【数学】高中数学最全基础知识汇总

考试报 2023-02-09 02:48 Posted on 海南

基本初等函数

一、概念与符号

1. 函数的概念

一般地，我们有：设A，B是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系f，使对于集合A中的任意一个数x，在集合B中都有唯一确定的数$f(x)$和它对应，那么就称f：$A \to B$为从集合A到集合B的一个函数（function），记作：$y = f(x)$，$x \in A$.

2. 映射的概念

一般地，我们有：设A，B是两个非空的集合，如果按某一个确定的对应关系f，使对于集合A中的任意一个元素x，在集合B中都有唯一确定的元素y与之对应，那么就称对应f：$A \to B$为从集合A到集合B的一个映射（mapping）。

3. 函数的最值

一般地，设函数$y=f(x)$的定义域为I，如果存在实数M满足：

（1）对于任意的$x\in I$，都有$f(x)\leq M(f(x)\geq M)$；

（2）存在$x_0\in I$，使得$f(x_0)=M$.

那么称M是函数$y=f(x)$的最大(小)值，通常记为：

$y_{\max}=M$或$f(x)_{\max}=M\left(y_{\min}=M\text{或}f(x)_{\min}=M\right)$.

4. 奇偶函数等式的等价形式：

奇函数$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1(f(x)\neq 0)$；

偶函数$\Leftrightarrow f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1(f(x)\neq 0)$.

二、常用公式

1. 幂指数运算法则

（1）$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$，$(a^r)^s=a^{rs}$，$(ab)^r=a^rb^r$.（$a>0$，r，$s\in\mathbf{Q}$）

（2）当n为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当n为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geq 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

（3）规定：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,\text{且}n>1)$；

$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,\text{且}n>1)$；

$a^0=1(a\neq 0)$.

2. 对数恒等式

$a^{\log_a N} = N$，$\log_a a = 1$，$\log_a 1 = 0$.（其中$N > 0$，$a > 0$，且$a \neq 1$）

3. 对数运算法则

设$a > 0$，且$a \neq 1$，$M > 0$，$N > 0$，则

$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$，

$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$，

$\log_a N^n = n\log_a N$

4. 对数换底公式

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$$(a > 0$ 且$a \neq 1$；$c > 0$ 且$c \neq 1$；$b > 0)$

函数的应用

一、概念与符号

1.函数的零点

对于函数$y = f(x)$，我们把使$f(x) = 0$的实数x叫做函数$y = f(x)$的零点（zero）

2.二分法

对于在区间$[a，b]$上的连续不断且$f(a) \cdot f(b) < 0$的函数$y = f(x)$，通过不断地把函数$f(x)$的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做二分法（bisection）。

二、常用公式

1. 二次函数式：

$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=a(x-h)^2+k\left(\text{其中}a\neq 0，h=-\frac{b}{2a}，k=\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

2. 二次函数图象在x轴上两点间的距离：

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}.$$

3. 方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$：

（1）判别式$\Delta=b^2-4ac$；

（2）求根公式$x_{1，2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}(\Delta\geq 0)$；

（3）根与系数的关系$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a},\\ x_1x_2=\frac{c}{a}.\end{cases}$

三、常用定理

1. 零点存在定理

一般地，我们有：如果函数$y=f(x)$在区间$[a，b]$上的图象是连续不

断的一条曲线，并且有$f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数$y=f(x)$在区间$(a，b)$内有零点，即存在$c\in(a，b)$，使得$f(c)=0$，这个c也就是方程$f(x)=0$的根。

2. 二分法的操作步骤

给出精确度ε，用二分法求函数$f(x)$在区间$[a，b]$上零点近似值的步骤如下：

（1）确定区间$[a，b]$，验证$f(a)\cdot f(b)<0$，给定精确度ε；

（2）求区间$(a，b)$的中点c；

（3）计算$f(c)$；

空间几何

一、常用公式

$S_{圆柱全}=2\pi r(r+l)$，$V_{柱}=Sh$；

$S_{圆锥}=\pi r(r+l)$，$V_{锥}=\frac{1}{3}Sh$；

$S_{圆台}=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$，$V_{台}=\frac{1}{3}\left(S+\sqrt{SS'}+S'\right)h$；

$S_{球}=4\pi R^2$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

二、常用定理

（1）用一个平面去截一个球，截面是圆面.

