Algorithmes et Pensée Computationnelle

Probabilistic Algorithms

Le but de cette séance est de comprendre les algorithmes probabilistes. Ceux-ci permettent de résoudre des problèmes complexes de en relativement peu de temps. La contrepartie est que le résultat obtenu est généralement une solution approximée du problème initial. Ils demeurent néanmoins très utile pour beaucoup d'application.

1 Monte-Carlo

Question 1: (*10 minutes*) **Un jeu de hasard : Python**
Supposez que vous lanciez une pièce de monnaie l fois et que vous voulez calculez la probabilité d'avoir un certains nombre de pile. Vous devez programmer un algorithme probabiliste, permettant de calculer cette probabilité. Pour ce faire, vous devez compléter la fonction *proba(n,l,iter)* contenue dans le fichier Piece.py. La fonction *Piece(l)* permet de créer une liste contenant des 0 et des 1 aléatoirement avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Considérez un chiffre 1 comme une réussite (pile) et 0 comme un échec (face).

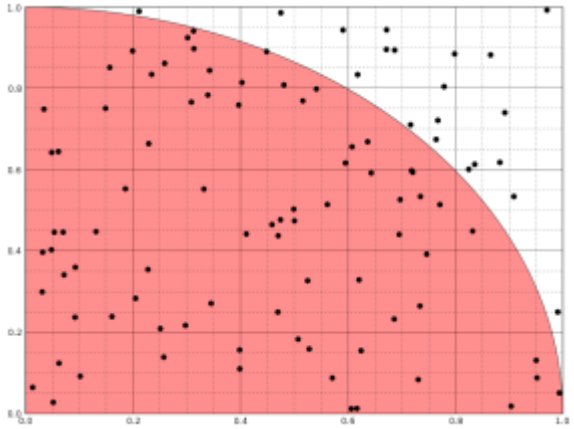
Conseil

Pour estimez empiriquement la probabilité d'un événement, comptez le nombre de fois que l'événement en question se produit en effectuant un nombre d'essai. Puis divisez le nombre d'occurence de l'événement par le nombre total d'essai. Par exemple, si vous vous voulez estimer la probabilité d'obtenir un 2 avec un dé. Lancez le dé 1000 fois, comptez le nombre de fois que vous obtenez 2, et divisez le résultat par 1000.

Solution

```
1
2   import numpy as np
3
4   #La fonction Piece retourn une liste contenant des 0 et des 1, considérez un 1 comme un succès, i.e. une fois ou la
        pièce tombe sur pile, et 0 comme un échec
5   def Piece(l):
6       return np.random.randint(0,2,l)
7
8
9
10  def proba(n,l,iter):
11      #Codez , n correspond au nombre de succès et l au nombre d'essaie. Iter correspond au nombre d'expérience
            que vous allez réaliser pour obtenir la réponse. Cela devrait être grand mais pas trop (sinon le programme
            prendra trop de temp.)
12      #10000 est un bon nombre d'itération.
13      proba = 0
14      for i in range(iter):
15          temp = Piece(l)#On simule une expérience de l lancé.
16          count = temp.sum()#On compte le nombre de fois que l'on obtient pile
17          if count == n:#Si le nombre de pile obtenue correspond à la probabilité que l'on veut estimer
18              proba +=1#On ajoute 1 à notre estimateur de probabilité
19
20
21
22      return proba/iter#Divise notre estimateur de probabilité par le nombre total d'expérience réalisée.
23
24
25  n = 5
26  l = 10
27  print("La probabilité d'avoir {} pile en  {} lancés de pièce est approximativement égale à
        {}".format(n,l,proba(n,l,10000)))
```

Question 2: (*20 minutes*) **Une approximation de π : Python**
L'objectif de cet exercice est programmer un algorithme probabiliste permettant d'approximer le chiffre π. Immaginez un plan en sur lequel $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$. Sur ce dernier, nous allons dessiner un quart de cercle centré en (0,0) et avec un rayon de 1. Par conséquent, un point dans cette espace se trouve à l'intérieur du cercle si $x^2 + y^2 < 1$. Vous trouverez ci-dessous un schéma de la situation :



La première étape de cette exercice consiste a créer une fonction permettant de déterminer si un point est à l'intérieur (zone rouge) ou a l'extérieur du cercle. Puis, générez 10000 points dans cette espace (x et y devrait appartenir à [0,1]). Pour ce faire, vous pouvez utliser la fonction *random.random()* après avoir importé le module **random**. Vous pouvez obtenir l'approximation de π à partir de la formule suivante : $\pi \approx [\frac{\text{Nombre de point dans le cercle}}{\text{Nombre de point total}}] \cdot 4$. Votre réponse devrait être assez proche du vrai chiffre π.

