

Алгоритм A^*

Донской Юрий

25 января 2023 г.

Оглавление

1	Введение	3
1.1	Определение алгоритма A^*	3
1.2	История	3
1.3	Применение алгоритма	3
2	Формальная постановка задачи	4
3	Описание алгоритма	5
3.1	Описание	5
3.2	Свойства	5
3.3	Примеры эвристик	6
3.4	Пример работы алгоритма	6
4	Формат данных	13
5	Сравнительный анализ Алгоритма Дейкстры и Алгоритма A^*	14
5.1	Методология сравнения	14
5.2	Алгоритм Дейкстры	14
5.3	Тесты	15
5.4	Вывод	20
6	Заключение	21

Глоссарий

Алгоритм прокладывания кратчайшего пути ищет на графе, начиная с одной (стартовой) точки и исследуя смежные узлы до тех пор, пока не будет достигнут узел назначения (конечный узел). Кроме того, в алгоритмах поиска пути в большинстве случаев заложена также цель найти самый короткий путь.

Шейки Робот был первым мобильным роботом общего назначения, способным рассуждать о своих действиях. В то время как другие роботы должны быть проинструктированы на каждом отдельном этапе выполнения более крупной задачи, Shakey может анализировать команды и самостоятельно разбивать их на основные части.

Взвешенный граф — это граф, у которого рёбрам соответствуют некоторые весовые параметры.

Эвристическая функция — это творческая функция, состоящая в организации избирательного поиска при решении сложных интеллектуальных задач.

Итерация (лат. iteratio «повторение») — повторение какого-либо действия.

Поле — прямоугольная область разделенная на квадратные клетки, размер поля определяется $n \times m$ где n — количество клеток по горизонтали, а m — количество клеток по вертикали. Значение клетки $a[i][j]$ равно v , где v — это вес клетки $a[i][j]$, где $0 \leq i \leq n - 1$, $0 \leq j \leq m - 1$.

OSPF (англ. Open Shortest Path First) — протокол динамической маршрутизации, основанный на технологии отслеживания состояния канала (link-state technology) и использующий для нахождения кратчайшего пути алгоритм Дейкстры.

Протокол маршрутизации промежуточных систем (англ. IS-IS) — это протокол внутренних плюзов (IGP), стандартизированный ISO и использующийся в основном в крупных сетях провайдеров услуг. IS-IS может также использоваться в корпоративных сетях особо крупного масштаба. IS-IS — это протокол маршрутизации на основе состояния каналов. Он обеспечивает быструю сходимость и отличную масштабируемость. Как и все протоколы на основе состояния каналов, IS-IS очень экономно использует пропускную способность сетей.

Местность — в ландшафтоведении — морфологическая единица ландшафта, природно-территориальный комплекс более высокого ранга, чем урочище.

Урочище — в широком смысле, любой географический объект или ориентир, о названии которого договорились («уреклись») люди.

Пересеченная местность — местность изрезанная чем либо, речками, канавами, пролесками, гребнями и прочим.

Глава 1

Введение

1.1 Определение алгоритма A^*

Алгоритм A^* (*англ.* *A star*) — алгоритм прокладывания кратчайшего пути, который находит во взвешенном графе маршрут наименьшей стоимости от указанной начальной вершины до указанной конечной.

1.2 История

A^* был создан как часть проект Шейки, целью которого было создание мобильного робота, который мог бы планировать свои собственные действия. Нильс Нильссон первоначально предложил использовать алгоритм Graph Traverser для планирования пути Шейки. Graph Traverser руководствуется эвристической функцией $h(n)$, расчетным расстоянием от узла n до целевого узла: он полностью игнорирует $g(n)$, расстояние от начального узла до n . Бертрам Рафаэль предложил использовать сумму $g(n) + h(n)$. Питер Харт изобрел концепции, которые мы теперь называем допустимостью и согласованностью эвристических функций. Первоначально A^* был разработан для поиска путей с наименьшей стоимостью, когда стоимость пути является суммой его затрат, но было показано, что A^* может использоваться для поиска оптимальных путей для любой задачи, удовлетворяющей условиям алгебры затрат.

Исходная статья A^* 1968 года содержала теорему, утверждающую, что ни один A^* — подобный алгоритм не может расширить меньше узлов, чем A^* , если эвристическая функция согласована и правильно выбрано правило A^* . Несколько лет спустя было опубликовано «исправление», в котором утверждалось, что согласованность не требуется, но это оказалось ложным в окончательном исследовании Дехтера и Перла оптимальности A^* (теперь называемой оптимальной эффективностью), в котором был приведен пример A^* с допустимой эвристикой, но не последовательным расширением произвольно большего числа узлов, чем альтернативный A^* — подобный алгоритм.

1.3 Применение алгоритма

Алгоритм A^* применяют в различных областях от машинного обучения до разработки игр, например, в навигаторах или заклинание "Ясновидение" в игре Skyrim.

Глава 2

Формальная постановка задачи

Изучить и реализовать алгоритм A^* для нахождения наименьшего по весу пути от исходной вершины до конечной вершины (цели) по пересеченной местности. Провести сравнительный анализ Алгоритма Дейкстры и Алгоритма A^* .

Глава 3

Описание алгоритма

3.1 Описание

В процессе работы алгоритма для вершин рассчитывается функция

$$f(v) = g(v) + h(v)$$

- $g(v)$ — наименьшая стоимость пути в v из стартовой вершины,
- $h(v)$ — эвристическое приближение стоимости пути от v до конечной цели.

Фактически, функция $f(v)$ — длина пути до цели, которая складывается из пройденного расстояния $g(v)$ и оставшегося расстояния $h(v)$. Исходя из этого, чем меньше значение $f(v)$, тем раньше мы откроем вершину v , так как через неё мы предположительно достигнем расстояние до цели быстрее всего. Открытые алгоритмом вершины можно хранить в очереди с приоритетом по значению $f(v)$.

3.2 Свойства

Чтобы A^* был оптимален, выбранная функция $h(v)$ должна быть допустимой эвристической функцией¹.

Утверждение 1: *Говорят, что эвристическая оценка $h(v)$ допустима, если для любой вершины v значение $h(v)$ меньше или равно весу кратчайшего пути от v до цели.*

Допустимая оценка является оптимистичной, потому что она предполагает, что стоимость решения меньше, чем оно есть на самом деле. Второе, более сильное условие — функция $h(v)$ должна быть монотонной.

Утверждение 2: *Эвристическая функция $h(v)$ называется монотонной (или преемственной), если для любой вершины v_1 и ее потомка v_2 разность $h(v_1)$ и $h(v_2)$ не превышает фактического веса ребра $c(v_1, v_2)$ от v_1 до v_2 , а эвристическая оценка целевого состояния равна нулю.*

Теорема: *Любая монотонная эвристика допустима, однако обратное неверно.*

Доказательство: Пусть $k(v)$ — длина кратчайшего пути из вершины v до цели. Докажем индукцией по числу шагов до цели, что $h(v) \leq k(v)$.

Если до цели расстояние 0, то v — цель и $h(v) = 0 \leq k(v)$.

Пусть v находится на расстоянии i от цели. Тогда существует потомок v' , который находится на кратчайшем пути от v до цели и v' лежит на расстоянии $i - 1$ шагов до цели. Следовательно, $h(v) \leq c(v, v') + h(v')$. По предположению, $h(v') \leq k(v')$. Следовательно, $h(v) \leq c(v, v') + k(v') = k(v)$.

Таким образом, монотонная эвристика $h(v)$ допустима.

Утверждение 3: *Если $h(v)$ монотонна, то последовательность значений $f(v)$ на любом пути не убывает.*

Доказательство следует из определения монотонности. Пусть v' — потомок v , тогда $g(v') = g(v) + c(v, v')$. Следовательно, $f(v') = g(v') + h(v') = g(v) + c(v, v') + h(v') \geq g(v) + h(v) = f(v)$.

