

2017 年河南省中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、

1 .

【分析】 根据正数大于零、零大于负数，可得答案 .

【解答】 解： $2 > 0 > -1 > -3$ ，

故选：A .

【点评】 本题考查了有理数大小比较， 利用正数大于零、零大于负数是解题关键 .

2 .

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数 . 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同 . 当原数绝对值 ≥ 1 时， n 是非负数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数 .

【解答】 解：将 74.4 万亿用科学记数法表示为： 7.44×10^{13} .

故选：B .

【点评】 此题考查科学记数法的表示方法 . 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值 .

3 .

【分析】 左视图是从左边看到的，据此求解 .

【解答】 解：从左视图可以发现：该几何体共有两列，正方体的个数分别为 2，1，

D 不符合，

故选 D .

【点评】 考查了由三视图判断几何体的知识， 解题的关键是了解该几何体的构成，难度不大 .

4 .

【分析】分式方程变形后，两边乘以最简公分母 $x - 1$ 得到结果，即可作出判断 .

【解答】解：分式方程整理得： $\frac{1}{x-1} - 2 = -\frac{3}{x-1}$ ，

去分母得： $1 - 2(x - 1) = -3$ ，

故选 A

【点评】此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验 .

5 .

【分析】将题目中的数据按照从小到大排列，从而可以得到这组数据的众数和中位数，本题得以解决 .

【解答】解：位于中间位置的两数分别是 95 分和 95 分，

故中位数为 95 分，

数据 95 出现了 3 次，最多，

故这组数据的众数是 95 分，

故选 A .

【点评】本题考查众数和中位数，解题的关键是明确众数和中位数的定义，会找一组数据的众数和中位数 .

6 .

【分析】先计算判别式的值，然后根据判别式的意义判断方程根的情况 .

【解答】解： $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 41 > 0$ ，

方程有两个不相等的实数根 .

故选 B .

【点评】本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根 .

7 .

【分析】 根据平行四边形的性质，菱形的判定方法即可一一判断．

【解答】 解：A、正确．对角线垂直的平行四边形的菱形．

B、正确．邻边相等的平行四边形是菱形．

C、错误．对角线相等的平行四边形是矩形，不一定是菱形．

D、正确．可以证明平行四边形 ABCD的邻边相等，即可判定是菱形．

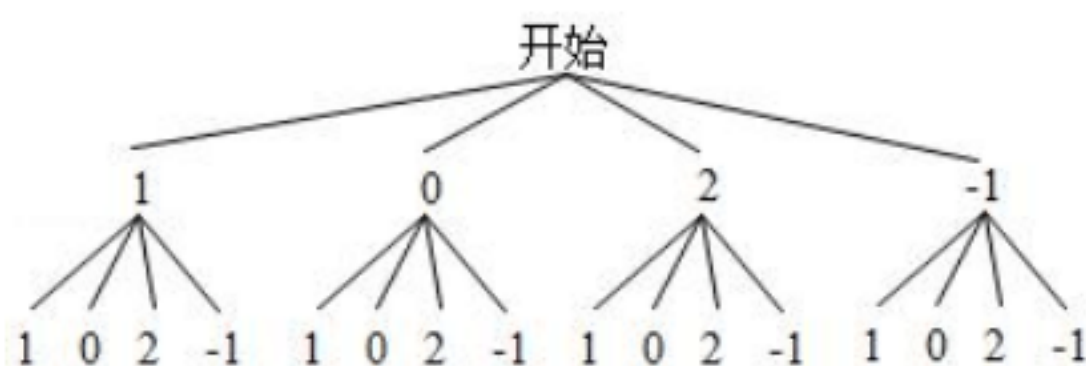
故选 C．

【点评】 本题考查平行四边形的性质、菱形的判定等知识，解题的关键是熟练掌握菱形的判定方法．

8．

【分析】 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与两个数字都是正数的情况数，再利用概率公式求解即可求得答案．

【解答】 解：画树状图得：



共有 16 种等可能的结果，两个数字都是正数的有 4 种情况，

两个数字都是正数的概率是： $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ ．

故选：C．

【点评】 此题考查的是用列表法或树状图法求概率．注意树状图法与列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件，解题时注意：概率=所求情况数与总情况数之比．

9．

【分析】 由已知条件得到 $AD=AD=2$ ， $AO=\frac{1}{2}AB=1$ ，根据勾股定理得到

$OD=\sqrt{AD'^2-OA^2}=\sqrt{3}$ ，于是得到结论．

【解答】解： $AD = AD = 2$

$$AO = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$OD = \sqrt{AD^2 - OA^2} = \sqrt{3},$$

$$CD = \frac{1}{2}AB,$$

$$C(2, \sqrt{3}),$$

故选 D.

