-1)} \cap \cdots \cap A_{\pi(1)}\right)$

3.2. Stochastische Unabhängigkeit

Ereignise A und B sind unabhängig falls:
$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$
$\Rightarrow P(B|A) = P(B)$

Allgemein:

$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$ mit Indexmenge I und $\emptyset \neq J \subseteq I$

4. Zufallsvariablen

4.1. Definition

$X : \Omega \mapsto \Omega'$ ist Zufallsvariable, wenn für jedes Ereignis $A' \in \mathbb{F}'$ im Bildraum ein Ereignis A im Urbildraum $\mathbb{F}$ existiert, sodass $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A'\} \in \mathbb{F}$

4.2. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen $X_1, \cdots, X_n$ sind stochastisch unabhängig, wenn für jedes $\vec{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\boxed{P(\{X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n\}) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \le x_i\})}$$

Gleichbedeutend:

$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$

$p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i)$

$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$

4.3. Bedingte Zufallsvariablen

Bedingte Wahrscheinlichkeit für Zufallsvariablen:

Ereignis A gegeben: $F_{X|A}(x|A) = P(\{X \le x\}|A)$

ZV Y gegeben: $F_{X|Y}(x|y) = P(\{X \le x\}|\{Y = y\})$

$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{dF_{X|Y}(x|y)}{dx}$

5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.0.1. Definition

$P_X(A') = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A'\}) = P(\{X \in A'\}) \quad \forall A' \in \mathbb{F}'$

5.0.2. Kumulative Verteilungsfunktion (KVF bzw. CDF)

$\boxed{F_X(x) = P(\{X \le x\})}$

Eigenschaften
- $F_X(x)$ ist monoton wachsend
- $F_X(x) \ge 0$
- $F_X(x)$ ist rechtsseitig stetig: $\forall h > 0 : \lim_{h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$; $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $P(\{a < X \le b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(\{X > c\}) = 1 - F_X(c)$

5.0.3. Verteilung diskreter Zufallsvariablen

Bezeichnung	Abk.	Zusammenhang
Wahrscheinlichkeitsmassenfkt.	pmf	$p_X(x) = P(\{X = x\})$
Kumulative Verteilungsfkt.	cdf	$F_X(x) = \sum_{\xi \in \Omega' : \xi \le x} p_X(\xi)$

5.0.4. Verteilung stetiger Zufallsvariablen

Bezeichnung	Abk.	Zusammenhang
Wahrscheinlichkeitsdichtefkt.	pdf	$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$
Kumulative Verteilungsfkt.	cdf	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\,d\xi$

Berechnung von $f_X(x)$:

$f_X(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{x}^{x+\epsilon} f_X(\xi)\,d\xi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} P(x \le X \le x + \epsilon)$

Normiertheit

$\sum p(x) + \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx \stackrel{!}{=} 1$

5.1. Mehrdimensionale Verteilungen

5.1.1. Mehrdimensionale Zufallsvariable:

$\vec{X} = [X_1, \cdots, X_n]^T$ mit X_i Zufallsvariablen

5.1.2. Gemeinsame kumulative Verteilungsfunktion:

$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \boxed{F_{\vec{X}}(\vec{x}) = P(\{\vec{X} \le \vec{x}\})} =$
$P(\{X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n\})$

5.1.3. Diskrete Zufallsvariablen:

$p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = P(\{\vec{X} = \vec{x}\})$ (joint probability mass function)

5.1.4. Stetige Zufallsvariablen:

$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\cdots,X_n}(\xi_1, \cdots, \xi_n)\,d\xi_n \cdots d\xi_1$

$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$ $\qquad f_{X,Y} = f_{Y,X}$

(joint probability density function)

5.1.5. Marginalisierung

Prinzip: Lasse alle vernachlässigbaren ZV gegen unendlich gehen.
$F_{X_1,\cdots,X_m}(x_1, \cdots, x_m) = F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_m, \infty, \cdots, \infty)$

Randverteilung:
Spezialfall der Marginalisierung um aus der mehrdimensionalen KVF die KVF für eine ZV zu erhalten.
$F_{X_1}(x_1) = F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \infty, \cdots, \infty)$

Randverteilung der Wahrscheinlichkeitsmasse (PMF)
(für diskrete ZV)
$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\cdots,x_n} p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n)$

Randverteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte (WDF)
(für stetige ZV)
$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n)\,dx_n \cdots dx_2$

ergodisch: aus einer Enzisen Realisierung können stochastische Eigenschaften geschätzt werden

$P(X<0 \cap Y \geq 0) = \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

Es muss unwichtig sein an welcher Stelle ein Erfolg erzielt wird!

2

2

6. Funktionen von Zufallsvariablen

$X : \Omega \to \Omega' = \mathbb{R}$ und jetzt $g : \Omega' \to \Omega'' = \mathbb{R}$
$P(A'') = P(Y \in A'') = P(\{X \in \Omega' \mid g(X) \in A''\} = P(\{\omega \in \Omega \mid g(X(\omega)) \in A''\}$

6.1. Transformation von Zufallsvariablen

Berechnung von $f_Y(y)$ aus $f_X(x)$
$g(x)$ streng monoton & differenzierbar:
$g^{-1}(y)$ - Umkehrfunktion

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left[\left|\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=g^{-1}(y)}\right]^{-1}$$

$g(x)$ nur differenzierbar:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{N} f_X(x_i)\left[\left|\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_i}\right]^{-1} \quad \text{mit } i \in \{1,\dots,N\}$$

x_i sind Nullstellen von $y - g(x) = 0$

6.1.1. Beispiel: lineare Funktion
$Y = aX + b \Leftrightarrow g(x) = ax + b$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash 0,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

6.2. Summe unabhängiger Zufallsvariablen

$Z = X + Y$ mit X und Y unabhängig.

$$\Rightarrow f_{Z=X+Y}(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y\, dy$$

7. Stochastische Standardmodelle

7.1. Begriffe

Gedächtnislos
Eine Zufallsvariable X ist gedächtnislos, falls:
$P(\{X > a + b)\} | \{X > a\}) = P(\{X > b\}), \qquad a, b > 0$

7.2. Gleichverteilung

7.2.1. Diskret
$p_X(x) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad x \in \{1,\dots,|\Omega|\}$
Beispiele: Wurf einer fairen Münze, Lottozahlen

7.2.2. Stetig $(a, b : -\infty < a < b < \infty)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$E[X] = \frac{a+b}{2}$ (Erwartungswert) $\quad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$ (Varianz) $\quad \varphi_X(s) = \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$ (Charakt. Funktion)

Beispiele: Winkel beim Flaschendrehen, Phase einer empf. Sinusschwingung

7.3. Bernoulliverteilung ($p \in [0,1]$)

Wahrscheinlichkeitsmasse
2 Ereignisse: Erfolg und Misserfolg
p: Wahrscheinlichkeit

$$p_X(k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ 1-p & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1-p & 0 \leq k < 1 \\ 1 & k \geq 1 \end{cases}$$

$E[X] = p$ (Erwartungswert) $\quad Var[X] = p(1-p)$ (Varianz) $\quad G_X(z) = pz + 1 - p$ (Wahrscheinlichkeitserz. Funktion)