Утверждение 4: *Алгоритм A^* является оптимальным, если функция $h(v)$ монотонна.* Последовательность вершин "развёрнутых" во время работы алгоритма находится в неубывающем порядке значений f . Поэтому очередная выбираемая вершина должна представлять собой оптимальное решение, поскольку все дальнейшие узлы будут, по меньшей мере, столь же дорогостоящими.

¹Эвристическая функция называется допустимой, если она никогда не переоценивает стоимость достижения цели, т. е. оцениваемая ею стоимость достижения цели не превышает минимально возможную стоимость от текущей точки пути

3.3 Примеры эвристик

Поведение алгоритма сильно зависит от того, какая эвристика используется. В свою очередь, выбор эвристики зависит от постановки задачи. Часто A* используется для моделирования перемещения по поверхности, покрытой координатной сеткой.

- Если можно перемещаться в четырех направлениях, то в качестве эвристики стоит выбрать манхэттенское расстояние

$$h(v) = |v.x - v'.x| + |v.y - v'.y|$$

- Расстояние Чебышева применяется, когда к четырем направлениям добавляются диагонали:

$$h(v) = \max(|v.x - v'.x|, |v.y - v'.y|)$$

- Если передвижение не ограничено сеткой, то можно использовать евклидово расстояние по прямой:

$$h(v) = \sqrt{(v.x - v'.x)^2 + (v.y - v'.y)^2}$$

Также стоит обратить внимание на то как соотносятся $f(v)$ и $h(v)$. Если они измеряются в разных величинах (например, $g(v)$ — это расстояние в километрах, а $h(v)$ — оценка времени пути в часах) A* может выдать некорректный результат.

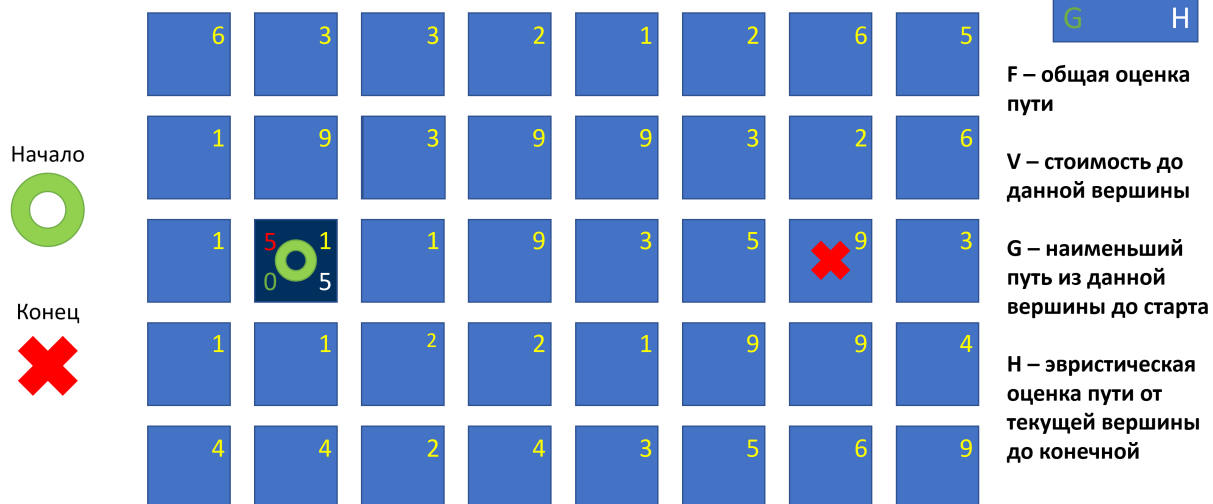
3.4 Пример работы алгоритма

Процесс прокладывания наименьшего по стоимости пути продемонстрирован на рисунках 3.1 - 3.12. Дается взвешенное поле, стартовая и конечная вершины. Рис. 3.1



Рис. 3.1: Исходное поле

Пример работы алгоритма

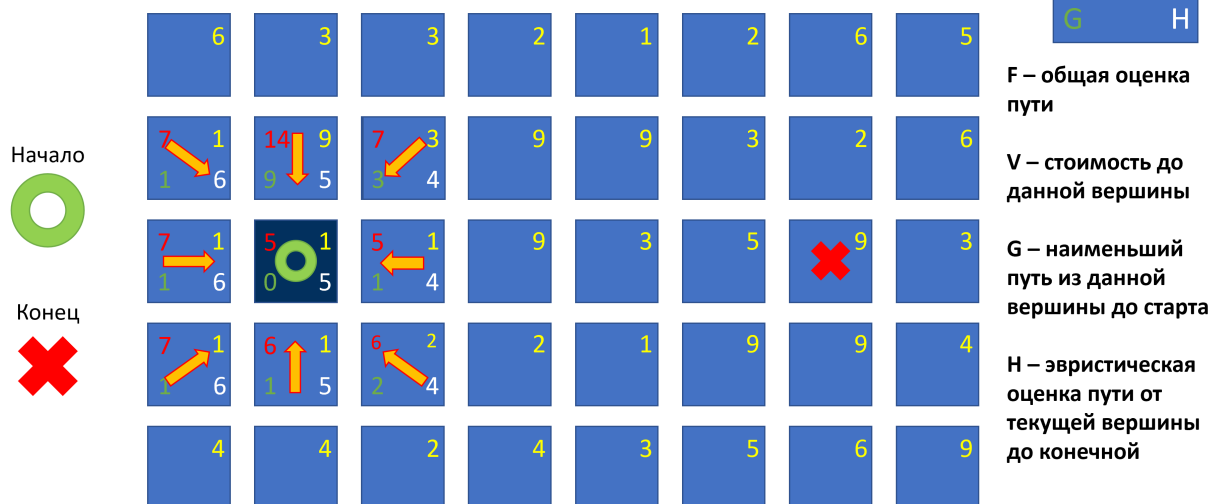


12

Рис. 3.2: Шаг 1

Расчитывается эвристическая оценка пути F для не посещенных соседних вершин. Рис. 3.3

