CẤU TRÚC DỮ LIỆU VÀ GIẢI THUẬT

Bài 09: Một số thuật toán đồ thị

Nguyễn Thị Tâm
nguyenthitam.hus@gmail.com

Ngày 18 tháng 4 năm 2025

Nhắc lại

- Phần 1. Các khái niệm cơ bản
- Phần 2. Biểu diễn đồ thị
- Phần 3. Duyệt đồ thị
- Phần 4. Cây và cây khung của đồ thị
- Phần 5. Bài toán đường đi ngắn nhất
- **Phần 6. Bài toán luồng cực đại trong mạng**

Nội dung

1. Luồng trong mạng
2. Thuật toán Ford-Fulkerson
   - Lát cắt
   - Đồ thị tăng luồng và Đường tăng luồng
   - Thuật toán Ford-Fulkerson
3. Thuật toán Edmonds-Karp

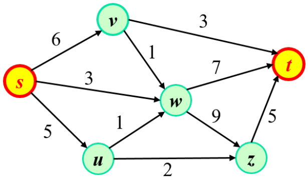
Nội dung

Mạng (network)

Định nghĩa 1

Mạng là đồ thị có hướng $G = (V, E)$:

- Có duy nhất một đỉnh s không có cung đi vào gọi là đỉnh phát (nguồn) và duy nhất một đỉnh t không có cung đi ra gọi là đỉnh thu (đích).
- Mỗi cung e của G được gắn với một số không âm $c(e)$ được gọi là khả năng thông qua (KNTQ) của e



Luồng trong mạng

Định nghĩa 2

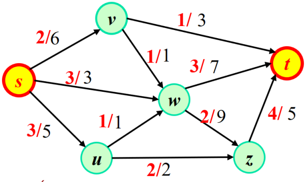
Luồng f trong mạng $G = (V, E)$ là phép gán số $f(e)$ cho mỗi cung e thoả mãn các điều kiện:

- Điều kiện về khả năng thông qua (Capacity Rule): với mỗi cung e,

$$0 \leq f(e) \leq c(e)$$

- Điều kiện cân bằng luồng (Conservation Rule): với mỗi $v \neq s, t$,

$$\sum_{e \in E^-(v)} f(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e)$$



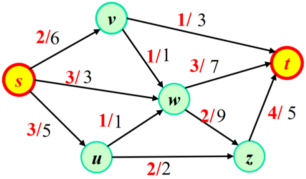
Luồng trong mạng

Định nghĩa 3

Giá trị của luồng f là

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in E^+(s)} f(e) = \sum_{e \in E^-(t)} f(e)$$

trong đó, $E^+(s)$ là tập các cung đi ra khỏi đỉnh s, $E^-(t)$ là các cung đi vào đỉnh t



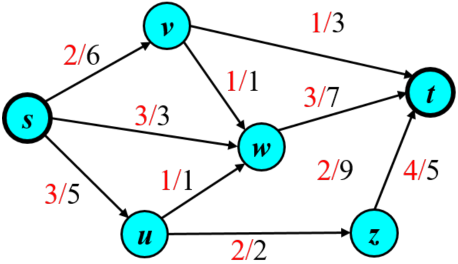
Giá trị của luồng trên là

$$f(s, v) + f(s, u) + f(s, w) = f(v, t) + f(w, t) + f(z, t) = 8$$

Luồng cực đại

Định nghĩa 4

Luồng cực đại là luồng có giá trị lớn nhất

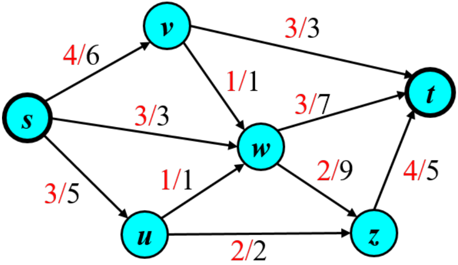


Luồng với giá trị 8

Luồng cực đại

Định nghĩa 4

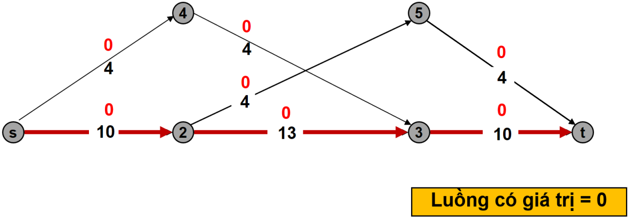
Luồng cực đại là luồng có giá trị lớn nhất



