

El Movimiento de un Péndulo: Un Estudio Teórico y  
Experimental, con Comparación con el Movimiento Armónico  
Simple  
Colegio San Jorge de Inglaterra  
Undécimo B

María Alejandra Andrade Sánchez	Belcar Santiago Cuentas-Zavala Infante
Juan Esteban Guzmán Garzón	María Juliana Medina Higuera
Jerónimo Rodríguez Garzón	Juliana Rubiano Cabrera

5 de febrero de 2025

# Índice general

<b>1</b>	<b>Reporte</b>	<b>1</b>
1.1	Introducción . . . . .	1
1.2	Marco teórico . . . . .	1
1.3	Formulación de hipótesis . . . . .	3
1.4	Diseño experimental . . . . .	3
1.4.1	Materiales necesarios . . . . .	4
1.4.2	Variables y constantes . . . . .	4
1.5	Procedimiento . . . . .	5
1.5.1	Variación de la longitud de la cuerda . . . . .	5
1.5.2	Variación de la amplitud . . . . .	6
1.5.3	Variación de la masa . . . . .	6
1.6	Resultados . . . . .	7
1.6.1	Limitaciones . . . . .	7
1.7	Interpretación de los resultados . . . . .	8
1.7.1	Longitud y periodo . . . . .	8
1.7.2	Amplitud y periodo . . . . .	10
1.7.3	Masa y periodo . . . . .	11
1.8	Conclusiones . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Discusión de las preguntas orientadoras</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Apéndice</b>	<b>17</b>
3.1	Introducción . . . . .	17
3.2	Marco teórico . . . . .	17
3.2.1	Periodo . . . . .	18
3.2.2	Frecuencia . . . . .	19
3.2.3	Velocidad . . . . .	19
3.2.4	Energía . . . . .	20
3.2.5	Funciones del tiempo . . . . .	21
3.3	Interpretación de los resultados . . . . .	21
3.3.1	Variación de la longitud de la cuerda . . . . .	21
3.3.2	Variación de la masa . . . . .	28
3.3.3	Variación del ángulo inicial . . . . .	29
3.3.4	Relación entre las gráficas de desplazamiento, velocidad y aceleración . . . . .	30
3.3.5	Energías en función del ángulo . . . . .	32
3.3.6	Energía mecánica en función del ángulo inicial, masa y longitud de la cuerda . . . . .	33
3.4	Conclusiones . . . . .	35

## Resumen

Se estudió el movimiento de un péndulo: un cuerpo suspendido de una cuerda unida a un soporte fijo que se balancea de un lado a otro bajo la influencia de la gravedad. El modelado matemático del péndulo se fundamenta en la relación cinemática y armónica del ángulo  $\theta$  con respecto a la vertical, lo que permite determinar la ubicación de la masa en el plano de referencia y analizar los cambios en su velocidad. Desde esta perspectiva, se puede estudiar la evolución de las energías del sistema dentro del marco de la mecánica clásica.

Consideramos un modelo ideal en el que la cuerda  $L$  es inextensible y sin masa, pero cuya longitud influye en la oscilación del sistema, afectando su periodo y frecuencia. Al analizar la ecuación diferencial del sistema, observamos que el movimiento resultante se describe mediante una función sinusoidal, lo que evidencia la naturaleza periódica del fenómeno.

Para contrastar el análisis teórico con resultados experimentales, medimos el periodo de oscilación del péndulo mientras variábamos la masa del objeto, la amplitud de liberación y la longitud de la cuerda. La evidencia experimental, junto con el análisis matemático, permitió concluir que el periodo de oscilación es independiente de la masa del cuerpo suspendido y que el periodo está correlacionado positivamente con la longitud de la cuerda. Además, se encontró una correlación positiva entre la amplitud inicial y la velocidad máxima del sistema.

Adicionalmente, se consideraron las fuentes de error experimental, tales como la imprecisión en la medición del tiempo con cronómetros, la lectura de los ángulos con el transportador y la medición de la longitud de la cuerda. Se calcularon y presentaron los porcentajes de desviación relativa para cada medición.

Finalmente, se realizó un análisis del experimento mediante el movimiento armónico simple que este presenta para amplitudes pequeñas. Se calcularon las velocidades máximas esperadas utilizando fórmulas basadas en energía potencial y cinética. Estas velocidades se compararon con las obtenidas experimentalmente, mostrando una variación mínima y confirmando la validez del modelo de movimiento armónico simple.

Además, se graficaron las funciones de desplazamiento, velocidad y aceleración del péndulo para analizar cómo estas variables se relacionan en el contexto del movimiento armónico simple. Las gráficas permitieron verificar los efectos de las variaciones en la longitud de la cuerda, la amplitud y la masa sobre el comportamiento del péndulo. También se compararon y analizaron las pendientes de las gráficas con los valores de las derivadas correspondientes.

Por último, se analizaron las energías potencial y cinética a lo largo del movimiento. La energía potencial alcanzó su máximo en los extremos del movimiento, mientras que la energía cinética fue máxima al pasar por el punto más bajo. También se observó que la aceleración era máxima en los extremos debido a la fuerza restauradora. Además, se graficó la energía total en función de las variables modificadas, evidenciando su conservación a lo largo del movimiento.

# Capítulo 1

## Reporte

### 1.1 Introducción

En este informe de laboratorio, se buscó analizar el movimiento oscilatorio de un péndulo y las variables que influyen en su comportamiento. Esto se llevó a cabo midiendo el tiempo que tarda un péndulo en realizar diez oscilaciones, variando factores como la masa, la longitud de la cuerda y la amplitud del movimiento. Además, se pretende establecer relaciones matemáticas entre estas variables (masa, tiempo y longitud de la cuerda) y el periodo de oscilación del péndulo.

Algunas preguntas que guiaron la investigación son: ¿Cómo afecta la longitud de la cuerda al periodo de oscilación del péndulo? ¿Qué impacto tiene la masa colgante en el movimiento oscilatorio? ¿De qué manera influye la amplitud en la velocidad máxima del péndulo durante una oscilación?

### 1.2 Marco teórico

El objeto de nuestro estudio es un péndulo simple, compuesto por una masa suspendida al final de una cuerda. La cuerda se desplaza hasta una cierta amplitud o ángulo y luego se libera. La velocidad del objeto es un vector tangente a la trayectoria circular del péndulo y actúa en el eje  $x$ , definido paralelo a  $mg \sin \theta$  como es visible en la figura 1.1.

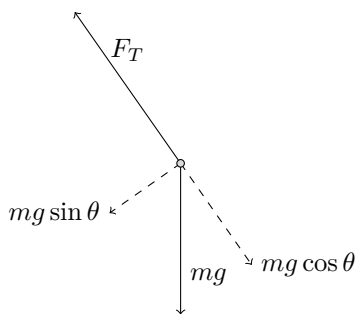


Figura 1.1: Diagrama de fuerzas del péndulo

La componente “tangencial” (u “horizontal” vista desde el marco de referencia establecido) del peso es la fuerza que genera el movimiento (velocidad tangencial) del péndulo, ya que es la única que actúa a lo largo de la trayectoria en la que se mueve. Si bien existe una componente vertical del peso, (denominada “componente radial”) esta no influye en el movimiento del péndulo porque únicamente mantiene la tensión en la cuerda, pero no influye en la velocidad tangencial de la masa.

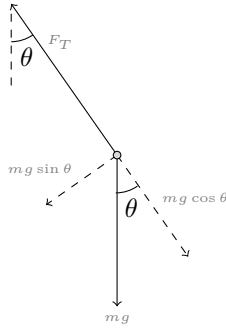


Figura 1.2: Proyección del ángulo

En un péndulo, la masa se encuentra en su punto más alto antes de ser liberada, donde tiene su máxima energía potencial gravitatoria. A medida que la masa comienza a descender, esa energía potencial se convierte en energía cinética. Se asume que los efectos de la resistencia del aire y otras fuerzas externas son despreciables.

En el punto más bajo de la trayectoria, toda la energía potencial se ha transformado en cinética, lo que significa que la masa se mueve a su mayor velocidad.

La tensión de la cuerda debe equilibrar o contrarrestar la componente radial del peso para que la masa no caiga al suelo. Además, la tensión es la fuerza centrípeta que genera la trayectoria circular de la masa. Esta fuerza siempre va dirigida hacia el punto de suspensión: el punto desde donde se encuentra colgada la cuerda.

La velocidad angular  $\omega$  se define como el ángulo recorrido por el objeto en un segundo, y se aproxima, cuando la amplitud  $\theta$  es pequeña, mediante la siguiente fórmula en términos de  $g$ , la aceleración gravitacional, y  $L$ , la longitud de la cuerda:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \theta < 15^\circ \quad (1.1)$$

La frecuencia  $f$  es la cantidad de oscilaciones que ocurren por segundo, y se relaciona con la velocidad angular  $\omega$  mediante la siguiente fórmula:

$$\omega = 2\pi f \quad (1.2)$$

El periodo  $T$  es el tiempo que tarda la masa en completar un ciclo, definido como un movimiento de ida y vuelta. Este se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \theta \ll 15^\circ \quad (1.3)$$

La demostración de la ecuación (1.3) se basa en una breve manipulación algebraica:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f \approx \sqrt{\frac{g}{L}} \\ f &\approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \\ T &= \frac{1}{f} \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \end{aligned}$$

Podemos concluir que el periodo es directamente proporcional a la raíz de la longitud de la cuerda, o, equivalentemente, que el cuadrado del periodo es proporcional a la longitud de la cuerda.

$$T \propto \sqrt{L} \quad (1.4)$$

$$T^2 \propto l \quad (1.5)$$

Según esta ecuación, el periodo del péndulo no depende de la masa del objeto que cuelga: únicamente de la longitud de la cuerda y de la gravedad.

### 1.3 Formulación de hipótesis

- Se espera que exista una correlación positiva entre la longitud de la cuerda y el periodo.
- Se espera que la variación de la amplitud del péndulo no tenga un efecto significativo sobre el periodo.
- Se espera que la variación de la masa sea irrelevante al periodo de oscilación del péndulo.
- Se espera que el periodo observado coincida con el esperado para el movimiento armónico simple.
- Se espera que la velocidad máxima del péndulo ocurrirá en el punto más bajo de su trayectoria.
- Se espera que la velocidad máxima aumentará al aumentar la longitud de cuerda.
- Se espera que la energía potencial será máxima cuando el péndulo alcance los puntos más altos de su trayectoria.
- Se espera que la energía cinética será máxima cuando el péndulo pase por el punto más bajo de su trayectoria.
- Se espera que la aceleración será máxima en los puntos más altos de su trayectoria.

### 1.4 Diseño experimental

Una varilla se fijó perpendicularmente a un soporte. Se ató un cuerda a la varilla, que a la vez se ató a una masa. El aparato se ilustra en la figura 1.3.

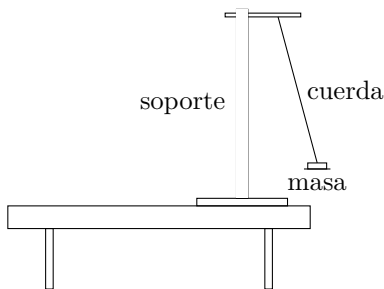


Figura 1.3: Diseño experimental

### 1.4.1 Materiales necesarios

Se necesitan:

- cuerda;
- un cronómetro;
- un soporte para el péndulo;
- pesas de diferentes masas, detalladas en la sección 1.5;
- una regla;
- un transportador;
- una balanza;
- y varillas.

### 1.4.2 Variables y constantes

#### Variación de la longitud de la cuerda

Se mantuvieron constantes algunas variables, como se indica en el cuadro 1.4.1. También se midieron y ajustaron sistemáticamente las variables como se indica en el cuadro 1.4.2.

Constante	Medición	Naturaleza	Unidad
Masa de la pesa	Directa	Cuantitativa	kg
Amplitud	Directa	Cuantitativa	°
Aceleración gravitacional	—	Cuantitativa	m/s <sup>2</sup>
Material de la cuerda	—	Cualitativa	—

Cuadro 1.4.1: Constantes experimentales

Variable	Medición	Dependencia	Naturaleza	Unidad
Longitud de la cuerda	Directa	Independiente	Cuantitativa	m
Masa	Directa	Dependiente	Cuantitativa	kg
Tiempo	Directa	Dependiente	Cuantitativa	s

Cuadro 1.4.2: Caracterización de las variables

#### Variación de la amplitud

Se mantuvieron constantes algunas variables, como se indica en el cuadro 1.4.3. También se midieron y ajustaron sistemáticamente las variables como se indica en el cuadro 1.4.4.