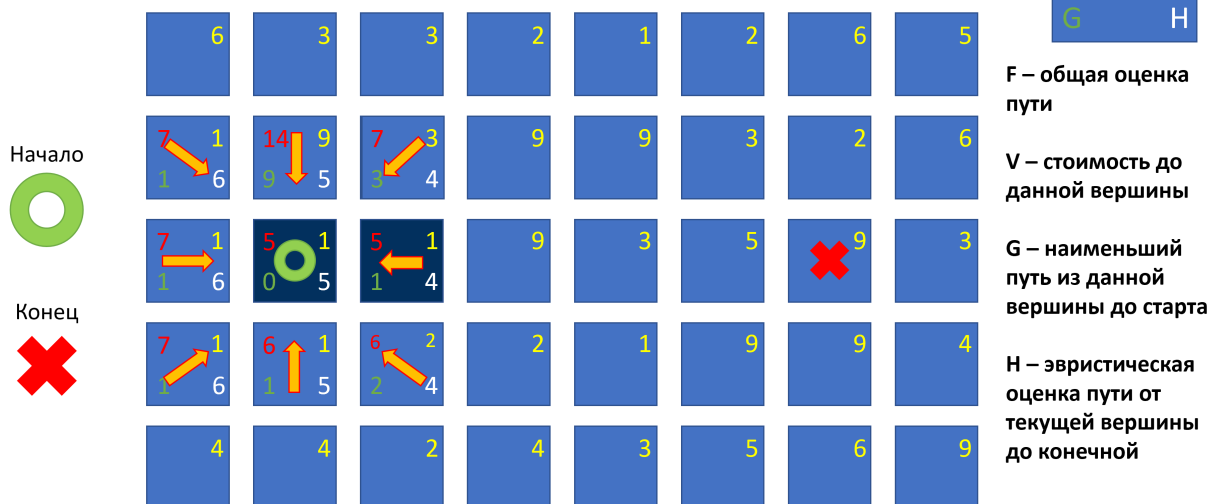
Пример работы алгоритма



12

Рис. 3.3: Определение эвристикой оценки пути

Пример работы алгоритма

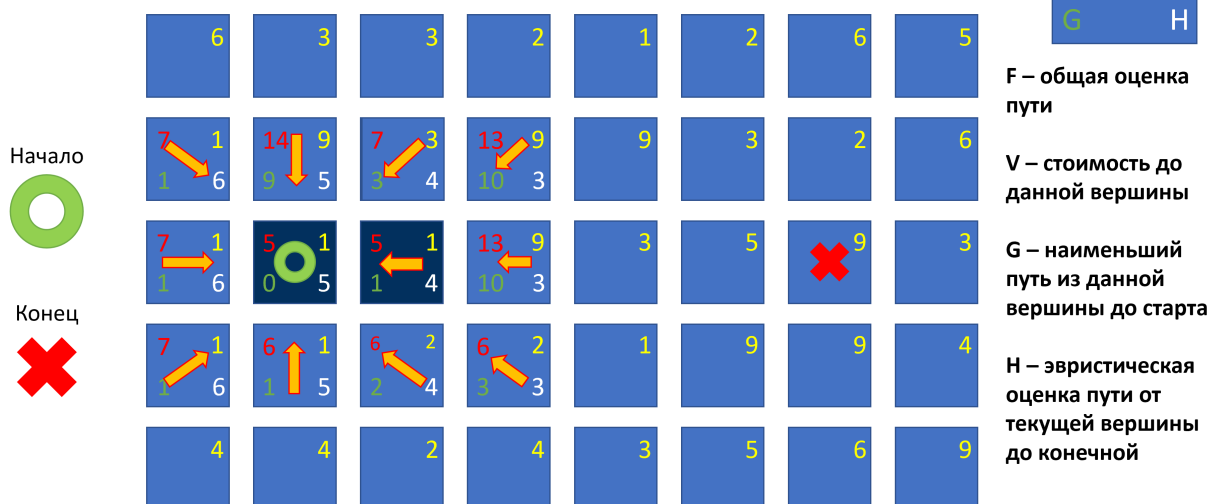


12

Рис. 3.4: Шаг 2

Алгоритм повторяется до тех пор, пока текущая вершина не будет совпадать с конечной. Рис. 3.5, Рис. 3.6, Рис. 3.7, Рис. 3.8, Рис. 3.9, Рис. 3.10, Рис. 3.11, Рис. 3.12

Пример работы алгоритма



12

Рис. 3.5: Определение эвристикой оценки пути

A 2x2 grid with a blue background. The top-left cell contains the letter 'F' in red. The top-right cell contains the letter 'V' in yellow. The bottom-left cell contains the letter 'G' in green. The bottom-right cell contains the letter 'H' in white. A large yellow arrow with a red outline points from the right side of the grid towards the left side, passing between the letters.

H – эвристическая
оценка пути от
текущей вершины
до конечной



Рис. 3.6: Шаг 3

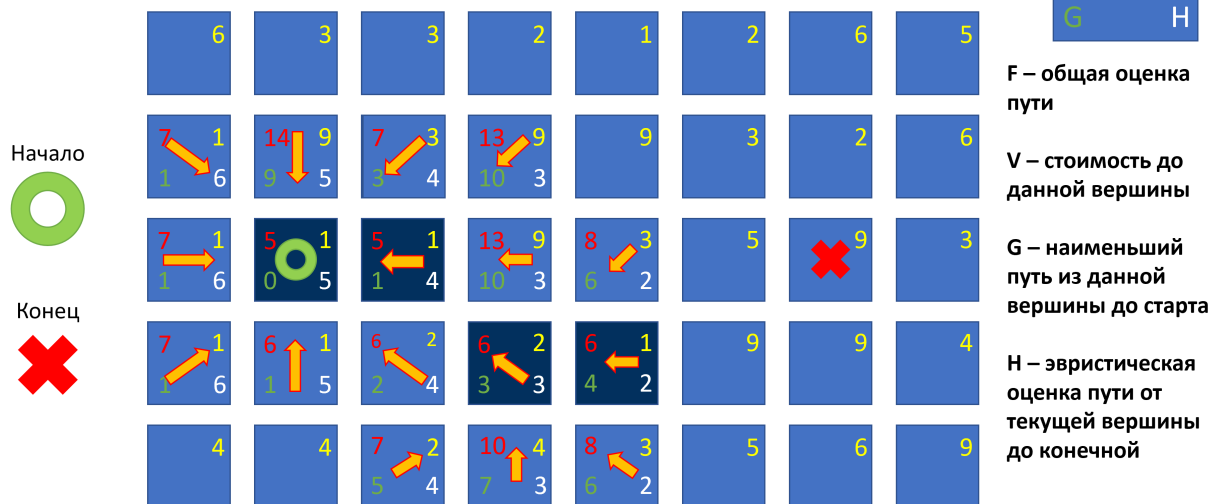
A 2x2 grid with a blue background. The top-left cell contains the letter 'F' in red. The top-right cell contains the letter 'V' in yellow. The bottom-left cell contains the letter 'G' in green. The bottom-right cell contains the letter 'H' in white. A large yellow arrow with a red outline points from right to left, spanning across the middle of the grid.