【点评】本题考查了正方形的性质，坐标与图形的性质，勾股定理，正确的识别图形是解题的关键.

10.

【分析】连接 OO' ， BO' ，根据旋转的性质得到 $\angle OAO' = 60^\circ$ ，推出 $\triangle OAO'$ 是等边三角形，得到 $\angle AOO' = 60^\circ$ ，推出 $\triangle OO'B$ 是等边三角形，得到 $\angle AOB' = 120^\circ$ ，得到 $\angle BOB' = \angle OBB' = 30^\circ$ 根据图形的面积公式即可得到结论.

【解答】解：连接 OO' ， BO' ，

将半径为 2，圆心角为 120° 的扇形 OAB 绕点 A 逆时针旋转 60° ，

$$\angle OAO' = 60^\circ,$$

$\triangle OAO'$ 是等边三角形，

$$\angle AOO' = 60^\circ,$$

$$\angle AOB = 120^\circ,$$

$$\angle OOB' = 60^\circ,$$

$\triangle OO'B$ 是等边三角形，

$$\angle AOB' = 120^\circ,$$

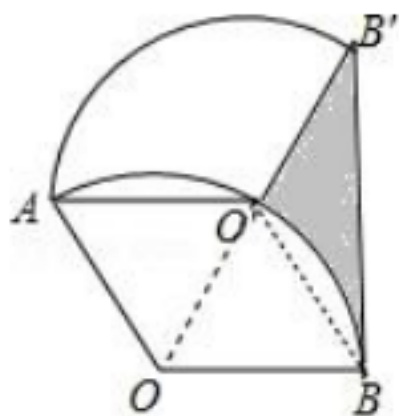
$$\angle AOB' = 120^\circ$$

$$\angle BOB' = 120^\circ$$

$$\angle OBB' = \angle OBB' = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{图中阴影部分的面积} &= S_{\triangle BOB'} - (S_{\text{扇形 } OOB'} - S_{\triangle OO'B}) = \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{3} - \left(\frac{60 \cdot \pi \times 2^2}{360} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \right) = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

故选 C.



【点评】 本题考查了扇形面积的计算，等边三角形的判定和性质，旋转的性质，正确的作出辅助线是解题的关键．

二、

11．

【分析】 明确 $\sqrt{4}$ 表示 4 的算术平方根，值为 2．

【解答】 解： $2^3 - \sqrt{4} = 8 - 2 = 6$ ，

故答案为：6．

【点评】 本题主要考查了算术平方根和有理数的乘方的定义，是一个基础题目，比较简单．

12．

【分析】 先求出不等式的解集，再求出不等式解集的公共部分．

【解答】 解：
$$\begin{cases} x-2 \leq 0 & \text{①} \\ \frac{x-1}{2} < x & \text{②} \end{cases}$$

解不等式 得： $x \leq 2$ ，

解不等式 得： $x > -1$ ，

不等式组的解集是 $-1 < x \leq 2$ ，

故答案为 $-1 < x \leq 2$ ．

【点评】 题考查了解一元一次不等式，解一元一次不等式组的应用，解此题的关键是求出不等式组的解集．

13．

【分析】 由反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 可知函数的图象在第二、 第四象限内，可以知道在

每个象限内， y 随 x 的增大而增大，根据这个判定则可．

【解答】解：反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 中 $k = -2 < 0$ ，

此函数的图象在二、四象限内，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，

$0 < 1 < 2$ ，

A、B 两点均在第四象限，

$m < n$ ．

故答案为 $m < n$ ．

【点评】本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，先根据题意判断出反比例函数图象所在的象限是解答此题的关键．