Beispiele: Einmaliger Wurf einer (unfairen) Münze

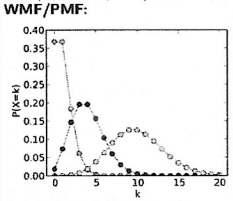
7.4. Binomialverteilung $\mathcal{B}(n,p)$ ($p \in [0,1], n \in \mathbb{N}$)

Folge von n Bernoulli-Experimenten
p: Wahrscheinlichkeit für Erfolg
k: Anzahl der Erfolge
Wahrscheinlichkeitsmasse

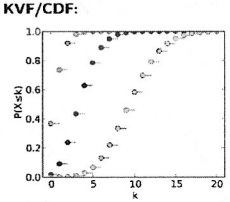
$$p_X(k) = B_{n,p}(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k \in \{0,\dots,n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

WMF/PMF:



KVF/CDF:



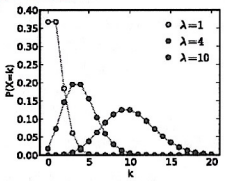
$E[X] = np$ (Erwartungswert) $\quad Var[X] = np(1-p)$ (Varianz) $\quad G_X(z) = (pz + 1 - p)^n$ (Wahrscheinlichkeitserz. Funktion)

Charakteristische Funktion $\quad \varphi_X(s) = (1 - p + pe^s)^n$
Beispiele: Anzahl der Übertragungsfehler in einem Datenblock endlicher Länge, Wiederholtes Werfen einer Münze

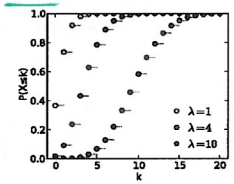
7.5. Poisson-Verteilung ($\lambda > 0$)

Asymptotischer Grenzfall der Binomialverteilung
$n \to \infty, p \to 0, np \to \lambda \quad p_X(k) = \lim_{n\to\infty} B_{n,\frac{\lambda}{n}}(k)$

WMF/PMF:
$p_X[k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k \in \mathbb{N}_0$



KVF/CDF:
$F_X[k] =$ zu kompliziert



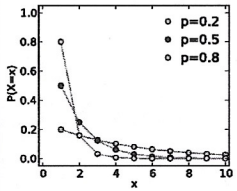
$E[X] = \lambda$ (Erwartungswert) $\quad Var[X] = \lambda$ (Varianz) $\quad G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$ (Wahrscheinlichkeitserz. Funktion)

Charakteristische Funktion $\quad \varphi_X(s) = \exp\left(\lambda(e^s - 1)\right)$
Beispiele: Zahl der Phänomene in einem Zeitintervall, Google-Anfragen in einer Stunde, Schadensmeldungen an Versicherungen in einem Monat

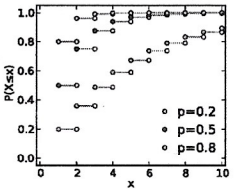
7.6. Geometrische Verteilung ($p \in [0,1]$)

Erster Erfolg eines Bernoulli-Experiments beim k-ten Versuch,
Gedächtnislos

WMF/PMF:
$p_X[k] = (1-p)^{k-1} p, \ k \in \mathbb{N}$



KVF/CDF:
$F_X[k] = 1 - (1-p)^k, \ k \in \mathbb{N}$



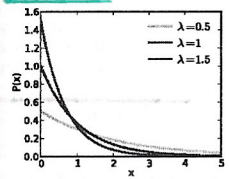
$E[X] = \frac{1}{p}$ (Erwartungswert) $\quad Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$ (Varianz) $\quad G_X(z) = \frac{pz}{1 - z + pz}$ (Wahrscheinlichkeitserz. Funktion)

Charakteristische Funktion $\quad \varphi_X(s) = \frac{pe^{is}}{1 - (1-p)e^{is}}$
Beispiele: diskrete Dauer bis ein technisches Gerät zum ersten Mal ausfällt, Anzahl der Würfe bis man eine "6" würfelt

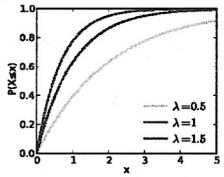
7.7. Exponentialverteilung ($\lambda > 0$)

Wie geometrische Verteilung für stetige Zufallsvariablen ("Lebensdauer"),
Gedächtnislos
= Wartezeit bis zum ersten Auftreten eines Ereignisses

WDF/PDF:
$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$



KVF/CDF:
$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$



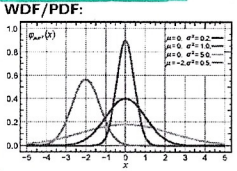
$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ (Erwartungswert) $\quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ (Varianz) $\quad \varphi_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$ (Charakt. Funktion)

Beispiele: Lebensdauer von el. Bauteilen, Zeitdauer zwischen zwei Anrufen in einem Call-Center

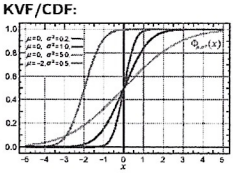
Gedächtnislosigkeit: $P(X_j > 2k \mid X_j > k) = P(X_j > k+k \mid X_j > k) = P(X_j > k)$

7.8. Normalverteilung ($\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$)

WDF/PDF:



KVF/CDF:



WDF

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$E(X) = \mu$ (Erwartungswert) $\quad Var(X) = \sigma^2$ (Varianz) $\quad \varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$ (Charakt. Funktion)

Schreibweise $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Beispiele: Rauschen, Ort eines Teilchens relativ zu seiner Anfangsposition bei brownscher Molekularbewegung, abgefahrene Sachen, die man nicht genauer bestimmen will oder kann

7.8.1. Standartnormalverteilung
ist der Spezialfall $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Es gilt außerdem:

- $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \frac{1}{\sigma}(Y - \mu) \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow Y = \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ symmetrisch!

$Y = g(x) = \begin{cases} cx & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi c^2}} e^{-\frac{y^2}{c^2}} & y > 0 \\ \frac{1}{2}\delta(y) & y \leq 0 \end{cases}$

weil: $f_X(x)$ symmetrisch.

3

$Var[Y] = Var[\sum(X_i - 2\gamma_i)] = \sum Var[X_i - 2\gamma_i]$

3

8. Erwartungswert

8.1. Erwartungswert

gibt den mittleren Wert einer Zufallsvariablen an

$$\mathsf{E}[X] = \underbrace{\sum_{x\in\Omega'} x \cdot \mathsf{P}_X(x)}_{\text{diskrete } X:\Omega\to\Omega'} \triangleq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{stetige } X:\Omega\to\mathbb{R}}$$

Eigenschaften:

Linearität:	$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$
Monotonie:	$X \le Y \Rightarrow E[X] \le E[Y]$

Beweis mit der Definition und der Linearität des Integrals bzw. der Summe.

$\mathsf{E}[X\,Y] = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y]$, falls X und Y stochastisch unabhängig
Umkehrung nicht möglich: Unkorrelliertheit $\not\Rightarrow$ Stoch. Unabhängig!