H – эвристическая
оценка пути от
текущей вершины
до конечной



Рис. 3.7: Определение эвристической оценки пути

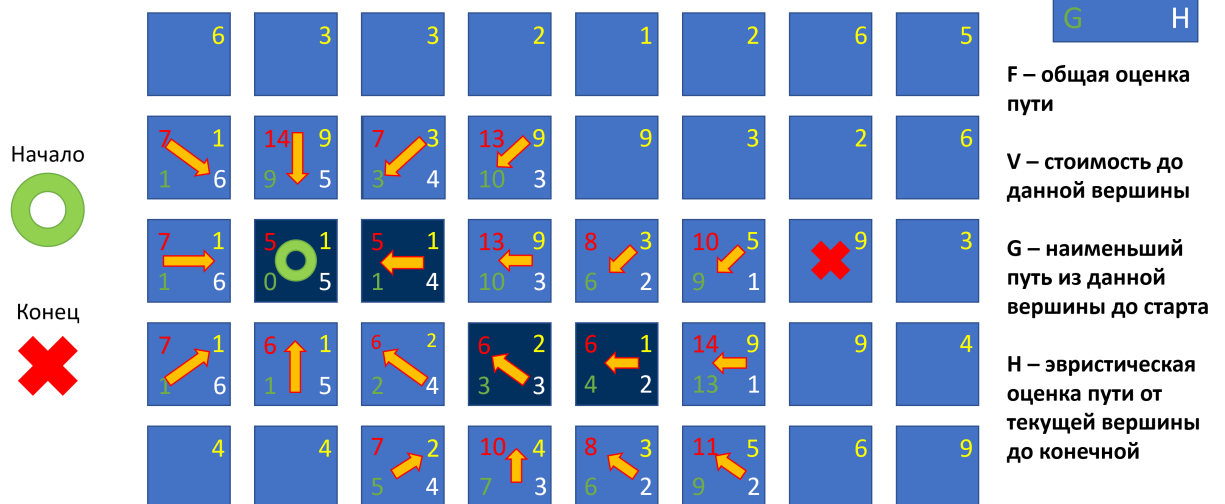
Пример работы алгоритма



12

Рис. 3.8: Шаг 4

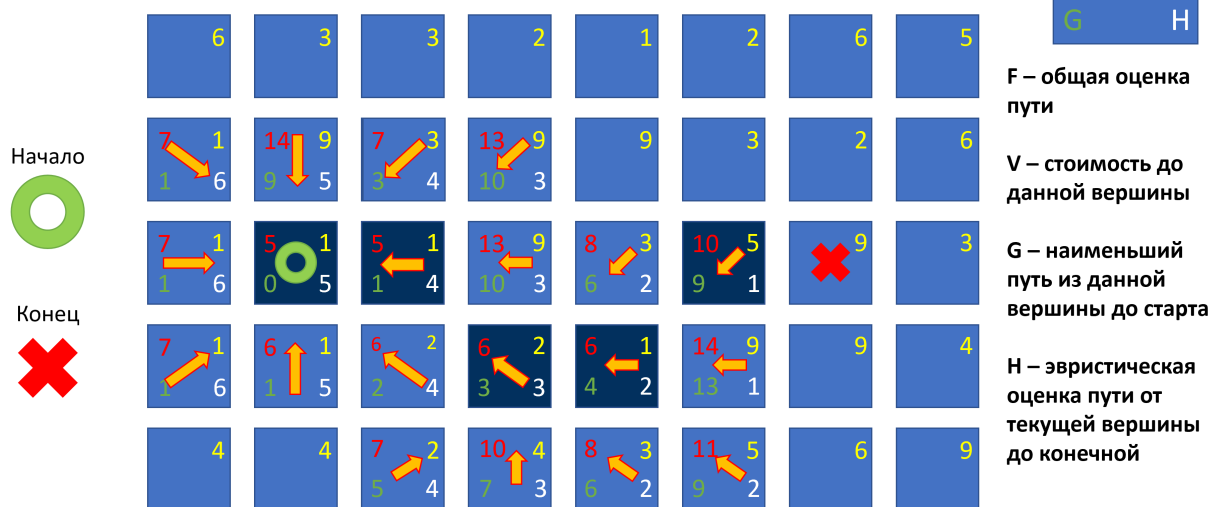
Пример работы алгоритма



12

Рис. 3.9: Определение эвристикой оценки пути

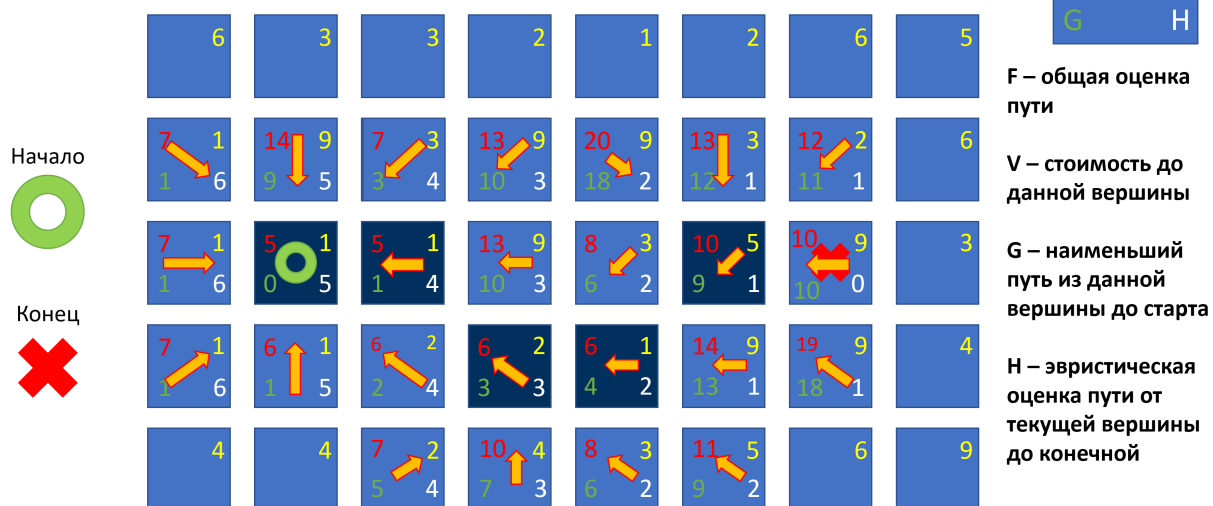
Пример работы алгоритма



12

Рис. 3.10: Шаг 5

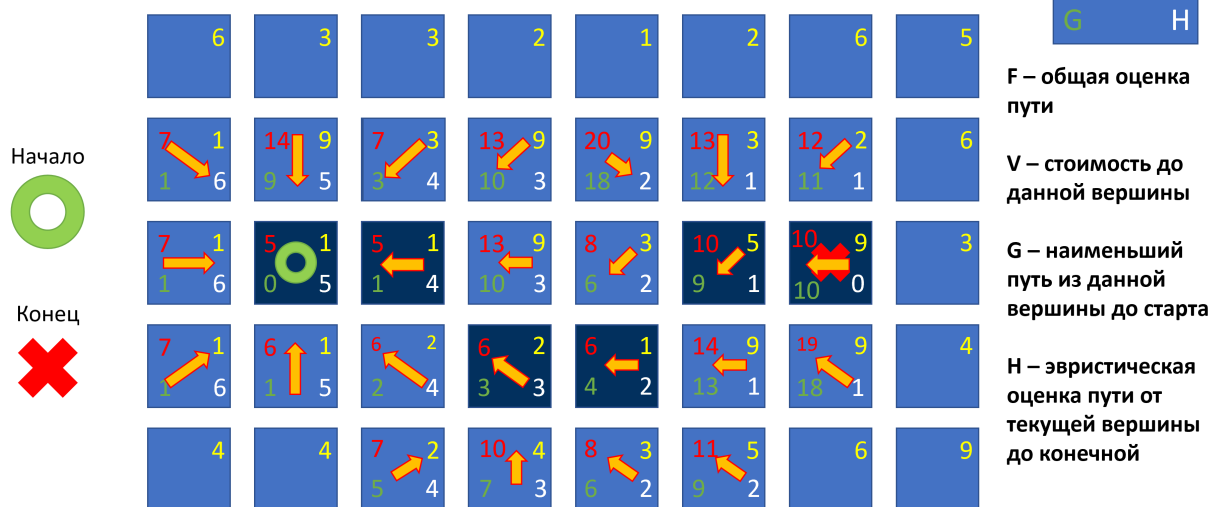
Пример работы алгоритма



12

Рис. 3.11: Определение эвристикой оценки пути

Пример работы алгоритма



12

Рис. 3.12: Маршрут проложен

Глава 4

Формат данных

Ограничения:

- Поле размером $n \leq 10000$ и $m \leq 10000$.
- $0 \leq v \leq 1000000$

Формат входного файла

На вход подаются размер двумерного массива, координаты исходной точки и координаты конечной точки и двумерный массив (поле) со значениями веса данного поля. Данные хранятся в файле input.txt и формируются пользователем самостоятельно.

Формат выходного файла

Выходной файл должен содержать координаты найденного пути, записанный в столбик и суммарный вес.

Примеры тестов

Входной файл (input.txt)	Выходной файл (output.txt)
8 9 5 5 1 2 9 1 1 1 1 1 1 1 5 3 9 1 1 1 1 1 1 1 1 4 9 1 1 1 1 1 1 1 1 1 9 1 1 1 1 1 9 9 9 9 9 1 1 1 1 1 9 1 1 1 1 1	Путь найден (8;9) (7;9) (6;9) (5;9) (4;9) (3;9) (2;8) (2;7) (3;6) (4;5) (5;5) Стоимость пути равна 11

Глава 5

Сравнительный анализ Алгоритма Дейкстры и Алгоритма A^*

5.1 Методология сравнения

Алгоритм A^* будет сравнен с алгоритмом Дейкстры. Тесты учитываются исходя из размеров поля, сложности рельефа поля, сложности маршрута и удаленности начальной и конечной вершин. Так же будут проводится по 2 контрольных теста для независимости от технических помех.