Conseil

La fonction random.random() génère aléatoirement un chiffre compris entre 0 et 1. Etant donné que vous devez simulez des points en 2 dimension, vous devrez utiliser 2 fois cette fonction.

Solution

```
1  import random
2
3  def inside(point):#Point définit sous la forme d'un tuple
4
5      if (point[0]**2+point[1]**2) < 1:
6          return 1
7
8      else:
9          return 0
10
11 def app():
12     count = 0 #On initialise le nombre de point dans le cercle
13     for i in range(10000):
14         temp1 = random.random()#Génére la première coordonnée
15         temp2 = random.random()#Génère la dexuième coordonnée
16         temp = [temp1,temp2]#Crée le point
17
18         count += inside(temp)#On appelle la fonction. Si le point est dans le cercle, elle retourn 1, par conséquent on
             ajoute 1 au compteur. Sinon elle retourne 0, on ajoute donc rien.
19
20     return count/10000*4#Retourn selon la formule.
21
22 print("L'approximation du chiffre pi est : {}".format(app()))
```

Question 3: (*15 minutes*) **Un exemple simple de la chaîne de Markov**
Les slides nous ont donné un exemple de la chaîne de Markov, mais on peut aussi formaliser le concept avec les notations suivantes.

Un processus est une chaîne de Markov si

$$P\Big(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\Big) = P\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right). \tag{1}$$

Le nombre $P\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right)$ est appelé *probabilité de transition* de l'état i à l'état j (en un pas), et on écrit :

$$p_{ij} = P\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right) \tag{2}$$

La matrice $\mathbf{P}$ dont l'élément à l'indice (i, j) est p_{ij} est appelée *matrice de transition*. Si les chaînes sont homogènes, $\mathbf{P}$ a deux propriétés importantes : i, $p_{ij} \geq 0$ et ii, $\sum_i p_{ij} = 1$.
Soit $\mu_n = (\mu_n(1), ..., \mu_n(N))$ un vecteur-ligne, avec $\mu_n(i) = P(X_n = i)$. Soit μ_0 la loi initiale (la loi de X_0). En général, on a qu'à connaître μ_0 et $\mathbf{P}$ pour simuler une chaîne de Markov.
Les probabilités marginales sont :

$$\mu_n = \mu_0 \mathbf{P}^n$$

Et on a ci-dessous un résumé de la terminologie :

1. Matrice de transition $\mathbf{P}(i, j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$.
2. Matrice de transition en n pas : $\mathbf{P}_n(i, j) = P(X_{n+m} = j | X_m = j)$.
3. $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}^n$.
4. Probabilité marginale : $\mu_n(i) = P(X_n = i)$.
5. $\mu_n = \mu_0 \mathbf{P}^n$

Etant donné que $X_0, X_1, ...$ est une chaîne de Markov avec 3 états $\{0, 1, 2\}$ et la matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Supposons que $\mu_0 = (0.3,\ 0.4,\ 0.3)$. Trouvez $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2)$ et $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1)$.

Conseil

Cet exercice vous demande de trouver deux probabilités **jointes**. Peut-être vous rappelez-vous qu'en général,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y | X = x).$$

Pouvez-vous le reformuler avec 3 variables (notez bien que $X_0, X_1, ...$ est une chaîne de Markov) et utiliser les définitions ci-dessus pour trouver la réponse ?

