Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий

Выпускная бакалаврская???

«Вычисление справедливой цены опциона европейского типа»

**Выполнил:** студент ИИТММ гр. 381503-3,

Романов А. А.

**Проверил:** к.т.н., доцент кафедры МОиСТ ИИТММ,

Мееров И. Б.

Нижний Новгород

2018 г.

**Оглавление //Переделать**

[Введение //Дополнить 3](#_Toc529730423)

[1. Предметная область 4](#_Toc529730424)

[1.1. Финансовый рынок 4](#_Toc529730425)

[1.2. Финансовая модель 4](#_Toc529730426)

[1.3. Понятие европейского опциона 7](#_Toc529730427)

[2. Постановка задачи // Дополнить 9](#_Toc529730428)

[3. Вычислительная схема 10](#_Toc529730429)

[3.1. Справедливая цена опциона европейского типа 10](#_Toc529730430)

[4. Программная реализация 11](#_Toc529730431)

[4.1. Структура проекта 11](#_Toc529730432)

[4.2. Основные структуры данных 11](#_Toc529730433)

[4.3. Алгоритмы 12](#_Toc529730434)

[5. Результаты экспериментов 15](#_Toc529730435)

[5.1. Тестовая инфраструктура 15](#_Toc529730436)

[5.2. Анализ результатов 16](#_Toc529730437)

[5.2.1. Методика проведения экспериментов 16](#_Toc529730438)

[5.2.2. Результаты запусков на кластере «Лобачевский» 17](#_Toc529730439)

[5.3. Результаты запусков на кластере Intel Xeon Gold 22](#_Toc529730440)

[5.3.1. Результаты запусков на архитектуре Knights Landing с набором команд AVX-512 22](#_Toc529730441)

[5.3.2. Результаты запусков на архитектуре Skylake 25](#_Toc529730442)

[Заключение 30](#_Toc529730443)

[Литература 31](#_Toc529730444)

[Приложения 32](#_Toc529730445)

[Фрагменты программного кода основного проекта 32](#_Toc529730446)

[Фрагменты программного кода проекта, автоматизирующего сбор информации 33](#_Toc529730447)

[СДУ отчёт 34](#_Toc529730448)

[Инфраструктура СЧ 34](#_Toc529730449)

[Вычислительная схема генераторов 35](#_Toc529730450)

[Инфраструктура записи данных 36](#_Toc529730451)

[Аналитическое решение 37](#_Toc529730452)

[Численное решение 39](#_Toc529730453)

[Что-то вроде введения 39](#_Toc529730454)

[Вычисление стоковой цены 40](#_Toc529730455)

[Доказательство корректности 44](#_Toc529730456)

[Вычисление справедливой цены 47](#_Toc529730457)

# Введение //Дополнить

Одним из широко распространённых способов получения прибыли в современном финансовом мире является торговля на биржах, в том числе такими финансовыми инструментами, как акции и облигации. Исходя из возникновения случайных, трудно прогнозируемых событий, влияющих на финансовый рынок, и непрерывной его эволюции, имеет место задача расчёта стоимости купли-продажи активов в кратчайшие сроки (чем быстрее будет получен результат, тем меньше за это время изменится ситуация на рынке).

Так как финансовые расчёты – важная, трудоёмкая и востребованная часть индустрии, область высокопроизводительных вычислений находит своё применение в экономике и занимает там свою нишу. В данной работе будет рассматриваться применение высокопроизводительного программного обеспечения для аналитического вычисления справедливой цены опциона европейского типа. Также будет показано, что техника программирования и оптимизация алгоритмов прямым образом влияет на время расчётов, столь важное для финансового рынка.

После разработки базового алгоритма вычисления цены будут представлены несколько его оптимизированных версий; ускорение – отношение времени работы базового алгоритма к времени работы ускоренного– будет являться доказательством важности техники программирования и рефакторинга готового кода.

# Предметная область

# Финансовый рынок

Финансовый рынок представляет собой совокупность денежных и валютных рынков, рынков ценных (благородных) металлов, рынков финансовых инструментов, включая ценные бумаги. На рынке финансовых инструментов принято различать:

* основные (первичные) инструменты,
* производные (вторичные) инструменты;

Последние являются сложными финансовыми инструментами, построенными на базе основных (более элементарных) инструментов. К числу основных финансовых инструментов относят ценные бумаги:

* банковский счет,
* облигации,
* акции.

К производным финансовым инструментам относят:

* опционы,
* фьючерсные контракты,
* варранты,
* свопы,
* комбинации и т. д.

В данной работе рассматриваются операции с самыми популярными финансовыми инструментами – опционами.

# Финансовая модель

(этот раздел написан с использованием материалов из источников [‎3], [‎5].)

Исходя из особенностей организации финансовых рынков различных стран мира выделяют три основные модели: североамериканскую (рыночную, характерные пример – США), европейскую (банковскую, пример – Германия) и смешанную.

К основным характеристикам европейской модели относятся:

* Низкая доля акционерного капитала, высокая доля финансирования за счет выпуска облигационных займов (соотношение облигаций и акций – 10:1);
* Доминирующая роль коммерческих банков на финансовом рынке;
* Традиция прямого кредитования на покрытие дефицита бюджета наряду с выпуском государством ценных бумаг;
* Высокая доля прямого банковского кредита (50-60%) в финансировании экономики страны.

Для моделирования рынка будем использовать модель Блэка-Шоулза ‎[1], представляющую собой систему дифференциальных уравнений:

Уравнение (1) – ОДУ, отражающее изменение цены облигации *.* На влияет *r* – фиксированный процент.

Уравнение (2) – стохастическое ДУ, описывающее эволюцию цены акции . Оно содержит следующие параметры:

* δ – ставка дивиденда
* волатильность, изменчивость — статистический финансовый показатель, характеризующий изменчивость цены.
* – Винеровский случайный процесс [‎9]
* – дифференциал винеровского процесса
* – начальная цена акции
* – начальная цена облигации

Ниже приведены общепринятые определения, характеризующие случайные процессы:

**Случайный процесс** – семейство случайных величин, индексированных параметром t, интерпретируемого как время.

Случайный процесс , определенный на промежутке , называется **процессом с независимыми приращениями**, если для любых таких, что

, случайные величины

стохастически независимы в совокупности.

Случайный процесс с независимыми приращениями, определённый при , называется **винеровским**, если он удовлетворяет следующим условиям:

* почти наверное
* для любых

Винеровский процесс, названный так в честь Норнберта Винера, является математической концепцией, формализующей случайное поведение, охарактеризованное ботаником Робертом Броуном в 1827 году, обычно называемое броуновским движением. Броуновское движение имеет ключевое значение для моделирования стохастических процессов, так как представляет собой интеграл от идеализированного «белого» шума

Система уравнений (1), (2) имеет аналитическое решение при следующих ограничениях:

**Ограничения на активы:**

* безрисковая ставка. Норма доходности безрискового актива постоянна
* случайное блуждание. Цены подчиняются модели геометрического броуновского движения, и мы предположим, что его дрейф и волатильность постоянны
* Акции не выплачивают дивиденды.

**Ограничения рынка:**

* Нет возможности арбитража (т. е. нет возможности получить безрисковую прибыль).
* Можно брать и предоставлять в долг любую сумму, даже дробную, наличных денег по безрисковой ставке.
* Можно купить и продать любую сумму, даже дробную, акций (включая «короткие продажи»).
* Вышеуказанные транзакции не несут никаких сборов или затрат.
* Процентная ставка и волатильность постоянны.

В этом случае цену акции можно найти с помощью формулы (3):

(3)

# Понятие европейского опциона

(этот раздел написан с использованием материалов из источника [‎2].)

**Опцион** — договор, по которому покупатель опциона получает право, но не обязательство, купить или продать актив (акцию – рисковый актив, облигацию – безрисковый актив) по заранее оговоренной цене в течение определенного промежутка времени. В свою очередь, продавец опциона обязан продать актив или купить его у покупателя опциона в соответствии с оговоренными заранее условиями.

Согласно общепринятой терминологии, опционы делятся на два класса:

* опцион покупателя (call option, даёт право покупки)
* опцион продавца (put option, даёт право продажи)

С точки зрения финансовой инженерии важно то, что эти финансовые инструменты "работают в разных направлениях": когда доход от одного растет, доход от другого уменьшается. Именно это обстоятельство объясняет широко распространенную практику диверсификации при оперировании с опционами разных классов, быть может, и в комбинации с другими ценными бумагами.

По времени исполнения опционы классифицируются на два типа: европейские и американские.