14．

【分析】根据图象可知点 P 在 BC 上运动时，此时 BP 不断增大，而从 C 向 A 运动时， BP 先变小后变大，从而可求出 BC 与 AC 的长度．

【解答】解：根据图象可知点 P 在 BC 上运动时，此时 BP 不断增大，

由图象可知：点 P 从 B 向 C 运动时， BP 的最大值为 5，

即 $BC = 5$ ，

由于 M 是曲线部分的最低点，

此时 BP 最小，

即 $BP \perp AC$ ， $BP = 4$ ，

由勾股定理可知： $PC = 3$ ，

由于图象的曲线部分是轴对称图形，

$PA = 3$ ，

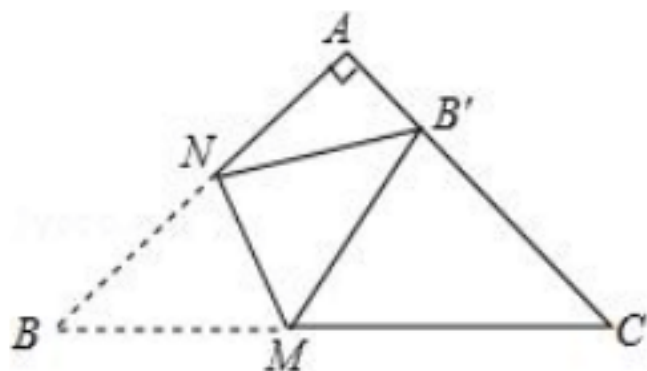
$AC = 6$ ，

ABC 的面积为： $\frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$

故答案为：12

【点评】本题考查动点问题的函数图象，解题的关键是注意结合图象求出 BC 与 AC 的长度，本题属于中等题型．

15．



【分析】 如图 1，当 $\angle BMC=90^\circ$ ，B 与 A 重合，M 是 BC 的中点，于是得到结论； 如图 2，当 $\angle MB C=90^\circ$ ，推出 $\triangle CMB$ 是等腰直角三角形，得到 $CM=\sqrt{2}MB$ ，列方程即可得到结论．

【解答】 解： 如图 1，

当 $\angle BMC=90^\circ$ ，B 与 A 重合，M 是 BC 的中点，

$$BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\sqrt{2}+1；$$

如图 2，当 $\angle MB C=90^\circ$ ，

$$\angle A=90^\circ，AB=AC，$$

$$\angle C=45^\circ，$$

$\triangle CMB$ 是等腰直角三角形，

$$CM=\sqrt{2}MB，$$

沿 MN 所在的直线折叠 $\triangle B$ ，使点 B 的对应点 B' ，

$$BM=B'M，$$

$$CM=\sqrt{2}BM，$$

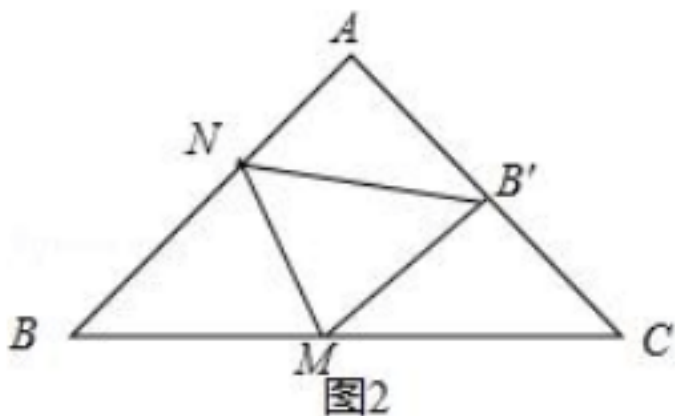
$$BC=\sqrt{2}+1，$$

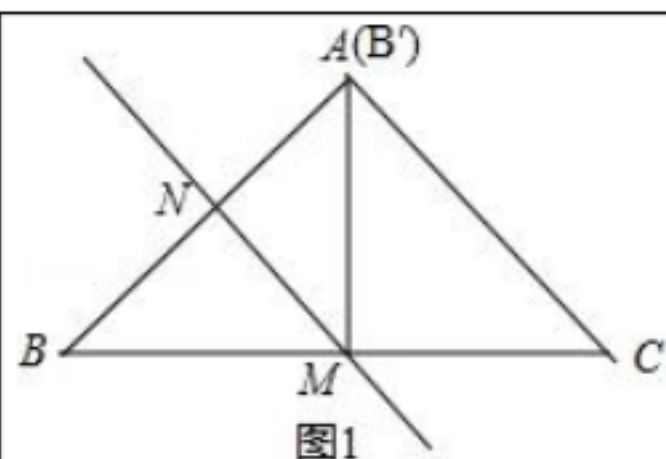
$$CM+BM=\sqrt{2}BM+BM=\sqrt{2}+1，$$

$$BM=1，$$

综上所述，若 $\triangle MB C$ 为直角三角形，则 BM 的长为 $\frac{1}{2}\sqrt{2}+1$ 或 1，

故答案为： $\frac{1}{2}\sqrt{2}+1$ 或 1．





【点评】 本题考查了翻折变换 - 折叠问题， 等腰直角三角形的性质， 正确的作出图形是解题的关键．

三、

16．

【分析】 首先化简 $(2x+y)^2 + (x-y)(x+y) - 5x(x-y)$ ，然后把 $x=\sqrt{2}+1$ ， $y=\sqrt{2}-1$ 代入化简后的算式，求出算式的值是多少即可．