#### Variación de la masa

Se mantuvieron constantes algunas variables, como se indica en el cuadro 1.4.5. También se midieron y ajustaron sistemáticamente las variables como se indica en el cuadro 1.4.6.

Constante	Medición	Naturaleza	Unidad
Masa de la pesa	Directa	Cuantitativa	kg
Longitud de la cuerda	Directa	Cuantitativa	m
Aceleración gravitacional	—	Cuantitativa	m/s <sup>2</sup>
Material de la cuerda	—	Cualitativa	—

Cuadro 1.4.3: Constantes experimentales

Variable	Medición	Dependencia	Naturaleza	Unidad
Amplitud	Directa	Independiente	Cuantitativa	°
Periodo	Directa	Dependiente	Cuantitativa	s
Tiempo	Directa	Dependiente	Cuantitativa	s

Cuadro 1.4.4: Caracterización de las variables

Constante	Medición	Naturaleza	Unidad
Longitud de la cuerda	Directa	Cuantitativa	m
Amplitud	Directa	Cuantitativa	°
Aceleración gravitacional	—	Cuantitativa	m/s <sup>2</sup>
Material de la cuerda	—	Cualitativa	—

Cuadro 1.4.5: Constantes experimentales

Variable	Medición	Dependencia	Naturaleza	Unidad
Masa de la pesa	Directa	Independiente	Cuantitativa	kg
Periodo	Directa	Dependiente	Cuantitativa	s
Tiempo	Directa	Dependiente	Cuantitativa	s

Cuadro 1.4.6: Caracterización de las variables

## 1.5 Procedimiento

En todos los casos, se calcularon promedios de los datos que se midieron más de una vez. El periodo de oscilación se aproximó dividiendo entre diez el tiempo promedio transcurrido en cada configuración experimental.

### 1.5.1 Variación de la longitud de la cuerda

1. Se midió 1 m de cuerda con una regla.
2. Se ató una masa de 0.05 kg a la cuerda.
3. Se liberó la masa a una amplitud de 15 grados, medida con el transportador, y simultáneamente se inició el cronómetro.
4. Después de diez oscilaciones, se pausó el cronómetro y se registró el tiempo transcurrido.
5. Se repitieron los pasos 3 y 4 tres veces.
6. Se repitieron los pasos 1 a 5, utilizando longitudes de cuerda de 50 cm, 30 cm y 15 cm.



### **1.5.2 Variación de la amplitud**

1. Se midieron 60 cm de cuerda con una regla.
2. Se ató una masa de 0.10 kg a la cuerda.
3. Se liberó la masa a una amplitud de 6 grados, medida con el transportador, y simultáneamente se inició el cronómetro.
4. Después de diez oscilaciones, se pausó el cronómetro y se registró el tiempo transcurrido.
5. Se repitieron los pasos 3 y 4 tres veces.
6. Se repitieron los pasos 1 a 5, utilizando amplitudes de 9, 12, 15 y 18 grados.

### **1.5.3 Variación de la masa**

1. Se midieron 60 cm de cuerda con una regla.
2. Se ató una masa de 0.05 kg a la cuerda.
3. Se liberó la masa a una amplitud de 10 grados, medida con el transportador, y simultáneamente se inició el cronómetro.
4. Después de diez oscilaciones, se pausó el cronómetro y se registró el tiempo transcurrido.
5. Se repitieron los pasos 3 y 4 tres veces.
6. Se repitieron los pasos 1 a 5, utilizando masas de 0.10 kg, 0.15 kg, 0.20 kg y 0.25 kg.

## 1.6 Resultados

Longitud $L$ (m)	Tiempo para 10 oscilaciones (s)			Tiempo promedio (s)	Periodo $T$ (s)
	Medición 1	Medición 2	Medición 3		
0.15	9.56	9.68	9.71	9.65	0.965
0.30	12.39	12.69	12.98	12.68	1.269
0.50	15.32	15.65	15.66	15.54	1.554
1.00	20.78	20.76	20.91	20.82	2.082

Cuadro 1.6.1: Efecto de la longitud en el periodo

Amplitud $\theta$ ( $^\circ$ )	Tiempo para 10 oscilaciones (s)			Tiempo promedio (s)	Periodo $T$ (s)
	Medición 1	Medición 2	Medición 3		
6	16.39	16.56	16.76	16.57	1.657
9	16.41	16.95	16.69	16.68	1.668
12	17.01	16.80	17.09	16.97	1.697
15	16.57	16.72	17.00	16.76	1.676
18	16.41	16.53	16.72	16.55	1.655

Cuadro 1.6.2: Efecto de la amplitud en el periodo

Masa (kg)	Tiempo para 10 oscilaciones (s)			Tiempo promedio (s)	Periodo $T$ (s)
	Medición 1	Medición 2	Medición 3		
0.05	16.52	16.5	16.78	16.60	1.660
0.10	16.53	16.68	17.09	16.76	1.677
0.15	16.68	16.70	17.00	16.79	1.679
0.20	16.68	16.71	16.95	16.78	1.678
0.25	16.91	16.77	16.74	16.81	1.681

Cuadro 1.6.3: Efecto de la masa en el periodo

### 1.6.1 Limitaciones

Durante el experimento, se tomaron múltiples mediciones bajo las mismas condiciones. Si el experimento hubiera estado libre de errores, estas mediciones serían iguales. Sin embargo, los errores humanos e inexactitudes inevitables resultan en una ligera variación. Algunas fuentes de error posibles incluyen:

- el efecto de rozamientos mínimos e imperceptibles sobre las oscilaciones del péndulo,
- longitudes mal medidas o inexactas,
- mediciones de tiempo inexactas<sup>1</sup>
- y mediciones de ángulo inexactas o ángulos mal medidos.

<sup>1</sup>Algunos cronómetros empiezan a contar unas décimas de segundo después o antes.

Se elaboraron los cuadros 1.6.4 a 1.6.6 para mostrar esta variación, que establece la existencia de errores e inexactitudes.

El porcentaje de error está dado por la fórmula:

$$\text{Error} = \frac{|T_{\text{prom}} - T_{\text{medido}}|}{T_{\text{prom}}} \times 100 \quad (1.6)$$

Donde  $T_{\text{prom}}$  es el periodo promedio y  $T_{\text{medido}}$  es el periodo medido.

Longitud $L$ (m)	% de error para 10 oscilaciones		
	Med. 1	Med. 2	Med. 3
0.15	0.93	0.31	0.62
0.30	2.63	0.06	2.28
0.50	1.42	0.71	0.77
1.00	0.19	0.29	0.43

Cuadro 1.6.4: Errores en la medición durante la variación de la longitud del cuerda

Masa $m$ (kg)	% de error para 10 oscilaciones		
	Med. 1	Med. 2	Med. 3
0.05	0.48	0.60	1.08
0.10	1.43	0.54	1.91
0.15	0.68	0.56	1.23
0.20	0.60	0.42	1.01
0.25	0.59	0.24	0.42

Cuadro 1.6.5: Errores en la medición durante la variación de la masa de la pesa

Amplitud $\theta$ (°)	% de error para 10 oscilaciones		
	Med. 1	Med. 2	Med. 3
6	1.09	0.06	1.15
9	1.64	1.60	0.04
12	1.79	0.31	1.73
15	1.13	0.24	1.43
18	0.85	0.12	1.03

Cuadro 1.6.6: Errores en la medición durante la variación de la amplitud de liberación

## 1.7 Interpretación de los resultados

### 1.7.1 Longitud y periodo

La gráfica 1.4 es consistente con una correlación positiva entre la longitud de la cuerda y el periodo del péndulo: a medida que la longitud aumenta, el periodo también lo hace. Sin embargo, los puntos no se ajustan exactamente a una relación lineal.

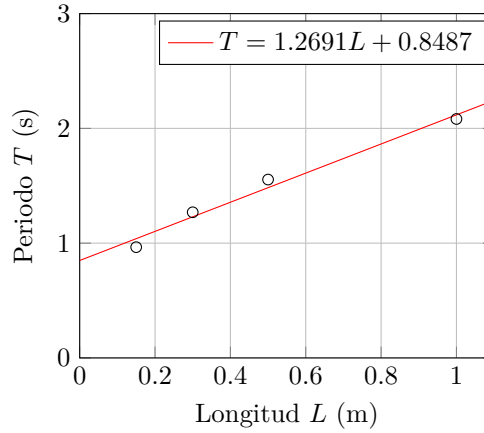


Figura 1.4: Longitud  $L$  (metros) contra periodo  $T$  (segundos)

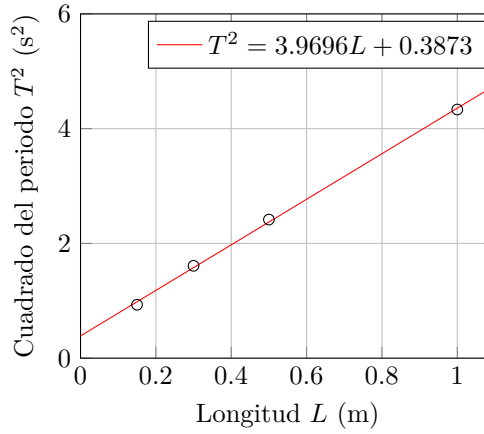


Figura 1.5: Comparación entre el cuadrado del periodo  $T^2$  (segundos cuadrados) y la longitud  $L$  (metros)

Según la teoría,<sup>2</sup> esto ocurre porque el periodo es proporcional a la raíz cuadrada de la longitud, no a la longitud directamente: la relación no es lineal. Por eso, en la gráfica 1.5, se representó el cuadrado del periodo frente a la longitud. En este caso, los puntos se ajustaron a una línea recta, demostrando la relación lineal entre el cuadrado del periodo y la longitud de la cuerda.

Se cree que lo anterior se debe a que, al aumentar la longitud de la cuerda, la trayectoria que el objeto recorre también aumenta. El objeto toma más tiempo en recorrer una distancia mayor, lo que provoca que el periodo (el tiempo para una oscilación completa) se alargue.

### Modelado matemático

La relación que se observa en la gráfica 1.5 puede ser modelada mediante una regresión lineal. La ecuación resultante está dada dentro de la gráfica, y es la siguiente:

$$T^2 = 3.9696l + 0.3873 \quad (1.7)$$

---

<sup>2</sup>Vea la ecuación (1.5) en la página 3.

Esto permite predecir el periodo de un péndulo simple a partir de la longitud de su cuerda, de una forma consistente con la teoría.

La ecuación teórica (1.3) puede manipularse para obtener una forma similar a la ecuación de regresión:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T^2 \approx 4\pi^2\frac{L}{g}$$

$$T^2 \approx \frac{4\pi^2}{9.81 \text{ m/s}^2} L$$

$$T^2 \approx 4.03 \text{ s}^2/\text{m} \cdot L$$

El coeficiente 4.03 de la ecuación teórica es muy cercano (dentro de un 1.5% de error) al 3.97 obtenido mediante la regresión lineal de los datos experimentales. Esta similitud entre la teoría y los resultados experimentales fortalece la validez de nuestras conclusiones.

La pequeña diferencia entre ambos valores puede atribuirse a varios factores experimentales, como la resistencia del aire, pequeñas imperfecciones en la medición del tiempo y la longitud, o ligeras desviaciones de la verticalidad en el montaje del péndulo. Lo mismo aplica para la presencia de un término independiente (0.3873) en la ecuación experimental, que también sugiere la existencia de errores sistemáticos en las mediciones.

### 1.7.2 Amplitud y periodo

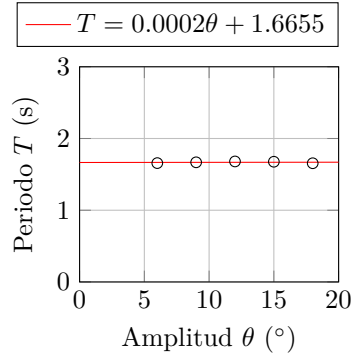


Figura 1.6: Amplitud  $\theta$  (grados) contra periodo  $T$  (segundos)

La gráfica 1.6 muestra la relación entre la amplitud y el periodo. La variación entre los puntos es mínima. Al añadir una línea de tendencia, la ecuación resultante muestra una pendiente de 0.0002s, lo que indica una variación insignificante en los datos. De manera similar, la gráfica refleja que el cambio en el periodo al aumentar la amplitud es muy pequeño.

La ausencia de una relación clara es consistente con la ecuación (1.3), la cual asocia el periodo únicamente con la aceleración gravitacional y la longitud de la cuerda.