Если опцион предъявляется к исполнению только в заранее определенный момент времени , то говорят, что – момент исполнения, а опцион является опционом европейского типа. Если же опцион может быть предъявлен к исполнению в любой (случайный) момент времени , то говорят, что он является опционом американского типа.

После заключении договора между сторонами *P*1 и *P*2 происходит следующее: Вторая сторона выплачивает денежные средства *C* и в некоторый фиксированный момент времени *T* решает, стоит ли покупать акции по цене *K* у первой стороны. Решение принимается исходя из соотношения цены акции в момент иначальной цены . Если , покупать акции бессмысленно, сторона *P*1получает прибыль *C*, сторона *P*2 теряет *C*. В противном случае *P2* покупает у *P1* акции по цене *K*, в ряде случаев получая прибыль (зависит от соотношения C и ).

**Проблема заключается в нахождении *справедливой цены европейского опциона* –** минимальной цены контракта, при которой соблюдается баланс между выигрышем и проигрышем каждой из сторон. Часто справедливую цену называют рациональной стоимостью опциона.

Определим эту цену как средний выигрыш второй стороны:

, где (4)

*E* – математическое ожидание (зависит в том числе от стохастических факторов). Произведение экспоненты и скобкиотражает дисконтирование – инфляцию при фиксированной процентной ставке *r*.

Идея образования опционов была поднята Фишером Блэком, Майроном Шоулзом и Робертом Мертоном в 1973 году[‎4]. Выведенная ими формула теперь известна как формула Блэка-Шоулза, за которую в 1997 году Шоулз и Мертон получили Нобелевскую премию.

С помощью этой формулы найдём величину :

(5)

– функция стандартного нормального распределения,

Именно эта формула ляжет в основу алгоритма.

# Постановка задачи // Дополнить

Пусть известны волатильность (изменчивость) и процентная ставка (будем считать их постоянными). время исполнения опциона, начальная его цена и цена исполнения опциона.

Необходимо разработать базовый алгоритм, вычисляющий справедливую цену для набора опционов с помощью формулы (5). После этого оптимизировать его различными способами с целью уменьшения времени расчёта и удостовериться в корректности вычислений.

Готовый бенчмарк нужно запустить на различных архитектурах высокопроизводительных систем, сравнить время работы базовой и модернизированных версий и оценить масштабируемость кода.

После анализа результатов потребуется сделать вывод о влиянии приёмов программирования на время работы программного комплекса.

# Вычислительная схема

# Справедливая цена опциона европейского типа

Предварительно объявим массивы pT, pK, pS0, pC, в которых будем хранить время исполнения опциона, фиксированную, начальную и справедливую цену соответственно. Константы и объявим с помощью директивы #define.

Базовая версия алгоритма раз по известным параметрам находит справедливую цену европейского опциона. Схема вычислений состоит последовательном нахождении всех неизвестных формулы (5).

В цикле по числу запусков (i от 0 до N):

{

* Вычислить d1;
* Вычислить d2;
* Вычислить значение функции стандартного нормального распределения для d1;
* Вычислить значение функции стандартного нормального распределения для d1;
* Получить справедливую цену опциона по формуле (5).

}

Ниже представлен граф информационных зависимостей для вычисления цены опциона:

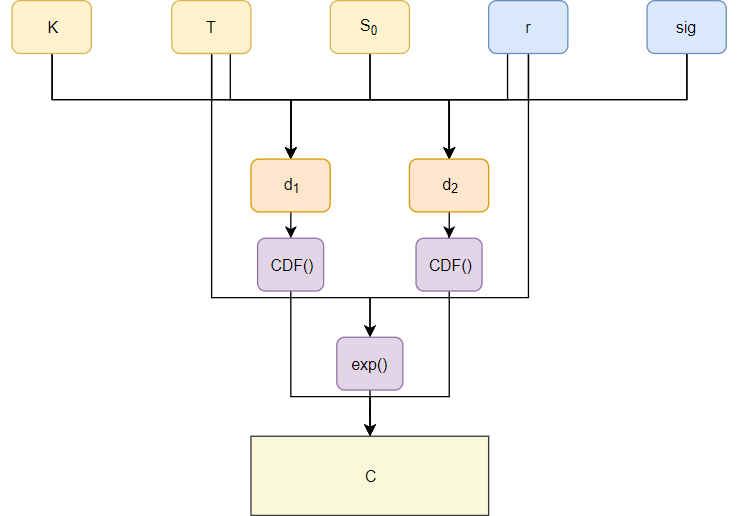


рис. 1. Схема информационных зависимостей

# Программная реализация

# Структура проекта

Программный комплекс собирается с помощью Cmake – системы автоматизации сборки программного обеспечения из исходного кода – и состоит из нескольких модулей, среди которых:

* Проект CallOption. Содержит декларации необходимых переменных и функций. Также включает реализации всех алгоритмов для подсчёта справедливой цены европейского опциона на продажу и на продажу и покупку соответственно.
* gtest. Статическая библиотека с google-тестами.
* tests. Содержит реализацию тестового покрытия алгоритмов.

# Основные структуры данных

В основном проекте были объявлены следующие переменные:

int num\_Threads;

int N; //amount of samples

int version;

double \_time;

double start, finish;

const float invsqrt2 = 0.707106781f;

const float sig = 0.2f; // volatility; percent per year 0.2 -> 20%

const float r = 0.05f; // the interest rate; percent per year 0.05 -> 5%

const float T = 3.0f; // option execute time (years)

const float S0 = 100.0f; // option price at t == 0;

const float K = 100.0f; // strike price -- price fixed in option

Также понадобится новый тип данных (указатель на функцию) и массив, содержащий эти указатели.

Typedef void(\*GetPrices)(float \*pT, float \*pK, float \*pS0, float \*pC);

GetPrices option\_array[9] =

{

\_V0, //base

\_V1, //float

\_V2, //erf

\_V3, //restrict

\_V4, //#pragma simd #pragma vector always

\_V5, //#pragma simd invsqrt2\_1

\_V6, //#pragma simd invsqrt2\_2

\_V7, //#pragma simd #pragma omp parallel for private

\_V8, // \_V7 + #pragma vector nontemporal

};

# Алгоритмы

Базовая версия алгоритма будет модифицирована с помощью перечисленных ниже методов:

* исключение ненужных преобразованй типов
* замена математических функций более быстрыми эквивалентами
* векторизация
* вынос инвариантов за пределы цикла
* использование ключей компилятора, повышающих скорость вычислений
* параллельные вычисления
* эквивалентные преобразования
* прогрев кэша

Ниже приведена таблица, отражающая суть последовательных алгоритмов, вычисляющих стоимость опциона:

//TABS

Таблица 1. Названия и суть алгоритмов

|  |  |
| --- | --- |
| Номер алгоритма | Суть алгоритма |
| V0 | Базовая реализация |
| V1 | Не смешивать типы данных |
| V2 | Эквивалентные преобразования (Erf) |
| V3 | Векторизация цикла (restrict) |
| V4 | Векторизация цикла (директивы) |
| V5 | Вынос инварианта из цикла |
| V6 | Использование интринсика invsqrt |

Рассмотрим эти алгоритмы более детально.

**Версия V0. Базовый алгоритм**

Представляет собой реализацию формулы (5).

void \_V0(float \*pT, float \*pK, float \*pS0, float \*pC)

{

int i;

float d1, d2, p1, p2;

for (i = 0; i < N; i++)

{

d1 = (log(pS0[i] / pK[i]) + (r + sig \* sig \* 0.5) \*

pT[i]) / (sig \* sqrt(pT[i]));

d2 = (log(pS0[i] / pK[i]) + (r - sig \* sig \* 0.5) \*

pT[i]) / (sig \* sqrt(pT[i]));

vsCdfNorm(1, &d1, &p1);

vsCdfNorm(1, &d2, &p2);

pC[i] = pS0[i] \* p1 - pK[i] \*

exp((-1.0) \* r \* pT[i]) \* p2;

}

}

**Версия V1. Исключение ненужных преобразований типов**

Для вычисления справедливой цены достаточно использовать single precision, поэтому заменим функции log, sqrt, exp на соответствующие logf, sqrtf, expf и добавим к числам суффикс **f**.

**Версия V2. Эквивалентные преобразования**

Функцию vsCdfNorm() можно заменить на erff(), так как vsCdfNorm() == 0.5f + erff().