$\mathsf{E}[X\,Y] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy \cdot f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Spezialfall für $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$:

$\mathsf{E}[X] = \int_0^\infty \mathsf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ (stetig) $\qquad \mathsf{E}[X] = \sum_{k=0}^\infty \mathsf{P}(X > k)$ (diskret)

8.1.1. Für Funktionen von Zufallsvariablen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}[g(X)] = \sum_{x\in\Omega'} g(x)\,\mathsf{P}_X(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$p_X(x) \begin{cases} p & x=1 \\ 1-p & x=-1 \end{cases} \rightarrow \mathcal{E}(X)=0$ für $p=\frac{1}{2}$

$\sum_{i=1}^{k} \alpha^{k-i} X_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{l} \alpha^{l-j} X_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \alpha^{k+l-i-j} X_i X_j$

$Z = h(Y)$

$\{Z \le z\} = \{Y \ge u(z)\}$

$-\frac{\partial}{\partial z} F_{Y|X}(u(z)|X) = -\frac{\partial}{\partial y} F_{Y|X}(y|x)\Big|_{y=u(z)} \cdot \frac{\partial u(z)}{\partial z} = f_{Y,Z}(u(z)|x)\frac{\partial u(z)}{\partial z}$

9. Varianz und Kovarianz

9.1. Varianz

ist ein Maß für die Stärke der Abweichung vom Erwartungswert

$$\mathrm{Var}[X] = \mathsf{E}\left[(X - \mathsf{E}[X])^2\right] = \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2$$

$\mathrm{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2\,\mathrm{Var}[X]$

$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Cov}[X, X]$

Doppelsumme

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i] + \sum_{j\neq i} \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$$

9.1.1. Standard Abweichung

$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

9.2. Kovarianz

Maß für den linearen Zusammenhang zweier Variablen

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}[X])(Y - \mathsf{E}[Y])] = \mathrm{Cov}[Y, X]$$
$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathsf{E}[X\,Y] - \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y] = \mathrm{Cov}[Y, X]$$

$\mathrm{Cov}[\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta] = \alpha\gamma\,\mathrm{Cov}[X, Y]$
$\mathrm{Cov}[X + U, Y + V] = \mathrm{Cov}[X, Y] + \mathrm{Cov}[X, V] + \mathrm{Cov}[U, Y] + \mathrm{Cov}[U, V]$

9.3. Unkorreliertheit

wenn gilt:

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \mathsf{E}[X\,Y] = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y]$$

Stoch. Unabhängig $\Rightarrow$ Unkorreliertheit

wenn ZV normalverteilt (sonst nicht!):
Unkorreliertheit $\Rightarrow$ stoch. Unabhängigkeit

bei paarweisen unkorrellierten Zufallsvariablen:
$\mathrm{Var}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i]$

9.4. Orthogonalität

$$\mathsf{E}[X\,Y] = 0$$

mit dem Korrelationswert $\mathsf{E}[X\,Y]$

9.5. Korrelationskoeffizient

$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}} = \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$ mit $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$

Korrelationskoeffizient von X und Y

Es gilt:
- negativ korreliert $\rho_{X,Y} \in [-1, 0)$
- unkorreliert $\rho_{X,Y} = 0$
- positiv korreliert $\rho_{X,Y} \in (0, 1]$

10. Erzeugende und charakter. Funktionen

10.1. Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

für $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$

$$G_X(z) = \mathsf{E}[z^X] = \sum_{k=0}^\infty p_X(k) z^k, \quad |z| \le 1$$

Anwendungen

$$p_X(n) = \mathsf{P}(\{X = n\}) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} G_X(z)\right]_{z=0}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\mathsf{E}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} G_X(z)\right]_{z=1}$$

$$\mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} G_X(z)\right]_{z=1}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} G_X(z)\right]_{z=1} - \mathsf{E}[X]^2 + \mathsf{E}[X]$$

Für $X_i : \Omega \to \mathbb{N}_0, i \in \{1, \ldots, n\}$ stochastisch unabhängige, diskrete, nichtnegative ZV und $Z = \sum_{i=1}^n X_i$

$$G_Z(z) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(z)$$

10.2. Charakteristische Funktion

$$\varphi_X(\omega) = E\left[e^{\imath\omega X}\right], \quad \omega \in \mathbb{R} \qquad \varphi_X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega x} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$\cancel{f_X(-\omega) = \varphi(\omega)}$ $\cancel{\varphi(-\omega) = \hat{f}_X(\omega)}$ $\varphi_X(\omega) = \hat{f}_X(-\omega)$

Erwartungswert:

$$\mathsf{E}[X^n] = \frac{1}{\imath^n}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\varphi_X(\omega)\right]_{\omega=0}$$

Summe von ZV: $Z = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\varphi_Z(\omega) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(\omega)$$

10.3. Der zentrale Grenzwertsatz

Definition: Seien $X_i, i \in 1, \ldots, n$, stochastisch unabhängige und identisch verteilte reelle Zufallsvariablen und gelte $E[X_i] = \mu < \infty$ und $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Dann konvergiert die Verteilung der standardisierten Summe

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{(X - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

d.h $E[Z_n] = 0$ und $Var[Z_n] = 1$, für $n \to \infty$ gegen die Standartnormalverteilung.
Es gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(Z_n \le z) = \Phi(z)$$

gemeinsam WSS: wenn Kreuzkorrelationsf. von 2 Zufallsfolgen nur von Abstand abhängt und beide WSS sind.

Kreuzkorrelation: $r_{Y,X}(k,l) = \mathcal{E}[Y_k, X_l]$

11. Reelle Zufallsfolgen

Eine reelle Zufallsfolge ist ganz einfach eine Folge reeller Zufallsvariablen.

Ensemble
$S_n : \Omega_n \times \Omega_{n-1} \times \cdots \times \Omega_1 \to \mathbb{R}$
$(\omega_n, \omega_{n-1}, \ldots, \omega_1) \mapsto s_n(\omega_n, \omega_{n-1}, \ldots, \omega_1), \quad n \in \mathbb{N}$
Erklärung: Jede Realisierung von S_n wird erzeugt durch die Menge (das Ensemble) aufeinanderfolgender Realisierungen X_k mit $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Pfad
$\vec{S}_n = (S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1) : \Omega^{(n)} \to \mathbb{R}^n$
$\vec{\omega}_n \mapsto \vec{s}_n(\vec{\omega}_n) = (s_n(\vec{\omega}_n), s_{n-1}(\vec{\omega}_n), \ldots, s_1(\vec{\omega}_n)), \quad n \in \mathbb{N}$
Erklärung: Die Abfolge der Realisierungen von S_1 bis S_n (also der Pfad von S) und somit auch jedes einzelne S_k kann als Ergebnis des Ereignisses $\vec{\omega}_n$ angesehen werden.

11.1. Verteilungen und Momente

Erwartungswert	$\mu_X(n) = E[X_n]$
Varianzfolge	$\sigma_X^2(n) = Var[X_n] = E[X_n^2] - E[X_n]^2 = Cov[X_n, X_n] = c_X(k,k)$
Autokorrelation	$r_X(k,l) = E[X_k X_l]$
Autokovarianz	$c_X(k,l) = Cov[X_k, X_l] = r_X(k,l) - \mu_X(k)\mu_X(l)$

11.2. Random Walk

$n \in \mathbb{N}$ Schritte mit 2 möglichen Bewegungsrichtungen $X \in \{+\delta, -\delta\}$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$\mathsf{P}(\{X_i = +\delta\}) = p$
$\mathsf{P}(\{X_i = -\delta\}) = 1 - p$
symmetrisch $\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$, $\mu_S(n) = 0$

$E[S] = \mu_S(n) = n(2p-1)\delta \qquad E[X_i] = (2p-1)\delta$
$Var[S] = \sigma_S^2(n) = 4np(1-p)\delta^2 \qquad Var[X_i] = 4p(1-p)\delta^2$

11.3. Stationarität

$p_{Y_k}(y) = p_{Y_{k+n}}(y)$

Eine Zufallsfolge ist **stationär**, wenn um ein beliebiges k ($k \in \mathbb{N}$) zueinander verschobene Zufallsvektoren die selbe Verteilung besitzen.
Im **weiteren Sinne stationär (W.S.S.)**, wenn:

$\mu_X(i) = \mu_X(i + k)$
$r_X(i_1, i_2) = r_X(i_1 + k, i_2 + k) = r_X(i_1 - i_2)$
(verschiebungsinvariant)

stationär $\Rightarrow$ WSS (aber nicht anders herum!)