5.2 Алгоритм Дейкстры

Алгоритм Дейкстры — алгоритм на графах, изобретённый нидерландским учёным Эдсгером Дейкстрой в 1959 году. Находит кратчайшие наименьшего по стоимости пути от одной из вершин графа до всех остальных. Алгоритм работает только для графов без рёбер отрицательного веса. Алгоритм широко применяется в программировании, например, его используют протоколы маршрутизации OSPF и IS-IS.

5.3 Тесты

Тест (без преград)

На вход подаются: поле размером 10000*10000, заполненный 1, а так же стартовая вершина (0;0) и конечная вершина (9999;9999).

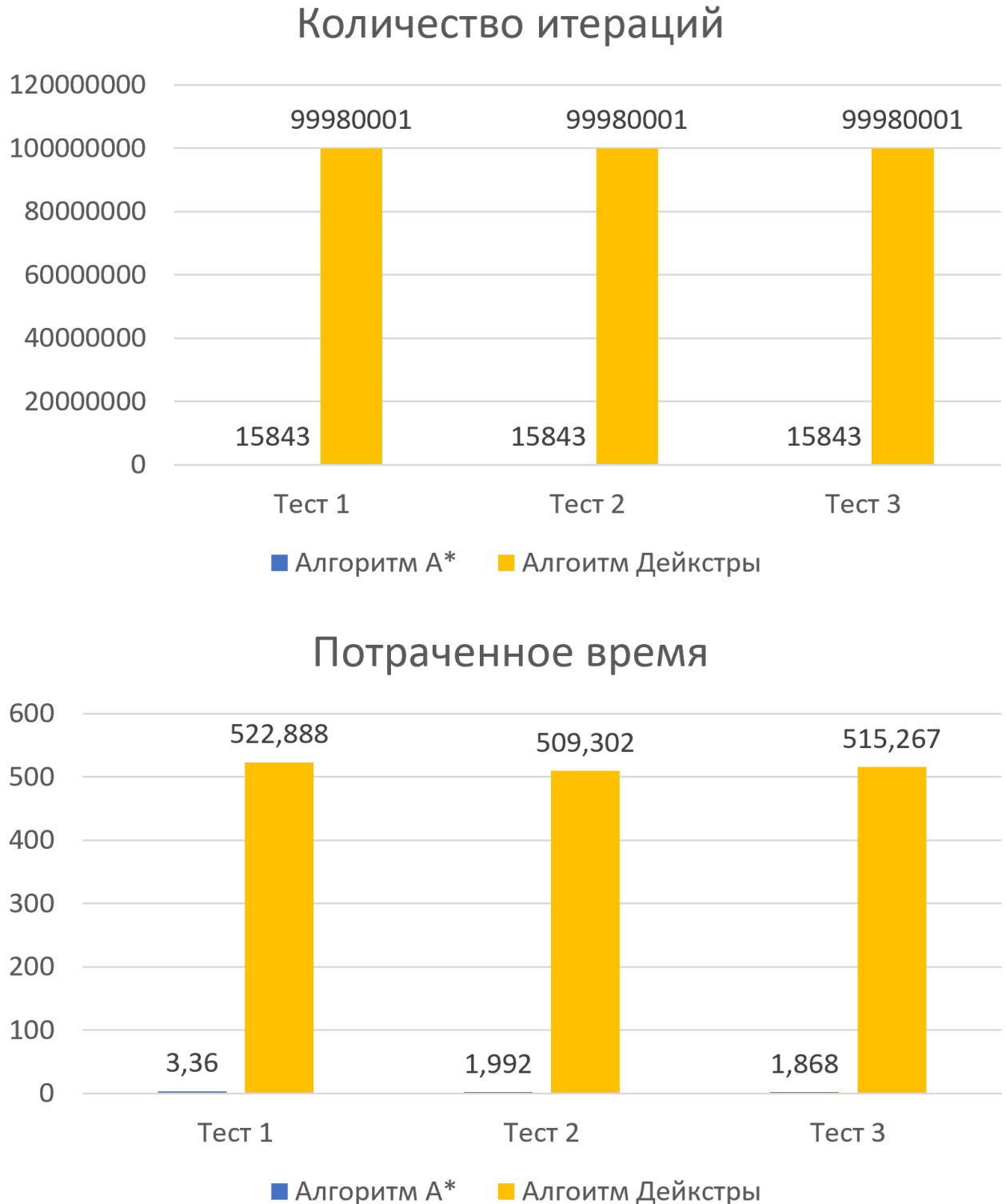


Рис. 5.1: Тест (без преград)

Исходя из исследования видно, что в алгоритме А* меньше итераций чем в алгоритме Дейкстры на 630933% и быстрее на 21368%. Это обусловлено тем, что алгоритму Дейкстры необходимо проверить все вершины, а алгоритм А* проверяет то, что находится в сторону конечной вершины.

Тест (Случайные значения)

На вход подаются: поле размером 10000*10000, заполненный 1000000, а так же стартовая вершина (0;0) и конечная вершина (9999;9999).