Изменим код:

erf1 = 0.5f + 0.5f \* erff(d1 / sqrtf(2.0f));

erf2 = 0.5f + 0.5f \* erff(d2 / sqrtf(2.0f));

pC[i] = pS0[i] \* erf1 - pK[i] \* expf((-1.0f) \* r \*pT[i]) \* erf2;

**Версия V3. Ключевое слово restrict**

Сначала необходимо сменить режим компиляции с SSE на AVX, используя ключ –xAVX. После этого добавим ключевое слово restrict в декларацию функции:

void \_V3(float\* restrict pT, float\* restrict pK, float\* restrict pS0, float\* restrict pC);

Restrict означает, что на данную область памяти не будут ссылаться другие указатели, то есть массивы не пересекаются, и их можно векторизовать

**Версия V4. Использование директив**

Ещё один способ векторизации заключается в использовании перед циклом директив #pragma simd и #pragma vector always, дающих знать компилятору о том, что с точки зрения программиста массивы не пересекаются и о том, что если векторизация возможна, то она эффективна.

#pragma simd

#pragma vector always

for (i = 0; i < N; i++)

{…}

**Версия V5. Вынос инварианта.**

Чтобы сэкономить время на многократном подсчёте значения , используем изначально объявленную константу.

const float invsqrt2 = 0.707106781f;

Заменим соответствующие строки.

erf1 = 0.5f + 0.5f \* erff(d1 \* invsqrt2);

erf2 = 0.5f + 0.5f \* erff(d2 \* invsqrt2);

**Версия V6. Эквивалентные преобразования. Вычисление квадратного корня.**

Заменим деление умножением, это ещё больше сократит время работы программы. Заменим 1f / sqrtf(pT[i]) на функцию vsInvSqrt() из библиотеки MKL и проверим, сделал ли компилятор замену деления умножением самостоятельно.

**Версия V7. Параллельная версия.**

Используем библиотеку <omp.h> для распараллеливания цикла. Перед началом цикла добавим

#pragma omp parallel for private(invf, d1, d2, erf1, erf2)

**Версия V8. Оптимизация кэша.**

Из четырёх массивов, с которыми мы работаем, только три используются для чтения. В четвёртый (pС) происходит запись результатов, которые в цикле никак не используются, поэтому имеет смысл записывать массив pC напрямую в память, минуя кэш. При таком подходе будут уменьшены накладные расходы на перенос данных, будет сэкономлено по одной операции чтения из кэша за итерацию цикла.

Для того, чтобы дать понять компилятору об отсутствии необходимости кэшировать четвёртый массив, используем #pragma vector nontemporal.

**Non-Temporal Store** — использование режима прямого доступа в память при осуществлении операций записи. Данный режим доступа осуществляет запись данных в память без предварительного считывания старых данных в систему кэш-уровней процессора, что минимизирует «засорение» кэша процессора ненужными данными, в частности, при операции копирования данных.

**Пример тестового покрытия**

После реализации каждой версии алгоритма была проведена проверка на корректность вычислений с помощью библиотеки gtest.lib. Ниже приведён пример юнит-теста для базовой версии.

Был реализован класс, инициализирующий все переменные соответствующими значениями:

class Call\_option : public ::testing::Test {

protected:

float pT, pK, pS0;

float pC;

void set\_values() {

pT = 3.0f;

pK = 100.0f;

pS0 = 100.0f;

N = 1;

}

};

В тесте сравнивается получившаяся цена pC[0] с верным результатом:

TEST\_F(Call\_option, test\_base\_version\_0) {

// Arrange

set\_values();

// Act

option\_array[0](&pT, &pK, &pS0, &pC);

// Assert

ASSERT\_EQ(pC, 20.9244);

}

При успешном прохождении теста можно говорить о корректности работы алгоритма.

# Результаты экспериментов

# Тестовая инфраструктура

Вычислительные эксперименты проводились с использованием следующих инфраструктур:

**Кластер «Лобачевский»:**

* Процессор: 2x 12-ядерных процессора Intel Xeon E5-2680v3 (2.5 GHz) (Haswell)
* Память: 128 GB
* Операционная система: CentOS 6.4
* Компилятор: Intel C++ Composer

**Кластер Intel Endeavor:**

* Процессор: 2x 20-ядерных процессора Intel Xeon Gold 6148 (2.4GHz)
* Память:192 GB
* Операционная система: Red Hat Enterprise Linux Server release 7.5 (Maipo)
* Компилятор: Intel C++ Composer

# Анализ результатов

Был написан программный комплекс, автоматизирующий сбор результатов: создаётся каталог, содержащий отчёты об оптимизации, лог с минимальным временем работы каждого алгоритма для разного числа потоков и таблицу с конечными результатами.

# Методика проведения экспериментов

Анализ результатов построен следующим образом: выполнены запуски программного комплекса на двух различных кластерах: «Лобачевский» и Intel Endevour. На каждом из них проведено сравнение времени работы различных алгоритмов для последовательных и параллельных реализаций. Оценена эффективность масштабируемости кода для параллельных версий. Дополнительно на узлах Intel Endevour получены результаты запусков на архитектурах Knights Landing и Skylake с наборами команд для регистров длиной 256 и 512 бит (AVX-2 и AVX-512 соответственно). Кроме этого, строятся roofline-графики для параллельных версий кода и проводится анализ использования коротких и длинных регистров на наборе команд AVX-512(register usage low|high).

# Результаты запусков на кластере «Лобачевский»

Результаты экспериментов приведены в таблицах 2 – 4.

Количество опционов. Каждый запуск выполнен 15 раз, приведено минимальное время работы в миллисекундах.

Таблица 2. Сравнение времени работы последовательных версий кода

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер алгоритма |  | Минимальное время, мс |
| V0 |  | 18530 |
| V1 |  | 16440 |
| V2 |  | 5832 |
| V3 |  | 1069 |
| V4 |  | 1070 |
| V5 |  | 1068 |
| V6 |  | 5678 |

При переходе от версии **V0** к **V1** было достигнуто ускорение вычислений на **12%**. Оно обусловлено устранением ненужных приведений типов, ошибочно выполнявшихся в базовой версии. При выполнении эквивалентного преобразования функции стандартного нормального распределения наблюдается существенное ускорение на **217%** в связи с тем, что в алгоритме значительную часть времени занимал вызов именно этой функции. Ускорение в **17.3** раза по сравнению с начальным алгоритмом – результат иcпользования различных директив векторизации. Если сравнить версии **V2** и **V3**, в последнем случае имеется ускорение на **450%**, так как в данной задаче все циклы векторизуются без каких-либо проблем. Полное отсутствие разницы во времени работы алгоритмов **V3** – **V5** объясняется тем, что инвариант был вынесен компилятором за пределы цикла самостоятельно, а в директивах **#pragma simd** и **#pragma vector always** нет необходимости, так как не было никаких препятствий для векторизации. Существенное замедление работы алгоритма **V6** требует объяснения.  Вызов функции invSqrt происходит из библиотеки mkl, где данная функция является векторной и считает точное значение корня, что гораздо дольше. При этом компилятор не инлайнит invSqrt в код, так как не имеет возможности предугадать, каким образом и в каких функциях результат будет использоваться. Если в коде делить на корень, последний заменяется неточным, что в разы быстрее (см. **V5**). Для данной задачи высокая точность вычислений не важна, и экономия времени на вычисление лишних трёх знаков после запятой может дать ускорение в **5** раз. В дальнейших экспериментах алгоритм V6 будет исключён из рассмотрений.

Таблица 3. Сравнение времени работы параллельных версий кода (16 потоков).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер |  | Минимальное время, мс |
| V7 |  | 99 |
| V8 |  | 106 |

Время работы алгоритмов **V7** и **V8** совпадает с точностью до погрешности измерений, это означает, что мощности кластера достаточно для того, чтобы хранить в кэше все четыре массива без потери производительности.

Таблица 4. Эффективность масштабируемости параллельной реализации для версии **V8**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Число потоков | Минимальное время, мс | Ускорение |
| 1 | 1123 | 1 |
| 2 | 577 | 1,96 |
| 4 | 305 | 3,68 |
| 8 | 146 | 7,69 |
| 16 | 106 | 10,59 |

Рис. 2. Пиковое и действительное ускорение

Можно заметить, что параллельная версия имеет ускорение, примерно совпадающее с числом потоков (В случае 16 потоков имеем ускорение **10.5** вместо **16** из-за значительных накладных расходов на создание и уничтожение потоков). Для данной задачи практически полное соответствие фактического ускорения на двух-восьми потоках пиковому – отличный результат.

Рис. 3. Зависимость времени работы алгоритма **V8** от числа потоков

После всех оптимизаций алгоритма лучший результат показала реализация **V8**, сократив время работы по сравнению с базовой версией в **174.8** раза.