（2）球心和截面圆心的连线垂直于截面.

（3）球心到截面的距离d与球的半径R及截面半径r有下面关系：

$r=\sqrt{R^2-d^2}$.

（4）球面被经过球心的平面截得的圆叫做大圆，被不经过球心的截面截得的圆叫做小圆.

（5）在球面上两点之间连线的最短长度，就是经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度，这个弧长叫做两点间的球面距离.

点、直线和平面位置关系

一、概念与符号

平面α、β、γ，

直线a、b、c，

点A、B、C.

$A \in a$——点A 在直线a上或直线a经过点A.

$a \subset \alpha$——直线a在平面α内.

$\alpha \cap \beta = a$——平面α、β的交线是a.

$\alpha \parallel \beta$——平面α、β平行.

$\beta \perp \gamma$——平面β与平面γ垂直.

二、常用定理

1.异面直线判断定理

过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不过该点的直线是异面直线.

2.线与线平行的判定定理

（1）平行于同一直线的两条直线平行.

（2）垂直于同一平面的两条直线平行.

（3）如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.

（4）如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

（5）如果一条直线平行于两个相交平面，那么这条直线平行于两个平面的交线.

空间向量与立体几何

一、常用公式

1. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$，$A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，则

(1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$；

(2) $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$；

(3) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

2. 中点坐标公式

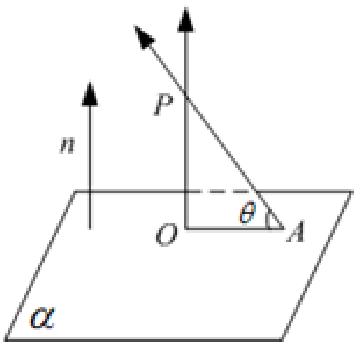
已知$A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，若$M(x, y, z)$是线段AB的中点，则有$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$，$z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

3. 异面直线所成的角

设异面直线AB、CD所成角为θ，则

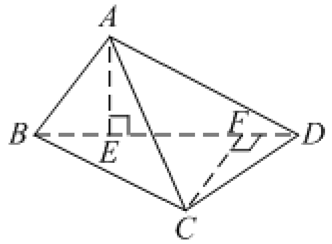
$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}$.

4. 直线与平面所成的角



如图，已知PA为平面α的一条斜线，$\boldsymbol{n}$为平面α的一个法向量，过P作平面α的垂线PO，连接OA，则$\angle PAO$为斜线PA和平面α所成的角，记为θ，易得：$\sin\theta=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\langle\boldsymbol{n}, \overrightarrow{AP}\rangle\right)\right|=|\cos\langle\boldsymbol{n}, \overrightarrow{AP}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\boldsymbol{n}|\,|\overrightarrow{AP}|}$.

5. 二面角的向量求法



(1)基向量法：如图，二面角$A-BD-C$中，$AE\perp BD$，$CF\perp BD$，AC、EF、AE、CF长度已知，则由$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC})^2$可求出$\cos\langle\overrightarrow{AE}，\overrightarrow{FC}\rangle$，从而求得$\langle\overrightarrow{AE}，\overrightarrow{FC}\rangle$，则二面角$A-BD-C$的大小即为$\pi-\langle\overrightarrow{AE}，\overrightarrow{FC}\rangle$.

(2)法向量法：已知二面角$\alpha-l-\beta$的平面角为θ，则

$|\cos\theta|=\left|\cos\langle\boldsymbol{n}_1，\boldsymbol{n}_2\rangle\right|$

$=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$(其中$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$分别是两平面$\alpha$、$\beta$的法向量).再结合直观图确定$\theta$是锐角还是钝角，从而去掉绝对值号，结合反三角函数求出θ.

6. 点P到平面α的距离

设点P到平面α的距离为d，则$d=\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$(其中$\boldsymbol{n}$为$\alpha$的法向量，$M$为平面$\alpha$内任一点).

7. 异面直线间的距离

设异面直线AB、CD间的距离为d，则

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}$$

$=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$(其中$\boldsymbol{n}$满足$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，且$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0$).

注意：异面直线间的距离问题在新课标中有所淡化，此公式仅作了解即可.要注意体会点到平面的距离公式与该公式的联系，从而体会点面之距、异面直线之距间的相互转化.

