Описание лабораторной работы №1

«Оптимальное управление процессом нагрева стержня»

Имеется однородный стержень $0 \le s \le l$, левый конец $s = 0$ которого теплоизолирован, на правом конце $s = l$ происходит теплообмен с внешней средой, и кроме того, в стержне имеются источники (или стоки) тепла. Через $x = x(s,t)$ обозначим температуру стержня в точке s в момент t. Пусть $x(s,0) = \varphi(s)$, $0 \le s \le l$ – распределение температуры в стержне в начальный момент времени $t = 0$. Требуется, управляя температурой внешней среды и плотностью источников тепла в стержне, к заданному моменту $T > 0$ распределение температуры в стержне сделать как можно ближе к заданному распределению $y(s)$, $0 \le s \le l$.

Математическая формулировка: требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^l |x(s,T,u) - y(s)|^2 ds$$

при условии, что $x = x(s,t,u)$ является решением краевой задачи

$x_t = a^2 x_{ss} + f(s,t), \qquad (s,t) \in Q = \{0 < s < l, 0 < t \le T\},$

$x_s|_{s=0} = 0, \qquad 0 < t \le T,$

$x_s|_{s=l} = \nu[p(t) - x(l,t)], \qquad 0 < t \le T,$

$x|_{t=0} = \varphi(s), \qquad 0 \le s \le l,$

где a^2, l, ν, T – заданные положительные величины (определяются студентом самостоятельно); $p(t)$ – температура внешней среды, $f(s,t)$ – плотность источников тепла; предполагается, что $u = (p(t), f(s,t))$ – управление – принадлежит множеству U, состоящему из пар $(p(t), f(s,t))$ таких, что

$p = p(t) \in L_2[0,T], p_{min} \le p(t) \le p_{max}$ п. в. на $[0,T]$;

$f = f(s,t) \in L_2(Q), \iint_Q |f(s,t)|^2 ds dt \le R^2,$

где $p_{min} < p_{max}$, $R > 0$ – заданные числа; $\varphi(s), y(s) \in L_2[0,l]$ (определяются студентом самостоятельно).

Обозначим $H = L_2[0,T] \times L_2(Q)$ – гильбертово пространство пар $u = (p(t), f(s,t))$ со скалярным произведением

$$\langle u_1, u_2 \rangle_H = \int_0^T p_1(t) p_2(t) dt + \iint_Q f_1(s,t) f_2(s,t) ds dt$$

и с нормой $\|u\|_H = (\langle u,u \rangle_H)^{1/2} = \left(\|p\|_{L_2}^2 + \|f\|_{L_2}^2\right)^{1/2}$.

Рассматриваемый функционал дифференцируем в H и его градиент имеет вид

$$J'(u) = (a^2 \nu \psi(l,t,u), \psi(s,t,u)) \in H,$$

причем первая компонента пары является «частной» производной функционала по переменной p, вторая компонента – по переменной f, где $\psi(s,t,u) = \psi(s,t)$ – обобщенное решение следующей вспомогательной краевой задачи:

$\psi_t = -a^2 \psi_{ss}, (s,t) \in Q,$

$\psi_s|_{s=0} = 0, \psi_s|_{s=l} = -\nu \psi(l,t), 0 < t < T,$

$\psi|_{t=T} = 2\big(x(s,T,u) - y(s)\big), 0 \le s \le l.$

Для получения градиента функционала при фиксированном $u \in H$ нужно решить две краевые задачи: сначала из основной краевой задачи надо определить функцию $x(s,t,u)$, затем, подставив получившееся $x(s,T,u)$ во вспомогательную краевую задачу, найти $\psi(s,t,u)$ и, наконец, полученное $\psi(s,t,u)$ подставить в формулу градиента.

Для численного решения задачи могут быть использованы методы проекции градиента и условного градиента (см. вариант индивидуального задания).

а) Метод проекции градиента: $\{u_k = (p_k(t), f_k(s,t))\}$

$$p_{k+1}(t) = \\ = \begin{cases} p_k(t) - \alpha_k a^2 \nu\psi(l,t,u_k) \text{ при } p_{min} \le p_k(t) - \alpha_k a^2 \nu\psi(l,t,u_k) \le p_{max}, \\ p_{min} \text{ при } p_k(t) - \alpha_k a^2 \nu\psi(l,t,u_k) < p_{min}, \\ p_{max} \text{ при } p_k(t) - \alpha_k a^2 \nu\psi(l,t,u_k) > p_{max}; \end{cases}$$

$$f_{k+1}(s,t) = \\ = \begin{cases} f_k(s,t) - \alpha_k \psi(s,t,u_k) \text{ при } I = \iint\limits_Q |f_k(s,t) - \alpha_k\psi(s,t,u_k)|^2 dsdt \le R^2, \\ \dfrac{R\big(f_k(s,t) - \alpha_k\psi(s,t,u_k)\big)}{\left(\iint_Q |f_k(s,t) - \alpha_k\psi(s,t,u_k)|^2 dsdt\right)^{1/2}} \text{ при } I > R^2. \end{cases}$$

Выбор параметра α_k можно проводить с помощью одного из описанных в методе проекции градиента приемов (см. вариант индивидуального задания):