Luồng cực đại có giá trị 10

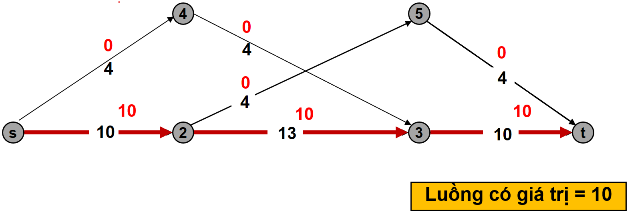
Thuật toán tham lam

- Bắt đầu từ luồng 0 (Luồng có giá trị $= 0$).
- Tìm đường đi P từ s đến t trong đó mỗi cung thoả mãn $f(e) < c(e)$.
- Tăng luồng dọc theo đường đi P.
- Lặp lại cho đến khi không tăng được luồng.



Thuật toán tham lam

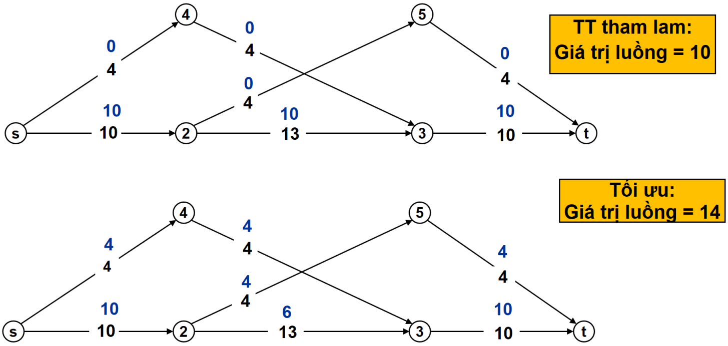
- Bắt đầu từ luồng 0 (Luồng có giá trị = 0).
- Tìm đường đi P từ s đến t trong đó mỗi cung thoả mãn $f(e) < c(e)$.
- Tăng luồng dọc theo đường đi P.
- Lặp lại cho đến khi không tăng được luồng.



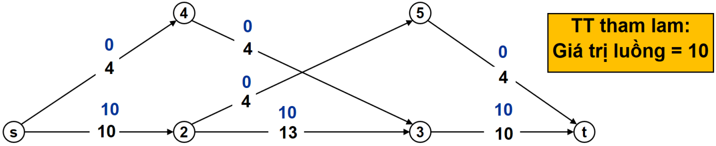
$$s \to 4 \to 3 \to t$$

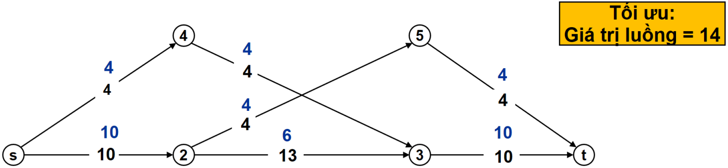
$$s \to 2 \to 5 \to t$$

Thuật toán tham lam



Thuật toán tham lam





Thuật toán tham lam không cho lời giải tối ưu

Nội dung

Lát cắt (cuts)

Định nghĩa 5

Lát cắt là cách phân hoạch tập đỉnh của đồ thị thành 2 tập S và T sao cho $s \in S, t \in T$.

Lát cắt (cuts)

Định nghĩa 5

Lát cắt là cách phân hoạch tập đỉnh của đồ thị thành 2 tập S và T sao cho $s \in S, t \in T$.