二、常用定理

1.设$\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则

(1)$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq 0)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\lambda x_2,\\ y_1=\lambda y_2,\\ z_1=\lambda z_2;\end{cases}$

(2)若$x_2y_2z_2\neq 0$，则$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$;

(3)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

2.共面向量定理：如果两个向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不共线，则向量$\boldsymbol{c}$与向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共面的充要条件是存在唯一的一对有序实数x、y，使$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

直线与方程

一、概念与符号

1.倾斜角

在平面直角坐标系中，对于一条与x轴相交的直线，如果把x轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所转的最小正角记为α，那么α就叫做直线的倾斜角，当直线和x轴平行或重合时，规定其倾斜角为0°，因此，倾斜角的取值范围是$0^\circ\leq\alpha<180^\circ$.

2.斜率

倾斜角不是90°的直线，它的倾斜角的正切值叫这条直线的斜率，常用k表示，即$k=\tan\alpha$，常用斜率表示倾斜角不等于90°的直线对于x轴的倾斜程度.

3.l_1到l_2的角

l_1依逆时针方向旋转到与l_2重合时所转的角.

4.l_1和l_2所成的角

l_1和l_2相交构成的四个角中不大于直角的角叫这两条直线所成的角，简称夹角.

三、常用定理

两直线位置关系的判定与性质定理如下：

（1）当$l_1: y = k_1 x + b_1, l_2: y = k_2 x + b_2$

平行：$k_1 = k_2$，且$b_1 \neq b_2$

垂直：$k_1 k_2 = -1$

相交：$k_1 \neq k_2$

重合：$k_1 = k_2$，且$b_1 = b_2$

（2）当$l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$

平行：$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$，且$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

垂直：$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

相交：$A_1 B_2 \neq A_2 B_1$

重合：$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$，且$\frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2}$

（或$A_1 B_2 = A_2 B_1$，且$A_1 C_2 = A_2 C_1$）

圆与方程

一、概念与符号

1. 曲线的方程、方程的曲线

在平面直角坐标系中，如果某曲线C（看做适合某种条件的点的集合或轨迹）上的点与一个二元方程$f(x,\ y)=0$的实数解建立了如下的关系：

①曲线上的点的坐标都是这个方程的解；②以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

那么，这个方程叫做曲线的方程，这条曲线叫做方程的曲线.

二、常用公式

1．圆的标准方程

方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$是圆心为$(a,\ b)$，半径为r的圆的标准方程. 其中当$a=b=0$时，$x^2+y^2=r^2$表示圆心为$(0,\ 0)$，半径为r的圆.

2．圆的一般方程

方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，当$D^2+E^2-4F>0$时，称为圆的一般方程. 其中圆心为$\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$，半径$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

3．圆的参数方程

设$C(a,\ b)$，半径为R，则其参数方程为
$\begin{cases}x=a+R\cos\theta\\ y=b+R\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数，$0\le\theta<2\pi$）.

4．直线与圆的位置关系

设直线l：$Ax+By+C=0$，圆C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. 圆心$C(a,\ b)$到l的距离为$d=\frac{|A\cdot a+B\cdot b+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，

则$d > r \Leftrightarrow l$与圆C相离；

$d = r \Leftrightarrow l$与圆C相切；

$d < r \Leftrightarrow l$与圆C相交.

5．圆与圆的位置关系

设圆C_1：$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r^2$，圆C_2：$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=R^2$. 设两圆的圆心距为d，

则当$d > R+r$时，两圆外离；

当$d = R+r$时，两圆外切；

当$|R-r| < d < R+r$时，两圆相交；

当$d = |R-r|$时，两圆内切；

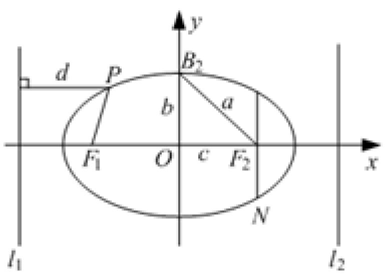
当$d < |R-r|$时，两圆内含.

圆锥曲线与方程

一、椭圆

1. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, $c^2=a^2-b^2(c>0)$, 焦距$|F_1F_2|=2c$.

2．如图 5-3-11，



5-3-11

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率有：$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$.

二、双曲线

1．双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，有$c^2=a^2+b^2$，焦距$|F_1F_2|=2c$.

且设$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，AB所在直线的倾斜角为θ，则

①$x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4}$，$y_1 \cdot y_2 = -p^2$.