Solution

$$P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2) = P(X_0 = 0) \times p_{01} \times p_{12} = 0.3 \times 0.1 \times 0.7 = 0.021 \tag{3}$$
$$P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_0 = 0) \times p_{01} \times p_{11} = 0.3 \times 0.1 \times 0.1 = 0.003 \tag{4}$$

Question 4: (*7 minutes*) **Probabilités marginales**
En utilisant la loi initiale μ_0 et la matrice $\mathbf{P}$ de Question 3, trouvez μ_1, μ_2 et μ_3.

Conseil

Relisez et familiarisez-vous avec les notations et la terminologie ci-dessus !

Solution

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0.42 & 0.34 & 0.24 \end{pmatrix} \quad (5)$$
$$\mu_2 = \begin{pmatrix} 0.37 & 0.31 & 0.32 \end{pmatrix} \quad (6)$$
$$\mu_3 = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.36 & 0.29 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Question 5: (*20 minutes*) **Simuler une chaîne de Markov**
Comme déjà mentionné plus haut, la simulation d'une chaîne de Markov $(X_0, X_1, ...)$ exige seulement deux éléments : la loi initiale μ_0 et la matrice de transition $\mathbf{P}$. Spécifiquement, l'algorithme est :

1. Supposer que $X_0 \sim \mu_0$. Donc, $P(X_0 = i) = \mu_0(i)$.
2. Le résultat de l'étape 1 est donc i ; obtenir $X_1 \sim \mathbf{P}$ i.e $P(X_1 = j|X_0 = i) = p_{ij}$.
3. Le résultat de l'étape 2 est j ; obtenir $X_2 \sim \mathbf{P}$ i.e $P(X_2 = k|X_1 = j) = p_{jk}$.
4. Répéter jusqu'à la fin (nombre d'iterations est arbitraire).

Ecrivez une fonction simple afin d'implémenter l'algorithme ci-dessus. Nommez-la **sim_markov()**, celle-ci prend comme parametres **P**, **mu_0** et **n_iters**.

```
def sim_markov(mu_0, P, n_iters=500):
    # mu_0 (n,1) # probabilités initiales – n états
    # P (n, n) # matrice de transition

    states = range(len(mu_0)) # e.g si la longueur de mu_0 est 2, on aura 2 états 0, 1
    ...


P = [[0.1, 0.9],
     [0.7, 0.3]]
mu_0 = [0.3, 0.7]
print(sim_markov(mu_0, P))
```

Conseil

La méthode **random.choices()** s'avéra utile !

Solution

```
import random

def sim_markov(mu_0, P, n_iters=500):
    # mu_0 (n,1) # probabilités initiales – n états
    # P (n, n) # matrice de transition

    states = range(len(mu_0)) # e.g si la longueur de mu_0 est 2, on aura 2 états 0, 1
    X0 = random.choices(states, mu_0)[0]

    future_states = []
    future_states.append(X0)
    for i in range(n_iters):
        next_state = random.choices(states, P[future_states[i]])[0]
        future_states.append(next_state)

    return future_states

P = [[0.1, 0.9],
     [0.7, 0.3]]

mu_0 = [0.3, 0.7]

print(sim_mc(mu_0, P))
```

Question 6: (🕓 *20 minutes*) **Insertion dans une Treap** Une Treap est un arbre binaire où chaque sommet v a 2 valeurs, une clé **v.key** et une priorité **v.priority**. Une treap estimer un arbre de recherche binaire en ce qui concerne les valeurs clés et une heap en ce qui concerne les valeurs prioritaires.