Định nghĩa 6

Khả năng thông qua $cap(S, T)$ của lát cắt (S, T) là:

$$\text{cap}(S, T) = \sum_{e \in S \to T} c(e)$$

trong đó, $S \to T = \{(v, w) \in E : v \in S, w \in T\}$

Lát cắt (cuts)

Định nghĩa 5

Lát cắt là cách phân hoạch tập đỉnh của đồ thị thành 2 tập S và T sao cho $s \in S, t \in T$.

Định nghĩa 6

Khả năng thông qua $cap(S, T)$ của lát cắt (S, T) là:

$$\text{cap}(S, T) = \sum_{e \in S \to T} c(e)$$

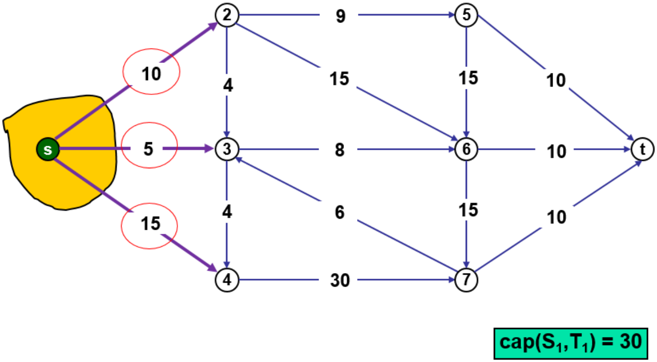
trong đó, $S \to T = \{(v, w) \in E : v \in S, w \in T\}$

Định nghĩa 7

Lát cắt nhỏ nhất (hẹp nhất): là lát cắt với KNTQ nhỏ nhất.

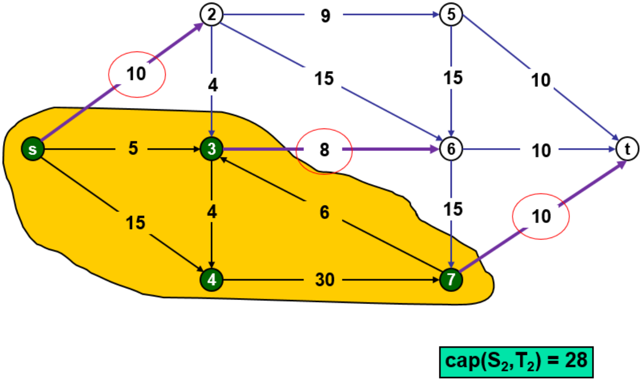
Lát cắt (cuts)

Lát cắt (S_1, T_1), $\quad S_1 = \{s\}$, $\quad T_1 = \{t, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



Lát cắt (cuts)

Lát cắt (S_2, T_2), $\quad S_2 = \{s, 3, 4, 7\}$, $\quad T_2 = \{2, 5, 6, t\}$



Luồng chảy qua lát cắt

Định nghĩa 8

Giả sử f là luồng trong mạng và (S, T) là lát cắt. Ta gọi giá trị luồng chảy qua lát cắt (S, T) là đại lượng

$$\sum_{e \in S \to T} f(e) - \sum_{e \in T \to S} f(e)$$

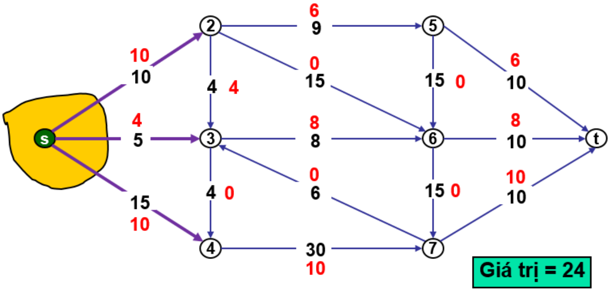
trong đó:

- $S \to T = \{(v, w) \in E : v \in S, w \in T\}$
- $T \to S = \{(v, w) \in E : v \in T, w \in S\}$

Luồng chảy qua lát cắt

Lát cắt (S, T), $S = \{s\}$, $T = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, t\}$

Luồng chảy qua lát cắt (S, T)