【解答】 解： $(2x+y)^2 + (x-y)(x+y) - 5x(x-y)$

$$=4x^2+4xy+y^2+x^2-y^2-5x^2+5xy$$

$$=9xy$$

当 $x=\sqrt{2}+1$ ， $y=\sqrt{2}-1$ 时，

$$\text{原式} = 9(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$$

$$=9 \times (2-1)$$

$$=9 \times 1$$

$$=9$$

【点评】 此题主要考查了整式的混合运算 - 化简求值问题， 要熟练掌握， 解答此题的关键是要明确： 先按运算顺序把整式化简， 再把对应字母的值代入求整式的值．

17．

【分析】（1）根据 B 组的频数是 16，对应的百分比是 32%，据此求得调查的总人数，利用百分比的意义求得 b，然后求得 a 的值，m 的值；

（2）利用 360°乘以对应的比例即可求解；

（3）利用总人数 1000 乘以对应的比例即可求解．

【解答】解：（1）调查的总人数是 $16 \div 32\% = 50$ （人），
 则 $b = 50 \times 16\% = 8$ ， $a = 50 - 4 - 16 - 8 - 2 = 20$ ，
 A组所占的百分比是 $\frac{4}{50} = 8\%$ ，则 $m = 8$ ．
 $a + b = 8 + 20 = 28$ ．
 故答案是：50，28，8；
 （2）扇形统计图中扇形C的圆心角度数是 $360^\circ \times \frac{20}{50} = 144^\circ$ ；
 （3）每月零花钱的数额 x 在 $60 \leq x < 120$ 范围的人数是 $1000 \times \frac{28}{50} = 560$ （人）．
 【点评】本题考查了扇形统计图，观察统计表、扇形统计图获得有效信息是解题关键，扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小．

18．

【分析】（1）根据圆周角定理求出 $\angle BDA = 90^\circ$ ，根据切线的性质得出 $AB \perp BF$ ，求出 $\angle ACB = \angle FCB$ ，根据角平分线性质的得出即可；
 （2）求出 $AC = 10$ ， $AD = 6$ ，根据勾股定理求出 BD ，再根据勾股定理求出 BC 即可．

【解答】（1）证明： AB 是 $\odot O$ 的直径，
 $\angle BDA = 90^\circ$ ，
 $BD \perp AC$ ， $\angle BDC = 90^\circ$ ，
 BF 切 $\odot O$ 于 B ，
 $AB \perp BF$ ，
 $CF \perp AB$ ，
 $CF \perp BF$ ， $\angle FCB = \angle ABC$ ，
 $AB = AC$ ，

$$\angle ACB = \angle ABC,$$

$$\angle ACB = \angle FCB,$$

$$BD \perp AC, BF \perp CF,$$

$$BD = BF;$$

(2) 解： $AB = 10, AB = AC,$

$$AC = 10,$$

$$CD = 4,$$

$$AD = 10 - 4 = 6,$$

在 $\text{Rt } \triangle ADB$ 中，由勾股定理得： $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$

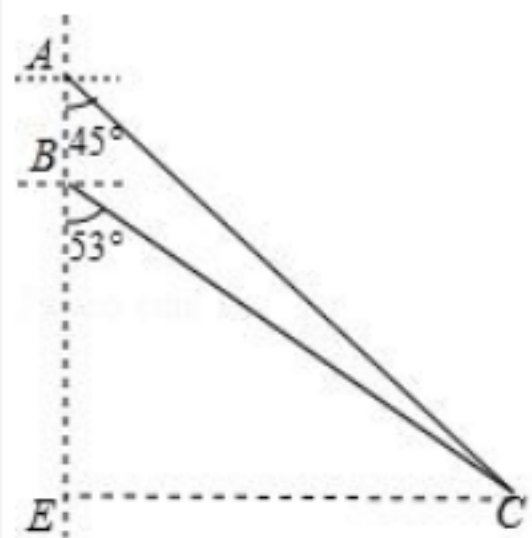
在 $\text{Rt } \triangle BDC$ 中，由勾股定理得： $BC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$

【点评】 本题考查了切线的性质，勾股定理，角平分线性质，等腰三角形的判定等知识点，能综合运用定理进行推理是解此题的关键．

19 .

【分析】 如图作 $CE \perp AB$ 于 E . 设 $AE = EC = x$ 则 $BE = x - 5$, 在 $\text{Rt } \triangle BCE$ 中，根据 $\tan 53^\circ = \frac{EC}{BE}$ ，可得 $\frac{4}{3} = \frac{x}{x-5}$ ，求出 x ，再求出 BC, AC ，分别求出 $A、B$ 两船到 C 的时间，即可解决问题．

【解答】 解：如图作 $CE \perp AB$ 于 E .