②$|AF| = x_1 + \frac{p}{2}$，$|BF| = x_2 + \frac{p}{2}$，$|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{2p}{\sin^2\theta}$，. 特别地，当时$\theta = \frac{\pi}{2}$，弦长$|AB| = 2p$，此时即为抛物线的通径长.

③$S_{\Delta AOB} = \frac{p^2}{2\sin\theta}$.

④$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p}$.

⑤过B作$BC /\!/ x$轴，点C在准线上，则A、B、F三点共线$\Leftrightarrow$ A、O、C三点共线.

四、直线与圆锥曲线的关系

1．弦长公式：$|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1 - y_2|$.

2．抛物线的焦点弦$|AB| = x_1 + x_2 + p$.

3．抛物线的通径$|AB| = 2p$.

统计

一、常用符号

$\bar{x}$——平均数，S^2——方差，S——标准差，Σ——求和符号

二、常用公式

$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$, $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

$\mathrm{S}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, $\hat{\mathrm{b}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$, $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$

回归方程

$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$

其中

$$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.\end{cases}$$

相关系数

$$\mathrm{r}=\frac{\sum x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2-n\bar{x}^2)\cdot(\sum y_i^2-n\bar{y}^2)}}$$

概率

一、常用公式

1．随机事件A的概率：$P(A)$满足$0 \leq P(A) \leq 1$.

2．互斥事件的概率加法公式：

（1）如果A、B是互斥事件，则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

（2）如果A、B是相互独立事件，则$P(AB) = P(A)\,P(B)$.

（3）如果事件A_1，A_2，…，A_n两两相斥，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

3．互为对立事件概率加法公式：$P(\bar{A}) + P(A) = 1$.

4．古典概型：

$$P(A) = \frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}.$$

5．几何概型：

$$P(A) = \frac{\text{构成事件}A\text{的区域长度（面积或体积）}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度（面积或体积）}}.$$

离散型随机变量的分布列

特别地：

（1）若X服从两点分布，则$D(X)=p(1-p)$

（2）若$X \sim B(n，p)$, 则$D(X)=np(1-p)$

（3）$D(aX+b)=a^2D(X)$

8．正态变量概率密度曲线的函数表达式：

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x\in\mathbf{R}$，

其中μ，σ是参数，且$\sigma>0$，$-\infty<\mu<+\infty$，式中μ和σ分别是正态变量的数学期望和标准差. 期望为μ，标准差为σ的正态分布通常记作$N(\mu，\sigma^2)$.

当$\mu=0$，$\sigma=1$时，正态总体称为标准正态分布，记作$N(0，1)$.

标准正态分布的函数表示式是

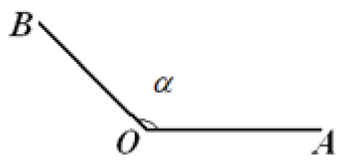
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，$x\in\mathbf{R}$.

三角函数

一、常用概念

1．角的概念及推广

(1)一条射线由原来的位置OA，绕着它的端点O按逆（顺）时针方向旋转到另一位置OB，就形成角α. 旋转开始时的射线OA称为角α的始边，旋转终止时的射线OB称为角α的终边，射线的端点O称为角α的顶点（如图）.

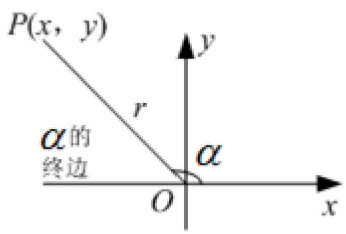


(2)逆时针方向旋转所形成的角称为正角，按顺时针方向旋转所形成的角称为负角，当射线没有旋转时，称为零角.

2．弧度及弧度制

长度等于半径长的弧称为一弧度的弧，一弧度的弧所对的圆心角是一弧度的角，这种度量角的制度称为弧度制.

3．三角函数的定义



如图，在α的终边上取一点$P(x，y)$，$|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$，

定义：$\sin\alpha = \frac{y}{r}$，$\cos\alpha = \frac{x}{r}$，$\tan\alpha = \frac{y}{x}$

二、常用公式

1.孤长公式：$l = |\alpha|R$，R为圆弧所在圆的半径，α为圆弧所对圆心角

的弧度数，l为弧长.