В таблицах 5 и 6 приведены результаты запуска программного кода на кластере «Лобачевский». При компиляции был использован ключ c командой понижения половинной точности float (до трёх знаков после запятой): -fimf-precision=low

Таблица 5. Время работы алгоритмов с неточной арифметикой.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер |  | , мс | , мс |
| V0 |  | 17781 | 47173 |
| V1 |  | 15349 | 41044 |
| V2 |  | 5919 | 15503 |
| V3 |  | 953 | 2539 |
| V4 |  | 955 | 2538 |
| V5 |  | 952 | 2537 |

Рис. 4. Время работы последовательных версий алгоритма, опционов, мс.

После сравнения значений таблиц 2 и 5 можно утверждать, что сокращение точности вычислений там, где высокая точность не нужна, оправдана и ускоряет работу программы.

Таблица 6. Сравнение времени работы алгоритмов с точной и неточной арифметикой, опционов, мс.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  версии |  | Точная  арифметика | Неточная  арифметика |  | Прирост  скорости, % |
| V0 |  | 18530 | 17781 |  | 4 |
| V1 |  | 16440 | 15349 |  | 7 |
| V2 |  | 5832 | 5919 |  | 0 |
| V3 |  | 1069 | 953 |  | 12 |
| V4 |  | 1070 | 955 |  | 12 |
| V5 |  | 1068 | 952 |  | 12 |

Ниже представлены результаты запусков параллельных версий.

Таблица 7. Время работы параллельных версий

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер версии | Число потоков | , мс | , мс |
| V7 | 1 | 427 | 1152 |
| 2 | 446 | 1186 |
| 4 | 232 | 619 |
| 8 | 143 | 338 |
| 16 | 86 | 185 |
| V8 | 1 | 420 | 1143 |
| 2 | 445 | 1170 |
| 4 | 231 | 609 |
| 8 | 143 | 334 |
| 16 | 77 | 182 |

Рис. 5. Время работы параллельных версий алгоритма, опционов, мс.

Незначительно замедление работы алгоритмов на двух потоках связано с накладными расходами на создание дополнительного потока. Далее наблюдается ускорение, близкое к линейному, что весьма не плохо.

РЕЗУЛЬТАТЫ -- ДИЧЬ

AFFINITY?

# Результаты запусков на кластере Intel Xeon Gold

Алгоритмы нахождения справедливой цены тестировались на узлах Knights Landing (KNL) и Skylake(SKL) на различном числе потоков. Для параллельных реализаций проводилась привязка потоков к ядрам. Каждый запуск выполнялся 10 раз, в таблицах приведено минимальное время работы в миллисекундах.

# Результаты запусков на архитектуре Knights Landing с набором команд AVX-512

Набор инструкций AVX-512 предусматривает возможность скомпилировать программный комплекс с помощью двух различных конфигураций: используя режимы register usage low и register usage high. Они предполагают использование команд из набора AVX-512 для регистров разрядности 256 и 512 соответственно (первый вариант попросту не использует половину регистра). При плохой векторизации программного кода на длине регистра в 256 бит нет никакой необходимости использовать ещё больший регистр – произойдёт замедление работы.

Рассмотрим последовательные версии кода. Регистр длиной 512 бит одновременно может хранить 16 чисел с плавающей запятой одинарной точности. Алгоритм, содержащий вызов erff(), дал неожиданный результат: имеется ускорение от его векторизации примерно в **27** раз вместо **16**. Это связано с тем, что компилятор генерирует два неэквивалентных кода, и в векторном коде используется предварительные вычисления – один раз полученный результат используется неоднократно.

Таблица 8. Время работы последовательных версий алгоритма.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер |  | , мс | , мс |
| V0 |  | 89517 | 264187 |
| V1 |  | 86811 | 254826 |
| V2 |  | 31589 | 84697 |
| V3 |  | 1168 | 3140 |
| V4 |  | 1159 | 3122 |
| V5 |  | 1175 | 3147 |

Перейдём к параллельным версиям. Сначала запускается по одному потоку на ядро, используя 1, 2, …, 68 ядер. Если запустить по 2 или 4 потока на ядро, прироста производительности не наблюдается (см. таблицу 9). Это говорит о том, что для данной задачи одно ядро полностью прогрузило все устройства, которые ему необходимы. На данной архитектуре наблюдается ускорение версии **V8** относительно **V7**. //почему? 10 миллисекунд – погрешность, ей следует пренебречь.

Ниже приведена информация о запусках параллельных версий.

Таблица 9. Время работы параллельных версий алгоритма

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер версии | Число потоков | , мс | , мс | Ускорение для |
| V7 | 1 | 1112 | 2959 | 1,00 |
| 2 | 554 | 1481 | 1,99 |
| 4 | 275 | 739 | 4,00 |
| 8 | 137 | 367 | 8,06 |
| 16 | 68 | 184 | 16,08 |
| 17 | 64 | 173 | 17,10 |
| 34 | 33 | 87 | 34,01 |
| 68 | 25 | 69 | 42,88 |
| 136 | 24 | 66 | 44,83 |
| 272 | 27 | 75 | 39,45 |
| V8 | 1 | 1101 | 2952 | 1,00 |
| 2 | 552 | 1483 | 1,99 |
| 4 | 273 | 742 | 3,97 |
| 8 | 139 | 369 | 8,00 |
| 16 | 69 | 185 | 15,95 |
| 17 | 65 | 174 | 16,96 |
| 34 | 33 | 87 | 33,93 |
| 68 | 21 | 57 | 51,78 |
| 136 | 19 | 53 | 55,69 |
| 272 | 22 | 60 | 49,20 |

Рис. 6. Время работы параллельных версий алгоритма, опционов.

Масштабируемость обеих версий параллельного кода идеально-линейна: ускорение численно равно числу потоков, на котором запускается бенчмарк. Пиковое ускорение в данном случае следует рассматривать как отношение времени работы алгоритма на максимально возможном числе ядер ко времени работы на одном ядре. Фактическое ускорение получилось равным **43** при пике в **68**. Объяснить это можно с помощью roofline-графика.