在 $\text{Rt } \triangle ACE$ 中， $\angle A = 45^\circ,$

$$AE = EC, \text{ 设 } AE = EC = x \text{ 则 } BE = x - 5,$$

在 $\text{Rt } \triangle BCE$ 中，

$$\tan 53^\circ = \frac{EC}{BE},$$

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{x-5},$$

解得 $x=20$,

$$AE=EC=20$$

$$AC=20\sqrt{2}=28.2,$$

$$BC = \frac{EC}{\sin 53^\circ} = 25,$$

$$A \text{ 船到 } C \text{ 的时间 } \frac{28.2}{30} = 0.94 \text{ 小时}, B \text{ 船到 } C \text{ 的时间 } = \frac{25}{25} = 1 \text{ 小时},$$

C 船至少要等待 0.94 小时才能得到救援.

【点评】 本题考查解直角三角形的应用 - 方向角问题、锐角三角函数、速度、时间、路程之间的关系等知识， 解题的关键是学会构建方程解决问题， 属于中考常考题型 .

20 .

【分析】 (1) 先将 $B(3, 1)$ 代入反比例函数即可求出 k 的值，然后将 A 代入反比例函数即可求出 m 的，再根据 B 两点的坐标即可求出一次函数的解析式 .

(2) 设 P 的坐标为 (x, y) ，由于点 P 在直线 AB 上，从而可知 $PD=y$, $OD=x$ ，由题意可知： $1 \leq x \leq 3$ ，从而可求出 S 的范围

【解答】 解：(1) 将 $B(3, 1)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ ，

$$k=3,$$

将 $A(m, 3)$ 代入 $y = \frac{3}{x}$ ，

$$m=1,$$

$$A(1, 3),$$

将 $A(1, 3)$ 代入 $y = -x + b$ ，

$$b=4,$$

$$y = -x + 4$$

(2) 设 $P(x, y)$ ，

由 (1) 可知： $1 \leq x \leq 3$ ，

$$PD=y=-x+4, OD=x,$$

$$S=\frac{1}{2}x(-x+4),$$

由二次函数的图象可知：

$$S\text{的取值范围为：}\frac{3}{2}\leq S\leq 2$$

$$\text{故答案为：(1) } y=-x+4; y=\frac{3}{x}.$$

【点评】本题考查反比例函数与一次函数的综合问题，解题的关键是求出一次函数与反比例函数的解析式，本题属于中等题型．

21．

【分析】（按买 3 个 A 种魔方和买 4 个 B 种魔方钱数相同解答）

（1）设 A 种魔方的单价为 x 元/个，B 种魔方的单价为 y 元/个，根据“购买 2 个 A 种魔方和 6 个 B 种魔方共需 130 元，购买 3 个 A 种魔方和 4 个 B 种魔方所需款数相同”，即可得出关于 x 、 y 的二元一次方程组，解之即可得出结论；

（2）设购进 A 种魔方 m 个（ $0 < m \leq 50$ ），总价格为 w 元，则购进 B 种魔方（ $100 - m$ ）个，根据两种活动方案即可得出 $w_{\text{活动一}}$ 、 $w_{\text{活动二}}$ 关于 m 的函数关系式，再分别令 $w_{\text{活动一}} < w_{\text{活动二}}$ 、 $w_{\text{活动一}} = w_{\text{活动二}}$ 和 $w_{\text{活动一}} > w_{\text{活动二}}$ ，解出 m 的取值范围，此题得解．

（按购买 3 个 A 种魔方和 4 个 B 种魔方需要 130 元解答）

（1）设 A 种魔方的单价为 x 元/个，B 种魔方的单价为 y 元/个，根据“购买 2 个 A 种魔方和 6 个 B 种魔方共需 130 元，购买 3 个 A 种魔方和 4 个 B 种魔方所需款数相同”，即可得出关于 x 、 y 的二元一次方程组，解之即可得出结论；

（2）设购进 A 种魔方 m 个（ $0 < m \leq 50$ ），总价格为 w 元，则购进 B 种魔方（ $100 - m$ ）个，根据两种活动方案即可得出 $w_{\text{活动一}}$ 、 $w_{\text{活动二}}$ 关于 m 的函数关系式，再分别令 $w_{\text{活动一}} < w_{\text{活动二}}$ 、 $w_{\text{活动一}} = w_{\text{活动二}}$ 和 $w_{\text{活动一}} > w_{\text{活动二}}$ ，解出 m 的取值范围，此题得解．

【解答】（按买 3 个 A 种魔方和买 4 个 B 种魔方钱数相同解答）

解：（1）设 A 种魔方的单价为 x 元/个，B 种魔方的单价为 y 元/个，

$$\text{根据题意得：}\begin{cases} 2x+6y=130 \\ 3x=4y \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} x=20 \\ y=15 \end{cases}$.