Los resultados experimentales sugieren que el periodo de un péndulo simple es independiente de la amplitud de la oscilación. En la regresión lineal, se cree que el término independiente (1.6655) es consecuencia de los factores que se mantuvieron constantes durante el experimento, como la longitud de la cuerda y la aceleración gravitacional.

## Energía potencial

Un análisis energético ofrece una posible explicación para los resultados observados. La diferencia de la energía potencial del objeto entre pequeñas amplitudes es mínima, lo que puede ayudar a explicar que la amplitud no afecte de manera significativa el tiempo que el objeto tarda en completar una oscilación.

Se asume que los efectos de la resistencia del aire y otras fuerzas externas son despreciables, por lo que se realiza el análisis basándose en la suposición de que toda la energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética.

Debido a que una mayor energía cinética implica una mayor velocidad máxima en la oscilación, podría esperarse un menor periodo oscilatorio, incluso a pesar de la mayor longitud del arco a través del que el movimiento ocurre cuando se aumenta la amplitud. Sin embargo, las diferencias en energía potencial gravitatoria durante el experimento son mínimas.

Se puede calcular la altura inicial  $h$  de una pesa que se ata a una cuerda de longitud  $L$  y se libera con la amplitud  $\theta$  según la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} h &= L(\sin(270^\circ + \theta) - \sin 270^\circ) \\ &= L(\sin(270^\circ + \theta) + 1) \\ &= L(-\cos \theta + 1) \\ &= L(1 - \cos \theta) \end{aligned} \tag{1.8}$$

También se puede calcular la energía potencial gravitatoria de la pesa a partir de su masa  $m$  y su altura inicial  $h$ :

$$U = mgh \tag{1.9}$$

Combinando ambas fórmulas, se puede estimar la energía potencial gravitatoria de la pesa al liberarse a las distintas amplitudes, como se ve en la figura 1.7.

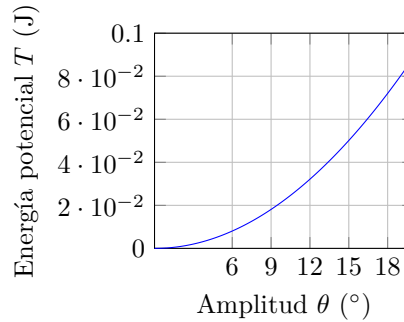


Figura 1.7: Energía potencial (julios) de una masa de 0.5 kg liberada a un radio de 0.3 m contra amplitud de liberación  $\theta$  (grados)

Los cálculos muestran que la diferencia entre las energías cinéticas para variaciones en pequeños valores de amplitud es pequeña.

### 1.7.3 Masa y periodo

La gráfica 1.8 muestra la relación entre la masa y el periodo. En la gráfica, se observa que la variación entre los puntos es mínima. La línea de tendencia tiene la ecuación  $T = 0.0043m + 1.6621$ , donde el coeficiente 0.0043 s/kg representa el cambio en el periodo por cada kilogramo adicional de

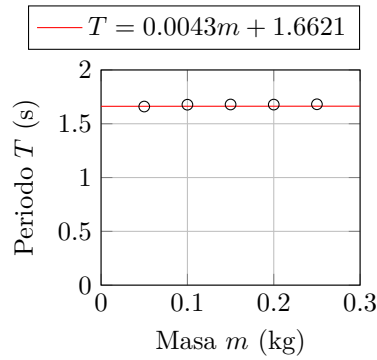


Figura 1.8: Masa  $m$  (kilogramos) contra periodo  $T$  (segundos)

masa. Este valor es extremadamente pequeño, lo que indica que la masa tiene un efecto insignificante en el periodo.

El término independiente 1.6621 s representa el periodo base del péndulo, determinado principalmente por la longitud de la cuerda que se mantuvo constante durante esta parte del experimento. Las pequeñas desviaciones de los puntos respecto a la línea de tendencia podrían atribuirse a errores experimentales.

Según el análisis teórico, y como es discutido en la sección 2, el periodo es independiente de la masa. Esto también es consistente con la fórmula (1.3).

## 1.8 Conclusiones

El experimento permitió evaluar la validez de las hipótesis. En primer lugar, se planteó que existía una correlación positiva entre la longitud de la cuerda y la duración de las oscilaciones, lo cual fue confirmado. Esto se evidenció tanto en la gráfica de resultados, que mostró una pendiente que reflejaba dicha relación, como en la tendencia observada en los datos obtenidos. En segundo lugar, se planteó la hipótesis de que la variación de la masa es irrelevante para el período de oscilación del péndulo. Esta hipótesis fue comprobada mediante la gráfica de resultados, que mostró una pendiente muy mínima y cercana a 0, posiblemente debida a errores de medición y la influencia de factores como la resistencia al aire, lo que sugiere que no existe una relación significativa entre las dos variables. En tercer lugar, se hipotetizó que existe una correlación positiva entre la amplitud y la velocidad máxima del péndulo durante una oscilación. Sin embargo, dado a las pequeñas amplitudes que se tomaron para el experimento, y los resultados muy cercanos los unos a los otros, no se pudo establecer experimentalmente una relación directa entre ambas variables.

## Capítulo 2

# Discusión de las preguntas orientadoras

### ¿Qué sucede con la velocidad tangencial cuando aumenta la fuerza centrípeta?

La fuerza centrípeta en un movimiento circular se define por la siguiente formula:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \quad (2.1)$$

Podemos concluir que la fuerza centrípeta  $F_c$  y el cuadrado de la velocidad del objeto en movimiento  $v^2$  son proporcionales. Una mayor fuerza centrípeta, entonces, implica una mayor velocidad, siempre y cuando otros factores como la masa y la longitud (radio) se mantengan iguales.

En el péndulo, la fuerza centrípeta asociada al movimiento circular proviene de la tensión de la cuerda. Sin embargo, la tensión en sí misma varía a lo largo de la trayectoria. En el punto más bajo del recorrido, la tensión es mayor porque no solo proporciona la fuerza necesaria para producir el movimiento circular, sino que también debe compensar totalmente el peso del péndulo, que en ese momento actúa en la dirección opuesta. Dado que la tensión es variable, la velocidad del péndulo también cambia. En el punto más bajo, tanto la tensión como la velocidad alcanzan sus máximos.

### ¿Cómo se puede aumentar la velocidad tangencial?



Figura 2.1: La diferencia en  $y$  entre el punto más bajo y el punto más alto (cuando  $\theta = \theta_0$ )

La velocidad máxima del péndulo ocurre cuando está en su punto más bajo y su energía gravitacional potencial se ha convertido totalmente en energía cinética.

La altura del péndulo relativa a su punto más bajo es descrita por la fórmula:



$$\begin{aligned} h &= L(\cos(0) - \cos(\theta)) \\ &= L(1 - \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Donde  $L$  se refiere a la longitud de la cuerda.  
Por eso, sabemos que:

$$h \propto l \quad (2.3)$$

Por otro lado, la velocidad del péndulo en su punto más bajo es dada por:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad (2.4)$$

$$v^2 = 2gh \quad (2.5)$$

Sustituyendo  $h$ ,

$$v^2 = 2gL(1 - \cos(\theta)) \quad (2.6)$$

Podemos concluir que:

$$v^2 \propto L \quad (2.7)$$

También,

$$v^2 \propto 1 - \cos(\theta) \quad (2.8)$$

En otras palabras, aumentar el ángulo ( $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ ) o aumentar la longitud de la cuerda resulta en una mayor velocidad tangencial.

La masa no tiene ningún efecto. Durante la manipulación algebraica, la masa  $m$  se presenta como un factor en ambos lados de la ecuación, así que se obtienen fórmulas en términos de otras variables independientes.

## ¿Qué sucede con el periodo del péndulo si la cuerda encuentra un obstáculo?

En el sistema, la pesa se desplaza a lo largo de un arco cuyo origen se llama *pivote*. Cuando no hay un obstáculo que interrumpa la oscilación, el pivote no cambia y es el punto desde el que está fijada la cuerda.

Sin embargo, cuando la cuerda se encuentra con un obstáculo, el pivote se convierte en el punto donde ocurre el contacto. Eso significa que por una parte de la oscilación, la pesa sigue la trayectoria de un arco cuyo radio es menor. Una vez que el péndulo supera el obstáculo, se mueve otra vez desde su pivote original.

Se asume que los efectos de la resistencia del aire y otras fuerzas externas son despreciables, por lo que no existe fuerza que disminuya la velocidad tangencial de la pesa además de la gravedad. Sin embargo, el recorrido total disminuye porque una parte del arco original es reemplazada por un arco más pequeño. De por sí, este hecho ofrece un fundamento fuerte para creer que un obstáculo disminuiría el periodo.

Por otro lado, la fórmula (1.3) de la página 2 indica que el periodo de un péndulo depende de la longitud de la cuerda y la gravedad. En particular, el periodo y la longitud de la cuerda tienen una correlación positiva.

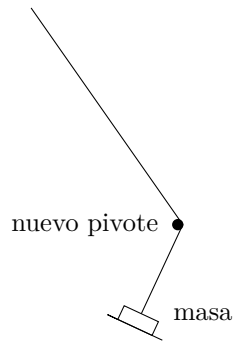


Figura 2.2: El sistema cuando la cuerda se encuentra con un objeto

La fórmula es válida para un cuerpo que se libera sin una velocidad inicial, pero es útil para nuestro análisis porque se cree que la velocidad otorgada a la pesa por su caída parcial hasta este punto tiene un efecto mínimo comparable al de la amplitud  $\theta$ .

Podemos afirmar con suficiente confianza que al reducirse la longitud efectiva de la cuerda, el periodo de la oscilación pequeña será mucho menor en comparación con el periodo que habría de no haber ningún obstáculo.

En otras palabras, durante el tiempo en el que la pesa oscila con una longitud de cuerda menor, recorrería una parte de la trayectoria más rápido. Al final, todo el movimiento es más rápido de lo que sería si no hubiera encontrado el obstáculo.

Por todo lo anterior, se concluye que el periodo disminuiría si la cuerda se encontrara con un obstáculo.

**Suponga que el péndulo roza un líquido en cada oscilación. ¿Cómo se vería la gráfica del espacio contra el tiempo?**

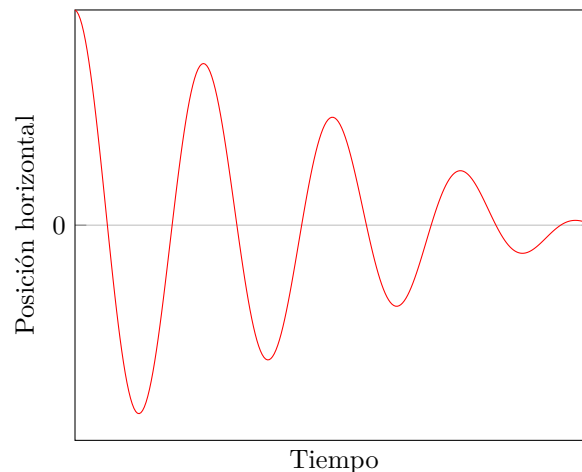


Figura 2.3: El comportamiento general esperado del movimiento

**Descenso inicial:** Al inicio, el péndulo parte de una altura determinada. Mientras baja hacia el punto más bajo de su trayectoria, donde  $x = 0$ , su velocidad aumenta, lo que se refleja en una línea

cada vez más empinada (una mayor pendiente) en la gráfica. La pendiente de la gráfica posición-tiempo equivale a la velocidad del péndulo.

**En el punto más bajo  $x = 0$  y al entrar en el líquido:** Al llegar al punto más bajo y entrar en contacto con el líquido, la fricción comienza a actuar, reduciendo la velocidad. Esto genera una disminución de la pendiente en la gráfica, ya que la velocidad se reduce debido a la resistencia del líquido.

**Ascenso posterior:** Al subir después de pasar por el líquido, el péndulo pierde velocidad, ya que su energía cinética se convierte en energía potencial y, además, cabe mencionar que la fricción del líquido ha reducido parte de su energía. La pendiente sigue disminuyendo hasta que, en el punto más alto de su trayectoria, la velocidad es cero, por lo que la pendiente también será cero. Sin embargo, debido a la pérdida de energía, la altura alcanzada en este punto es menor que la altura inicial, lo que se refleja en la gráfica con un valor menor que el de partida.