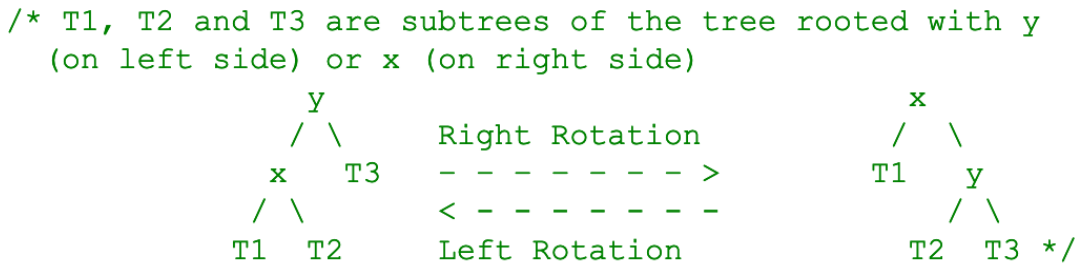
Dans cet exercice, vous allez implémenter une fonction pour insérer un noeud dans une treap. Vous avez le squellette de code suivant à remplir.

```
from random import randrange

# Un noeud de la treap
class TreapNode:
    def __init__(self, data, priority=100, left=None, right=None):
        self.data = data
        self.priority = randrange(priority)
        self.left = left
        self.right = right

# Fonction pour faire une rotation à gauche
def rotateLeft(root):

    R = root.right
    X = root.right.left

    # rotate
    R.left = root
    root.right = X

    # set root
    return R


# Fonction pour faire une rotation à droite
def rotateRight(root):

    L = root.left
    Y = root.left.right

    # rotation
    L.right = root
    root.left = Y

    # retourne la nouvelle racine
    return L


# Fonction récursive pour insérer une clé avec une priorité dans une Treap
def insertNode(root, data):
  # TODO
    return root


# Affiche les noeuds de la treap
def printTreap(root, space):
    height = 10

    if root is None:
        return

    space += height
    printTreap(root.right, space)

    for i in range(height, space):
        print(' ', end='')

    print((root.data, root.priority))
    printTreap(root.left, space)


if __name__ == '__main__':
    # Clés de la treap
    keys = [5, 2, 1, 4, 9, 8, 10]

    # Construction de la treap
```

```
67      root = None
68      for key in keys:
69          root = insertNode(root, key)
70
71      printTreap(root, 0)
```

Conseil

La fonction **insertNode** est récursive. Inspirez-vous de l'insertion dans un arbre de recherche binaire, mais n'oubliez de vérifier que la propriété de la heap est satisfaite après avoir insérer.
La propriété de la heap à satisfaire est que la priorité de la racine doit toujours être plus grande que celle de ses noeuds enfants. **rotateLeft** et **rotateRight** permettent de réarranger les noeuds de façon à ce que la propriété de la heap soit satisfaite. Vous pouvez vous référer à l'illustration ci-dessous pour avoir une idée de comment fonctionne les rotations.



Solution

```
1   from random import randrange
2
3   # Un noeud de la treap
4   class TreapNode:
5       def __init__(self, data, priority=100, left=None, right=None):
6           self.data = data
7           self.priority = randrange(priority)
8           self.left = left
9           self.right = right
10
11  # Fonction pour faire une rotation à gauche
12  def rotateLeft(root):
13
14      R = root.right
15      X = root.right.left
16
17      # rotate
18      R.left = root
19      root.right = X
20
21      # set root
22      return R
23
24
25  # Fonction pour faire une rotation à droite
26  def rotateRight(root):
27
28      L = root.left
29      Y = root.left.right
30
31      # rotation
32      L.right = root
33      root.left = Y
34
35      # retourne la nouvelle racine
36      return L
```

Solution

```python
# Fonction récursive pour insérer une clé avec une priorité dans une Treap
def insertNode(root, data):

    if root is None:
        return TreapNode(data)

  # si data est inférieure à celle la racine root, insérer dans le sous-abre gauche
  # sinon insérer dans le sous-arbre droit
    if data < root.data:
        root.left = insertNode(root.left, data)

        # faire une rotation à droite si la propriété de la heap est violée
        if root.left and root.left.priority > root.priority:
            root = rotateRight(root)
    else:
        root.right = insertNode(root.right, data)

        # faire une rotation à gauche si la propriété de la heap est violée
        if root.right and root.right.priority > root.priority:
            root = rotateLeft(root)

    return root


# Affiche les noeuds de la treap
def printTreap(root, space):
    height = 10

    if root is None:
        return

    space += height
    printTreap(root.right, space)

    for i in range(height, space):
        print(' ', end='')

    print((root.data, root.priority))
    printTreap(root.left, space)


if __name__ == '__main__':
    # Clés de la treap
    keys = [5, 2, 1, 4, 9, 8, 10]

    # Construction de la treap
    root = None
    for key in keys:
        root = insertNode(root, key)

    printTreap(root, 0)
```