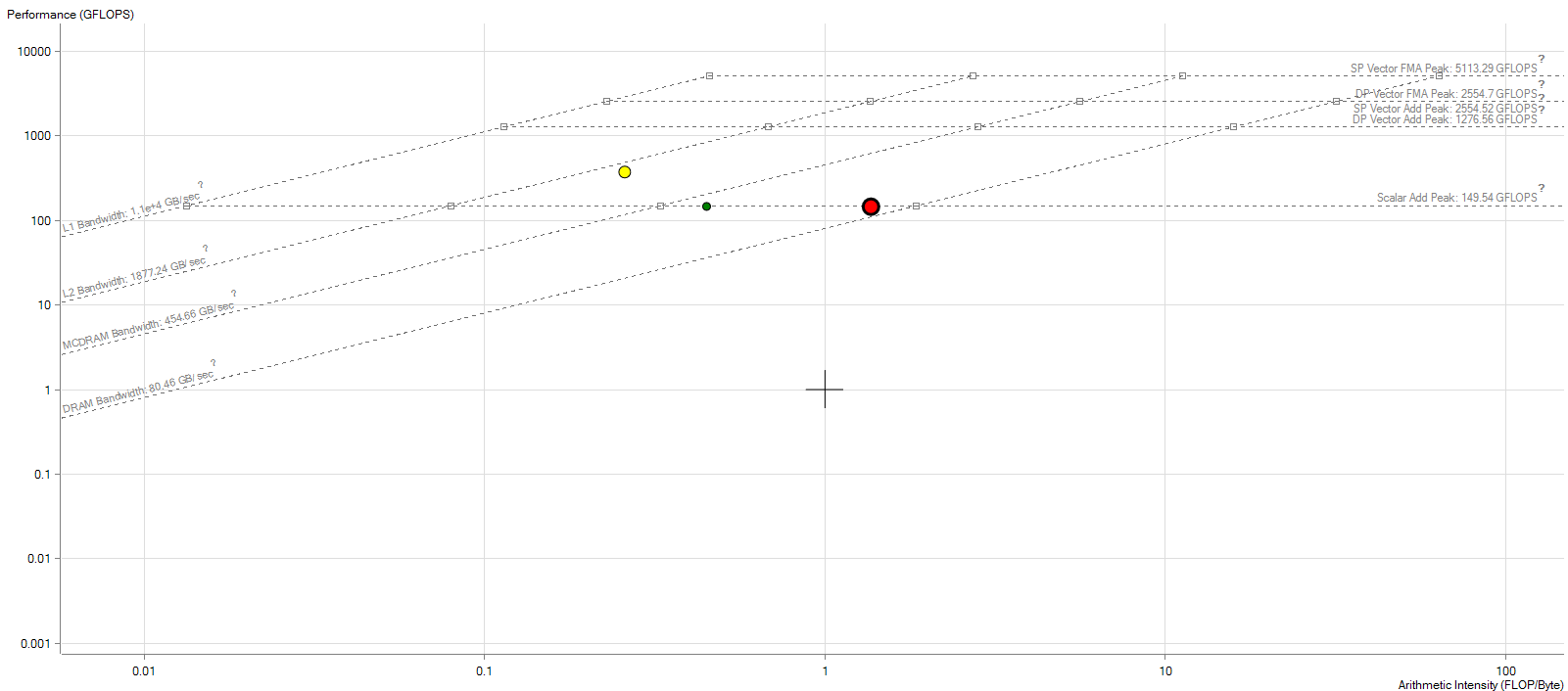


Рис. 7. Roofline-график для версии **V8**

На горизонтальной оси графика откладывается арифметическая интенсивность – число операций с плавающей запятой на количество прокаченных через шину данных FLOP/Byte. На вертикальной оси – пропускная способность (GFLOPS). Горизонтальные прямые соответствуют пиковой производительности в конкретных условиях. Диагональные линии соответствуют пропускным способностям подсистемы памяти (DRAM, MCDRAM, кэши L1 и L2). Вертикальная прямая, содержащая точку пересечения диагональной и горизонтальной линий разделяет график на две части. Если алгоритм находится левее вертикали, то может замедляться из-за недостатка памяти. Если правее – из-за пропускной способности.

Точками на графике отмечены функции, содержащиеся в коде. Жёлтым цветом обозначена функция erf(), зелёным – логарифм, красным – собственный код. Не хватает оверолла.

Erf() почти не останавливает нехватка пропускной способности и арифметической интенсивности, но логарифм и собственный код, имея хорошую арифметическую интенсивность, останавливаются скалярным пиком сложения, поэтому производительность не может стать выше, чем 149,5 GFLOPS.

# Результаты запусков на архитектуре Skylake

Исследовалось два режима: набор команд АVХ-2(регистр длиной 256 бит) и АVХ-512. Будут сравниваться времена работы версий для регистров разной длины. Говоря в общем, тенденция, которая прослеживалась в предыдущих результатах, сохраняется (см. рис. 8).

Рис. 8. Сравнение времени работы последовательных версий алгоритма на разных кластерах, опционов.

Таблица 10. Время работы последовательных алгоритмов на AVX-2 и AVX-512

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер |  | AVX-2 | AVX-512 |
| V0 |  | 47415 | 47676 |
| V1 |  | 40576 | 40595 |
| V2 |  | 14540 | 14569 |
| V3 |  | 2039 | 1644 |
| V4 |  | 2039 | 1638 |
| V5 |  | 2030 | 1637 |

Ускорение от векторизации при пике в 16 равно восьми. Довольно мало, но объяснимо: на SKL-AVX-512 векторизация неоднозначна, и экспериментально проверено, что она не может ускорить работу кода в 16 раз /\*Мда?\*/. Возможно, векторизация на этом наборе инструкций реализована с понижением частот.

Рис. 9. Сравнение времени работы последовательных версий алгоритма для регистров разной длины, опционов.

На рис. 9 видно, что различная длина регистра практически не влияет на скорость работы алгоритмов – код векторизуется без каких-либо проблем в обоих случаях. Незначительный выигрыш во времени на регистрах длиной 512 бит достигается благодаря более современной архитектуре узла.

Рассмотрим теперь результаты, полученные при запуске параллельных версий:

Таблица 11. Время работы параллельных алгоритмов на регистрах разной длины, опционов.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер версии | Число потоков | AVX-2 | Ускорение для AVX-2 | AVX-512 | Ускорение AVX-512 |
| V7 | 1 | 1857 | 1,00 | 1483 | 1,00 |
| 2 | 1131 | 1,64 | 892 | 1,66 |
| 4 | 528 | 3,51 | 392 | 3,78 |
| 8 | 243 | 7,64 | 183 | 8,10 |
| 16 | 126 | 14,73 | 104 | 14,2 |
| 20 | 103 | 18,02 | 96 | 15,4 |
| 40 | 52 | 35,71 | 50 | 29,6 |
| 80 | 52 | 35,71 | 52 | 28,5 |
| V8 | 1 | 1866 | 1,00 | 1490 | 1,00 |
| 2 | 1140 | 1,63 | 722 | 2,06 |
| 4 | 542 | 3,44 | 391 | 3,81 |
| 8 | 249 | 7,49 | 184 | 8,09 |
| 16 | 127 | 14,69 | 102 | 14,6 |
| 20 | 104 | 17,94 | 96 | 15,5 |
| 40 | 52 | 35,88 | 49 | 30,4 |
| 80 | 49 | 38,08 | 49 | 30,4 |

Переход с 40 потоков на 80 – программный гипер-трейдинг – не дал результатов (так же, как и аппаратный). На SKL-AVX-512 фактическое ускорение хуже, чем на SKL-AVX-2: при равном времени ускорение 30 из 40 на SKL-AVX-512 против 35 из 40 на SKL-AVX-2. Аппаратный гипер-трейдинг с четырьмя потоками на ядро не даёт прироста скорости, но с двумя потоками имеется ускорение в два раза относительно запуска без гипер-трейдинга. В остальном, результаты имеют тенденцию, аналогичную полученным на кластере «Лобачевский» результатам.

Рис. 10. Ускорение версии **V8** для различных наборов инструкций

Ниже представлены roofline-графики для алгоритма V8:

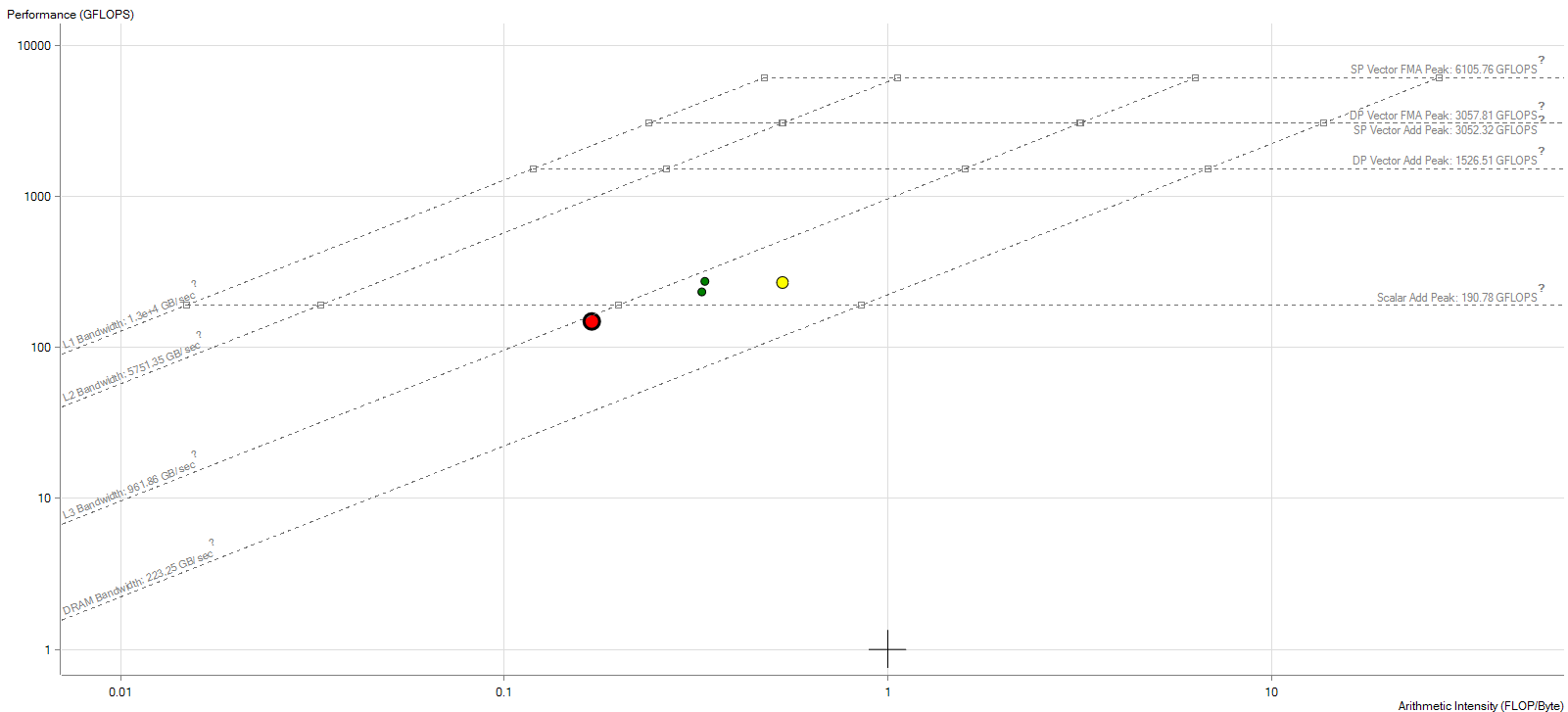


Рис. 11. Roofline-график для SKL-AVX-2

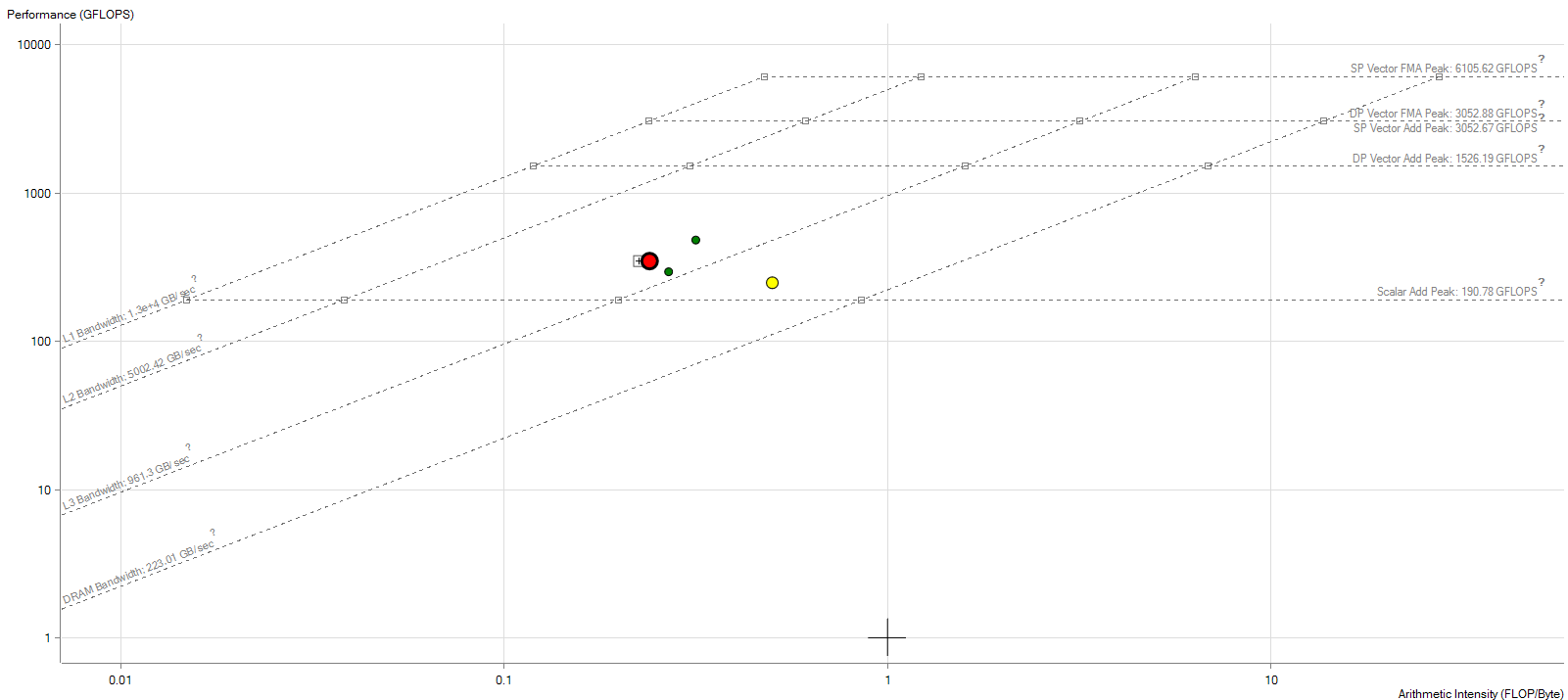


Рис. 12. Roofline-график для SKL-AVX-512

Красная точка на графиках – функция erf(), при длине регистра в 256 бит она ограничена кэшем L3, при длине в 512 бит ограничений в пропускной способности нет.

Жёлтая точка – собственный код. Зелёные точки – логарифмы. Все математические функции на рис. 11 расположены выше, чем на рис. 10. Это говорит о более успешной их реализации в AVX-512.

Рассмотрим также программный код, собранный на узле SKL-512 с ключом компиляции для неточной арифметики. Ниже приведена таблица, содержащая результаты запусков параллельных версий кода с точной и неточной арифметикой.

Таблица 12. Точные и неточные вычисления на SKL-AVX-512

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер версии | Число потоков | Точные вычисления | Неточные вычисления | Ускорение, % |
| V8 | 1 | 1483 | 1128 | 31 |
| 2 | 892 | 597 | 49 |
| 4 | 392 | 240 | 63 |
| 8 | 183 | 122 | 59 |
| 16 | 104 | 95 | 9 |
| 20 | 96 | 95 | 1 |
| 40 | 50 | 52 | 0 |
| 80 | 52 | 52 | 0 |

Рис. 13. Точные и неточные вычисления на SKL-AVX-512

На рис. 13 видно, что до тех пор, пока неточные вычисления не были ограничены пропускной способностью или математической интенсивностью, они чрезвычайно сильно ускоряли работу алгоритмов (**50%** на двух и **60%** на четырёх потоках!). Но при большом числе потоков влияние на скорость неточной математики аннигилируется из-за невозможности кластера считать с нужной пропускной способностью или интенсивностью.

# Заключение

Была разработана начальная версия алгоритма, вычисляющего справедливую цену опциона по формуле 5. Было разработано 8 различных модификаций базовой версии, каждая из которых давала значительное ускорение. Наибольшее ускорение было получено в последней параллельной версии алгоритма – время работы программы уменьшилось в 175 раз.

Алгоритмы были запущены на различных кластерах, были собраны результаты работы версий и проведён их анализ с использованиям информации из файлов с отчётами об оптимизации и файлов, содержащих дизассемблер. Алгоритмы также анализировались с помощью Intel VTune Performance Analyzer.

Из-за большого объёма однообразных действий возникла потребность в автоматизации работы программного комплекса. Для решения проблемы были написаны скрипты, выполняющие рутинные действия.

Полученное ускорение в работе алгоритмов показывает важность техники программирования и необходимости добиться максимальной оптимизации рабочего кода в тех задачах, где важна скорость получения точного результата.

# Литература

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of political economy – 1973 – Т. 81 – №. 3 – С. 637–654. https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/black\_scholes73.pdf
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т1. Факты, Модели. Изд. Москва, Фазис, 512 с.
3. Оптимизация расчетов на примере задачи вычисления справедливой цены опциона Европейского типа. <https://www.intuit.ru/studies/courses/14004/1095/lecture/22917>
4. Модель Блэка-Шоулза <https://en.wikipedia.org/wiki/Black–Scholes_model>
5. Модели финансового рынка и их особенности <https://studopedia.su/10_149780_modeli-finansovogo-rinka-i-ih-osobennosti.html>
6. Документация MKL<http://old.parallel.ru/ftp/libs/mkl/mklman52.pdf>
7. Оценка и оптимизация производительности вычислений на многоядерных системах <https://habr.com/company/intel/blog/277407/>
8. Knights Landing (KNL) <https://www.hotchips.org/wp-content/uploads/hc_archives/hc27/HC27.25-Tuesday-Epub/HC27.25.70-Processors-Epub/HC27.25.710-Knights-Landing-Sodani-Intel.pdf>
9. Wiener Process <https://en.wikipedia.org/wiki/Wiener_process>

# Приложения

# Фрагменты программного кода основного проекта

void \_V8(float \*pT, float \*pK, float \*pS0, float \*pC)

{#pragma simd

#pragma vector nontemporal

#pragma omp parallel for private(d1, d2, erf1, erf2)

for (i = 0; i < N; i++)