**Nuevo descenso hacia el punto más bajo nuevamente:** Al descender desde el nuevo punto más alto, que es menor al inicial, la velocidad del péndulo aumenta nuevamente. Esto se refleja en la gráfica como una pendiente creciente, ya que al moverse hacia el punto más bajo, la velocidad aumenta. Sin embargo, al pasar por el líquido nuevamente, la fricción hace que la velocidad disminuya, lo cual disminuye la pendiente de la gráfica. Al subir hacia el nuevo punto más alto, la energía cinética se vuelve a convertir en energía potencial, y la velocidad disminuye.

Debido a la fricción, el péndulo pierde energía en cada oscilación, por lo que la altura que alcanza es cada vez menor. Esto se refleja en la gráfica con una amplitud decreciente, ya que el péndulo no regresa al punto de partida original. Cada nuevo punto mínimo o máximo en la gráfica de posición-tiempo es más bajo que el anterior.

# Capítulo 3

## Apéndice

### 3.1 Introducción

En el presente informe se analizan las propiedades de un péndulo simple desde la perspectiva del movimiento armónico simple (MAS). El movimiento armónico simple es un tipo de movimiento oscilatorio en el que la fuerza restauradora es directamente proporcional al desplazamiento y actúa en dirección opuesta a este. Esta relación lineal permite simplificar el análisis del péndulo para ángulos pequeños, donde la aproximación del seno del ángulo es válida.

A través de la experimentación y la comparación con el modelo teórico del MAS, se exploran conceptos clave como el periodo, la frecuencia, la velocidad (tanto angular como máxima) y la energía (potencial, cinética y mecánica). Se examinan las relaciones entre estos parámetros y cómo varían en función de la longitud de la cuerda, la masa del objeto y el ángulo inicial de desplazamiento. Los resultados obtenidos en gran medida el comportamiento del péndulo simple predicho por la teoría del MAS, validando las simplificaciones realizadas y proporcionando una comprensión profunda de la física involucrada en este sistema clásico.

Para esta parte del análisis, la amplitud se redefine como la longitud de la cuerda multiplicada por el seno del ángulo (es decir, la distancia del arco por donde oscila el péndulo). El ángulo al cual se eleva el péndulo se define como el ángulo inicial.

### 3.2 Marco teórico

$$A = L\theta_{\max} \quad (3.1)$$

El movimiento armónico simple es una oscilación en la que la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento. En el caso del péndulo, la fuerza restauradora es dada por:

$$F_r = -mg \sin \theta \quad (3.2)$$

Donde  $m$  es la masa del objeto,  $g$  es la aceleración gravitacional y  $\theta$  es el ángulo de desplazamiento. Aunque la ecuación (3.2) no es lineal, es muy cercana a una para pequeñas amplitudes.

$$\sin \theta \approx \theta \quad \theta < 15^\circ$$

Esto permite obtener una fórmula lineal que aproxima la fuerza restauradora:

$$F_r \approx -mg\theta \quad \theta < 15^\circ \quad (3.3)$$

Por eso, se espera que el péndulo se comporte como un movimiento armónico simple para pequeñas amplitudes, como las utilizadas aquí.

Comparando la ecuación (3.3) con la ecuación general de la fuerza restauradora en un movimiento armónico simple, la fuerza restauradora es aproximadamente:

$$F_r \approx -ks \quad (3.4)$$

Donde:

- $k = \frac{mg}{L}$  y  $L$  es la longitud de la cuerda.
- $s = l\theta$ , el desplazamiento a lo largo del arco.  $\theta$  se mide en radianes.

El experimento se puede analizar a partir de esta simplificación porque se utilizaron únicamente ángulos menores a  $15^\circ$ , a excepción de la medida de  $18^\circ$ , durante la variación de la amplitud.

### 3.2.1 Periodo

El periodo de un objeto en movimiento armónico simple puede ser analizado a través de una comparación con el movimiento circular uniforme. En particular, se observa la proyección de un movimiento circular uniforme sobre el eje  $x$ .

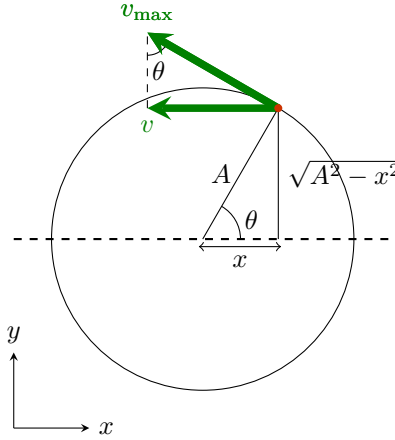


Figura 3.1: Vista de un movimiento circular uniforme desde arriba

En la figura 3.1, tanto la velocidad como la posición de la partícula en movimiento se describen con triángulos. Debido a que estos triángulos comparten, invariablemente, tanto el ángulo theta como un ángulo recto, ambos son similares. Este hecho se expresa en la ecuación (3.5).

$$\begin{aligned} \frac{v}{v_{\max}} &= \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A} \\ v &= v_{\max} \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Esta misma ecuación puede obtenerse a través de un análisis energético del movimiento armónico simple:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}kA^2 \\
v^2 &= \frac{k}{m}(A^2 - x^2) \\
v^2 &= \frac{k}{m}A^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

La velocidad máxima se obtiene cuando  $x = 0$ ; es decir, en el punto de equilibrio. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}k(0^2) &= \frac{1}{2}kA^2 \\
v_{\max}^2 &= \frac{k}{m}A^2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Se pueden combinar las ecuaciones (3.6) y (3.7), dando como resultado:

$$\begin{aligned}
v^2 &= v_{\max}^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) \\
v &= \pm v_{\max} \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Debido a que la velocidad es igual en cada punto, la proyección en el eje  $x$  de un movimiento circular uniforme es idéntica a un movimiento armónico simple. Aquello permite obtener el periodo de un movimiento armónico simple, porque es igual al tiempo que tardaría en dar un ciclo una partícula en el movimiento circular uniforme correspondiente.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi}{v_{\max}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{Ya que } v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{Ya que } k = \frac{mg}{L}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

### 3.2.2 Frecuencia

En el péndulo simple, la frecuencia se refiere al número de veces que el péndulo completa un ciclo en un segundo. Es igual a  $\frac{1}{T}$ .

Combinando la fórmula del periodo según la aproximación basada en el movimiento armónico simple (3.9) en la ecuación de la frecuencia, se obtiene:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{3.10}$$

### 3.2.3 Velocidad

#### Velocidad angular

La velocidad angular es el ángulo recorrido por un objeto por unidad de tiempo, y se mide en radianes por segundo.

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad (3.11)$$

También,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.12)$$

Donde  $T$  es el periodo.

### Velocidad máxima

Como se mencionó anteriormente, la velocidad máxima según la aproximación con el movimiento armónico simple está dada por:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} A \quad (3.7)$$

La velocidad varía a lo largo de la oscilación. Es máxima en el punto de equilibrio, donde toda la energía potencial se convierte en energía cinética, y es cero en los extremos, donde la energía cinética se transforma en energía potencial. Dado que la velocidad es un vector, se asigna un signo positivo al movimiento hacia un lado (en este caso, hacia la derecha) y negativo hacia el lado opuesto (hacia la izquierda), considerando el punto de equilibrio como el origen.

## 3.2.4 Energía

### Energía potencial

La energía potencial gravitacional del péndulo es máxima en los extremos de su movimiento, cuando alcanza su punto más alto, y mínima cuando se encuentra en el punto de equilibrio. Se define por la ecuación (3.13).

$$E_p = mgh \quad (3.13)$$

### Energía cinética

La energía cinética del péndulo es máxima en el punto de equilibrio, cuando el péndulo pasa por la vertical, y mínima en los extremos de su movimiento. Se define por la ecuación (3.14).

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.14)$$

### Energía mecánica

La energía mecánica es la suma de la energía cinética y la energía potencial de un sistema. En el caso del péndulo, la energía mecánica se mantiene constante durante el movimiento, ya que la fricción es negligible y no hay pérdidas significativas de energía debido a fuerzas externas y no conservativas.

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ E_m &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.2.5 Funciones del tiempo

#### Desplazamiento en función del tiempo

En la figura 3.1, se observa que:

$$x = A \cos \theta \quad (3.16)$$

Reescribiendo la ecuación (3.11), obtenemos que:

$$\theta = \omega t$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (3.16), se obtiene:

$$s(t) = A \cos(\omega t) \quad (3.17)$$

Aquí,  $s(t)$  representa el desplazamiento del objeto en un movimiento armónico simple después de un tiempo  $t$  y donde  $A$  es la amplitud; es decir, el máximo desplazamiento del objeto.

Para obtener el ángulo recorrido por el objeto en un tiempo  $t$ , se puede escribir una nueva ecuación:

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega t) \quad (3.18)$$

#### Velocidad en función del tiempo

Dado que la variación de  $s$  con respecto al tiempo  $t$  es la velocidad, la derivada de la ecuación de desplazamiento con respecto al tiempo (3.17) da la velocidad en función del tiempo. Esto se expresa como:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt} [s(t)] \\ v(t) &= \frac{d}{dt} [A \cos(\omega t)] \\ v(t) &= -A\omega \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

#### Aceleración en función del tiempo

Dado que la variación de la velocidad  $v$  con respecto al tiempo  $t$  es la aceleración, la derivada de la velocidad con respecto al tiempo da la aceleración en función del tiempo. Esto se expresa como:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d^2}{dt^2} [s(t)] \\ a(t) &= \frac{d}{dt} [v(t)] \\ a(t) &= \frac{d}{dt} [-A\omega \sin(\omega t)] \\ a(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

## 3.3 Interpretación de los resultados

### 3.3.1 Variación de la longitud de la cuerda

Véase la figura 3.2 en la página 22. En primer lugar, es importante señalar que cuando  $t = 0$ , el valor de  $y$  (desplazamiento angular) para la curva roja (0.30 m) es mayor que el de la curva negra



(0.15 m). Esto se debe a que, para la cuerda de mayor longitud, fue necesario desplazar la masa a una mayor distancia del punto de equilibrio para alcanzar el mismo ángulo inicial.

El periodo de oscilación de un péndulo depende de la longitud de su cuerda, lo que se refleja en la distancia entre crestas en la gráfica de distancia-tiempo. La curva negra, correspondiente a una cuerda de 0.15 m, tiene un periodo más corto, evidenciado por una menor separación entre crestas sucesivas, lo que indica una oscilación más rápida. Esto ocurre porque la masa recorre una distancia horizontal más pequeña para alcanzar el mismo ángulo, permitiendo completar más oscilaciones en menos tiempo.

En contraste, la curva roja, asociada a una cuerda de 0.30 m, presenta una mayor separación entre crestas, lo que indica un periodo más largo y una oscilación más lenta. Esto se debe a que una cuerda más extensa requiere un mayor desplazamiento horizontal para alcanzar el mismo ángulo, aumentando el tiempo necesario para completar cada oscilación.

Para ilustrar esta tendencia, en la figura 3.3 se comparó la curva roja, correspondiente a una cuerda de 0.30 m, con la curva de un péndulo de 0.50 m. Posteriormente, en la figura 3.4, la curva de 0.50 m se graficó junto con la de un péndulo de 1.00 m.