1) α_k выбирается из условия
$$f_k(\alpha_k) = inf_{\alpha \ge 0} f_k(\alpha), \qquad f_k(\alpha) = J\left(P_U\big(u_k - \alpha J'(u_k)\big)\right);$$
2) полагают $\alpha_k = \alpha > 0$, затем проверяют условие монотонности: $J(u_{k+1}) < J(u_k)$, и при необходимости дробят величину α, добиваясь выполнения условия монотонности;
3) если $J(u) \in C^{1,1}(H)$ и константа Липшица L для градиента известна (см. лекцию 6), то величину α_k можно взять любое число, удовлетворяющее условиям
$$0 < \varepsilon_0 \le \alpha_k \le {}^{2}/_{(L + 2\varepsilon)},$$
где ε, ε_0 – положительные числа, являющиеся параметрами метода;
4) возможен выбор α_k из условия
$$J(u_k) - J\left(P_U\big(u_k - \alpha_k J'(u_k)\big)\right) \ge \varepsilon \left\| u_k - P_U\big(u_k - \alpha_k J'(u_k)\big) \right\|^2, \varepsilon > 0$$
(для определения такого α_k можно задать $\alpha_k = \alpha$ и затем дробить α до тех пор, пока не выполнится указанное неравенство);
5) возможно априорное задание величины α_k из условий
$$\alpha_k > 0, k = 0,1, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty.$$

б) <u>Метод условного градиента</u>: $\{u_k = (p_k(t), f_k(s,t))\}$
$$p_{k+1}(t) = p_k(t) + \alpha_k\big(\bar{p}_k(t) - p_k(t)\big), 0 \le t \le T,$$
$$f_{k+1}(s,t) = f_k(s,t) + \alpha_k\left(\bar{f}_k(s,t) - f_k(s,t)\right), (s,t) \in Q,$$
где
$$\bar{p}_k(t) = \begin{cases} p_{min} \text{ при } \psi(l,t,u_k) \ge 0, \\ p_{max} \text{ при } \psi(l,t,u_k) < 0, \end{cases} \bar{f}_k(s,t) = \frac{-R\psi(s,t,u_k)}{\left(\iint_Q |\psi(s,t,u_k)|^2 dsdt\right)^{1/2}},$$
а параметр α_k, $0 \le \alpha_k \le 1$, может быть выбран одним из указанных в методе условного градиента приемов (см. вариант индивидуального задания):

1) α_k выбирается из условия
$$f_k(\alpha_k) = inf_{0 \le \alpha \le 1} f_k(\alpha) = f_{k_*}, f_k(\alpha) = J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)).$$
В тех случаях, когда точное определение величины α_k из этого условия затруднительно, то можно пользоваться условием
$$f_k(\alpha_k) \le f_{k_*} + \delta_k, \delta_k \ge 0, \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty,$$

или

$$f_k(\alpha_k) \leq (1-\lambda_k) f_k(0) + \lambda_k f_{k_*}, 0 < \bar{\lambda} \leq \lambda_k \leq 1,$$

величины δ_k, λ_k здесь характеризуют погрешность выполнения условия 1).

2) Можно задать $\alpha_k = 1$, проверить условие монотонности: $J(u_{k+1}) < J(u_k)$, а затем при необходимости дробить α_k до тех пор, пока не выполнится условие монотонности.
3) Если $J(u) \in C^{1,1}(U)$ и константа Липшица L для $J'(u)$ известна (см. лекцию 6), то возможен выбор α_k из условия
$$\alpha_k = min\{1, \rho_k |\langle J'(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle| \cdot \|\bar{u}_k - u_k\|^{-2}\},$$
где $0 < \varepsilon_0 \leq \rho_k \leq {}^{2}/_{(L+2\varepsilon)}$, ε, ε_0 –параметры метода, $\varepsilon > 0$.
4) Можно принять $\alpha_k = \lambda^{i_0}$, где i_0 – минимальный среди номеров $i \geq 0$, удовлетворяющих условию
$$J(u_k) - J\left(u_k + \lambda^i(\bar{u}_k - u_k)\right) \geq \lambda^i \varepsilon |\langle J'(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle|,$$
где λ, ε – параметры метода, $0 < \lambda; \varepsilon < 1$.
5) Возможно априорное задание величины α_k из условий
$$0 \leq \alpha_k \leq 1, k = 0,1, \ldots, \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty.$$

Последовательность $\{u_k\}$, построенная методом проекции градиента или методом условного градиента, является минимизирующей для рассматриваемой задачи и слабо в H сходится к U_*.

При численной реализации пользоваться разностными аналогами этих методов: встречающиеся интегралы вычисляются с помощью формул численного интегрирования (например, формулы прямоугольников или трапеций), а при решении краевых задач пользоваться неявной разностной схемой в сочетании с прогонкой.

Возможные критерии окончания: $\|u_k - u_{k+1}\| < \varepsilon$, $|J(u_k) - J(u_{k+1})| < \delta$, $\|J'(u_k)\| \leq \gamma$.

Реализовать оптимальное управление в задаче по функции, указанной в варианте индивидуального задания, соответствующим методом минимизации с различными способами выбора шага спуска. Сравнить способы выбора шага спуска по числу итераций с различными вариантами входных данных. Объяснить полученные результаты.

Варианты индивидуальных заданий:

№	Метод минимизации	Управление	Номер способа выбора шага спуска	
1	проекция градиента	$p(t)$	1	2
2	условный градиент	$f(s,t)$	2	3
3	проекция градиента	$f(s,t)$	3	4
4	условный градиент	$p(t)$	4	5
5	проекция градиента	$p(t)$	2	3
6	условный градиент	$f(s,t)$	1	2
7	проекция градиента	$f(s,t)$	4	5
8	условный градиент	$p(t)$	3	4
9	проекция градиента	$p(t)$	1	5
10	условный градиент	$f(s,t)$	2	4