{

d1 = (logf(pS0[i] / pK[i]) + (r + sig \* sig \* 0.5f) \*

pT[i]) / (sig \* sqrtf(pT[i]));

d2 = (logf(pS0[i] / pK[i]) + (r - sig \* sig \* 0.5f) \*

pT[i]) / (sig \* sqrtf(pT[i]));

erf1 = 0.5f + 0.5f \* erff(d1 / sqrtf(2.0f));

erf2 = 0.5f + 0.5f \* erff(d2 / sqrtf(2.0f));

pC[i] = pS0[i] \* erf1 - pK[i] \* expf((-1.0f) \* r \* pT[i]) \* erf2;

}

}

int main(int argc, char \*argv[])

{

version = atoi(argv[1]);

N= atoi(argv[2]);

num\_Threads = atoi(argv[3]);

float\* pT = new float[4 \* N];

float\* pK = pT + N;

float\* pS0= pT + 2 \* N;

float\* pC = pT + 3 \* N;

for (int i = 0; i < N; i++)

{

pT[i] = T;

pS0[i] = S0;

pK[i] = K;

}

start = omp\_get\_wtime();

option\_array[version](pT, pK, pS0, pC);

finish = omp\_get\_wtime();

\_time = finish - start;

std::cout << \_time << std::endl;

std::cout << pC[1];

delete[] pT;

return 0;

}

# Фрагменты программного кода проекта, автоматизирующего сбор информации

def one\_res(name):

proc = Popen(name, shell=True, stdout=PIPE, stderr=PIPE)

proc.wait()

res = proc.communicate()

if proc.returncode:

return res[1]

return res[0]

def min\_res(name):

min\_time = 10000

for i in range(count):

time = float(one\_res(name))

if time < min\_time:

min\_time = time

return min\_time

def get\_times(opts\_amo):

for version in range(num\_seq\_ver):

name = os.path.join(os.getcwd(), str(file)) + " " + \

str(version) + " " + str(opts\_amo) + " " + str(1)

print(datetime.datetime.now())

seq\_times.append((min\_res(name)))

print(seq\_times)

for version in par\_ver:

for thr in threads:

#name = affinity[thr] + \

name = os.path.join(os.getcwd(), str(file)) + " " + \

str(par\_ver[version]) +" " + str(opts\_amo) + " " + str(threads[thr])

par\_times.append((min\_res(name)))

print(datetime.datetime.now())

print(par\_times)

def write\_log(opts\_amo):

\_iter = 0

with open('summary\_' + str(opts\_amo) + '.log', 'a') as f:

for i in seq\_times:

info = "%s %s %s %s %s %s" % ("version ", str(name\_version[\_iter]),";amo of opts ",

str(opts\_amo), "; counts ", str(count))

f.write(str(datetime.datetime.now()) + " " + info + "; min time " + str(i) + " seconds" + "\n")

\_iter += 1

# СДУ отчёт

### Инфраструктура СЧ

Для моделирования траекторий винеровского процесса потребуются массивы случайно сгенерированных по нормальному закону чисел. Первым шагом является получение равномерно распределенных ПСЧ – для этого используются базовые генераторы псевдослучайных и квазислучайных последовательностей из библиотеки MKL: генераторы MCG-59 и Соболя соответственно. После этого с помощью библиотечного алгоритма равномерное распределение преобразуется в нормальное с необходимыми для работы программы параметрами.

Ниже представлена инфраструктура, отвечающая за генерацию нормального распределения.

VSLStreamStatePtr initGen(unsigned int seed, int indexGen) {

VSLStreamStatePtr stream;

if (indexGen == 0) {

const unsigned int \_seed[2] = { seed, seed };

vslNewStreamEx(&stream, VSL\_BRNG\_MCG59, 2, \_seed);

}

else if (indexGen == 1) {

vslNewStream(&stream, VSL\_BRNG\_SOBOL, 1);

}

return stream;

}

Функция initGen изменяет переменную Stream – служебную переменную, содержащую состояние генератора. В зависимости от входного параметра, генератор будет инициализирован соответствующим начальным значением и примет соответствующий входному параметру тип – MCG-59 или Sobol.

void BSOPM::normalGenerator(float mean, float deviation, int amou, VSLStreamStatePtr stream, float \*destArray) {

//Getting amount random values and writing them to the destination array

vsRngGaussian(VSL\_RNG\_METHOD\_GAUSSIAN\_ICDF, stream, amou, destArray, mean, deviation);

}

Функция normalGenerator представляет собой обёртку над библиотечной функцией vsRngGaussian, которая генерирует последовательность нормально распределённых чисел с параметрами (mean, deviation) и записывает их в массив. Стоит отметить, что при следующем вызову данной функции будет получен следующий блок случайных чисел последовательности, определяемой начальным значением seed.

void BSOPM::freeGen(VSLStreamStatePtr stream) {

vslDeleteStream(&stream);

}

Функция freeGen удаляет переменную stream.

### Вычислительная схема генераторов

#### Генератор MCG-59

Применяется в простых случаях и не обладает криптографической стойкостью. Представляет собой 59-битный мультипликативный конгруэнтный генератор, получающий псевдослучайную последовательность следующим образом:

В цикле по длине массива (i =1,…, N):

{

seed = (a \* seed) % m;

seed += m;

array[i] = seed / m;

}

#### Генератор Соболя:

Тут неочевидно

This is a 32-bit Gray code-based quasi-random number generator:

https://software.intel.com/sites/default/files/did_feeds_images/4744b9cb-e2d3-4666-b6c5-87aa92f3fbff/4744b9cb-e2d3-4666-b6c5-87aa92f3fbff-imageId=ceb026aa-ec78-4328-b00c-4948a5f23618.gif

https://software.intel.com/sites/default/files/did_feeds_images/4744b9cb-e2d3-4666-b6c5-87aa92f3fbff/4744b9cb-e2d3-4666-b6c5-87aa92f3fbff-imageId=ad154eae-c15f-423a-b054-a5471a224a17.gif

#### Преобразование Бокса-Мюллера: // ??????

## Инфраструктура записи данных

БЛАБЛАБЛА

## Аналитическое решение

В случае соблюдения всех ограничений модели рынка, стоимость акции в момент времени T можно найти по формуле (3). Так как моделирование одного значения цены бессмысленно из-за случайной природы приращений винеровского процесса, необходимо смоделировать цену множество раз, после чего усреднить результаты, получив оценку.

Стоит отметить, что в качестве значений винеровского процесса в момент времени T можно использовать сгенерированные по нормальному закону случайные числа, так как и совпадают в силу условий и .

Итак, для моделирования значений винеровского процесса используется функция vsRngGaussian из библиотеки mkl, генерирующая последовательность псевдослучайных чисел, распределённых по нормальному закону с необходимыми параметрами распределения.

Реализация функции getStockPrice представляет собой вычисление цены акции по формуле (3).

Ниже представлен алгоритм получения оценки стоимости акции в момент времени :

1. Инициализировать переменную, в которой будет накапливаться общая сумма значений цены.
2. С помощью функции vsRngGaussian смоделировать псевдослучайную последовательность чисел, распределённых по N(0, sqrt(T)).
3. В цикле по числу запусков (i от 0 до nPaths):

{

* Вычислить – значение цены акции в момент времени Т;
* Добавить полученное значение к текущей сумме.

}

1. Поделить полученную сумму на число запусков.

В итоге будет получена оценка среднего значения цены акции, точность которой очевидно зависит от числа повторений. Ниже представлен график зависимости и таблицы результатов.

// Таблица по к-ву семплов\значению цены

// Таблица по к-ву семплов\погрешности

//есть ещё 100:5000

// мб параллельная версия

## Численное решение

### Что-то вроде введения

Как писалось выше, модель Блэка-Шоулза может быть применена только при выполнении ряда ограничений (см стр.5//add reference). Современный финансовый рынок устроен намного сложнее, чем это подразумевали авторы модели (сейчас невозможно представить биржу с фиксированными волатильностью и процентной ставкой //ЕЁ и в 1973 нельзя было представить, чего не скажешь о 1930). В этой связи, во многих случаях система стохастических дифференциальных уравнений аналитически не решается, и для нахождения цены акции через промежуток времени систему приходится интегрировать численно. Формула Блэка-Шоулза так же перестаёт быть корректной, поэтому для нахождения справедливой цены опциона также необходимо брать интеграл.

Будут рассмотрены несколько стохастических численных методов, позволяющих вычислить цену акции и сделан вывод об их эффективности, масштабируемости и оптимальном числе запусков для каждого метода. Также будет проведено доказательство корректности каждого численного метода.