$L$ (m)	$T$ (s)	$A$ (m)	$\omega$ (rad/s)	$V_{\max}$ (s)	$s(t)$ (m)	$v(t)$ (m/s)	$a(t)$ (m/s <sup>2</sup> )
0.15	0.965	0.039	6.512	0.256	$0.039 \cos(6.512t)$	$-0.256 \sin(6.512t)$	$-1.665 \cos(6.512t)$
0.30	1.269	0.079	4.953	0.389	$0.079 \cos(4.953t)$	$-0.389 \sin(4.953t)$	$-1.914 \cos(4.953t)$
0.50	1.554	0.131	4.043	0.529	$0.131 \cos(4.043t)$	$-0.529 \sin(4.043t)$	$-2.140 \cos(4.043t)$
1.00	2.082	0.262	3.019	0.790	$0.262 \cos(3.019t)$	$-0.790 \sin(3.019t)$	$-2.386 \cos(3.019t)$

Cuadro 3.3.1: Valores esperados para varios parámetros del péndulo según el movimiento armónico simple y en función de la longitud y periodo (medidos)

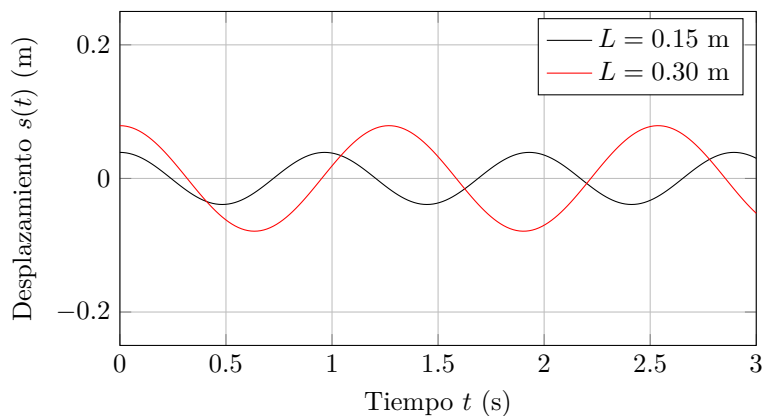


Figura 3.2: Gráfica de distancia-tiempo para una longitud de cuerda de 0.15 m y 0.30 m

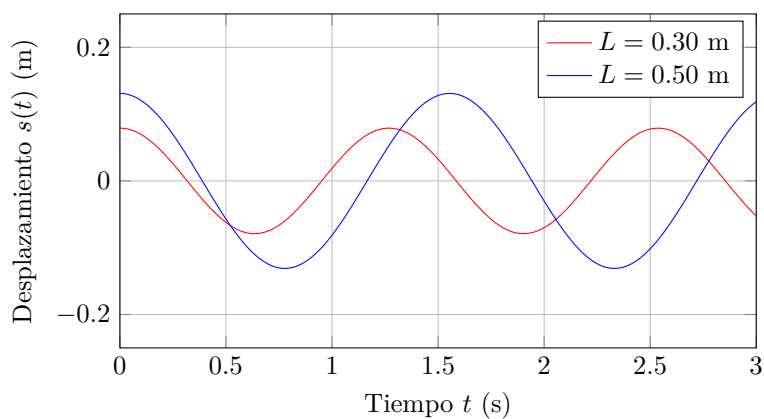


Figura 3.3: Gráfica de distancia-tiempo para una longitud de cuerda de 0.30 m y 0.50 m

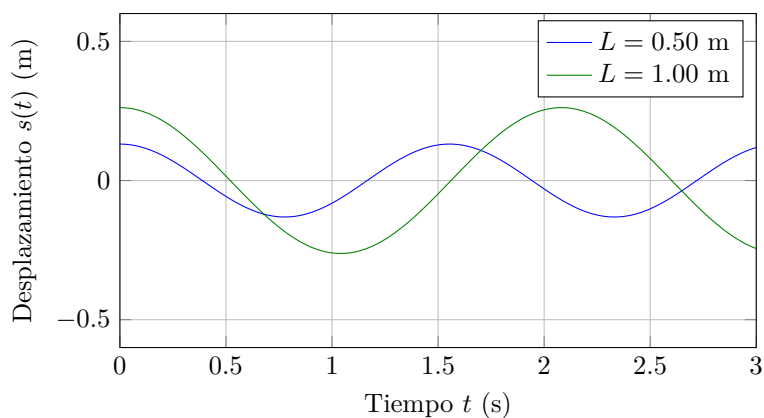


Figura 3.4: Gráfica de distancia-tiempo para una longitud de cuerda de 0.30 m y 0.50 m

Los resultados muestran que, a medida que la longitud de la cuerda aumenta, el periodo de oscilación también se incrementa, mientras que la frecuencia disminuye. Esto confirma la relación entre la longitud de la cuerda y el periodo: cuanto más larga es la cuerda, más tiempo requiere el péndulo para completar una oscilación.

### Los periodos medidos y calculados coinciden

$L$ (m)	$T_{\text{medido}}$ (s)	$T_{\text{esperado}}$ (s)	% de variación
0.15	0.965	0.965	24.18
0.30	1.269	1.269	15.44
0.50	1.554	1.554	9.56
1.00	2.082	2.082	3.75

Cuadro 3.3.2: Comparación entre los valores medidos y esperados para  $T$  según el movimiento armónico simple, con porcentajes de variación

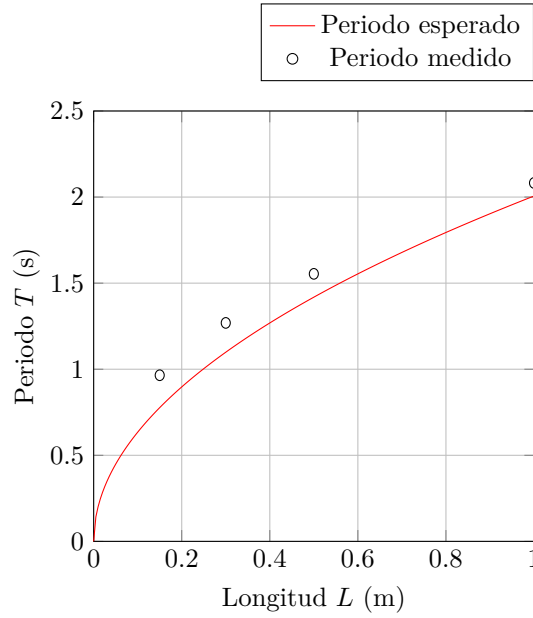


Figura 3.5: Periodo  $T$  medido y esperado para un movimiento armónico simple de las mismas características  $\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)$  en función de la longitud de la cuerda  $L$

Otra comparación relevante es entre el periodo medido en el experimento y el calculado mediante la fórmula del periodo para el movimiento armónico simple (fórmula (3.9)). En la tabla 3.3.2, así como la figura 3.5 se representan ambos valores en función de la longitud de la cuerda.

Se han incluido porcentajes de variación. Estos se calculan con la fórmula:

$$\text{Variación} = \frac{|T_m - T_e|}{T_e} \times 100 \quad (3.21)$$

Donde  $T_e$  es el periodo esperado y  $T_m$  es el periodo medido.

Como se observa, los resultados experimentales y teóricos son muy similares, lo que se refleja en la cercanía de los puntos a la tendencia de la curva en la figura 3.5, las cuales prácticamente coinciden. Esta correspondencia indica que la relación entre el periodo y la longitud de la cuerda siguen cercanamente al modelo teórico, lo cual demuestra el movimiento armónico del péndulo.

### Comparación de la velocidad máxima

Habíamos establecido que la velocidad máxima de un objeto con movimiento armónico simple estaba dada por  $v_{\max} = \frac{2\pi A}{T}$ . Ahora, existe una fórmula separada de la velocidad máxima de un péndulo la cual se obtiene de la siguiente manera:

$$h_{\max} = L(1 - \cos \theta_{\max}) \quad (3.22)$$

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} \quad (3.23)$$

$$mgL(1 - \cos \theta_{\max}) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad (3.24)$$

Reemplazando  $h_{\max}$  según la ecuación (3.22) en la ecuación de energía inicial, se obtiene:

$$mgL(1 - \cos \theta_{\max}) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad (3.25)$$

Despejando  $v_{\max}$ , se obtiene:

$$v_{\max} = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_{\max})} \quad (3.26)$$

Para la figura 3.6 se calcularon las velocidades máximas esperadas para cada longitud de cuerda utilizando la ecuación (3.26), y estas se compararon con las velocidades máximas obtenidas a partir del análisis de movimiento armónico simple, utilizando el periodo experimentalmente determinado. Como es evidente, el porcentaje de variación es mínimo, lo que demuestra que las mediciones experimentales coinciden de manera bastante precisa con los valores teóricos obtenidos, confirmando la validez del modelo de movimiento armónico simple para este sistema.

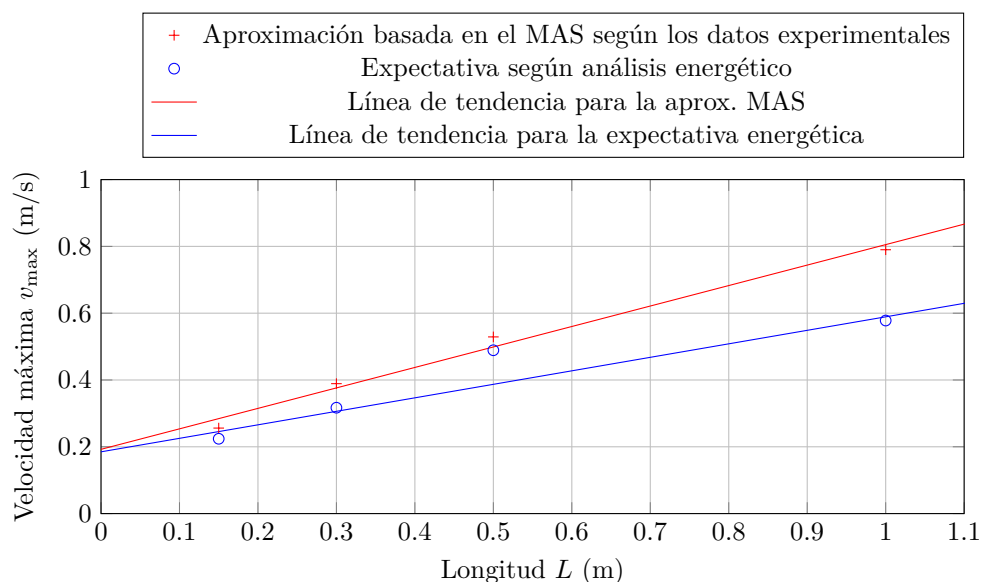


Figura 3.6: Comparación de la velocidad máxima obtenida a partir del análisis del movimiento armónico simple con los datos experimentales frente a la calculada mediante la fórmula teórica para un péndulo

### Cambios en la velocidad máxima: análisis gráfico

Los resultados de la gráfica (la anterior, la que muestra las velocidades máximas) también se reflejan en las gráficas de velocidad en función del tiempo. En primer lugar, se representaron las ecuaciones para longitudes de cuerda de 0.15 m (curva morada) y 0.3 m (curva negra) en la figura 3.7 de la página 26.

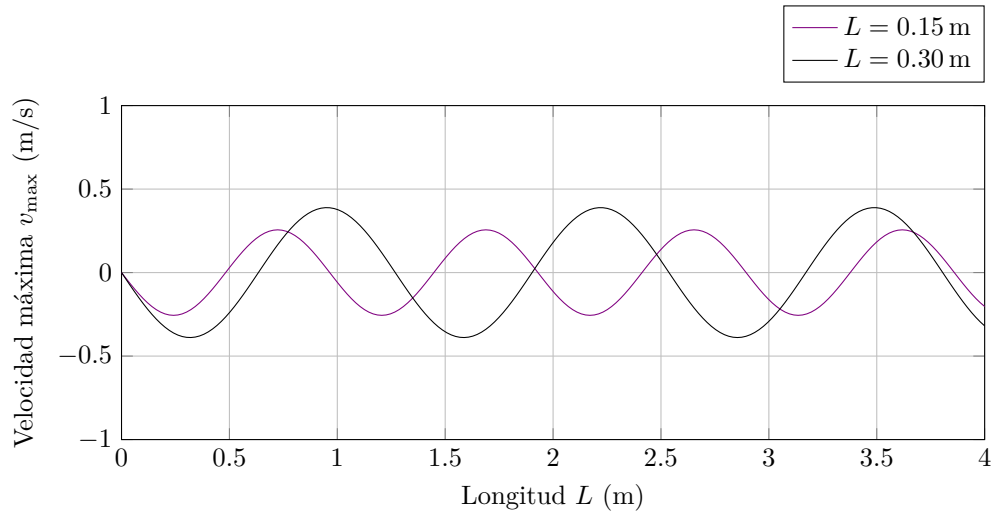


Figura 3.7: Velocidad  $v$  contra tiempo  $t$  para una longitud  $L$  de 0.15 y 0.30 m

Como se evidencia, la distancia del eje  $x$  a las crestas o valles, la cual indica la velocidad máxima, es mayor en la curva correspondiente a la longitud de 0.3 metros. Para demostrar la continuidad de esta tendencia, se graficaron las ecuaciones de velocidad comparando la longitud de cuerda de 0.3 m con la de 0.5 m en la gráfica 3.8, y posteriormente la de 0.5 m con la de 1 m en la gráfica 3.9.

