

Algorithmes et Pensée Computationnelle

Algorithmes de tri et Complexité

Le but de cette série d'exercices est d'aborder les notions présentées durant la séance de cours. Cette série d'exercices sera orientée autour des points suivants :

1. la complexité des algorithmes,
2. la récursivité et
3. les algorithmes de tri

Les langages de programmation qui seront utilisés pour cette série d'exercices sont Java et Python.

1 Complexité (30 minutes)

Pour chacun des programmes ci-dessous, donnés à chaque fois en Python et Java, indiquez en une phrase, ce que font ces algorithmes et calculez leur complexité temporelle avec la notation $O()$. Le code est écrit en Python et en Java.

Question 1: (🕒 10 minutes) Complexité

Quelle est la complexité du programme ci-dessous ?

Python :

```
1 # Entrée: n un nombre entier
2 def algo1(n):
3     s = 0
4     for i in range(10*n):
5         s += i
6     return s
7
```

Java :

```
1 public static int algo1(int n) {
2     int s = 0;
3     for (int i=0; i < 10*n; i++){
4         s += i;
5     }
6     return s;
7 }
8
```

1. $O(n)$
2. $O(n^3)$
3. $O(\log(n))$
4. $O(n^n)$

💡 Conseil

Rappelez vous que la notation $O()$ sert à exprimer la complexité d'algorithmes dans le **pire des cas**. Les règles suivantes vous seront utiles. Pour n étant la taille de vos données, on a que :

1. Les constantes sont ignorées : $O(2n) = 2 * O(n) = O(n)$
2. Les termes dominés sont ignorés : $O(2n^2 + 5n + 50) = O(n^2)$

>_ Solution

L'algorithme est composé d'une boucle qui incrémente une variable s . Il effectue $10*n$ l'opération et par conséquent a une complexité de $O(n)$.

Question 2: (🕒 10 minutes) Complexité

Quelle est la complexité du programme ci-dessous ?

Python :

```

1  # Entrée: L est une liste de nombres entiers et M un nombre entier
2  def algo2(L, M):
3      i = 0
4      while i < len(L) and L[i] <= M:
5          i += 1
6      s = i - 1
7      return s
8

```

Java :

```

1  public static int algo2(int[] L, int M) {
2      int i = 0;
3      while (i < L.length && L[i] <= M){
4          i += 1;
5      }
6      int s = i - 1;
7      return s;
8  }
9

```

1. $O(n^3)$
2. $O(\log(n))$
3. $O(n)$
4. $O(n^n)$

>_ Solution

L'algorithme est composé d'une boucle **while** qui va parcourir une liste **L** jusqu'à trouver une valeur qui est supérieure à **M**. Ainsi, dans le pire des cas, l'algorithme parcourt toute la liste, et a donc une complexité de $O(n)$, n étant la taille de la liste.

Question 3: (🕒 10 minutes) Complexité

Quelle est la complexité du programme ci-dessous ?

Python :

```

1  #Entrée: L et M sont 2 listes de nombre entiers
2  def algo3(L, M):
3      n = len(L)
4      m = len(M)
5      for i in range(n):
6          L[i] = L[i]*2
7      for j in range(m):
8          M[j] = M[j]%2
9

```

Java :

```

1  public static void algo3(int[] L, int[] M) {
2      int n = L.length;
3      int m = M.length;
4      for (int i=0; i < n; i++){
5          L[i] = L[i]*2;
6      }
7      for (int j=0; j < m; j++){
8          M[j] = M[j]%2;
9      }
10 }
11

```

1. $O(n^2)$
2. $O(n + m)$
3. $O(n)$

4. $O(2^n)$

>_ Solution

L'algorithme est composé de 2 boucles. La première parcourt une liste **L** et multiplie par 2 les éléments de la liste. L'autre parcourt une liste **M** et assigne à chaque élément le reste de la division euclidienne de l'élément par 2. Soient n et m les tailles respectives de **L** et de **M**, on obtient une complexité de $O(n + m)$. Ainsi, l'élément ayant la plus grande complexité sera utilisé pour déterminer la complexité de l'algorithme dans son ensemble.

Question 4: (🕒 10 minutes) Complexité

Quelle est la complexité du programme ci-dessous ?