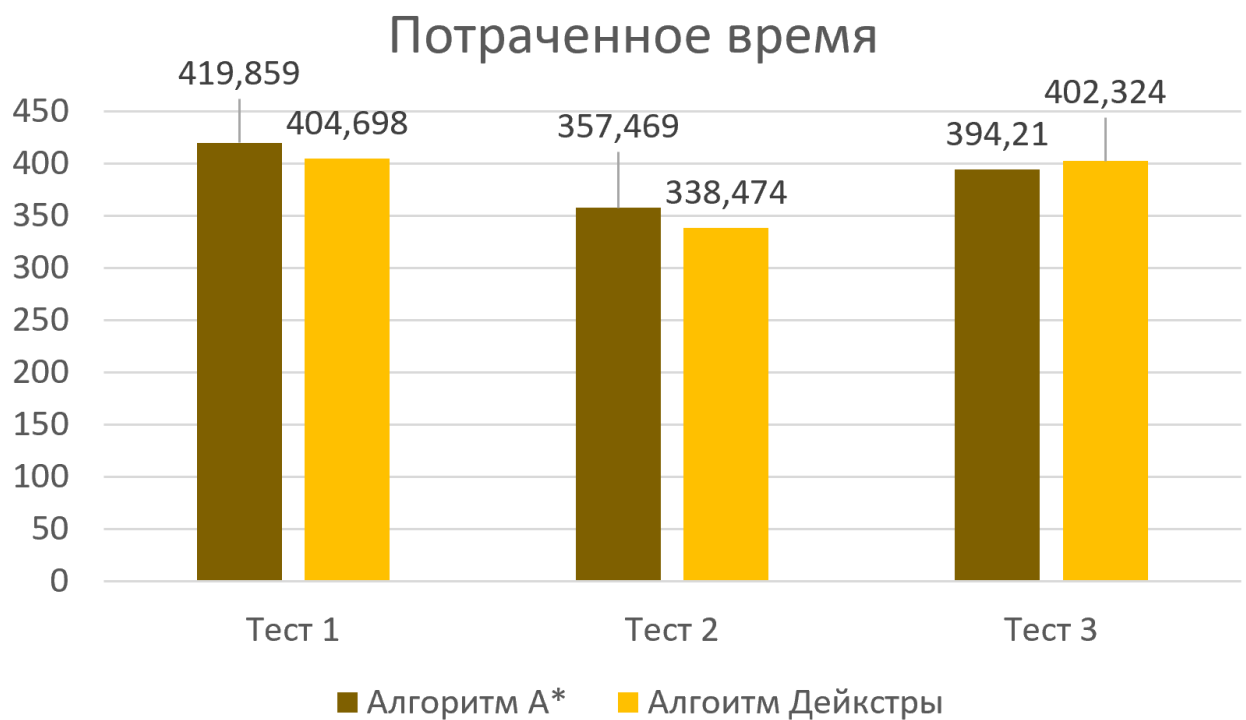
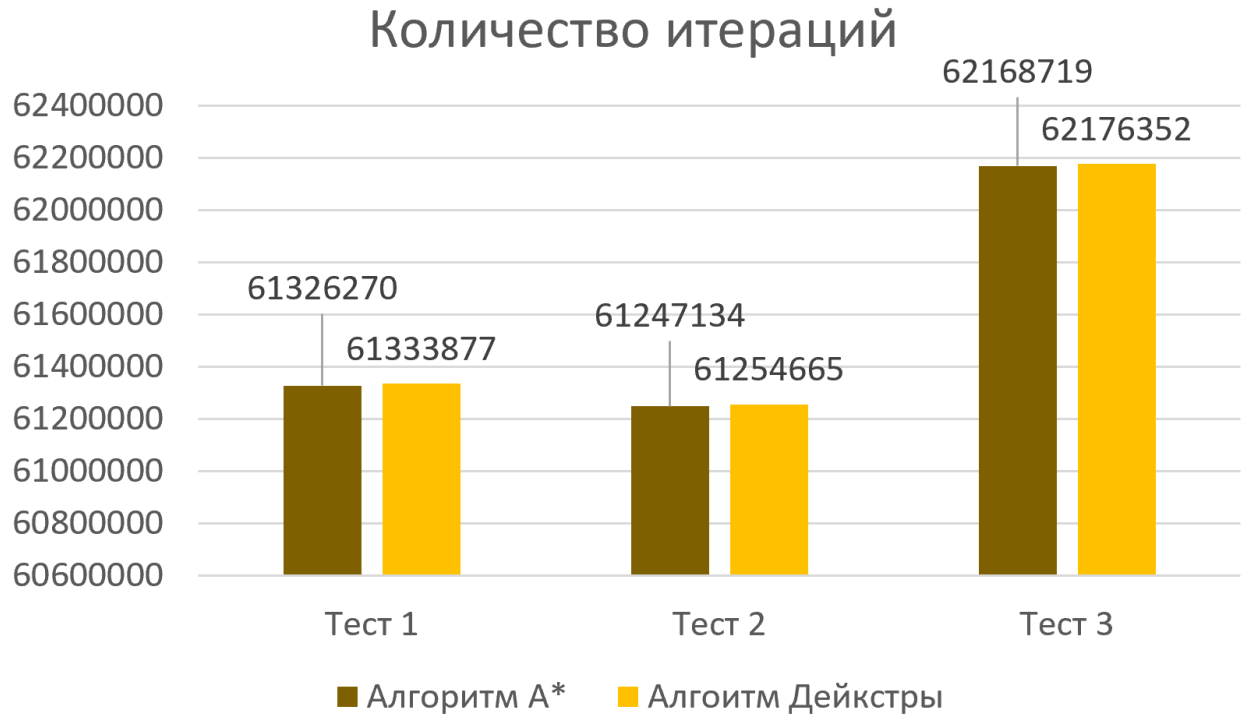


Рис. 5.2: Тест (случайные значения)

В среднем разница не велика и может ссылаться на погрешность. Результат зависит от сложности поля.

Тест (труднопроходимый)

На вход подаются: поле размером 10000*10000, заполненный 1, а так же стартовая вершина (0;0) и конечная вершина (9999;9999).

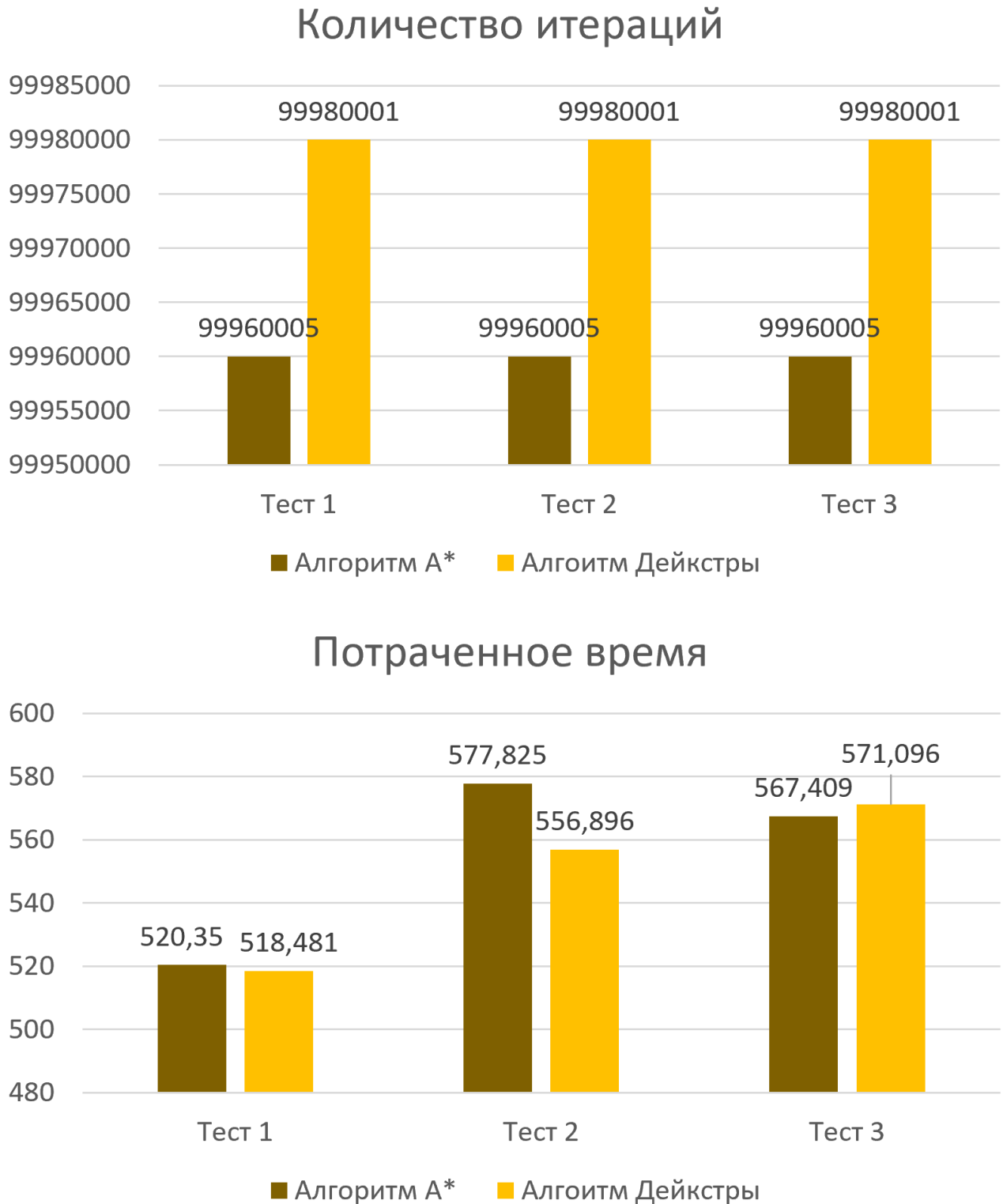


Рис. 5.3: Тест (труднопроходимый)

В среднем разница не велика и может ссылаться на погрешность. Результат обусловлен тем, что Алгоритм А*, в поисках кратчайшего пути, посещает все вершины как алгоритм Дейкстры.

