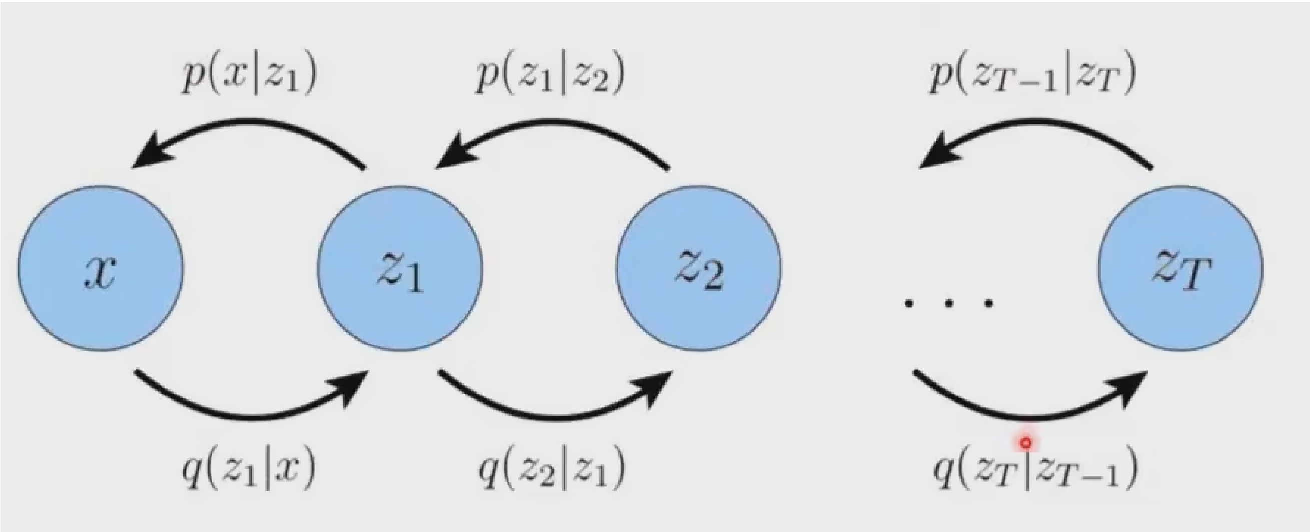
# HVAE

VAE的数学性很强，可以通过多种方式推导出来，可通过jensen's Inequation和bayes Chain推导。
分层变分自编码器(HVAE)是VAE的推广，它扩展到隐变量上的多个层次结构。在这个公式下，隐变量本身被解释为从其他更高级别、更抽象的隐变量中生成的。
而在具有T个层次级别的HVAE中，允许每个隐变量以所有先前的隐变量为条件，在这项工作中我们专注于一种特殊情况，我们称之为马尔可夫HVAE(MHVAE)。在 MHVAE中，生成过程为马尔可夫链.直观和视觉上，这可以看作是简单地将VAE堆叠在一起，下图所示：




$$p(x,\ z_{1:T}) = p(z_T)p_\theta(x \mid z_1)\prod_{t=2}^{T} p_\theta(z_{t-1} \mid z_t)$$

$$q_\phi(z_{1:T} \mid X) = q_\phi(z_1 \mid x)\prod_{t=2}^{T} q_\phi(z_t \mid z_{t-1})$$

拓展ELBO：

$$\begin{aligned}
\log p(\boldsymbol{x}) &= \log \int p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_{1:T}) d\boldsymbol{z}_{1:T} && \text{(Apply Equation 1)} \\
&= \log \int \frac{p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_{1:T}) q_\phi(\boldsymbol{z}_{1:T}|\boldsymbol{x})}{q_\phi(\boldsymbol{z}_{1:T}|\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{z}_{1:T} && \text{(Multiply by } 1 = \frac{q_\phi(\boldsymbol{z}_{1:T}|\boldsymbol{x})}{q_\phi(\boldsymbol{z}_{1:T}|\boldsymbol{x})}\text{)} \\
&= \log \mathbb{E}_{q_\phi(\boldsymbol{z}_{1:T}|\boldsymbol{x})}\left[\frac{p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_{1:T})}{q_\phi(\boldsymbol{z}_{1:T}|\boldsymbol{x})}\right] && \text{(Definition of Expectation)} \\
&\geq \mathbb{E}_{q_\phi(\boldsymbol{z}_{1:T}|\boldsymbol{x})}\left[\log \frac{p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_{1:T})}{q_\phi(\boldsymbol{z}_{1:T}|\boldsymbol{x})}\right] && \text{(Apply Jensen's Inequality)}
\end{aligned}$$

将HVAE的联合分布p和$q_\varphi$代入ELBO：

$$\mathbb{E}_{q_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{z}_{1:T}|\boldsymbol{x})}\left[\log\frac{p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}_{1:T})}{q_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{z}_{1:T}|\boldsymbol{x})}\right]=\mathbb{E}_{q_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{z}_{1:T}|\boldsymbol{x})}\left[\log\frac{p(\boldsymbol{z}_T)p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}_1)\prod_{t=2}^{T}p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{z}_{t-1}|\boldsymbol{z}_t)}{q_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{z}_1|\boldsymbol{x})\prod_{t=2}^{T}q_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{z}_{t-1})}\right]$$

当我们研究变分扩散模型的时候，这个优化目标可以进一步分解为可解释的组件。