$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x\ln(ax)-x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x\ln(a)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin(x)^2}$
$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln\lvert 1+x^2\rvert$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
" + "	$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

Skalarfelder

- offene Kugel $B_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-x_0\|<r\}$
- Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- Komplement: $D^c=\mathbb{R}^n\setminus D$
- $x_0\in \text{int}(D)$: $B_\varepsilon(x_0)$ für $\varepsilon>0$
- D offen: $D=\text{int}(D)$ $\quad(\partial D=\partial D^c)$
- Randpunkt: $B_\varepsilon(x_0)\cap D\neq\emptyset \wedge B_\varepsilon(x_0)\cap D^c\neq\emptyset$
- Abschluss $\bar D$ von D: $\bar D = D\cup\partial D$
- D abgeschlossen: $\partial D\subseteq D$
- D beschränkt: $\exists u\ \forall x\in D: \|x\|<u$
- kompakt, fall abgeschl. u beschränkt

Grenzwert:

$\lim_{x\to x_0} f(x)=c$

Stetigkeit

$\forall x\in\mathbb{R}^n: \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Ist $f(x)$ stetig und kompakt, gibt es ein max und min.
(kompakt = beschränkt und abgeschlossen)

Differentiation

Richtungsableitung: $\partial_v f(x)=\langle\nabla f(x),v\rangle$

Gradientenregeln:

Linear: $\nabla(\lambda f+\mu g)=\lambda\nabla f+\mu\nabla g$

Produkt: $\nabla(f\cdot g)=g(x)\nabla f(x)+f(x)\nabla g(x)$

Quotient: $\nabla(\frac{f}{g})=\frac{1}{g^2}(g(x)\nabla f(x)-f(x)\nabla g(x))$

Kettenregeln:

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\wedge g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\wedge g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$
$h:=g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$	$h:=f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$\nabla h(x)=g'(f(x))\cdot\nabla f(x)$	$h'(x)=\nabla f(g(x))^T\cdot g'(x)$

Höhere partielle Ableitung

Satz v. Schwarz: $f\in C^2(D)$: $f_{x_ix_j}=f_{x_jx_i}$

Mittelwertsatz: $\exists\xi\in\overline{x,y}: f(y)-f(x)=\nabla f(\xi)^T(y-x)$

$\to |f(y)-f(x)|\leq c|y-x|$ mit $c=\max\|\nabla f(z)\|$ $z\in\overline{x,y}$

Hessematrix symmetrisch, wenn $f\in C^2(D)$

Jacobi

$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \end{pmatrix}$

Linear: $J_{\alpha f+\beta g}=\alpha J_f+\beta J_g$

Produkt: $J_{f^T\cdot g}=g^TJ_f+f^TJ_g$

Komposition: $J_{g\circ f}=J_g(f(x))\cdot J_f(x)$

Umkehr: $J_{f^{-1}}(f(x))=J_f(x)^{-1}$

Restglied

$R_{m+1}(a,a+h)=f(x)-T_m(a,a+h)$

$=\frac{1}{m!}\int_0^1(1-t)^m g^{(m+1)}(t)\,dt$

Zwischenstelle $\xi\in(0,1)$ mit:

$R_{m+1}(a,a+h)=\frac{1}{m!}g^{(m+1)}(\xi)$

Taylorpolynom

$T_m(a,a+h)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{n!}g^n(0)$

- $g(0)=f(a)$
- $g'(0)=\nabla f(a)^Th$
- $g''(0)=h^TH_f(a)h$
- $g'''(0)=\sum_{i,j,k=1}^n\partial_{x_i}\partial_{x_j}\partial_{x_k}f(a)h_ih_jh_k$

Zylinder

$\begin{pmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\\ z\end{pmatrix}$ $\quad S_z: [e_r e_\varphi e_z]=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\quad f_{kar}=S_z f_{zy}$, $\quad f_{zy}=S_z^{-1}f_{kar}$

$S^{-1}=S^T$

Kugel

$\begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta\\ r\sin\varphi\sin\theta\\ r\cos\theta\end{pmatrix}$ $\quad S_k: [e_r e_\theta e_\varphi]=\begin{bmatrix}\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\\ \sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{bmatrix}$

Implizite Funktionen

$f:\mathbb{R}^{k+m}\to\mathbb{R}^m$ stetig diffbar

$\to f(z)=0 \quad z\in\mathbb{R}^{k+m}$

$\to J_{f,x}(z)$ invertierbar

$\to\exists$ offene Menge I: $g: I\to J$ $f(g(y),x)$

(ist nach x auflösbar)