11.4. Markow-Ungleichung

$$\mathsf{P}(\{|X| \ge a\}) \le \frac{\mathsf{E}[|X|]}{a}$$

11.5. Tschebyschow-Ungleichung

$$\mathsf{P}(\{|X - \mathsf{E}[X]| \ge a\}) \le \frac{\mathrm{Var}[X]}{a^2}$$

11.6. Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Sei $(X_i : i \in \mathbb{N})$ eine Folge reeller, paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen mit beschränkter Varianz:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathsf{E}[X_i]) \to 0$$

Für stochastisch unabhängige und identisch verteilte Folgenelemente mit $E[X_i] = E[X]$ und $Var[X_i] = Var[X] < \infty$ gilt:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i) \to \mathsf{E}[X_i]$$

für $\mathbb{X} = \{G, S\}$

Normierung: $p_{X_k}(G) + p_{X_k}(S) = 1$

12. Markowketten (bedingte Unabhängigkeit: Abschnitt 14)

12.1. Markowketten

12.1.1. Allgemein

Eine Zufallsfolge $(X_n : n \in \mathbb{N})$ heißt Markowkette, falls $\forall\, n_i \in \mathbb{N}$, $i \in 1, \dots k$ mit $n_1 < \dots < n_k$ gilt:
$(X_{n_1}, X_{n_2}, \dots X_{n_{k-2}}) \to X_{n_{k-1}} \to X_{n_k}$
$\Rightarrow$ Die Verteilung eines Folgeelements hängt nur vom direkten Vorgänger ab

$$p_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}, X_{n_{k-2}}, \dots, X_{n_1}}(x_{n_k} \mid x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-2}}, \dots, x_{n_1}) = p_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}}(x_{n_k} \mid x_{n_{k-1}})$$

$$f_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}, X_{n_{k-2}}, \dots, X_{n_1}}(x_{n_k} \mid x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-2}}, \dots, x_{n_1}) = f_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}}(x_{n_k} \mid x_{n_{k-1}})$$

12.1.2. Zustandsübergang

Zustandsübergangswahrscheinlichkeit:

$$p_{X_n \mid X_{n-1}}(x_n \mid x_{n-1})$$

Multiplikationssatz

Verbund-WMF:

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \prod_{i=2}^{n} p_{X_i \mid X_{i-1}}(x_i \mid x_{i-1})$$

Zustandsübergangsdicht:

$$f_{X_n \mid X_{n-1}}(x_n \mid x_{n-1})$$

Verbund-WDF:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \prod_{i=2}^{n} f_{X_i \mid X_{i-1}}(x_i \mid x_{i-1})$$

Eine Markowkette heißt **homogen**, wenn die Übergangswahrscheinlichkeit unabhängig vom Index ist

$$p_{X_{n+1} \mid X_n}(x_{n+1} \mid x_n) = p_{X_{n+1+k} \mid X_{n+k}}(x_{n+1} \mid x_n)$$
$$f_{X_{n+1} \mid X_n}(x_{n+1} \mid x_n) = f_{X_{n+1+k} \mid X_{n+k}}(x_{n+1} \mid x_n)$$

12.1.3. Chapman-Kologorow Gleichung

2-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit:

$$p_{X_{n+2} \mid X_n}(x_{n+2} \mid x_n) = \sum_{\xi \in \mathbb{X}} p_{X_{n+2} \mid X_{n+1}}(x_{n+2} \mid \xi)\, p_{X_{n+1} \mid X_n}(\xi \mid x_n)$$

m+l-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit:

$$p_{X_{n+m+l} \mid X_n}(x_{n+m+l} \mid x_n) = \sum_{\xi \in \mathbb{X}} p_{X_{n+m+l} \mid X_{n+m}}(x_{n+m+l} \mid x_{n+m})\, p_{X_{n+m} \mid X_n}(x_{n+m} \mid x_n)$$

$p_{X_n, X_{n-1}, X_{n-2}}(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = \sum_{x_{n-1} \in \mathbb{X}} p_{X_n, X_{n-1}, X_{n-2}}(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$

Einquetschen von X_{n-1} möglich

12.1.4. Markowketten im endlichen Zustandsraum

$$\vec{p}_n \triangleq \begin{bmatrix} p_{X_n}(x_1) \\ p_{X_n}(x_2) \\ \vdots \\ p_{X_n}(x_N) \end{bmatrix} \in [0,1]^N \text{ mit } [\vec{p}_n]_i = p_{X_n}(x_i)$$

n-ter Schritt

Übergangsmatrix: $\Pi = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \\ p_{N1} & & p_{NN} \end{bmatrix} \in [0,1]^{N \times N}$

Übergangswahrscheinlichkeit: $p_{ij} = p_{X_{n+1} \mid X_n}(\xi_i \mid \xi_j)$
Spaltensumme muss immer 1 ergeben!

$$\vec{p}_{n+1} = \Pi \vec{p}_n \quad n \in \mathbb{N}$$
$$\vec{p}_{n+m} = \Pi^m \vec{p}_n \quad n, m \in \mathbb{N}$$

nur für homogene Markowketten

Eine Verteilung heißt **stationär**, wenn gilt:

$$\vec{p}_\infty = \Pi \vec{p}_\infty$$

für Random Walk: $X_{n-1} = \{X_{n-2} \pm 1\}$

13. Reelle Zufallsprozesse

13.1. Ensemble und Musterfunktion

- Ein Zufallsprozess kann als **Ensemble** einer nicht abzählbaren Menge von Zufallsvariablen X_t mit $t \in \mathbb{R}$ interpretiert werden.
- Ein Zufallsprozess kann als **Schar von Musterfunktionen** $X_t(\omega) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, mit $X(\omega)$ als deterministische Funktion von t, mit einem gegebenen Ereignis $\omega \in \Omega$ interpretiert werden.

13.2. Verteilungen und Momente

Zeitlich, Kontinuierlich veränderliche Zufallsvariable X_t

Erwartungswertfunktion:
$\mu_X(t) = \mathrm{E}[X_t]$
Autokorrelationsfunktion:
$r_X(s,t) = \mathrm{E}[X_s X_t]$
Autokovarianzfunktion:
$c_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = r_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$

Hinweis: Bei Integration über r_X immer darauf achten, dass $s - t > 0$. Bei Bedarf Integral aufteilen und Grenzen anpassen.