Тест (лабиринт)

На вход подаются: поле размером 20*20, поле представляет собой лабиринт, а так же стартовая вершина (1;1) и конечная вершина (18;18).

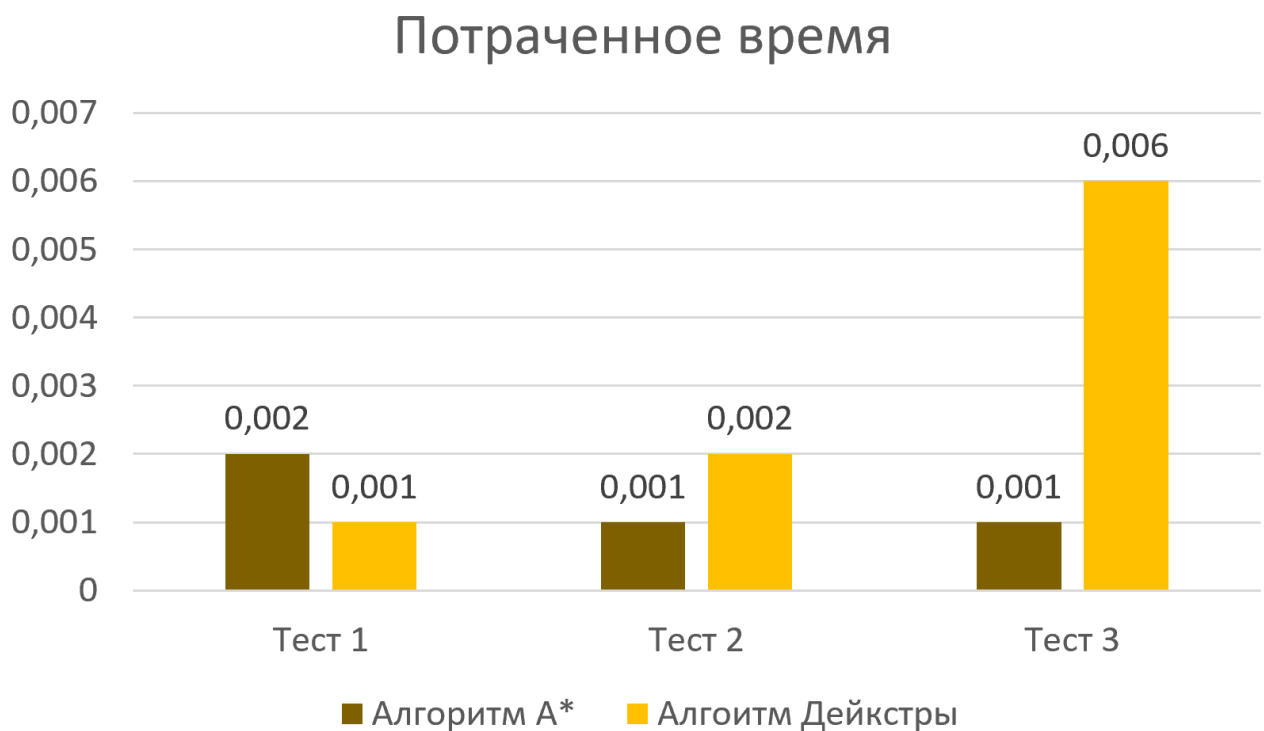
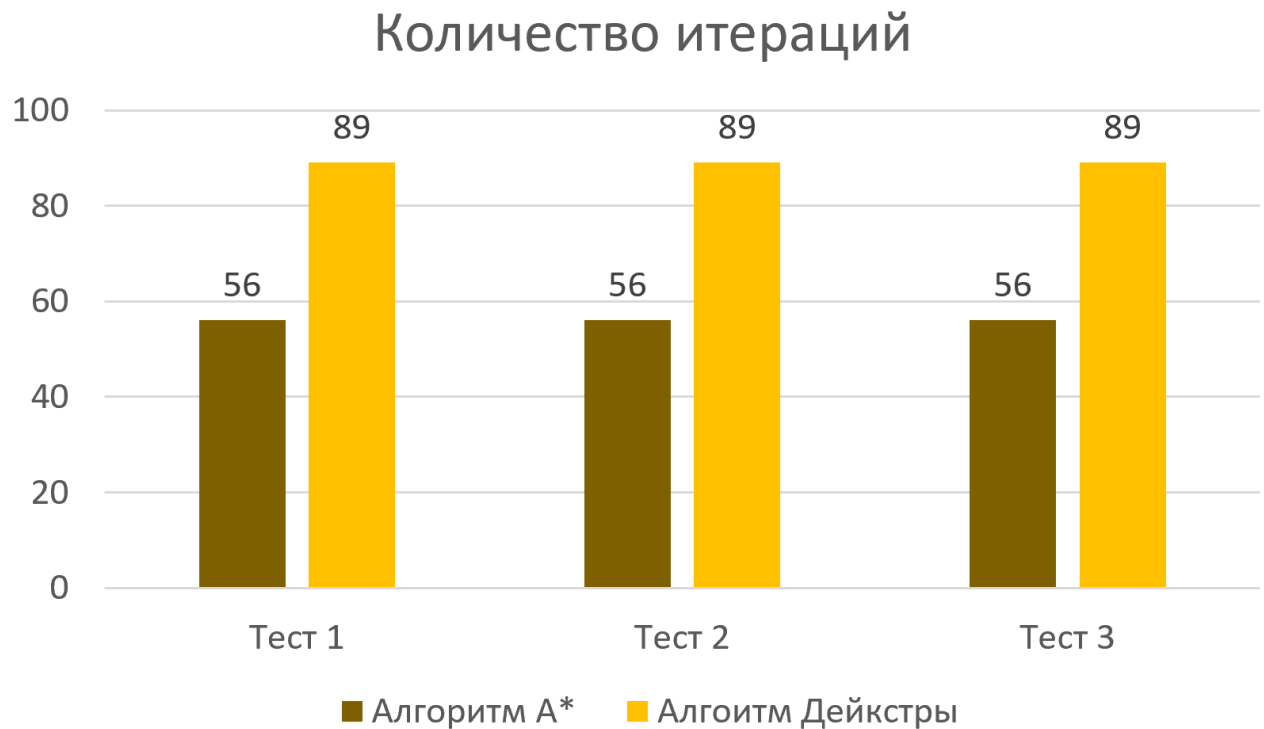


Рис. 5.4: Тест (лабиринт)

Исходя из исследования видно, что в алгоритме A* меньше итераций чем в алгоритме Дейкстры на 38% и быстрее на 65%. Результат зависит от сложности лабиринта. Если Алгоритм A* сможет найти выход быстро, то Алгоритм A* будет лучше, чем Алгоритм Дейкстры.

Тест (пересеченная местность)

На вход подаются: поле размером 20×20 , поле представляет собой пересеченную местность, а так же стартовая вершина $(0;0)$ и конечная вершина $(29;29)$.