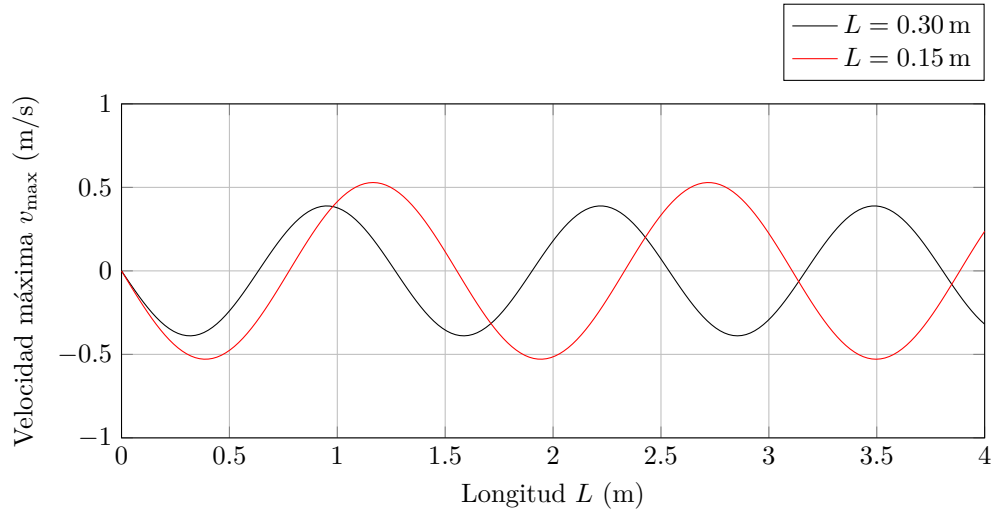


Figura 3.8: Velocidad  $v$  contra tiempo  $t$  para una longitud  $L$  de 0.30 y 0.50 m

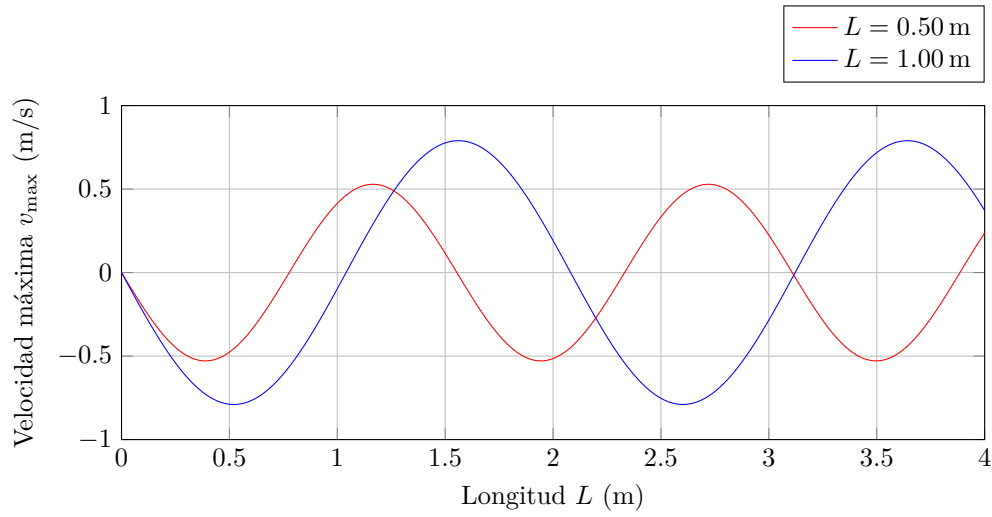


Figura 3.9: Velocidad  $v$  contra tiempo  $t$  para una longitud  $L$  de 0.50 y 1.00 m

Las gráficas respaldan la conclusión de que, a medida que la longitud de la cuerda aumenta, la velocidad máxima también lo hace.

#### Cambios en la aceleración: análisis gráfico

Para evaluar el efecto de la variación en la longitud de cuerda en la aceleración del movimiento, se graficaron dentro de la figura 3.10 las ecuaciones de aceleración en función del tiempo para la longitud de cuerda de 0.15 m (curva verde) y la longitud de cuerda de 0.3 m (curva morada).

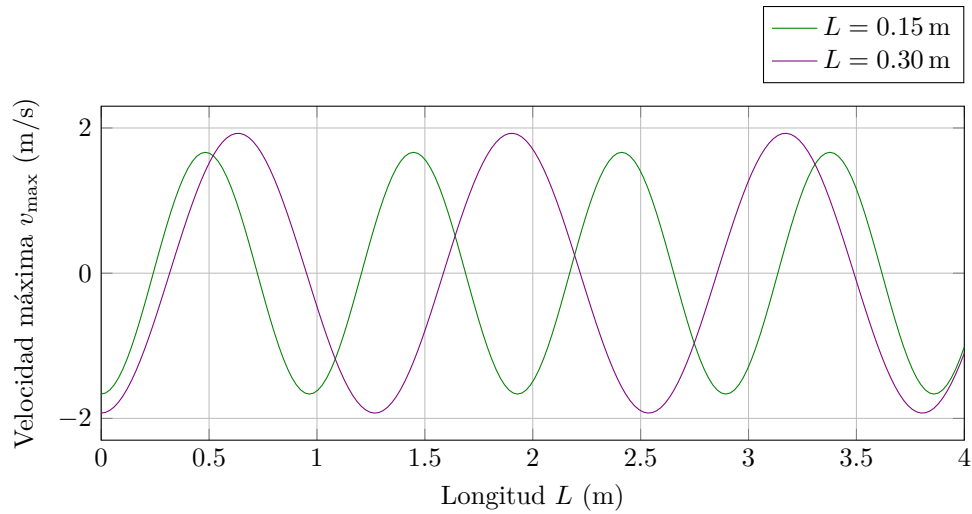


Figura 3.10: Velocidad  $v$  contra tiempo  $t$  para una longitud  $L$  de 0.50 y 1.00 m

En el movimiento armónico simple, la fuerza restauradora es proporcional a la amplitud, que en este caso se refiere al producto de la longitud de la cuerda y el seno del ángulo. Al aumentar la amplitud, la fuerza restauradora incrementa, lo que provoca un aumento en la aceleración, según la segunda ley de Newton. Este comportamiento se refleja en la gráfica, ya que para la longitud de cuerda de 0.3 m,

la aceleración alcanza valores más altos. Sin embargo, lo anterior muestra una inexactitud del modelo como resultado de la simplificación matemática realizada, ya que esto no ocurre en el péndulo real. En este, la aceleración máxima no muestra cambios significativos a medida que varía la longitud, ya que está determinada únicamente por el ángulo y la aceleración gravitacional.

### 3.3.2 Variación de la masa

$m$ (kg)	$T$ (s)	$A$ (m)	$\omega$ (rad/s)	$V_{\max}$ (s)	$s(t)$ (m)	$v(t)$ (m/s)	$a(t)$ (m/s <sup>2</sup> )
0.05	1.66	0.10	3.78	0.39	$0.10 \cos(3.78t)$	$-0.39 \sin(3.78t)$	$-1.50 \cos(3.78t)$
0.10	1.68	0.10	3.75	0.39	$0.10 \cos(3.75t)$	$-0.39 \sin(3.75t)$	$-1.50 \cos(3.75t)$
0.15	1.68	0.10	3.74	0.39	$0.10 \cos(3.74t)$	$-0.39 \sin(3.74t)$	$-1.50 \cos(3.74t)$
0.20	1.68	0.10	3.75	0.39	$0.10 \cos(3.75t)$	$-0.39 \sin(3.75t)$	$-1.50 \cos(3.75t)$
0.25	1.68	0.10	3.74	0.39	$0.10 \cos(3.74t)$	$-0.39 \sin(3.74t)$	$-1.50 \cos(3.74t)$

Cuadro 3.3.3: Valores esperados para varios parámetros del péndulo según el movimiento armónico simple y en función de la masa y periodo (medidos)

Los resultados experimentales muestran una variación mínima en el periodo a medida que se cambió la masa, consistente con el comportamiento del modelo matemático basado en el movimiento armónico simple.

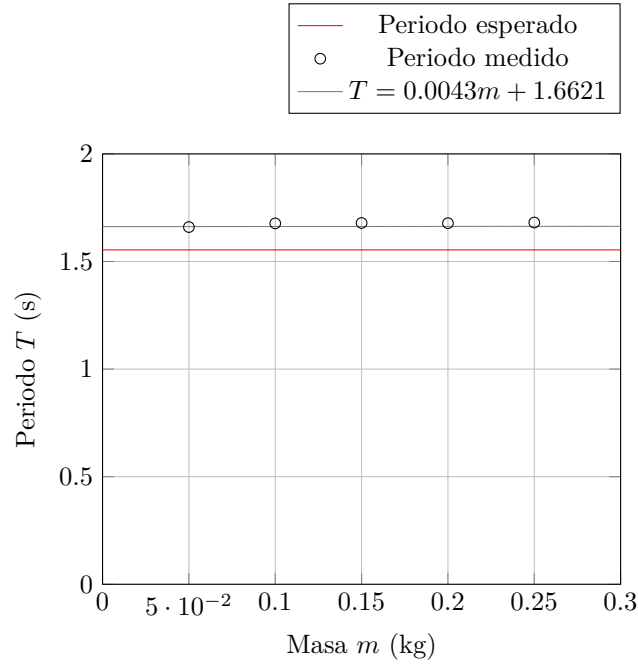


Figura 3.11: Periodo  $T$  medido y esperado para un movimiento armónico simple de las mismas características  $\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)$  en función de la masa  $m$

Como se discute en la sección 1.7.3, la regresión lineal de los datos experimentales da la siguiente ecuación:

$$T = 0.0043m + 1.6621 \quad (3.27)$$

En este polinomio, el factor de la variable independiente  $m$  es diminuto, indicando una variación mínima en el periodo a medida que se cambia la masa. Por su parte, el término constante proviene de los factores sobre el periodo que se mantuvieron iguales, como la longitud de la cuerda y la aceleración debida a la gravedad. Es posible calcular la variación entre el término constante de la regresión y el valor esperado del periodo para una masa de 0.05 kg:

$$\text{Variación} = \frac{|1.6621 - 1.5538|}{1.553} \times 100 \approx 6.97\% \quad (3.28)$$

En el modelo, la masa del objeto en movimiento es irrelevante a su periodo. La fórmula 3.9 caracteriza al periodo en función de la longitud de la cuerda y aceleración gravitacional —factores que no dependen de la masa. Esto corrobora la hipótesis 4 del reporte.

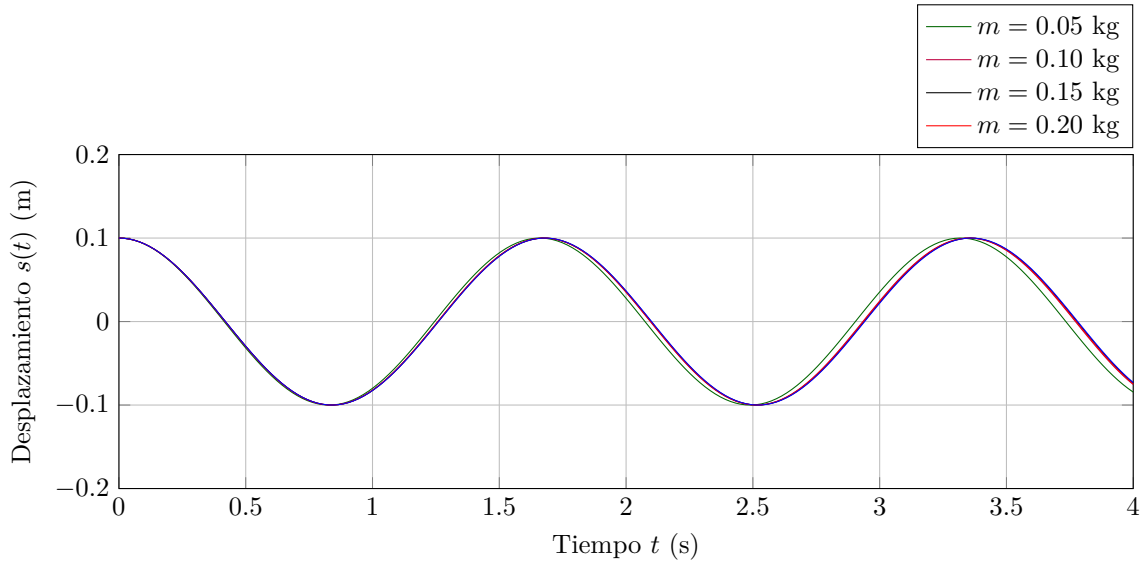


Figura 3.12: Gráfica de desplazamiento  $s$  contra tiempo  $t$  para las cinco masas. Como es evidente, los periodos (distancia de cresta a cresta) son prácticamente iguales, y las curvas no se pueden distinguir.