13.3. Stationarität

Same wie bei Folgen

Ein Zufallsprozess ist **stationär**, wenn um ein beliebiges s ($s \in \mathbb{R}$) zueinander verschobene Zufallsvektoren die selbe Verteilung besitzen.

$p_{X_n}(y) = p_{X_{n+k}}(y)$

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots x_n) = F_{X_{t_1+s}, \dots, X_{t_n+s}}(x_1, \dots x_n)$$

Im **weiteren Sinne stationär (WSS)**, wenn:

$$\mu_X(i) = \mu_X(i+k) = \mu_X$$
$$r_X(i_1, i_2) = r_X(i_1 + k, i_2 + k) = r_X(i_1 - i_2)$$

Daraus folgt mit $s = t + \tau$
$r_X(s,t) = \mathrm{E}[X_s X_t] = \mathrm{E}[X_{t+\tau} X_t] = r_X(s - t) = r_X(\tau)$
Im **weiteren Sinne zyklisch stationär**, wenn:

$$\mu_X(t) = \mu_X(t+T) \quad \wedge \quad r_X(t_1, t_2) = r_X(t_1 + T, t_2 + T)$$

stationär $\Rightarrow$ WSS $\Rightarrow$ im weiteren Sinne zyklisch stationär (aber nicht anders herum!)

13.4. Mehrere Zufallsvariablen auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum

Kreuzkorrelationsfunktion:
$r_{X,Y}(s,t) = \mathrm{E}[X_s Y_t] = r_{Y,X}(t,s)$
Kreuzkovarianzfunktion:
$c_{X,Y}(s,t) = r_{X,Y}(s,t) - \mu_X(s)\mu_Y(t) = c_{Y,X}(t,s)$

13.4.1. Gemeinsame Stationarität

Zwei Zufallsprozesse auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum sind **gemeinsam stationär**, wenn die einzelnen ZPs jeweils selbst stationär sind und ihre gemeinsamen Verteilungen verschiebungsinvariant sind.

13.4.2. Gemeinsam im weiteren Sinne stationär

Voraussetzung: X_t und Y_t sind gemeinsam WSS wenn,

X_t und Y_t einzelnd WSS und
$r_{X,Y}(t_1, t_2) = r_{X,Y}(t_1 + s, t_2 + s)$
gemeinsam stationär $\Rightarrow$ gemeinsam WSS (aber nicht umgekehrt!)

Daraus folgt mit $s = t + \tau$
$r_X(s,t) = \mathrm{E}[X_{t+\tau} X_t] = r_X(\tau) = r_X(-\tau) \qquad r_X(\tau) \le r_X(0)$
$r_{X,Y}(\tau) = \mathrm{E}[X_{t+\tau} Y_t] = \mathrm{E}[Y_t X_{t+\tau}] = r_{Y,X}(-\tau)$

13.4.3. Stochastische Unkorreliertheit

$c_{X,Y}(s,t) = 0 \Leftrightarrow r_{X,Y}(s,t) = \mu(s)\mu(t), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

13.4.4. Orthogonalität

$r_{X,Y}(s,t) = 0, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

$P(X_3 \ge 2 \mid X_2 \ge 1) = 1 - P(X_3 \le 1 \mid X_2 \ge 1)$

Poisson: $\to X_3$ kann keine kleineren Werte Annehmen als X_2 zu früherem Zeitpunkt

$\to P(X_3 \ge 2 \mid X_2 \ge 1) = 1 - \frac{P(X_2 = 1) \cap P(X_3 - X_2 = 0)}{1 - P(X_2 = 0)}$

13.5. Wiener-Prozess ($\sigma > 0$)

Als Basis benutzen wir den Random Walk. Durch Multiplikation mit einer Heaviside-Funktion wird der Random Walk zeitkontinuierlich:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Rightarrow \quad S_t = \sum_{i=1}^{n} X_i\, u(t - iT) \qquad T > 0$$

Für n $\to \infty$ und T $\to$ 0, mit Schrittweite $\delta = \sqrt{\sigma^2 T}$ folgt der Wiener Prozess: W_t

$$f_{W_t}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

Eigenschaften

- Kein Zählprozess!
- $\mathrm{P}(\{W_0 = 0\}) = 1$
- hat unabhängige Inkremente $\to r_{xy}(s,t) = 0$
- $W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t), \forall 0 \le t$
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)), \forall 0 \le s \le t$
- $W_t(\omega)$ ist eine stetige Musterfunktion mit Wahrscheinlichkeit 1

Erwartungswertfunktion	$\mu_W(t) = 0$
Varianz	$\sigma_W^2(t) = \sigma^2 t$
Autokorrelationsfunktion	$E[W_s \cdot W_t] = r_W(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$
Autokovarianzfunktion	$c_W(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$

Monoton steigende Musterfunktion hat

13.6. Poisson-Prozess ($N_t : t \in \mathbb{R}_+$)

Der Poisson-Prozess ist ein Zählprozess, bei dem der **Zeitpunkt** der Sprünge durch ZV modelliert wird, nicht die Amplitude.

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} u(t - T_i), \quad T_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$$

X_j ist exponentiell verteilt, T_i ist Gamma-verteilt

$$f_{T_i}(t) = \frac{\lambda^i}{(i-1)!} t^{i-1} e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$$
$$\mathrm{P}(\{N_t = n\}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(\lambda t)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}_+$$

Eigenschaften

- ist ein Zählprozess ($\mathbb{N}_t \in \mathbb{N}_0$, monoton steigend und stetig)
- hat unabhängige Inkremente
- $N_t - N_s$ ist Poisson-verteilt mit Parameter $(\lambda(t-s)$ für alle $0 \le s \le t$
- hat eine Rate λ
- Zeitintervalle zwischen den Inkremetierungen sind unabhängig und identisch exponentialverteilt mit Parameter $\lambda \triangleq$ **gedächtnislos**

Erwartungswertfunktion	$\mu_N(t) = \lambda t$
Varianz	$\sigma_N^2(t) = \lambda t$
Autokorrelationsfunktion	$r_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st$
Autokovarianzfunktion	$c_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\}$

14. Bedingte Unabhängigkeit

14.1. Bedingte Unabhängigkeit

A und C heißen bedingt unabhängig gegeben B, wenn gilt:
$\mathrm{P}(A \cap C \mid B) = \mathrm{P}(A \mid B)\,\mathrm{P}(C \mid B)$ bzw.
$\mathrm{P}(A \mid B \cap C) = \mathrm{P}(A \mid B)$

Dann gilt:
$p_{Z \mid Y,X}(y \mid y, x) = p_{Z \mid Y}(z \mid y)$
$f_{Z \mid Y,X}(z \mid y, x) = f_{Z \mid Y}(z \mid y)$
X, Z sind bedingt unabhängig gegeben Y, kurz: $X \to Y \to Z$

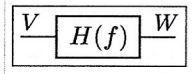
15. Zufallsprozesse(ZP) und lineare Systeme

15.1. Allgemeines

Bedingung: $\{h(t)\}$ $\to$ Kausal und r_X beschränkt & stetig

Im **Zeitbereich:**
$$w(t) = (h * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) v(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$
Erwartungswert: $\mu_W = (\mu_V * h)(t)$ (nicht WSS)

Im **Frequenzbereich:**
$W(f) = H(f)V(f)$



W_t	Ausgang	
V_t	Eingang	
$h(s,t)$	Impulsantwort	

Falls Zufallsprozesse **WSS**:

Erwartungswert: $\mu_W = \mu_V \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \mathrm{d}t$

Kreuzkorrelationsfkt: $r_{W,V}(\tau) = \mathrm{E}[W_s V_t] = (h * r_V)(\tau)$
Autokorrelationsfkt: $r_W(\tau) = \mathrm{E}[W_s W_t] = (\bar{h} * h * r_V)(\tau)$
mit $\bar{h}(\tau) = h(-\tau)$

15.2. Leistungsdichtespektrum (LDS)

invers

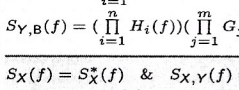
Nicht WSS $\Rightarrow$ Kein LDS

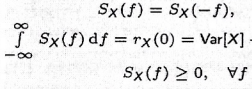
$$S_V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_V(\tau) e^{-j2\pi f \tau}\, \mathrm{d}\tau$$

$r_V(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_V(f)$
$r_{V,W}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_{V,W}(f)$
$r_{V,W}(-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S^*_{V,W}(f)$

Auf Frequenz bezogene Signalleistung für infitisimales Frequenzband.

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$
$$S_{Y,X}(f) = H(f) S_X(f)$$
$$S_{X,Y}(f) = H^*(f) S_X(f)$$





$$S_{Y,X}(f) = \left(\prod_{i=1}^{n} H_i(f)\right) S_X(f)$$
$$S_{X,Y}(f) = \left(\prod_{i=1}^{n} H_i^*(f)\right) S_X(f)$$
$$S_{Y,B}(f) = \left(\prod_{i=1}^{n} H_i(f)\right)\left(\prod_{j=1}^{m} G_j(f)\right)^* S_{X,A}(f)$$

$$S_X(f) = S_X^*(f) \quad \& \quad S_{X,Y}(f) = S_{Y,X}^*(f), \quad \forall f \in \mathbb{R}$$
$$S_X(f) = S_X(-f), \quad \forall f \in \mathbb{R}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, \mathrm{d}f = r_X(0) = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{E}[X]^2 = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$
$$S_X(f) \ge 0, \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

Momenterzeugende Funktion, Multivariate Normalverteilung, Multivariate reelle Zufallsvariablen und Komplexe Zufallsvariablen waren im WS 2015/16 nicht prüfungsrelevant und werden hier deshalb nicht behandelt. P.S. Stochastik ♡ dich.

$\omega_t \to \boxed{H_1} \to X_t$
$V_t \to \boxed{H_2} \to Y_t$
$r_{Z,X}(\tau) = (r_{V,W} * h_1(-\tau) * h_2(\tau))$

für Poisson: $p_{X_{t_2} \mid X_{t_1}}(k_2 \mid k_1) = P(\{X_{t_2} - X_{t_1} = k_2 - k_1\} \mid \{X_{t_1} = k_1\})$

$\overset{*}{=} P(\{X_{t_2} - X_{t_1} = k_2 - k_1\})$ *Weil nicht überlappende Inkremente des Poisson Prozesses unabhängig sind.

Stochastische Signale Praktikum

1. Allgemeine Befehle

1.1. Standardbefehle

Befehl	Funktion
save(*filename, variable*)	speichert *variable* in matfile
load(*filename*)	lädt Variable aus matfiel
clear *variable*	löscht *variable*
clear all	löscht alle Variablen im Workspace
clc	löscht Inhalt des Kommandofensters
doc *expression*	Hilfedatei zu *expression*
help *expression*	Kurzhilfe zu *expression*

1.2. Allgemeine Rechenoperationen

Befehl	Funktion
mod(x,y)	x modulo y (immer positiv)
rem(x,y)	x modulo y (vorzeichenabhängig)
sqrt(x)	$\sqrt{x}$
exp(x)	e^x
log(x)	Natürlicher Logarithmus $\ln(x)$
floor(x)	Abrunden auf Integer
ceil(x)	Aufrunden auf Integer
sum(x)	Summe über Werte des Vektors x
prod(x)	Produkt über Werte des Vektors x
min(x)	kleinster Wert des Vektors x
max(x)	größter Wert des Vektors x
all(x)	1 für keine 0 in Vektor x
any(x)	1 für eine Nicht-0 in Vektor x
mean(x)	Mittelwert des Vektors x
sign(x)	Vorzeichen von x (0 wenn x=0)
abs(x)	Betrag von x

1.3. Operatoren

Operator	Funktion
a>b	Gibt logisch 1 zurück wenn $a > b$, sonst 0
a>=b	Gibt logisch 1 zurück wenn $a \geq b$, sonst 0
a==b	Gibt logisch 1 zurück wenn $a = b$, sonst 0
a~=b	Gibt logisch 1 zurück wenn $a \neq b$, sonst 0
a*b	Matrix-Matrix-Multiplikation von a und b
a.*b	Elementenweise Multiplikation von a und b
a(a>=0)	Gibt Teilvektor von a zurück, wo der Wert ≥ 0

1.4. Komplexe Zahlen

Befehl	Funktion
complex(a,b)	$a + jb$
real(z)	Realteil von z
imag(z)	Imaginärteil von z
abs(z)	Betrag/Komplexe Amplitude von z
angle(z)	Phase von z
conj(z)	konjugiert komplex von z

1.5. Trigonometrische Funktionen

Befehl	Funktion
sin(x), cos(x), tan(x)	x in Bogenmaß
sind(x), cosd(x), tand(x)	x in Grad
asin(x), acos(x), atan(x)	Arcusfunktionen (Rad)
asind(x), acosd(x), antans(x)	Arcusfunktionen (Grad)

2. Matrizenrechnung

2.1. Rechenoperationen

Befehl	Funktion
[a b c]	Zeilenvektor (bzw. vertikales aneinanderreihen)
[a; b; c]	Spaltenvektor (bzw. horizontales aneinanderreihen)
[a b c; d e f; g h i]	3x3-Matrix
[a b] = size($\boldsymbol{A}$)	Dimensionen der Matrix (a Zeilen, b Spalten)
inv($\boldsymbol{A}$)	inverse Matrix von $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{A}'$	$\boldsymbol{A}^\top$ (transponiert konjugiert komplex)
$\boldsymbol{A}.'$	$\boldsymbol{A}^\top$ (transponiert)
$\boldsymbol{A} \backslash \vec{b}$	löst $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$
$\boldsymbol{A}$(m,n)	Element $\boldsymbol{A}_{m,n}$
$\boldsymbol{A}$(m,:)	m-te Zeile
$\boldsymbol{A}$(:,n)	n-te Spalte
$\boldsymbol{A}$(Bedingung)	Alle Element in A, auf die die Bedingung zutrifft
find($\boldsymbol{A}$)	lokalisiert Nicht-Null-Elemente (Indizes)
det($\boldsymbol{A}$)	Determinante von A
rank($\boldsymbol{A}$)	Rang (Anzahl unabhängiger von A
[V,D]= eig($\boldsymbol{A}$)	Eigenwerte (D) und Eigenvektoren (V) von A
(a:b:c)	Vektor von a bis c mit Schrittweite b
linspace(a,b,n)	n Werte im gleichen Abstand von a bis b
norm(x)	eukl. Norm des Vektors x
sum($\boldsymbol{A}$)	Summer der Werte über Spaltenwerte
sum($\boldsymbol{A}$,2)	Summer der Werte über Zeilenwerte
mean($\boldsymbol{A}$)	Mittelwert der Spaltenwerte
mean($\boldsymbol{A}$,2)	Mittelwert der Zeilenwerte
numel($\boldsymbol{A}$)	Anzahl der Elemente in $\boldsymbol{A}$