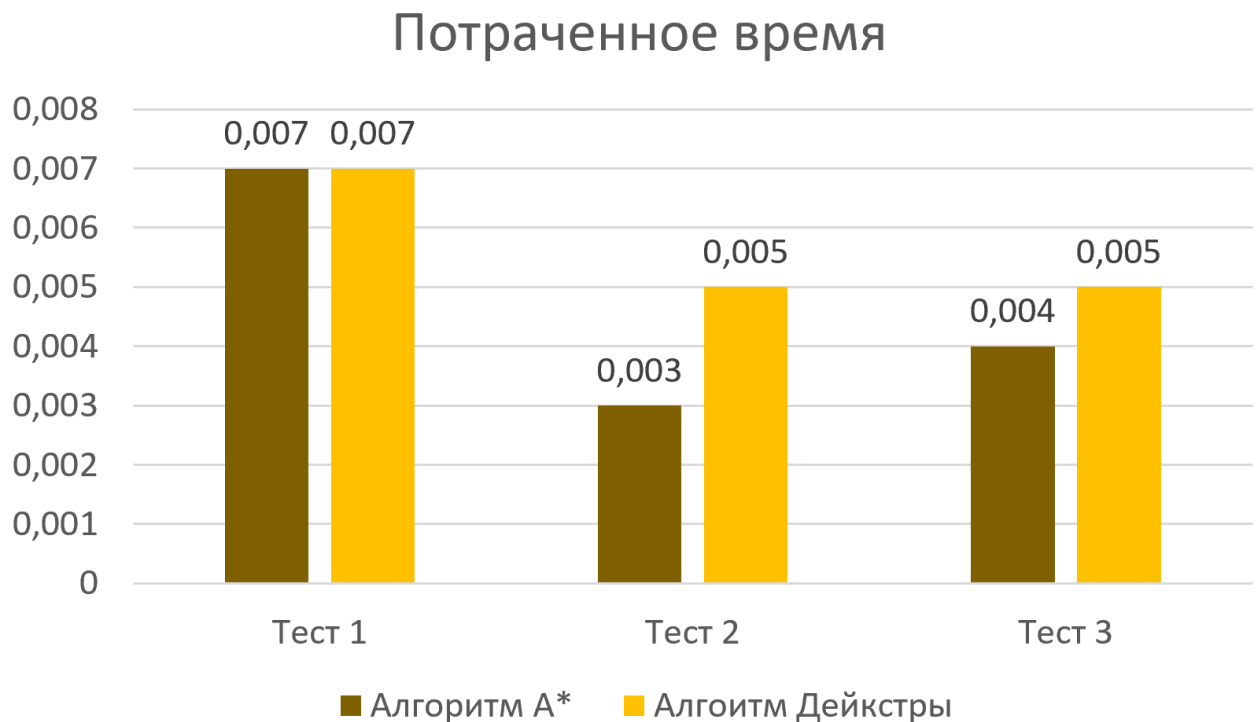
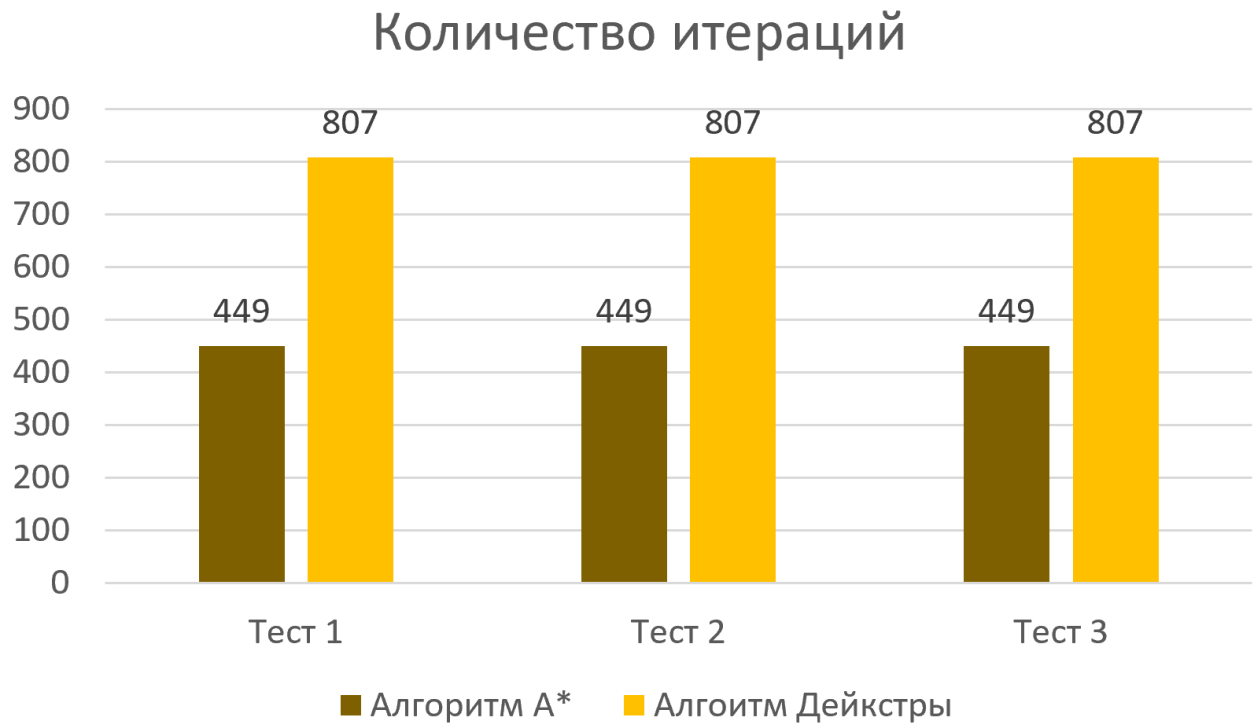


Рис. 5.5: Тест (пересеченная местность)

Исходя из исследования видно, что в алгоритме A* меньше итераций чем в алгоритме Дейкстры на 44% и быстрее на 17%. Результат обусловлен тем, что алгоритм A* стремится к конечной точке, когда алгоритм Дейкстры посещает все доступные вершины

5.4 Вывод

Если ситуация требует посещения всех вершин, то выгоднее будет использовать алгоритм Дейкстры, но если требуется найти путь к одной вершине, то алгоритм A^* будет предпочтительнее

Глава 6

Заключение

В ходе данной работы, изучен и реализован на языке "с++" алгоритм A* с визуализатором для полей до значений 10000×10000 со значениями весов до 1000000. Проведено тестирование на 37 тестах, выполнено исследование на сравнительный анализ с алгоритмом Дейкстры, а все имеющиеся результаты выложены на GitHub по ссылке.

Литература

- [1] Владимир Моженков - "Алгоритм поиска A*"
- [2] Wikisu.ru - "A* search algorithm"
- [3] Tproger.ru - "Как реализовать алгоритм A* для поиска пути"
- [4] rc74.ru - "Введение в алгоритм A*"
- [5] russianblog.com - "Принцип алгоритма планирования пути A*"
- [6] wikibooks.org - "Алгоритм поиска A*"
- [7] ifmo.ru - "Алгоритм Дейкстры"
- [8] pmg.org - "Алгоритмы поиска пути."
- [9] cryptor.net - "Поисковый алгоритм A-Star (A*)"
- [10] itnan.ru - "Введение в алгоритм A*"
- [11] hmong.ru - "Алгоритм поиска A*"
- [12] spravochnick.ru - "Взвешенный граф"
- [13] stackoverflow.com - "Алгоритмы поиска пути A*"
- [14] wikipedia.org - "Алгоритм поиска пути"
- [15] Лорьер Жан-Луи - "Системы искусственного интеллекта"1991г.
- [16] dl.acm.org - "Generalized best-first search strategies and the optimality of A*"
- [17] psychology-pedagogy.academic.ru - "Эвристическая функция"
- [18] codernet.ru - "Поисковый алгоритм A Star: что это и как эффективно его использовать?"
- [19] habr.com - "Введение в алгоритм A*"
- [20] wikipedia.org - "OSPF"
- [21] theory.stanford.edu - "Introduction to A*"
- [22] Алекс Барыжков - "Алгоритм поиска пути A стар"
- [23] GameDevRu - "Поиск пути в играх. Алгоритм поиска пути A*"
- [24] wikipedia.org - "IS-IS"
- [25] wiki5.ru - "Шейки робот"
- [26] tproger.ru - "Евклидова, L1 и Чебышёва — 3 основные метрики, которые пригодятся в Data Science"
- [27] Marco Pinter - "К более реалистичному поиску пути"