### 3.3.3 Variación del ángulo inicial

La figura 3.13 en la página 30 muestra la relación entre la amplitud y el periodo. La variación entre los puntos es mínima, y se puede modelar con una regresión lineal. La ecuación de la regresión es:

$$T = 0.0002\theta_0 + 1.6655 \quad (3.29)$$

Donde  $\theta_0$  es el ángulo inicial. El factor de la variable independiente  $\theta_0$  es diminuto, lo que indica una variación insignificante en el periodo a medida que se cambia el ángulo inicial. La ausencia de una relación clara es consistente con la ecuación 3.9, la cual describe el periodo únicamente en función de la aceleración gravitacional y la longitud de la cuerda.

En la figura 3.14 de la página 30, se graficaron las ecuaciones de desplazamiento contra tiempo para los cinco ángulos iniciales: 6, 9, 12, 15 y 18°, en las curvas roja, azul, verde, morada y negra respectivamente. El periodo corresponde a la distancia entre crestas sucesivas en cada curva, y como es evidente en la gráfica, para todas las curvas, esta distancia es prácticamente la misma.



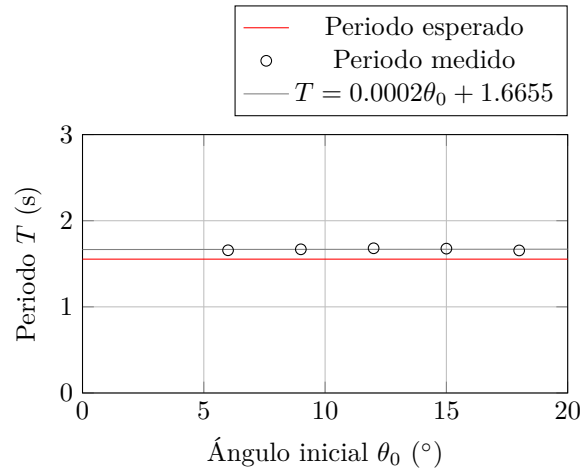


Figura 3.13: Periodo  $T$  medido y esperado para un movimiento armónico simple de las mismas características  $\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)$  en función del ángulo inicial  $\theta_0$

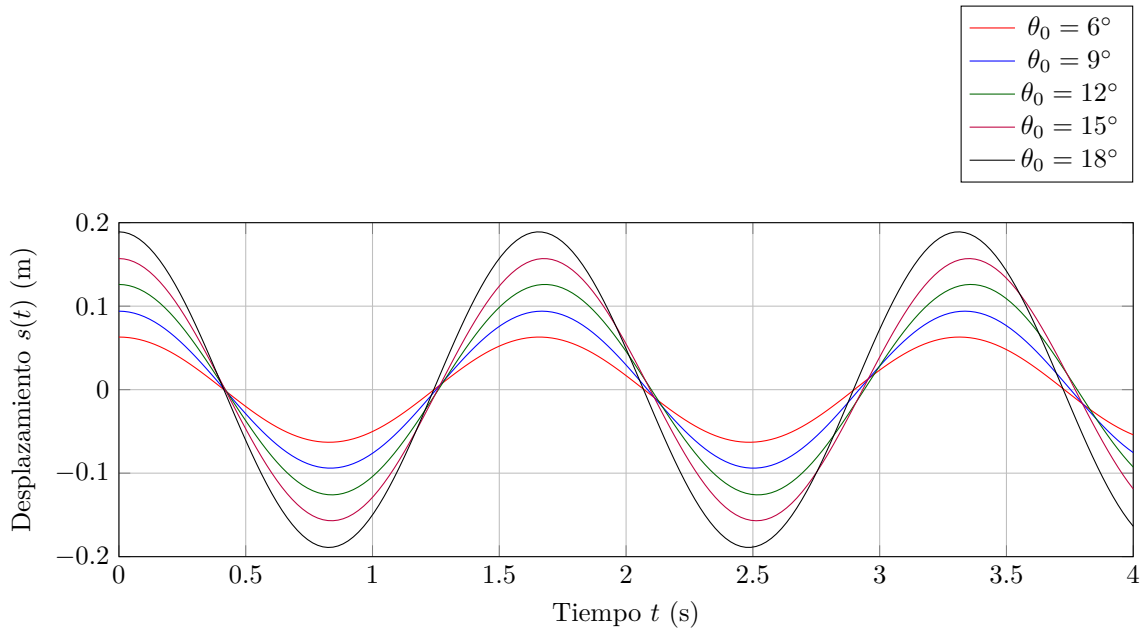


Figura 3.14: Gráfica de desplazamiento  $s$  contra tiempo  $t$  para los cinco ángulos iniciales. Las curvas se pueden distinguir solo a causa de los diferentes desplazamientos máximos o amplitudes.

### 3.3.4 Relación entre las gráficas de desplazamiento, velocidad y aceleración

Para explicar la relación entre las gráficas de desplazamiento, velocidad y aceleración, primero se graficaron las ecuaciones de  $s(t)$  y  $v(t)$  para una longitud de cuerda de 1 metro y una elevación de 15 grados, como se observa en la figura 3.15 de la página 31.

Tomando el eje  $y$  como el desplazamiento angular y el eje  $x$  como tiempo, para la curva verde, en  $t = 0$ ,  $s = A$ . En otras palabras, el desplazamiento es máximo, ya que al inicio el objeto se encuentra en el punto más alejado de su posición de equilibrio. Luego, esta distancia disminuye hasta  $s = 0$ , el

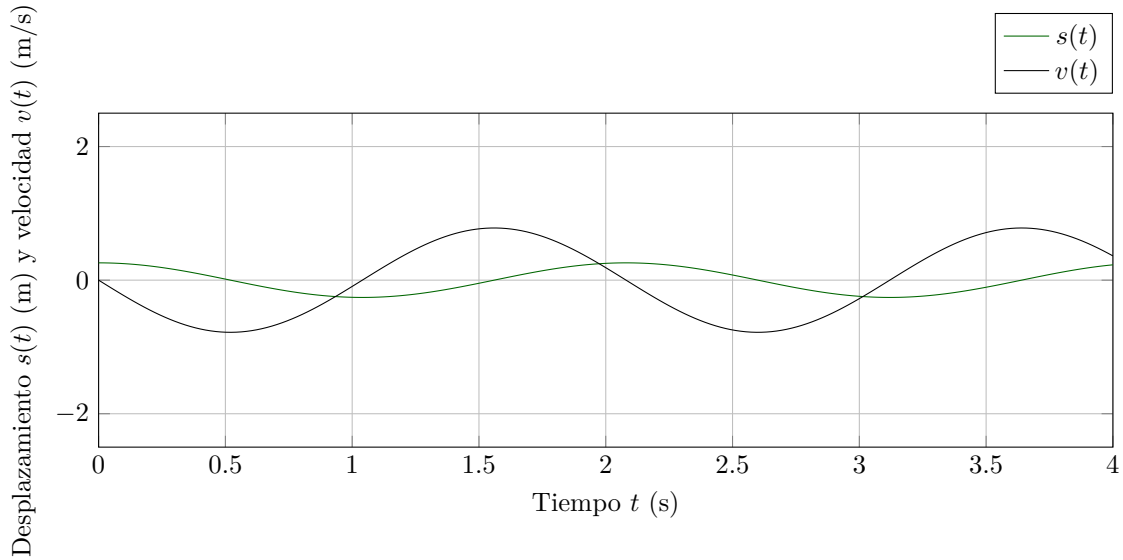


Figura 3.15: Gráfica de desplazamiento  $s(t)$  y velocidad  $v(t)$  en función del tiempo  $t$  para una longitud de cuerda de 1 metro y una elevación de 15 grados.

punto de equilibrio. A continuación, el desplazamiento se vuelve negativo, lo que indica que el objeto se encuentra en el lado opuesto, hasta que alcanza  $s = -A$ . El ciclo se repite de manera simétrica.

La pendiente de la gráfica del desplazamiento en función del tiempo (en verde) corresponde a la velocidad en función del tiempo. Al principio, cuando la masa está en el punto más alto (en otras palabras,  $s = A$ ), la pendiente es cero porque la velocidad es nula. A medida que el péndulo se mueve hacia el punto de equilibrio (en otras palabras,  $s = 0$ ), la pendiente aumenta, alcanzando su valor máximo, ya que en ese punto toda la energía es cinética. Luego, la pendiente disminuye hasta llegar a cero nuevamente en el punto más bajo (en otras palabras,  $s = -A$  —el valle), donde toda la energía es potencial y la velocidad es cero.

Este fenómeno puede observarse más claramente en la gráfica de velocidad en función del tiempo (en negro). Como se ve en esta gráfica, la velocidad comienza en cero en el punto más alto. Luego, alcanza un valor máximo negativo al llegar al punto de equilibrio, ya que el movimiento se dirige hacia la izquierda. Después, vuelve a ser cero en el segundo punto más alto y se vuelve positiva al regresar hacia el equilibrio, repitiendo este ciclo.

Finalmente, la pendiente de una gráfica de velocidad contra el tiempo representa la aceleración, que también varía durante el movimiento. Véase la figura 3.16 de la página 32. Al principio, la pendiente (curva negra) es negativa, ya que se dirige en la dirección de la fuerza restauradora, que va hacia la izquierda desde  $s = A$ . Esto ocurre porque la aceleración es máxima en los extremos del movimiento, donde la fuerza restauradora es mayor ( $F = ma$ , entonces  $a \propto F$ ). La fuerza restauradora es proporcional al seno del ángulo ( $\theta$ ) de desplazamiento. Es decir, cuanto mayor es el ángulo, mayor es la componente de la fuerza restauradora que actúa en la dirección de la oscilación. En el punto más bajo (el punto de equilibrio,  $s = 0$ ), la pendiente es cero, ya que la aceleración es mínima en este punto. Esto se debe a que en el punto de equilibrio, el ángulo es cero y, por lo tanto, la fuerza restauradora también lo es. En este mismo valor de  $X$ , la curva azul (de aceleración) también se encuentra en  $y = 0$ . Es decir, la pendiente de la curva negra coincide con el valor de  $y$  de la curva azul. Posteriormente, la pendiente se vuelve positiva cuando la masa se mueve desde el punto de equilibrio hacia  $s = -A$ , indicando que la aceleración actúa en la dirección opuesta. El ciclo se repite.

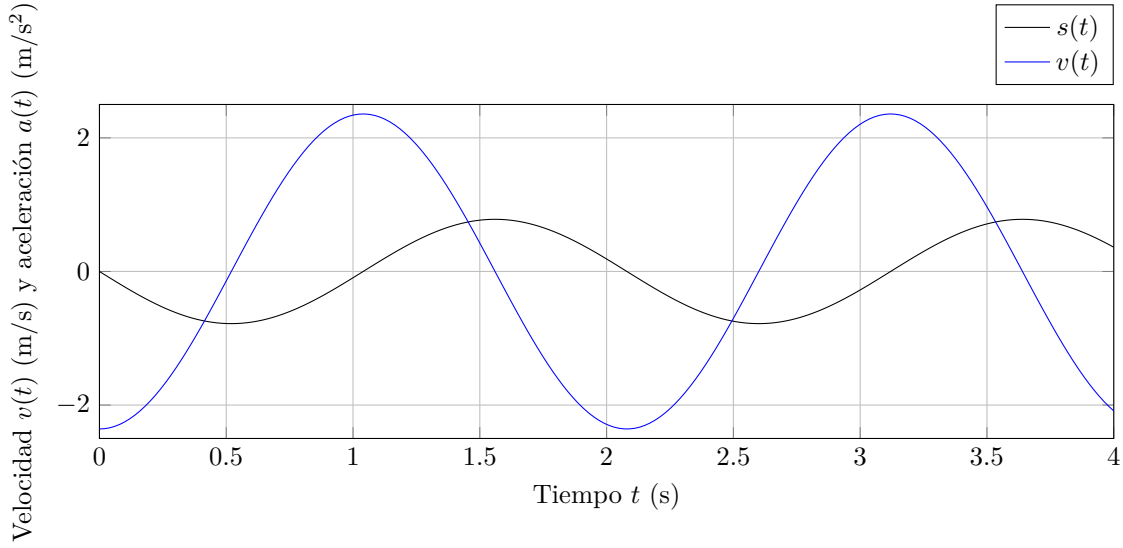


Figura 3.16: Gráfica de velocidad  $v(t)$  y aceleración  $a(t)$  en función del tiempo  $t$  para una longitud de cuerda de 1 metro y una elevación de 15 grados.

