2D 拡散方程式

武者野　拓也

20120/1/15

2D NS 方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

を無次元化し、非圧縮の条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を課すと次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{5}$$

これを最も簡単にした、次の拡散方程式を計算領域 $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$ で数値的に解くことにする。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \tag{6}$$

x 方向の格子点が N_x 個、y 方向の格子点が N_y 個となるように格子間隔を $\Delta x = L_x/(N_x - 1), \Delta y = L_y/(N_y - 1)$ とした。また、時間ステップ幅 Δt は、次のように設定した。

$$\Delta t = 0.2\min(\Delta x, \Delta y)^2/\kappa \tag{7}$$

これらを用いて、時間微分項には前進差分、区間微分項には中心差分を適用し、拡散方程式を次のように差分化する。

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = \kappa\left(\frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}\right) \tag{8}$$

したがって、時間更新式は次のようになる。

$$f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^n + \Delta t\kappa\left(\frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}\right) \tag{9}$$

これを様々な初期条件、κ や μ の値において次のような初期条件のもと計算した。

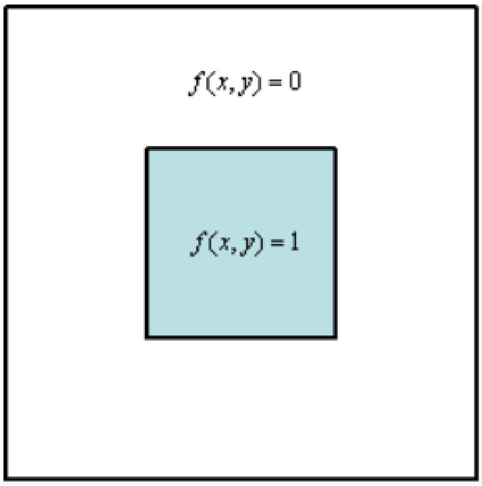

図 1: 境界条件

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{10}$$