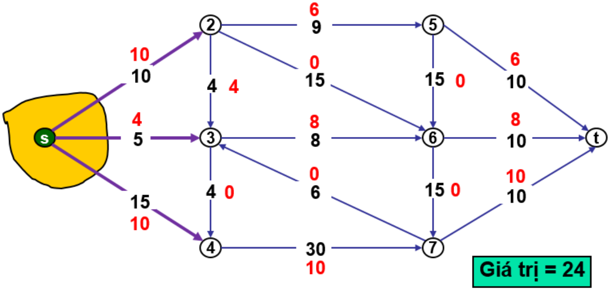


Luồng chảy qua lát cắt

Bổ đề 1

Giả sử f là luồng, và(S, T) là lát cắt. Khi đó giá trị luồng chảy qua lát cắt chính bằng giá trị của luồng:

$$\sum_{e \in S \to T} f(e) - \sum_{e \in T \to S} f(e) = \sum_{e \in E^{+}(s)} f(e) = \sum_{e \in E^{-}(t)} f(e) = val(f)$$



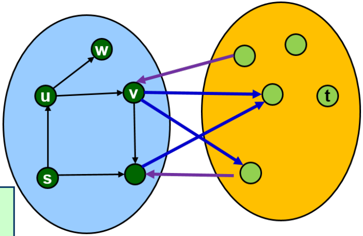
Luồng và lát cắt

Chứng minh Bổ đề 1

Cộng tất cả các ràng buộc cân bằng luồng theo mọi $v \in S$, đơn giản biểu thức ta thu được:

$$0 = \sum_{v\in S}\Big(\sum_{e\in E^+(v)} f(e) - \sum_{e\in E^-(v)} f(e)\Big)$$

$$= \sum_{e\in E^+(s)} f(e) - \Big(\underbrace{\sum_{e\in S\to T} f(e)}_{\text{tổng theo các cung xanh}} - \underbrace{\sum_{e\in T\to S} f(e)}_{\text{tổng theo các cung tím}}\Big)$$



Luồng và lát cắt

Bổ đề 2

Giả sử f là luồng, còn (S, T) là lát cắt. Khi đó $val(f) \leq cap(S, T)$.

Chứng minh Bổ đề 2

$$\begin{aligned} val(f) &= \sum_{e \in S \to T} f(e) - \sum_{e \in T \to S} f(e) && (1) \\ &\leq \sum_{e \in S \to T} f(e) && (2) \\ &\leq \sum_{e \in S \to T} c(e) && (3) \\ &= cap(S, T) && (4) \end{aligned}$$

Luồng cực đại và lát cắt nhỏ nhất

Max Flow and Min Cut

Hệ quả

Giả sử f là luồng, còn (S, T) là lát cắt. Nếu $val(f) = cap(S, T)$, thì f là luồng cực đại còn là lát cắt hẹp nhất.

Chứng minh

Xét f' là luồng bất kỳ; (S', T') là lát cắt bất kỳ. Theo bổ đề 2 ta có

$$val(f') \leq cap(S, T) = val(f) \leq cap(S', T')$$

- Do f' là luồng bất kỳ, mà $val(f') \leq val(f)$, nên f là luồng cực đại
- (S', T') là lát cắt bất kỳ, mà $cap(S, T) \leq cap(S', T')$, nên (S, T) là lát cắt hẹp nhất

Luồng cực đại và lát cắt nhỏ nhất

Max Flow and Min Cut

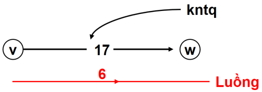
Định lý (Ford-Fulkerson, 1956)

Trong mạng bất kỳ, giá trị của luồng cực đại luôn bằng khả năng thông qua của lát cắt nhỏ nhất.