Komponentenweises Rechnen durch einen Punkt vor einem Operator
Bsp: $\boldsymbol{A}$.^2 quadriert jedes Element der Matrix $\boldsymbol{A}$
Inlinefunktion: @(x)(f(x))

2.2. Spezielle Matrizen

Befehl	Funktion
eye(m,n)	$m \times n$ Einheitsmatrix
zeros(m,n)	$m \times n$ 0-Matrix
ones(m,n)	$m \times n$ 1-Matrix
diag($\vec{x}$)	Diagonalmatrix mit den Werten von $\vec{x}$
rand(m,n)	$m \times n$ Zufallsmatrix (Werte: 0-1)
randi(imax,m,n)	integer Zufallsmatrix mit max. imax
magic(n)	$n \times n$ magisches Quadrat

Normalverteilte Zufallsvariable X mit
$\mu = 1$ und $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ ~~und 100~~
Spaltenvektor mit 100 Realisierungen von
X: y = 0.5 * randn(100,1) + 1

3. Schleiflab

while:	for:
while expression	*for* i=0:1:20
statements	statements
end	*end*

Schleife vorzeitig verlassen mit break

4. Plotten

Befehl	Funktion
plot(x,y,'prop')	Plottet x und y mit Farbe/Symbol 'prop'
stem(y)	Plottet diskrete y Werte (nicht verbunden)
bar(x,y)	Plottet x und y in einem Balkendiagramm
xlim([a b])	Begrenzt Bereich der x-Achse auf [a,b]
ylim([c d])	Begrenzt Bereich der y-Achse auf [c,d]
axis([a b c d])	Kombination aus xlim + ylim
xlabel('Name')	Benennt x-Achse
ylabel('Name')	Benennt y-Achse
title('Titel')	Tituliert den Plot
subplot(H,B,Position)	Selektiert Plot in Figure mit H x B Plots

Beispiel:

```
figure(1);                  % new figure
clf;                        % clear old figures
plot(x, y, 'k');            % plot y(x) in black 'k'
hold on;                    % more plots in same figure
plot(x, z, 'ro')            % plot z(x) in red circles
legend('y', 'z')            % names of plots
hold off;
```

5. Stochastische Zufallsvariablen

5.1. Realisierung von Standardmodellen

Befehl	$m \times n$-Realisierung einer ...
rand(m,n)	gleichverteile ZV (Werte: 0-1)
randn(m,n)	Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$
gamrnd(k,t,m,n)	gammaverteile ZV, shape k, scale t
binornd(n,p,m,n)	Binomialverteilung mit Parameter n, p
binornd(1,p,m,n)	Bernoulliverteilung mit Wahrscheinlichkeit p
geornd(p,m,n)	Geometrische Verteilung mit Wahrsch. p
exprnd(1/lambda,m,n)	Exponentialverteilung mit Parameter λ

Beispiele:

Befehl	Ergebnis
2*rand+1	gleichverteile ZV im Bereich [1,3]
plot(y,unifpdf((y-1)/2)/2)	plottet PDF der oberen ZV
plot(x,unifpdf(2*x)*2)	PDF einer gv. ZV im Bereich [0,0.5]
sigma*randn+mu	Realisierung der Normalv. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

5.2. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) $f_X(x)$

Befehl	PDF an den Stellen x einer ...
unifpdf(x,a,b)	Gleichverteilung im Intervall [a,b]
poisspdf(x,lambda)	Poissonverteilung mit Parameter λ
normpdf(x,mu,sigma)	Normalverteilung mit Parameter mu und sigma
gampdf(x,k,t)	Gammaverteilung mit shape k und scale t

5.3. Kommulative Verteilungsfunktion (CDF) $F_X(x)$

Befehl	CDF an den Stellen x einer ...
unifcdf(x,a,b)	Gleichverteilung im Intervall [a,b]
poisscdf(X,lambda)	Poissonverteilung mit Parameter λ
normcdf(X,mu,sigma)	Normalverteilung mit Parameter μ und σ
cdfplot(X)	Schätzt und plottet CDF von X

6. Analyse von Zufallsvariablen

6.1. Schätzung von Paramtern einer Zufallsvariable X

x ist ein Vektor von Realisierungen von X

Befehl	Funktion
mean(x)	Schätzt Erwartungswert μ der ZV X
var(x)	Schätzt Varianz Var(X) der ZV X
std(x)	Schätzt die Standardabweichung σ der ZV X
length(x)	Anzahl der Realisierungen der ZV X
mean(x.^3)	Schätzung des 3. Moments der ZV X

6.2. Histogramm

Befehl	Funktion
hist(A)	Teilt A in 10 gleiche Bereiche (Bins) und zählt die Elemente im jeweiligen Bin
hist(A,b)	Teilt A in b gleiche Bereiche (Bins) und zählt die Elemente im jeweiligen Bin
hist(A,centers)	Zählt die Elemente in den Bins um den Einträgen in centers
[n,centers]=hist(...)	Gibt in Anzahl der Elemente in n zurück und die Position der Bins in centers
bar(hist(...))	Erstellt ein Balkendiagramm des Histogramms

7. Signalverarbeitung

7.1. Audiosignalverarbeitung

Befehl	Funktion
[a,b]=audioread('...')	Liest Audiodatei in Vektor a ein (Abtastrate b)
sound(x,b)	Spielt das Signal in Vektor x (Abtastrate b) ab
buffer(x,n)	Teilt Signalvektor x in nichtüberlappende Frames der Länge n
buffer(x,n,p)	Teilt Signalvektor x in Frames der Länge n die sich um p überlappen

Beispiel:

```
buffer(1:12,6,3)
%liefert ...
ans =
     0     0     2     4     6     8
     0     1     3     5     7     9
     0     2     4     6     8    10
     1     3     5     7     9    11
     2     4     6     8    10    12
```

7.1.1 Lineare Systeme

Befehl	Funktion
conv(x,y)	Faltung zwischen Vektor x und y

conv(x,y) gibt einen Vektor der Länge length(x) + length(y) - 1 zurück

from Lukas Kompatscher – Mail: lukas.kompatscher@tum.de
Last revised: February 13, 2018

8. Begriffe

i.i.d.
Independent and identically distributed (unabhängig und gleichverteilt)

Ergodisch
Eine Zufallsfolge heißt ergodisch, wenn Mittelwerte über die Zeit (für eine einzelne gegebene Realisierung der Folge) zum gleichen Ergebnis führen wie Erwartungswertbildung (für einen einzelnen Zeitpunkt).

Klingonisch
Die klingonische Sprache ist die von Klingonen gesprochen Sprache. Sie ist im gesamten Klingonischen Imperium verbreitet.