答：A 种魔方的单价为 20 元/个，B 种魔方的单价为 15 元/个 .

(2) 设购进 A 种魔方 m 个 ($0 < m \leq 50$)，总价格为 w 元，则购进 B 种魔方 $(100 - m)$ 个，

根据题意得： $w_{\text{活动一}} = 20m \times 0.8 + 15(100 - m) \times 0.4 = 10m + 600$ ；

$w_{\text{活动二}} = 20m + 15(100 - m - m) = -10m + 1500$.

当 $w_{\text{活动一}} < w_{\text{活动二}}$ 时，有 $10m + 600 < -10m + 1500$ ，

解得： $m < 45$ ；

当 $w_{\text{活动一}} = w_{\text{活动二}}$ 时，有 $10m + 600 = -10m + 1500$ ，

解得： $m = 45$ ；

当 $w_{\text{活动一}} > w_{\text{活动二}}$ 时，有 $10m + 600 > -10m + 1500$ ，

解得： $45 < m \leq 50$.

综上所述：当 $m < 45$ 时，选择活动一购买魔方更实惠；当 $m = 45$ 时，选择两种活动费用相同；当 $m > 45$ 时，选择活动二购买魔方更实惠 .

(按购买 3 个 A 种魔方和 4 个 B 种魔方需要 130 元解答)

解：(1) 设 A 种魔方的单价为 x 元/个，B 种魔方的单价为 y 元/个，

根据题意得： $\begin{cases} 2x + 6y = 130 \\ 3x + 4y = 130 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} x=26 \\ y=13 \end{cases}$.

答：A 种魔方的单价为 26 元/个，B 种魔方的单价为 13 元/个 .

(2) 设购进 A 种魔方 m 个 ($0 < m \leq 50$)，总价格为 w 元，则购进 B 种魔方 $(100 - m)$ 个，

根据题意得： $w_{\text{活动一}} = 26m \times 0.8 + 13(100 - m) \times 0.4 = 15.6m + 520$ ；

$w_{\text{活动二}} = 26m + 13(100 - m - m) = 1300$.

当 $w_{\text{活动一}} < w_{\text{活动二}}$ 时，有 $15.6m + 520 < 1300$ ，

解得： $m < 50$ ；

当 $w_{\text{活动一}} = w_{\text{活动二}}$ 时，有 $15.6m + 520 = 1300$ ，

解得： $m = 50$ ；

当 $w_{\text{活动一}} > w_{\text{活动二}}$ 时，有 $15.6m + 520 > 1300$ ，

不等式无解 .

综上所述：当 $0 < m < 50$ 时，选择活动一购买魔方更实惠；当 $m=50$ 时，选择两种活动费用相同 .

【点评】 本题考查了二元一次方程组的应用、 一次函数的应用、 解一元一次不等式以及解一元一次方程，解题的关键是：（1）找准等量关系，列出关于 x 、 y 的二元一次方程组；（2）根据两种活动方案找出 $w_{\text{活动一}}$ 、 $w_{\text{活动二}}$ 关于 m 的函数关系式 .

22 .

【分析】（1）利用三角形的中位线得出 $PM=\frac{1}{2}CE$ ， $PN=\frac{1}{2}BD$ ，进而判断出 $BD=CE$ 即可得出结论，再利用三角形的中位线得出 $PM \parallel CE$ 得出 $\angle DPM = \angle DCA$ ，最后用互余即可得出结论；

（2）先判断出 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，得出 $BD=CE$ ，同（1）的方法得出 $PM=\frac{1}{2}BD$ ， $PN=\frac{1}{2}BD$ ，即可得出 $PM=PN$ ，同（1）的方法即可得出结论；

（3）方法 1、先判断出 MN 最大时， $\triangle PMN$ 的面积最大，进而求出 AN ， AM ，即可得出 $MN_{\text{最大}} = AM + AN$ ，最后用面积公式即可得出结论 .

方法 2、先判断出 BD 最大时， $\triangle PMN$ 的面积最大，而 BD 最大是 $AB + AD = 14$ ，即可 .