Đồ thị tăng luồng

Mạng đã cho $G = (V, E)$

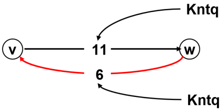
- Cung $e = (v, w) \in E$, luồng $f(e)$, khả năng thông qua $c(e)$



Đồ thị tăng luồng $G_f = (V, E_f)$

- $E_f = \{e \mid f(e) < c(e)\} \cup \{e^R \mid f(e) > 0\}$ $(e = (u, v) \rightarrow e^R = (v, u))$
- Khả năng thông qua của các cung

$$c_f(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) & \text{nếu } e \in E \\ f(e) & \text{nếu } e \notin E \end{cases}$$



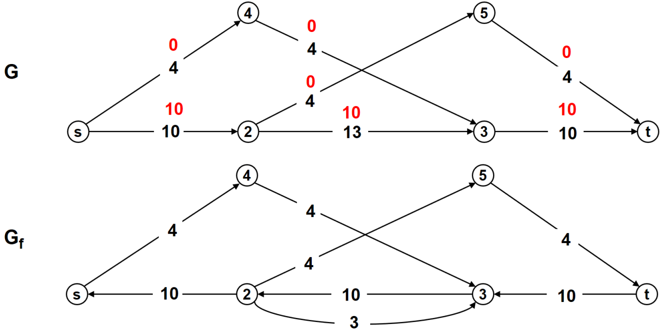
Đồ thị tăng luồng

Ví dụ

Đồ thị tăng luồng: $G_f = (V, E_f)$, $\quad E_f = \{e : f(e) < c(e)\} \cup \{e_R : f(e) > 0\}$.

- $c_f(e)$ cho biết lượng lớn nhất có thể tăng luồng trên cung e.
- $c_f(e^R)$ cho biết lượng lớn nhất có thể giảm luồng trên cung e.

Khả năng thông qua của đường đi P là: $c_f(P) = min\{c_f(e) | e \in P\}$



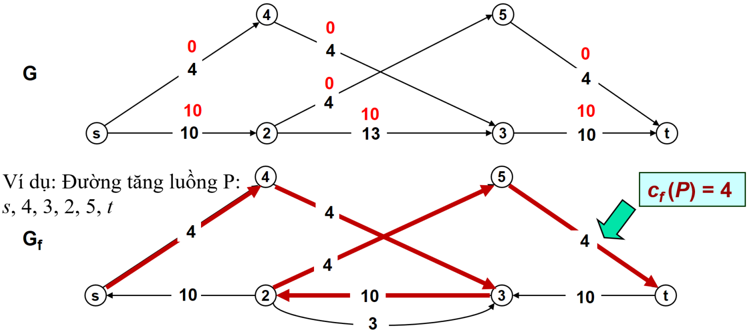
Đồ thị tăng luồng

Ví dụ

Đồ thị tăng luồng: $G_f = (V, E_f)$, $\quad E_f = \{e : f(e) < c(e)\} \cup \{e_R : f(e) > 0\}$.

- $c_f(e)$ cho biết lượng lớn nhất có thể tăng luồng trên cung e.
- $c_f(e^R)$ cho biết lượng lớn nhất có thể giảm luồng trên cung e.

Khả năng thông qua của đường đi P là: $c_f(P) = min\{c_f(e) | e \in P\}$



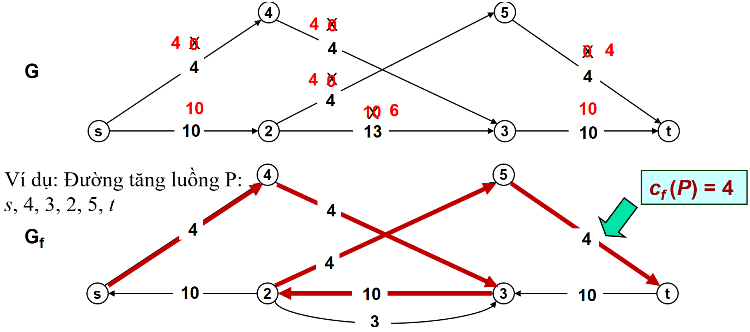
Đồ thị tăng luồng

Ví dụ

Đồ thị tăng luồng: $G_f = (V, E_f), \quad E_f = \{e : f(e) < c(e)\} \cup \{e_R : f(e) > 0\}$.