9. Kapitel 1

9.1. Histogramm einer gleichverteilten ZV plotten

```
function x=hist_rand(N)
% Vektor x mit N Realisierungen von X (Gleichverteilung)
x=rand(N,1);
centers=0+1/40:1/20:1-1/40;
counts=hist(x,centers);
% Normierung von counts fuer eine PDF
counts = counts/N*20;
bar(centers,counts);
xlabel('x')
ylabel('h(x)')
title(sprintf('N = %0id',N));
```

10. Kapitel 2: Quantisierung und Transformation von ZV

10.1. Beispielaufgabe

Gegeben sei eine Zufallsvariable X, die im Intervall $[0,1]$ gleichverteilt ist und eine Zufallsvariable $Y = g(X)$, deren WDF mit der folgenden Funktion ausgewertet werden kann:

```
function f = mypdf(y)
f=unifpdf(exp(y)).*exp(y);
```

Folgerungen:
Die Funktion $g = g(x) = ln(x)$
1000 Realisierungen von Y erzeugen: y=log(rand(1000,1));

11. Kapitel 3: Bedingte Verteilung

11.1. Histogramm eines AWGN-Kanals

X Eingangssignal
$Z = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ weißes Rauschen
Y Ausgangssignal

```
function hist_out(N,p,sigma)
binwidth=0.025;
centers=-2+binwidth/2:binwidth:3-binwidth/2;
figure
subplot(311)

% X 0 oder 1, Y = X + normalverteiltem Rauschen
x=binornd(1,p,N,1);
y=awgn_channel(x,sigma);

counts=hist(y,centers);
bar(centers,counts/(binwidth*sum(counts)),1);
ylim([0 2])
xlabel('y')
ylabel('h(y)')
title(sprintf('N=%0id',N))

subplot(312)
% Fall X ist immer 1
x=ones(N,1);
y=awgn_channel(x,sigma);

counts=hist(y,centers);
bar(centers,counts/(binwidth*sum(counts)),1);
ylim([0 2])
xlabel('y')
ylabel('h(y|x=1)')

subplot(313)
% Fall X ist immer 0
x=zeros(N,1);
y=awgn_channel(x,sigma);

counts=hist(y,centers);
bar(centers,counts/(binwidth*sum(counts)),1);
ylim([0 2])
xlabel('y')
ylabel('h(y|x=0)')
```

11.2. Maximum-Likelihood-Detektion

$$\max_{\hat{x}\in\{0,1\}} f_{Y\mid X}(y|\hat{x})$$

In unserem Fall: $\hat{x} = \begin{cases} 0 & y \leq \frac{1}{2} \\ 1 & y > \frac{1}{2} \end{cases}$ Nachteil: Ignoriert das Wissen über die Eingangsverteilung.

```
function xhat = ml_detector(y)
xhat=(y>0.5);
```

Nachteil: Ignoriert Wissen über die Eingangsverteilung

11.3. Maximum-A-Posteriori-Detektion

$$\max_{\hat{x}\in\{0,1\}} p_{X\mid Y}(\hat{x}|y)$$

mit

$$p_{X\mid Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{p f_Z(y-1)}{f_Y(y)} & x = 1 \\ \frac{(1-p) f_Z(y)}{f_Y(y)} & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \frac{f_{Y\mid X}(y|x) p_X(x)}{f_Y(y)}$$

```
function xhat = map_detector(y,p,sigma)
xhat=(p*normpdf(y-1,0,sigma)>(1-p)*normpdf(y,0,sigma));
```

Nachteil: Die Verteilung der Zufallsvariable am Eingang muss bekannt sein

Spezialfall der diskreten Gleichverteilung $p_X(x) = \frac{1}{|\Omega_X|} \forall x \in \Omega_X$:
p_X für alle x gleich $\rightarrow$ kann aus der Entscheidungsregel gestrichen werden.
ML äquivalent zu MAP

11.4. Bitfehlerwahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit, dass der Detektor falsch entschieden hat.

```
p = mean(x ~= xhat);
```

12. Kapitel 4: Standardmodelle, Erwartungswert und Varianz

12.1. Modellierung für Mobilfunknetz

Überlagerung von Nutzern im Hotspot-Bereich (Normalverteilung) X_h, Y_h und anderen Nutzern (Gleichverteilung) X_h, Y_h mit der Bernoulli-verteilten ZV B.

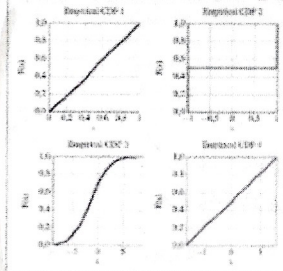
$$X_m = \begin{cases} X_h & \text{wenn } B = 1 \\ X_u & \text{wenn } B = 0 \end{cases} \qquad Y_m = \begin{cases} Y_h & \text{wenn } B = 1 \\ Y_u & \text{wenn } B = 0 \end{cases}$$

```
function M=mixed_positions(N,L,muX,muY,sigma,q)
M=zeros(N,2); % Matrix initialisieren

H=hotspot_positions(N,L,muX,muY,sigma);
U=uniform_positions(N,L);
b=binornd(1,q,N,1);

M(b==1,:)=H(b==1,:);
M(b==0,:)=U(b==0,:);
```

12.2. Empirische Realisierung von CDFs



(1) cdfplot(rand(1000,1));

(2) cdfplot(sign(rand(1000,1)-0.5));

(3) cdfplot(randn(1000,1)*3-1.5);

(4) cdfplot(rand(1000,1)*3-1.5);

13. Kapitel 5: Zufallsfolgen

13.1. Realisierung einer Zufallsfolge

$X_{n+1} = X_n + V_n \qquad Y_{n+1} = Y_n + W_n$
V_n und W_n sind i.i.d. Gleichverteilung mit Intervall $[-\delta, \delta]$
Folgender Code aktualisiert die Positionen (x_i, y_i) im Vektor pos

```
function pos=update_positions(pos,delta)
pos=pos+2*delta*(rand(size(pos))-0.5);
```

14. Kapitel 6: Zufallsfolgen und lineare System

14.1. Signalgenerierung

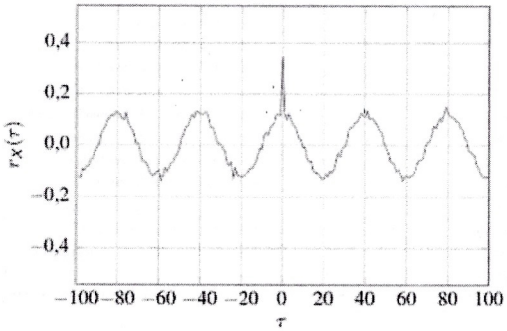
```
%Erstellt Sinussignal der Frequenz f1 mit der Amplitude A1,
%ueberlagert mit weissen Rauschen mit Parameter sigma
function x=create_signal(fS,T,f1,A1,sigma)
t=1:T*fS;
x=A1*sin(2*pi*f1/fS*t) + sigma*randn(1,fS*T);
```

14.2. Geschätzte Autokorrelationsfolge

Gegeben:

$$X_n = A_1 \sin(2\pi \frac{f}{f_s} n + \varphi_0) + Z_n$$

wobei φ_0 im Intervall $[0, 2\pi]$ stetig gleichverteilt ist.



Geschätzte Autokorrelationsfolge von X_n

Folgerung

- Schätzung der Frequenz: $f = \frac{f_s}{40}$
- Der Peak bei $\tau = 0$ ist auf Z_n zurückzuführen
- $E[Z_k Z_l] = 0$ für $k \neq l$