【解答】解：（1）点 P ， N 是 BC ， CD 的中点，

$$PN \parallel BD, PN = \frac{1}{2}BD,$$

点 P ， M 是 CD ， DE 的中点，

$$PM \parallel CE, PM = \frac{1}{2}CE,$$

$$AB = AC, AD = AE,$$

$$BD = CE,$$

$$PM = PN,$$

$$PN \parallel BD,$$

$$\angle DPN = \angle ADC,$$

$$PM \parallel CE,$$

$$\angle DPM = \angle DCA,$$

$$\angle BAC = 90^\circ,$$

$$\angle ADG + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\angle MPN = \angle DPM + \angle DPN = \angle DCA + \angle ADC = 90^\circ,$$

$$PM = PN,$$

故答案为： $PM = PN$, $PM \perp PN$,

(2) 由旋转知， $\angle BAD = \angle CAE$,

$$AB = AC, AD = AE,$$

$$\triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS)},$$

$$\angle ABD = \angle ACE, BD = CE,$$

同(1)的方法，利用三角形的中位线得， $PN = \frac{1}{2}BD$, $PM = \frac{1}{2}CE$,

$$PM = PN,$$

$\triangle PMN$ 是等腰三角形，

同(1)的方法得， $PM \parallel CE$,

$$\angle DPM = \angle DCE,$$

同(1)的方法得， $PN \parallel BD$,

$$\angle PNC = \angle DBC,$$

$$\angle DPN = \angle DCB + \angle PNC = \angle DCB + \angle DBC,$$

$$\angle MPN = \angle DPM + \angle DPN = \angle DCE + \angle DCB + \angle DBC$$

$$= \angle BCE + \angle DBC = \angle ACB + \angle ACE + \angle DBC$$

$$= \angle ACB + \angle ABD + \angle DBC = \angle ACB + \angle ABC,$$

$$\angle BAC = 90^\circ,$$

$$\angle ACB + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\angle MPN = 90^\circ,$$

$\triangle PMN$ 是等腰直角三角形，

(3) 如图 2，同(2)的方法得， $\triangle PMN$ 是等腰直角三角形，

MN 最大时， $\triangle PMN$ 的面积最大，

MN 最大 $= AM + AN$,

在 $\triangle ADE$ 中, $AD=AE=4$, $\angle DAE=90^\circ$,

$AM=2\sqrt{2}$,

在 Rt $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=10$, $AN=5\sqrt{2}$,

$$MN_{\text{最大}} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2},$$

$$S_{PMN \text{ 最大}} = \frac{1}{2} PM^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} MN^2 = \frac{1}{4} \times (7\sqrt{2})^2 = \frac{49}{2}.$$

方法 2、由 (2) 知, $\triangle PMN$ 是等腰直角三角形, $PM=PN=\frac{1}{2}BD$,

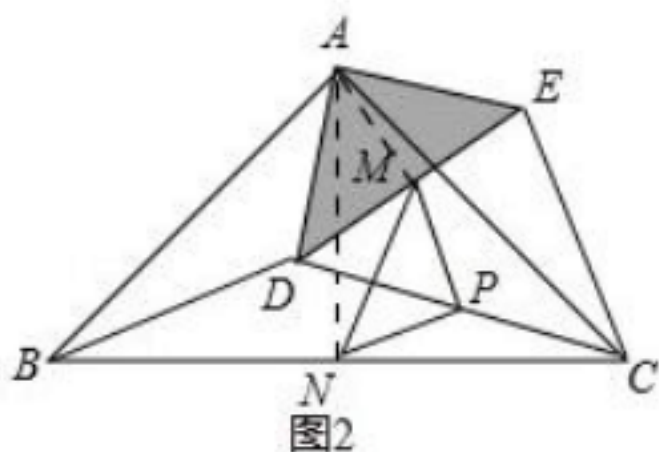
PM 最大时, PMN 面积最大,

点 D 在 AB 的延长线上,

$$BD=AB+AD=14,$$

PM=7 ,

$$S_{PMN \text{ 最大}} = \frac{1}{2} PM^2 = \frac{1}{2} \times 7^2 = \frac{49}{2}$$



【点评】此题是几何变换综合题，主要考查了三角形的中位线定理，等腰直角三角形的判定和性质，全等三角形的判断和性质，直角三角形的性质，解（1）的关键是判断出 $PM = \frac{1}{2}CE$ ， $PN = \frac{1}{2}BD$ ，解（2）的关键是判断出 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，解（3）的关键是判断出 MN 最大时， $\triangle PMN$ 的面积最大，是一道中考常考题．

23 .