2.扇形的面积公式：$S=\frac{1}{2}lR$，R为圆的半径，l为弧长.

3.同角三角函数的关系式

（1）商数关系：$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，

（2）平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

（3）诱导公式：

x	函数		
	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\alpha+k\cdot 2\pi(k\in\mathbf{Z})$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	

$$\left\{\alpha \middle| \alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

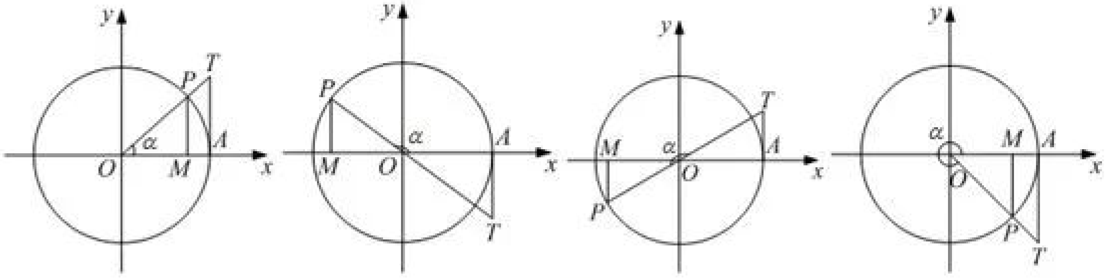
2．度与弧度的换算及特殊角的三角函数值

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
正弦	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
余弦	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
正切	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0

三角函数的图象与性质

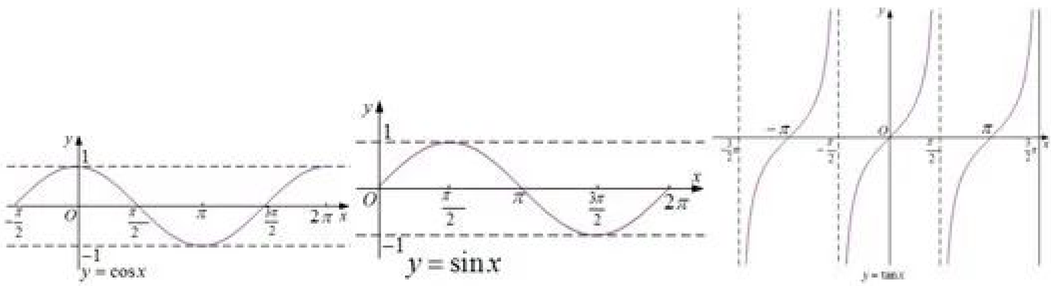
一、常用图形

1．三角函数线



$\sin\alpha = MP$，$\cos\alpha = OM$，$\tan\alpha = AT$.

2．三角函数的图象(如图 9-2-23)



二、常用性质

函数名称	正弦函数	余弦函数	正切函数
解析式	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\left\{x \mid x \in \mathbf{R}\text{且}x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$
值域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$\mathbf{R}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
有界性	有界函数	有界函数	
周期性	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$	$T = \pi$
单调性	增区间 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2},\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 减区间 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2},\ 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$	增区间 $[2k\pi - \pi,\ 2k\pi]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 减区间 $[2k\pi,\ 2k\pi + \pi]$ $(k \in \mathbf{Z})$	增区间 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ $(k \in \mathbf{Z})$

三、常用公式

1.正弦函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$和余弦函数$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

2.正切函数$y=A\tan(\omega x+\varphi)$的周期为$T=\frac{\pi}{|\omega|}$

三角恒等变换

一、常用公式

1．两角和(差)公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$$

2．倍角公式：

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

3．倍角公式的逆用：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\quad \tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

解三角形

一、常用公式

1．三角形面积公式

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}$底$\times$高$=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{abc}{4R}$，

其中R为ΔABC的外接圆半径.

二、常用定理

1．正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

2．余弦定理：

$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A$，

$b^2=a^2+c^2-2\,ac\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos C$.

平面向量

一、常用公式

设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$表示向量，且$\boldsymbol{a}=\left(x_1,\ y_1\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(x_2,\ y_2\right)$，$\lambda$表示实数.

1．加法原理：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(x_1+x_2,\ y_1+y_2\right)$.

2．减法原理：

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\left(x_1-x_2,\ y_1-y_2\right)$.

3．数乘：$\lambda\boldsymbol{a}=\left(\lambda x_1,\ \lambda y_1\right)$.