$f:\mathbb{R}^2\supseteq D\to\mathbb{R}$ $\quad\partial_yf(x_0,y_0)\neq0$

$\Rightarrow\exists I\subseteq D: I=(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$

$\exists J\subseteq\mathbb{R}: J=(y_0-\delta,y_0+\delta)$

$\to I\times J\subseteq D$, $\partial_yf(x,y)\neq0\ \forall(x,y)\in I\times J$

$$g'(x)=\frac{-\partial_xf(x,g(x))}{\partial_yf(x,g(x))}$$

$$g''(x)=-\frac{\partial_{xx}f(x,g(x))+2\partial_{xy}f(x,g(x))\cdot g(x)'+\partial_{yy}f(x,g(x))\cdot(g'(x))^2}{\partial_yf(x,g(x))}$$

$$\partial_xg(x,y)=-\frac{\partial_xf}{\partial_zf}\qquad\partial_yg(x,y)=-\frac{\partial_yf}{\partial_zf}$$

Umkehrabbildung

D offen. $f:D\to\mathbb{R}^n\in C^1(D)$, $x_0\in D$ mit $J_f(x_0)$ invertierbar

$\to\exists U$ Umgebung f bijektiv $\to$ Umkehrbar

Hauptminoren

$\begin{bmatrix}+ & \\ & +\end{bmatrix}_+$ pos. definit

$\begin{bmatrix}- & \\ - & \pm\end{bmatrix}$ neg. definit wenn abwechselnd positiv

Extremwerte

ohne: suche $\nabla f(x_0)=0$

$\to H_f(x_0)\begin{cases}\text{neg. definit}\to x_0=\text{lok. max.}\\ \text{pos. definit}\to\ =\text{lok. min}\\ \text{indefinit}\to\ =\text{Sattelpunkt}\\ \text{semidefinit}\to\ =\text{keine Aussage}\end{cases}$

$\to$ globale Extrema noch checken!

mit: NB $g(x)=0$

$\mathcal{L}(x,\lambda)=f(x)+\lambda g(x)$

- Regularitätsbed.: $\nabla g(x)\neq0\ \forall x\in\Omega$
- $\nabla\mathcal{L}(x,\lambda)\overset{!}{=}0$
- Vergleiche Funktionswerte der Kandidaten

(Entscheide über Extrema, auch Rand)

Lineare Ausgleichsrechnung

$\to A^TAx=A^Tb$

(Ausgleichsgerad gegeben)

Kurvenintegral: Skalar

$$\int_\gamma f\,ds=\int_a^b f(\gamma(t))\|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

Vektoriell

$$\int_\gamma v\,ds=\int_a^b v(\gamma(t))^T\dot\gamma(t)\,dt$$

$\gamma\in\mathbb{R}^n$ $\quad t\in[a,b]$

Krummlinige Koordinaten

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f\,d(x_1,x_2)=\int_a^b\int_c^d f(\Phi(x))\det(J_\Phi)\,dx_1dx_2\ (du\,dv)$$

$\Phi(u,v)\to\ldots$

Bereichsintegral: $B \in T_y, I$:

$$\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

$T_y D$: $\displaystyle\int_c^d\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

Oberflächenintegral

$$\iint_\Phi f\,dO=\int_a^b\int_c^d f(\Phi(u,v))\|\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v)\|\,du\,dv$$

Flächenbestimmung: $f(x)=1$

Integralsätze

$e_z \; e_r \; e_\varphi$
$e_\varphi \; e_r \; e_\theta$

Gauß: $\int_V \operatorname{div} v \, \partial V = \int_{\partial V} v \, \partial O$

$\rightarrow \int_A \operatorname{div} v \, \partial A = \int_{\partial A} v(\gamma(t))^T n \, ds$

$n = \|\dot\gamma\|^{-1} (\gamma_2, -\gamma_1)^T$
$ds = \|\dot\gamma\| \, \partial t$

Stokes: $\int_A \operatorname{rot} v \, \partial O = \int_{\partial A} v \, ds$

Oberflächen- Volumenelement
Zyl: $r \partial r \partial \varphi \quad r \partial \varphi \partial z \quad \partial z \partial r$
$\partial V = r \partial r \partial \varphi \partial z$
Kug: $r \partial r \partial \theta \quad r^2 \sin\theta \, \partial\theta \partial\varphi \quad r \sin\theta \, \partial\varphi \partial r$
$\partial V = r^2 \sin\theta \, \partial r \partial\varphi \partial\theta$

Green: $\int_A \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \, \partial x \partial y = \int_{\partial A} v \, ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} v \, ds$

Fläche gegen Uhrzeigersinn, ansonsten Subtraktion

Gradientenfeld & Potential

-> Kurve muss einfach zsm. hängend sein
$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Gradientenfeld, wenn: $J_f(x) = J_f(x)^T$
$- n=2 \; \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$; $n=3$: $\operatorname{rot} v = 0$

-> Stammfunktion geschickt rechnen!