- $c_f(e)$ cho biết lượng lớn nhất có thể tăng luồng trên cung e.
- $c_f(e^R)$ cho biết lượng lớn nhất có thể giảm luồng trên cung e.

Khả năng thông qua của đường đi P là: $c_f(P) = min\{c_f(e) | e \in P\}$



Đường tăng luồng

Định lý đường tăng luồng (Ford-Fulkerson, 1956)

Luồng là cực đại khi và chỉ khi không tìm được đường tăng luồng.

Định lý về luồng cực đại và lát cắt nhỏ nhất (Ford-Fulkerson, 1956):

Giá trị của luồng cực đại bằng khả năng thông qua của lát cắt nhỏ nhất.

Thuật toán Ford-Fulkerson

Tăng luồng *f* dọc theo đường tăng P

```
float augment(f,P)
{
   b ← c_f(P)
   FOR e ∈ P
      IF (e ∈ E) // cạnh thuận
         f(e) ← f(e) + b
      ELSE       // cạnh nghịch
         f(e^R) ← f(e) – b
   RETURN f
}
```

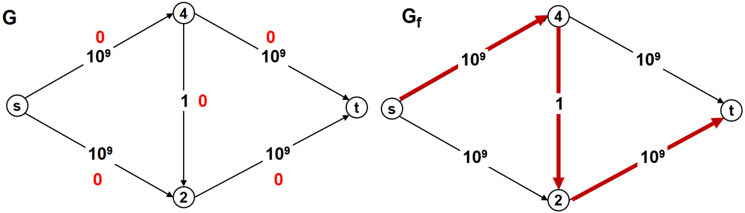
Thuật toán Ford-Fulkerson

```
float Ford_Fulkerson(G,c,s,t)
{
   FOR e ∈ E    // Khởi tạo luồng 0
      f(e) ← 0
   G_f ← đồ thị tăng luồng f

   WHILE (tìm được đường tăng luồng P)
   {  f ← augment(f, P)
      Cập nhật lại G_f
   }
   RETURN f
}
```

Độ phức tạp thời gian

Thuật toán Ford-Fulkerson có phải là thuật toán đa thức? (thuật toán với thời gian tính bị chặn bởi đa thức bậc cố định của dữ liệu vào)



Nội dung

Chọn đường tăng luồng như thế nào?

Chọn đường tăng luồng

- Một số cách chọn dẫn đến thuật toán hàm mũ
- Nếu khả năng thông qua là các số vô tỷ, thuật toán có thể không dừng

Mục đích: chọn đường tăng luồng sao cho

- Có thể tìm đường tăng một cách hiệu quả.
- Thuật toán đòi hỏi thực hiện càng ít bước lặp càng tốt.

Một số cách chọn đường tăng luồng

- Khả năng thông qua lớn nhất (đường béo - fat path)
- Khả năng thông qua đủ lớn (thang độ hoá kntq – capacity scaling)
- Số cạnh trên đường đi là ít nhất (đường ngắn nhất - shortest path)

Thuật toán Edmonds-Karp

Chứng minh rằng: Nếu đường tăng được chọn là đường ngắn nhất từ s đến t, thì thời gian tính của thuật toán sẽ là $O(|E|^2|V|)$

Thuật toán Edmonds-Karp

Thuật toán Ford-Fulkerson

```
float Ford_Fulkerson(G,c,s,t)
{
   FOR e ∈ E    // Khởi tạo luồng 0
      f(e) ← 0
   Gf ← đồ thị tăng luồng f

   WHILE (tìm được đường tăng luồng
P)
   {  f ← augment(f, P)
      Cập nhật Gf
   }
   RETURN f
}
```

$$O(|E|^2|V|)$$

Thuật toán Edmonds – Karp

```
float Edmonds-Karp(G,c,s,t)
{

   FOR e ∈ E
     f(e) ← 0
   Gf ← đồ thị tăng luồng

   WHILE (tồn tại đường tăng luồng)
   {
    tìm đường tăng luồng P bởi BFS
    f ← augment(f, P)
    Cập nhật Gf
   }
   RETURN f
}
```