4．数量积：

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$（其中$\theta$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角）

5．平行关系：

$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2-y_1y_2=0$.

（1）$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$，其中$\boldsymbol{a}=(x, y)$；

（2）$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，其中$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$.

10．角度公式：

$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}}$，其中$\theta$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.

二、常用定理

1. 平面向量基本定理

如果$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量$\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数λ_1、λ_2，使$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

2. 两向量共线定理

向量$\boldsymbol{b}$与非零向量$\boldsymbol{a}$共线的充要条件是有且仅有有个实数λ，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

3. 两向量垂直定理

向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$垂直的充要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数列

一、常用公式

1．等差数列、等比数列

	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1}-a_n=d$	$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$, $a_n=a_m+(n-m)d$	$a_n=a_1q^{n-1}$, $a_n=a_mq^{n-m}$
公差(比)	$d=\frac{a_n-a_1}{n-1}(n\neq 1)$, $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}(n\neq m)$	$q^{n-1}=\frac{a_n}{a_1}$, $q^{n-m}=\dfrac{a_n}{a_m}$
前n项和公式	$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ $=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$	$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1)$, $S_n=na_1(q=1)$
中项公式	$A=\dfrac{a+b}{2}$	$G=\pm\sqrt{ab}(ab>0)$
$m+n=p+q$	$a_m+a_n=a_p+a_q$	$a_ma_n=a_pa_q$

2．在等差数列$\{a_n\}$中：

(1)$a_n=m$，$a_m=n$，$m\neq n$，则$a_{m+n}=0$；

(2)若$S_n=m$，$S_m=n$，$m\neq n$，则$S_{m+n}=-(m+n)$；

(3)若$S_n=S_m$，$m\neq n$，则$S_{m+n}=0$.

3.若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为等差数列，且前n项和分别为S_n与T_n，则$\frac{a_m}{b_m}=\frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$.

4．项数为$2n(n\in\mathbf{N}^*)$偶数的等差数列$\{a_n\}$有：

$S_{2n}=n(a_1+a_{2n})=\cdots=n(a_n+a_{n+1})$($a_n$，$a_{n+1}$为中间的两项)；

$S_{偶}-S_{奇}=nd$；$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

项数为奇数$2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$的等差数列$\{a_n\}$有：

$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$(a_n为中间项)；

$S_{奇}-S_{偶}=an$; $\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$.

$S_{奇}$、$S_{偶}$分别为数列中所有奇数项的和与所有偶数项的和.

5．常见数列的前n项和的公式

$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+2)}{2}$;

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$;

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

二、常用结论

1. A是a，b的等差中项的充要条件是$A=\frac{a+b}{2}$;

2. G是a，b的等比中项的充要条件是$G^2=ab$，其中$ab>0$.

不等式

1. 不等式的性质

①$a>b \Leftrightarrow b<a$

②$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$

③$a>b \Rightarrow a+c>b+c$

④$a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$；$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$

⑤$a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$

⑥$a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$

⑦$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n(n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$

⑧$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$

2．一元二次不等式：

$ax^2+bx+c>0(a \neq 0)$，设x_1、x_2是方程$ax^2+bx+c=0$的解，

且$x_1<x_2$，若$a>0$，则

$\Delta>0$，$\{x|x<x_1$，或$x>x_2\}$；

$\Delta=0$，$\left\{x \middle| x \in \mathbf{R}\text{，且}x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$；

$\Delta<0$，$x \in \mathbf{R}$.

3．基本不等式：

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

(其中$a>0$，$b>0$，当且仅当$a=b$时取“=”).