### 3.3.5 Energías en función del ángulo

#### Energía potencial gravitacional

En el punto más alto del movimiento —es decir, en los extremos— toda la energía es potencial. Ahora, dado que

$$E_p = mgL(1 - \cos \theta_0)$$

En el punto más alto, la altura  $h$  sería máxima, por lo que podemos reemplazarla por el valor de la ecuación (3.22) de la página 24 para obtener:

$$\begin{aligned} E_p &= mgh_{\max} \\ E_p &= mgh_{\max} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Esta ecuación permite conocer la energía potencial en términos del ángulo de la masa.

#### Energía cinética

La energía mecánica del péndulo se mantiene constante, de ahí que:

$$E_m = E_c + E_p \quad (3.31)$$

Donde  $E_m$  es la energía mecánica,  $E_c$  es la energía cinética y  $E_p$  es la energía potencial gravitacional. Reemplazando  $E_p$  según la ecuación (3.30), se obtiene para cualquier valor de  $\theta$ :

$$E_m = E_c + mgL(1 - \cos \theta) \quad (3.32)$$

Se sabe que la energía es totalmente potencial en los extremos, por lo se puede reemplazar  $E_m$  por el valor de  $E_p$  cuando  $\theta = \theta_0$ , también según la ecuación (3.30):

$$mgL(1 - \cos \theta_0) = E_c + mgL(1 - \cos \theta) \quad (3.33)$$

Al despejar la energía cinética, se obtiene:

$$E_c = mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (3.34)$$

### Variación de las energías

Para demostrar la relación entre las ecuaciones (3.30) y (3.34), se graficaron ambas en función del ángulo para una cuerda de 0.15 m de longitud, una masa de 0.05 kg y un ángulo inicial de  $15^\circ$ .

En primer lugar, la curva roja en la figura 3.17 de la página 33 representa la energía potencial, cuyo valor máximo ocurre cuando el ángulo  $\theta$  es máximo (tanto en el extremo positivo como en el extremo negativo), ya que en estos puntos la masa alcanza su mayor altura. En contraste, la energía cinética (curva azul) alcanza su valor máximo cuando  $\theta = 0$  y su valor mínimo en los extremos, donde toda la energía es potencial.

Además, se graficó la suma de ambas ecuaciones en azul, la cual representa la energía total del sistema. Como es evidente, esta se muestra como una línea recta, lo que confirma que la energía total se mantiene constante.

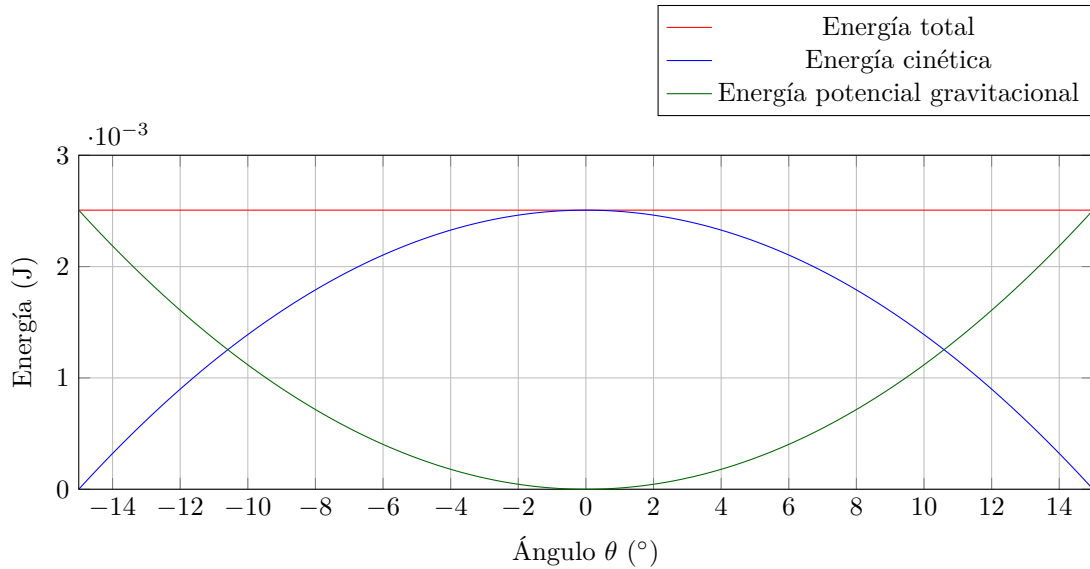


Figura 3.17: Gráfica de energía potencial, cinética y total en función del ángulo  $\theta$  para una cuerda de 0.15 m de longitud, una masa de 0.05 kg y un ángulo inicial de  $15^\circ$

### 3.3.6 Energía mecánica en función del ángulo inicial, masa y longitud de la cuerda

Como ya se mencionó, la ecuación que define la energía mecánica es:

$$E_m = mgL(1 - \cos \theta_0) \quad (3.35)$$

Esta ecuación establece que la energía mecánica es proporcional a la masa, la longitud de la cuerda y el ángulo inicial. Lo anterior se demuestra en la figura 3.18, la figura 3.19, y la figura 3.20 de la página 34.

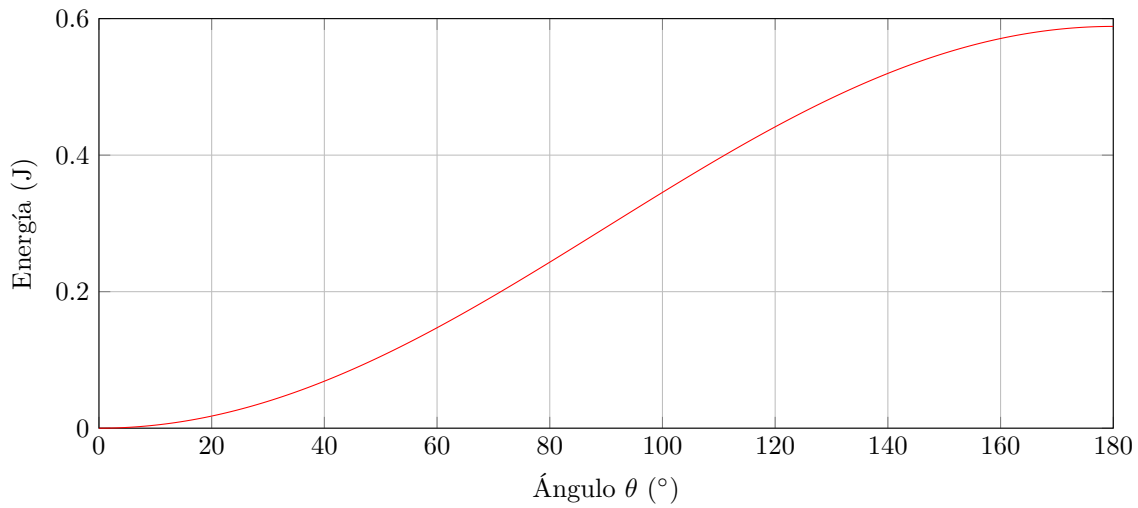


Figura 3.18: Energía mecánica  $E_m$  en función del ángulo inicial  $\theta_0$

Un mayor ángulo inicial lleva a una mayor altura, lo que resulta en una mayor energía potencial inicial. Sin embargo, la altura es proporcional al coseno del ángulo, no el ángulo en sí, por lo que la relación no es lineal y la gráfica 3.18 no es una línea recta.

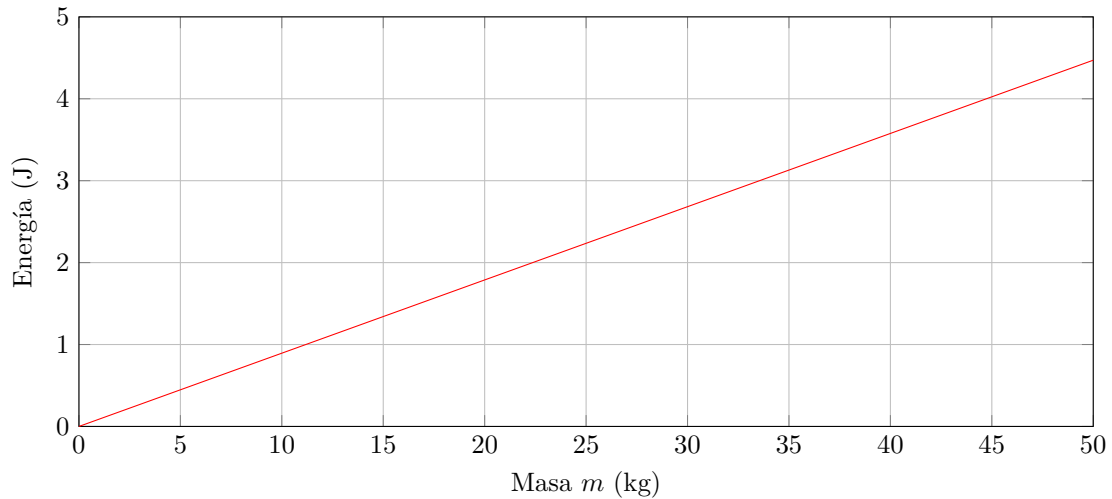


Figura 3.19: Energía mecánica  $E_m$  en función la masa  $m$

La energía potencial y cinética dependen de la masa. Al aumentar la masa, ambas energías aumentan de una manera directamente proporcional, lo que también incrementa la energía total. Precisamente debido su proporcionalidad lineal, la gráfica de la energía total en función de la masa (figura 3.19) es una línea recta.

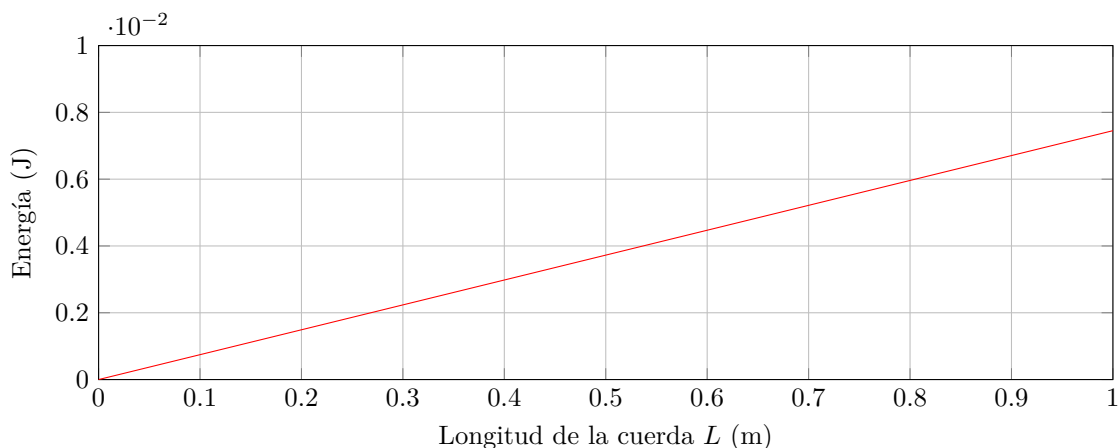


Figura 3.20: Energía mecánica  $E_m$  en función la longitud de la cuerda  $L$

La gráfica 3.20 demuestra la proporcionalidad lineal entre la longitud de la cuerda y la energía total. Es una línea recta debido a esta relación lineal.

### 3.4 Conclusiones

Los periodos observados en el experimento coincidieron estrechamente con los calculados mediante la fórmula del periodo para el movimiento armónico simple. Esta similitud indica que el comportamiento del péndulo se ajusta bien al modelo teórico.

En cuanto al incremento de la velocidad máxima, se observó que esta ocurre en el punto más bajo de la trayectoria del péndulo y aumenta conforme se incrementa la longitud de la cuerda. Esto se corroboró a través de análisis gráficos que mostraron una tendencia clara en las velocidades máximas obtenidas experimentalmente.

Respecto a la energía potencial, esta alcanzó su valor máximo cuando el péndulo llegó a los puntos más altos de su trayectoria, mientras que la energía cinética fue máxima al pasar por el punto más bajo. Lo anterior es coherente con las leyes de conservación de energía.

En relación con la aceleración, se observó que esta era máxima en los extremos del movimiento, donde la fuerza restauradora es mayor. Sin embargo, no mostró cambios significativos al variar la longitud, lo cual indica una limitación del modelo simplificado utilizado.

Finalmente, las hipótesis planteadas al inicio del experimento fueron en su mayoría confirmadas por los resultados obtenidos, lo cual sugiere que el sistema del péndulo se comporta de acuerdo a las expectativas teóricas derivadas del movimiento armónico simple.

# Bibliografía

- [1] Giancoli, D. C. (2014) *Physics: Principles and Applications*. Pearson Education, Inc.