При численном подсчёте справедливой цены опциона будет проведено сравнение эффективности нескольких квадратурных формул и разновидностей метода Монте-Карло. Будет сделан вывод об оптимальном использовании методов в зависимости от размерности интеграла(когда-нибудь) и об оптимальном количестве запусков для различных вариаций метода МК после чего будут рассмотрены разные техники понижения дисперсии (заявление очень серьёзное и весьма призрачное).

### Вычисление стоковой цены

#### Предметная область

Этот раздел будет посвящён нахождению цены акции в момент времени *T* с помощью численного решения стохастических интегралов. Ниже приведены общепринятые определения, характеризующие численные методы и стохастические дифференциальные уравнения(СДУ).

Случайный процесс в финансах моделируется как дифференциальное уравнение, включающее в себя детерминированный (дрейф) и стохастический (диффузный) члены; последний является винеровским процессом, как в уравнении, приведённом ниже:

(+)

Стоит отметить, что уравнение (+), в отличие от ОДУ, задано в терминах дифференциалов, а не в терминах производной, в силу того, что броуновское движение не является дифференцируемой функцией. Другими словами, СДУ (+) по определению является интегральным уравнением:

(\*)

Последняя часть уравнения (\*) – интеграл Ито, названный в честь японского математика Киёси Ито.

Чтобы решить СДУ (+) аналитически, необходимо определить правило для стохастических дифференциалов, называемое формулой Ито:

Если , то

*,* где

определяется следующим образом:

Как говорилось выше, решением стохастического уравнение Блэка-Шоулза является геометрическое броуновское движение

Это можно проверить, записав

*,* где

.

По формуле Ито,

. (1111)

Используя дифференциальные тождества формулы Ито, получаем

.

При подстановке в (111), имеем

*,* (\*\*) где

Рассмотрим разбиение отрезка с параметром разбиения Здесь и далее примем

По определению, , (\*\*)

где – приращение винеровского процесса (шаг броуновского движения).

Через обозначим дискретную аппроксимацию процесса

Будем говорить, что дискретная аппроксимация (численный метод) сходится сильно к процессу , в момент времени , если .

Будем говорить, что дискретная аппроксимация (численный метод) сходится сильно с порядком к процессу , в момент времени , если существует постоянная , не зависящая от , и число такие, что для всех .

В данной работе представлена реализация различных четырёх сильных методов разных порядков.

**Метод Эйлера-Маруямы порядка 0.5**

Простейший из эффективных численных методов решения СДУ – метод Эйлера-Маруямы, являющийся аналогом метода Эйлера для решения ОДУ.

Общий вид рекуррентной формулы для решения СДУ (+) выглядит следующим образом:

Эта формула в рамках рассматриваемой модели представима в виде

Хотя метод Эйлера для Оду имеет первый порядок сходимости, его стохастический аналог сходится с порядком 0.5. Этот факт был доказан Гикхамом и Скороходовым в 1972 году.//reference

**Метод Мильштейна первого порядка**

Данный метод предложен советским математиком Г.Н. Мильштейном в 1974 году.

Известно, что метод сходится с первым порядком. Рекуррентное соотношение представлено ниже:

()

Метод Мильштейна идентичен методу Эйлера-Маруямы при условии, что слагаемое , то есть не зависит от *X*. Метод является методом Тейлора, он представим в виде частичной суммы ряд. Во многих случаях это является недостатком, потому как в последнем слагаемом присутствует частная производная, которая должна быть явно определена пользователем. В случае уравнения (?) проблем не возникает –  
 Возможным вариантом устранения необходимости вычислять производную может быть замена её аппроксимацией

()

**Метод Рунге-Кутты первого порядка**

В данном методе частная производная представлена её разностным аналогом, как было показано выше, и рекуррентное соотношение принимает вид

, где

Применительно к модели Блэка-Шоулза,

,

формула для вычисления шага метода Рунге-Кутты запишется в следующем виде:

=

()

**Метод Платена порядка 1.5**

Порядок сильной сходимости метода может быть улучшен путём добавления дополнительных членов ряда Тейлора в рекуррентное соотношение:

(123)

Здесь и далее – приращение случайного процесса, имеющее нормальное распределение с нулевым средним, дисперсией, равной , и коррелированное с с ковариацией.

может быть получена следующим образом:

, где выбрана независимо от ).

Чем выше порядок сходимости метода, тем выше арифметическая интенсивность алгоритма // но это не точно. Следует учитывать, что в ряде случаев результат с достаточной точностью может быть получен с помощью методов низких порядков.

Применимо к формуле (2), выражение (123) представимо в виде

# Доказательство корректности

Чтобы проверить правильность работы методов, необходимо убедиться в выполнения неравенства

(),

где – истинное решение стохастического уравнения (2), полученное аналитически, а – результат работы численного метода.

Для получения математического ожидания необходима выборка из различных траекторий винеровского процесса, для каждого из которых должны быть посчитаны значения и , где *k* изменяется от *0* до . После суммирования модулей разности аналитических и численных значений и последующим усреднением путём деления результата на количество траекторий , будет получена оценка левой части неравенства ().

Оценка будет справедлива в соответствии с центральной предельной теоремой:  
при достаточно больших является асимптотически нормально распределенной случайной величиной и сходится к истинному значению средней ошибки.

Итак,

(++)

После подстановки равенства (++) в () и последующего логарифмирования, может быть получена следующая оценка:

Не трудно заметить, что выражение выше имеет вид и является уравнением прямой. Чтобы построить эту прямую, необходимо получить несколько значений ошибок для различных шагах интегрирования *h.* Стоит выбирать   
 до тех пор, пока шаг интегрирования не станет слишком большим.

Будет получена таблично заданная функция , задающая зависимость средней ошибки от шага интегрирования, где – порядок численного метода. После логарифмирования можно строить прямую. С помощью метода наименьших квадратов могут быть найдены значения параметра и среднеквадратичной ошибки. В случае практического подтверждения порядка и наличия малой среднеквадратичной ошибки корректность реализации численного метода является подтверждённой.

//График, мб

#### Вычислительная схема

Для численного нахождения цены цены реализован ряд методов. Так как в ходе работы алгоритмов понадобятся массивы чисел, распределённых по нормальному закону, в проекте используются базовые генераторы псевдослучайных и квазислучайных последовательностей из библиотеки MKL.

Для корректного вычисления стоковой цены с помощью численных методов необходимо получить массив значений цены, а после усреднить её, и итоговое значение будет являться оценкой математического ожидания.

Цена акции в момент времени вычисляется с помощью функции SimulateStockPrices по следующему алгоритму:

1. В зависимости от входных параметров инициализировать генератор MCG-59 или Соболя.
2. Выделить память и сгенерировать массив случайных чисел.
3. В цикле по числу запусков (i от 0 до npaths) с помощью функции stockPricesIntegrator вычислить значение стоковой цены и накопить её в переменной StockPrice.
4. Усреднить полученную сумму делением на число запусков.

В функции stockPricesIntegrator происходит вычисление стоковой цены на одной траектории. Метод численного интегрирования выбирается в зависимости от входных параметров:

1. Происходит инициализация переменной начальным значением в момент Т = 0
2. В цикле по числу шагов вычисляется цена на соответствующем шаге интегрирования.
3. Результирующее значение StockPrice возвращается из функции

В пункте 2 представленного алгоритма вычисление ведётся с помощью одной из функций EulMarStep, MilsteinStep, RK1Step, BurragePlatenStep, реализующих шаги численных методов согласно формулам (), (),(),() соответственно.

Для подтверждения порядка методов реализован алгоритм checkConvergence, суть которого в следующем:

1. Инициализировать нулями массив значений ошибок Error
2. Выделить память и сгенерировать массив случайных чисел
3. Вычислить аналитическое значение цены с помощью функции getStockPrice
4. Выделить память для хранения численных значений цены
5. В цикле по размерности Error:
   1. Определить число шагов интегрирования
   2. В цикле по числу шагов найти цену акции в момент Т
   3. Прибавить к Error[j] модуль разницы между аналитическим и численным решением
   4. Уменьшить вдвое шаг интегрирования
6. В цикле по размерности Error усреднить полученные значения делением на число запусков

#### 

#### Собственно результаты

Вычисление стоковых цен на разных сетках, сравнение эффективности, графики логарифмированных значений, доверительные интервалы, которых нет.

### Вычисление справедливой цены

#### Предметная область

Генераторы двух видов, квадратурные формулы

#### Вычислительная схема

Описание квадратур, все алго по МК, рассказ про пп

#### Собственно результаты

Вычисление справедливых цен на разных сетках, сравнение эффективности на разных размерностях, которых нет, масштабируемость