常用逻辑用语

一、常用符号

$p \vee q$——p或q, $p \wedge q$——p且q, $\neg p$——非p

$\forall$——任意, $\exists$——存在

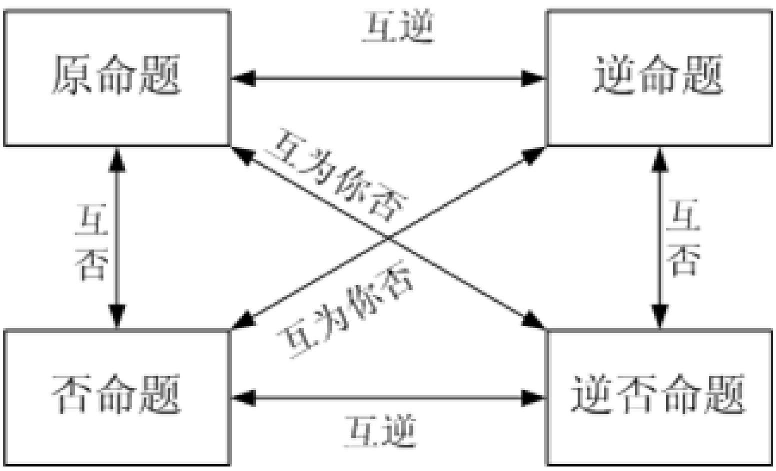
$A \Rightarrow B$——A是B成立的充分条件

$B \Rightarrow A$——A是B成立的必要条件

$A \Leftrightarrow B$——A是B成立的充要条件

二、常用结论

1.



2. 在p或q命题中，一真为真.

3. 在p且q命题中，一假为假.

4. 在非p命题中，与p的真假相反.

5. 全称命题p：$\forall x \in M$，$p(x)$，它的否定•p：$\exists x \in M$，•$p(x)$.

6. 特称命题q：$\exists x \in M$，$q(x)$，它的否定•q：$\forall x \in M$，•$q(x)$.

导数及其应用

一、常用公式

1. 常用函数导数公式

（1）$C' = 0$（C为常数）；

（2）$(x^n)' = nx^{n-1}$（其中$n \in \mathbf{R}$）；

（3）$(\sin x)' = \cos x$；

（4）$(\cos x)' = -\sin x$；

（5）$(\ln x)' = \frac{1}{x}$；

（6）$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$；

（7）$(e^x)' = e^x$；

（8）$(a^x)' = a^x \ln a$.

（9）复合函数$y = f(g(x))$的导数和函数$y = f(u)$，$u = g(x)$的导数间的关系为：$y_x' = y_u' \cdot u_x'$.

2. 函数的和、差、积、商的导数

（1）$[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x)$；

（2）$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$；

（3）$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$.

3. 定积分的线性性质

（1）$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

（2）$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；

（3）$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x\,(a < b < c)$.

二、常用定理

1．函数的单调性与其导函数的正负的关系

在某个区间$(a，b)$内，如果$f'(x) > 0$，那么函数$y = f(x)$在这个区间内单调递增；如果$f'(x) < 0$，那么函数$y = f(x)$在这个区间内单调递减.

2．一般地，求函数$y = f(x)$极值的方法是：

解方程$f'(x) = 0$，当$f'(x_0) = 0$时：

①如果在x_0附近的左侧$f'(x) > 0$，右侧$f'(x) < 0$，那么$f(x_0)$是极大值；

②如果在x_0附近的左侧$f'(x) < 0$，右侧$f'(x) > 0$，那么$f(x_0)$是极小值；

3．一般地，求函数$y=f(x)$在$[a，b]$上的最大值与最小值的步骤如下：

①求函数$y=f(x)$在$(a，b)$的极值；

②将函数$y=f(x)$的各极值与端点处的函数值$f(a)$，$f(b)$比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

4．微积分基本定理

如果$F'(x)=f(x)$，且$f(x)$在$[a，b]$上可积，则

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$，其中$F(x)$叫做$f(x)$的一个原函数.

复数

一、常用公式

1．$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$，

$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$，

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$，

$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-bd}{c^2+d^2}i(c+di\neq 0)$(以上$a$、$b$、$c$、$d\in R$).

2．$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$，

$z\cdot\bar{z}=|z|^2$，$\bar{\bar{z}}=z$.

3．$\left||z_1|-|z_2|\right|\leq|z_1\pm z_2|\leq|z_1|+|z_2|$，

$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$，

$|z|^n=|z^n|$，

$\sqrt[n]{|z|}=\left|\sqrt[n]{|z|}\right|$.

计数原理

一、常用公式

1．排列数公式：

$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$ $(m$、$n\in\mathbf{N}^*$且$m\leq n)$.

2．排列数性质：

$\mathrm{A}_n^m=n\mathrm{A}_{n-1}^{m-1}$；$\mathrm{A}_n^m=m\mathrm{A}_{n-1}^{m-1}+\mathrm{A}_{n-1}^m(m$、$n\in\mathbf{N}^*$且$m\leq n)$.