DGL

Existenz v. Lösung: $\partial_u f(t,u) \neq 0$ -> f stetig ~~und~~ $\partial_u \neq 0$? und

globale Lipschitz: $\exists L > 0 : \|f(t,u_1) - f(t,u_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\|$

Picard-Lindelöf: Lipschitz -> eindeutige Lösung

Peano: f stetiges Skalarfeld auf Rechteck $D = [t_0, t_0 + a] \times [u_0 - \beta, u_0 + \beta]$ -> Lösungen

Seperierbar: $u'(t) = f(u) \cdot g(t) \rightarrow \int \frac{1}{f(u)} du = \int g(t) dt$
-> Nach $u(t)$ auflösen -> Anfangswert einsetzen

$x' = Ax$

1. Eigenwerte & Eigenvektoren
2. $x = \sum c_i e^{\lambda_i t} v_i$
3. c_i durch Anfangswert

komplex: $\lambda = \lambda_{re} + i\lambda_{im}$; $v = v_{re} + i v_{im}$

$c_1 e^{t\lambda_{re}} [\cos(t\lambda_{im}) v_{re} - \sin(t\lambda_{im}) v_{im}] + c_2 e^{t\lambda_{re}} [\cos(t\lambda_{im}) v_{im} + \sin(t\lambda_{im}) v_{re}]$

$x' = Ax + b$ (allgemein)

1. Löse homogene Gleichung (setze $c = c(t)$)
2. $x' - Ax =$ Lösung abgeleitet $= b$
3. Bestimme $c_i'(t)$ durch auflösen & integrieren
4. Setze $c_1 - c_i$ in allg. Lösung ein

DGL in lineares DGL

$u'' - t^2 u' + 2u = 3t^2$

$u' = v_2$
$u'' = -2u + t^2 v_2 + 3t^2$

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' \\ u'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3t^2 \end{bmatrix}$$

Variation d. Konstanten

1. Löse homogenes System (AC)
2. Setze $c = c(t)$ und leite ab
3. setze $c'(t)$ & $c(t)$ in ursprüngliche Funktion ein
4. Löse nach $c'(t)$ auf und integriere
5. $c(t)$ in $u(t)$; spezifische Lsg durch Anfangswerte

DGL höherer Ordnung

1. Charakteris. Polynom
2. Lösung von einfache
3. Doppelte NST ? -> $u_1 = c_1 e^{\lambda t}$ $u_2 = c_2 e^{\lambda t} t$

komplex: $u_1 = e^{at} \cos(bt)$ $u_2 = e^{at} \sin(bt)$
(auch hier gilt das „t")

Stabilität

1. GGP: $f(u) = 0$
2. J_f EW berechnen

$\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ instabil
$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ asymptotisch stabil
$\operatorname{Re} \leq 0$ keine Auss.

$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^R \\ \sin(x^2+y^2) \\ 0 \end{cases}$ nach y diffbar in $\binom{0}{0}$ ↳ $\lim_{y \to 0} f(0,y)$

$f(x,y) = x^2 + 2y^2$ weder globales Max o. Min auf $A = \{x^2 + y^2 < 1\}$?
-> falsch $f(x,y) \geq 0$ immer. $P(0,0)$ Minima!

abgeschlossene Menge die nicht kompakt ist: $M = \mathbb{R}^n$

$u''' = 1 \rightarrow$ $v_1' = v_2$, $v_2' = v_3$, $v_3' = 1$

beschränkte Menge, die nicht einfach zusammenhängend ist: $A = [0,1]^3 \setminus \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$

eine echte Teilmenge $X \subsetneq \mathbb{R}^2$, die weder abgeschlossen, offen, noch beschränkt ist: $X = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y > 0\}$

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x| y^2}{x^2+y^2} \\ 0 \end{cases}$ stetig in $(0,0)$? => sei $(x_n, y_n) \to (0,0)$ $n \to \infty$
↳ $0 \leq f(x_n, y_n) = |x_n| \frac{y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \leq |x_n| \to 0$ für $n \to \infty$
↳ $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$ -> stetig