【分析】(1) 把 A 点坐标代入直线解析式可求得 c ，则可求得 B 点坐标，由 A、B 的坐标，利用待定系数法可求得抛物线解析式；

(2) 由 M 点坐标可表示 P、N 的坐标，从而可表示出 MA、MP、PN、PB 的长，分 $\angle NBP=90^\circ$ 和 $\angle BNP=90^\circ$ 两种情况，分别利用相似三角形的性质可得到关于 m 的方程，可求得 m 的值；

用 m 可表示出 M、P、N 的坐标，由题意可知有 P 为线段 MN 的中点、M 为线段 PN 的中点或 N 为线段 PM 的中点，可分别得到关于 m 的方程，可求得 m 的值。

【解答】解：

(1) $y = -\frac{2}{3}x + c$ 与 x 轴交于点 A(3, 0)，与 y 轴交于点 B，

$$0 = -2 + c, \text{ 解得 } c = 2,$$

$$B(0, 2),$$

抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 A, B，

$$\begin{cases} -12 + 3b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = \frac{10}{3} \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\text{抛物线解析式为 } y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + 2;$$

(2) 由 (1) 可知直线解析式为 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ ，

M(m, 0) 为 x 轴上一动点，过点 M 且垂直于 x 轴的直线与直线 AB 及抛物线分别交于点 P, N，

$$P(m, -\frac{2}{3}m + 2), N(m, -\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m + 2),$$

$$PM = -\frac{2}{3}m + 2, AM = 3 - m, PN = -\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m + 2 - (-\frac{2}{3}m + 2) = -\frac{4}{3}m^2 + 4m,$$

BPN 和 APM 相似，且 $\angle BPN = \angle APM$ ，

$\angle BNP = \angle AMP = 90^\circ$ 或 $\angle NBP = \angle AMP = 90^\circ$ ，

当 $\angle BNP = 90^\circ$ 时，则有 $BN \perp MN$ ，

$$BN = OM = m,$$

$$\frac{BN}{AM} = \frac{PN}{PM}, \text{ 即 } \frac{m}{3-m} = \frac{-\frac{4}{3}m^2 + 4m}{-\frac{2}{3}m + 2}, \text{ 解得 } m = 0 \text{ (舍去) 或 } m = 2.5,$$

$$M(2.5, 0);$$

当 $\angle NBP=90^\circ$ 时，则有 $\frac{PN}{PA}=\frac{BP}{MP}$ ，

$$A(3, 0), B(0, 2), P(m, -\frac{2}{3}m+2),$$

$$BP=\sqrt{m^2+(-\frac{2}{3}m+2-2)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}m, AP=\sqrt{(m-3)^2+(-\frac{2}{3}m+2)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}(3-m),$$

$$\frac{-\frac{4}{3}m^2+4m}{\frac{\sqrt{13}}{3}(3-m)}=\frac{\frac{\sqrt{13}}{3}m}{-\frac{2}{3}m+2}, \text{ 解得 } m=0 \text{ (舍去) 或 } m=\frac{11}{8},$$

$$M(\frac{11}{8}, 0);$$

综上所述可知当以 B, P, N 为顶点的三角形与 $\triangle APM$ 相似时，点 M 的坐标为 $(2.5, 0)$ 或 $(\frac{11}{8}, 0)$ ；

$$\text{由 } \text{可知 } M(m, 0), P(m, -\frac{2}{3}m+2), N(m, -\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2),$$

M, P, N 三点为“共谐点”，

有 P 为线段 MN 的中点、 M 为线段 PN 的中点或 N 为线段 PM 的中点，

当 P 为线段 MN 的中点时，则有 $2(-\frac{2}{3}m+2)=-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2$ ，解得 $m=3$ （三点重合，舍去）或 $m=\frac{1}{2}$ ；

当 M 为线段 PN 的中点时，则有 $-\frac{2}{3}m+2+(-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2)=0$ ，解得 $m=3$ （舍去）或 $m=-1$ ；

当 N 为线段 PM 的中点时，则有 $-\frac{2}{3}m+2=2(-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2)$ ，解得 $m=3$ （舍去）或 $m=-\frac{1}{4}$ ；

综上所述可知当 M, P, N 三点成为“共谐点”时 m 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 -1 或 $-\frac{1}{4}$ 。

【点评】本题为二次函数的综合应用，涉及待定系数法、函数图象的交点、相似三角形的判定和性质、勾股定理、线段的中点、方程思想及分类讨论思想等知识。在（1）中注意待定系数法的应用，在（2）中利用相似三角形的性质得到关于 m 的方程是解题的关键，注意分两种情况，在（2）中利用“共谐点”的定义得到 m 的方程是解题的关键，注意分情况讨论。本题考查知识点较多，综合性较强，分情况讨论比较多，难度较大。