3．阶乘：$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$；$A_n^n=n!$；规定$0!=1$；

常用变形：$n\cdot n!=(n+1)!-n!.(n\in\mathbf{N}^*)$

4．组合数公式：

$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$；规定$\mathrm{C}_n^0=1$.（$m$、$n\in\mathbf{N}^*$且$m\leq n$）

5．组合数性质：

$C_n^m=C_n^{n-m}$；

$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$；

$C_n^m=\frac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$；

$C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-2}^{m-1}+C_{n-3}^{m-1}+\cdots+C_{m-1}^{m-1}$.（以上$m$、$n\in\mathbf{N}^*$且$m\leq n$）

6．二项式定理：

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}\mathrm{b}^r+\cdots+C_n^nb^n(0\leq r\leq n$，$r\in\mathrm{N}$，$n\in\mathrm{N}^*$，$C_n^r$叫做二项式系数)，$a$、$b$是任意的数、代数式.

特别地，

$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n$，

$(a-b)^n=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2-\cdots+(-1)^rC_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+(-1)^nC_n^nb^n$.

7．二项展开式的通项公式：

$\mathrm{T}_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r(0\leq r\leq n$，$r\in\mathrm{N}$，$n\in\mathrm{N}^*)$.

8．$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$；

$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}.(n\in\mathrm{N}^*)$

二、常用结论

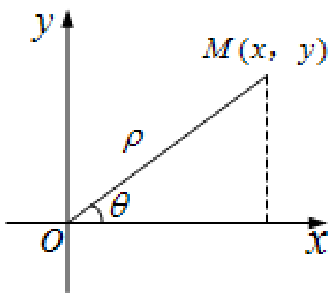
1．含有$n(n\in\mathrm{N})$个元素的集合的子集数为2^n，真子集数为2^n-1.

2．组合数恒等式$(n\in\mathrm{N}^*)$：$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

坐标系与参数方程

1．极坐标与直角坐标的互化

设M为平面上的一点，它的直角坐标为$(x，y)$，极坐标为$(\rho，\theta)$. 由图可知下面的关系式成立：



$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$或$\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2, \\ \tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq 0) \end{cases}$

顺便指出，上式对$\rho<0$也成立. 这就是极坐标与直角坐标的互化公式.

2．圆的极坐标方程

(1)圆心在极点，半径为R的圆的极坐标方程为$\rho = R$.

(2)圆心在极轴上的点$(a，0)$处，且过极点O的圆的极坐标方程为$\rho = 2a\cos\theta$.

(3)圆心在点$\left(a，\frac{\pi}{2}\right)$处且过极点的圆的极坐标方程为$\rho = 2a\sin\theta$，$0 \le \theta \le \pi$.

注：当圆心不在直角坐标系的坐标轴上时，要建立圆的极坐标方程，通常把极点放置在圆心处，极轴与x轴同向，然后运用极坐标与直角坐标的变换公式.

$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta \end{cases}$或$\begin{cases} \rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ \tan\theta = \frac{y - y_0}{x - x_0} \end{cases}$

3．直线的参数方程

直线的参数方程可以从它的普通方程转化而来，设直线的点斜式方程为$y - y_0 = k(x - x_0)$.

其中$k=\tan\alpha$，α为直线的倾斜角，代入上式，得

$$y-y_0=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-x_0)，\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}，\ 即\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}.$$

记上式的比值为t，整理后得$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\,,\\ y=y_0+t\sin\alpha\,.\end{cases}$

这是直线的参数方程，其中参数t有明显的几何意义. 在直角三角形M_0AM中，$|M_0A|=|x-x_0|$，$|MA|=|y-y_0|$，$|M_0M|=|t|$，即$|t|$表示直线上任一点M到定点M_0的距离.

4．圆的参数方程

若圆心在点$M_0(x_0，y_0)$，半径为R，则圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+R\cos\theta\,,\\ y=y_0+R\sin\theta\,,\end{cases}\quad 0\leq t\leq 2\pi.$$

5．椭圆的参数方程

若椭圆的中心不在原点，而在点$M_0(x_0，y_0)$，对称轴与坐标轴平行的的椭圆的参数方程为：

$$\begin{cases}x=x_0+a\cos t\,,\\ y=y_0+b\sin t\,,\end{cases}\quad 0\leq t\leq 2\pi.$$

为什么有不少同学到高一，就被数学虐得怀疑人生
数学班