Python :

```
1  #Entrée: L est une liste de nombre entiers
2  def algo4(L):
3      n = len(L)
4      i = 0
5      s = 0
6      while i < math.log(n):
7          s += L[i]
8          i += 1
9      return s
10
```

Java :

```
1  import java.lang.Math;
2
3  public static void algo4(int[] L) {
4      int n = L.length;
5      int s = 0;
6      for (int i=0; i < Math.log(n); i++){
7          s += L[i];
8      }
9  }
```

1. $O(n^2)$
2. $O(n)$
3. $O(\log(n))$
4. $O(n^n)$

>_ Solution

L'algorithme est composé d'une boucle qui va itérer sur $\log(n)$ éléments et va calculer la somme de ces éléments. Ainsi, l'algorithme a une complexité de $O(\log n)$. Le temps d'exécution de ce programme peut être visualisé sur la courbe jaune du graphe ci-dessous (1).

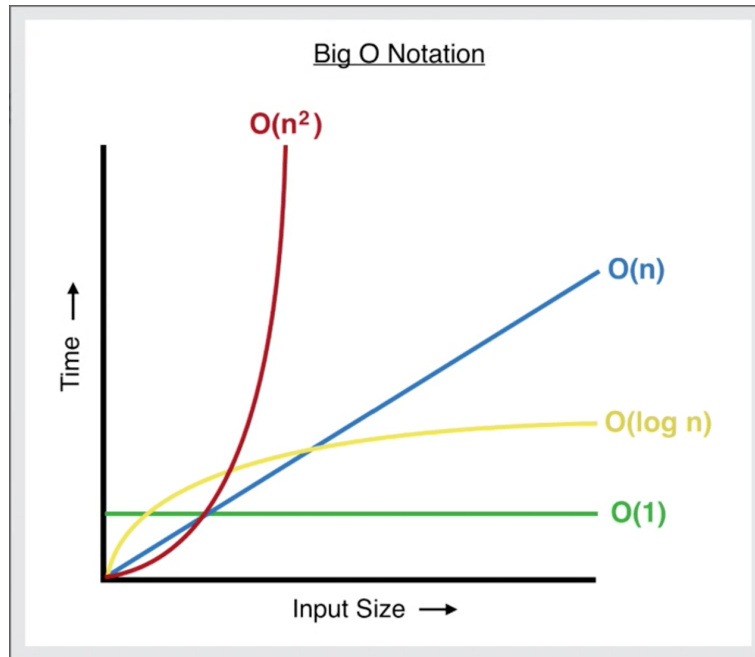


FIGURE 1 – Représentation de complexités temporelles

Question 5: (🕒 10 minutes) Complexité Optionnel

Quelle est la complexité du programme ci-dessous ?

Python :

```

1  # Entrée: n un nombre entier
2  def algo5(n):
3      m = 0
4      for i in range(n):
5          for j in range(i):
6              m += i+j
7      return m
8  
```

Java :

```

1  public static int algo5(int n) {
2      int m = 0;
3      for (int i=0; i < n; i++){
4          for (int j=0; j < i; j++){
5              m += i+j;
6          }
7      }
8      return m;
9  }
10 
```

1. $O(n^2)$
2. $O(n)$
3. $O(\log(n))$
4. $O(2^n)$

>_ Solution

L'algorithme est composé de 2 boucles **imbriquées** suivant une suite définie par $\frac{n(n-1)}{2}$. L'algorithme va additionner les index i et j à chaque itération et les rajouter à m . Cela veut dire que nous parcourons la liste un maximum de $n \times n$ fois, n étant la taille de la liste. La complexité de l'algorithme est ainsi de $O(n^2)$.

2 Récursivité (15 minutes)

Le but principal de la récursivité est de résoudre un gros problème en le divisant en plusieurs petites parties à résoudre.

Question 6: (🕒 5 minutes) Somme des chiffres

Écrivez un algorithme récursif en Python ou en Java qui prend un nombre et retourne la somme des chiffres dont il est composé. Par exemple, la somme des chiffres de 126 est : $1+2+6 = 9$.

💡 Conseil

Pour obtenir les chiffres qui composent un nombre, utilisez l'opérateur % (modulo - [https://fr.wikipedia.org/wiki/Modulo_\(op%C3%A9ration\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Modulo_(op%C3%A9ration))).

Pour obtenir le nombre 12 à partir du nombre 126, il vous suffit de faire la division entière par 10. En Python, on utilise l'opérateur `//` : `126 // 10 = 12`. En Java, la division entre deux variables de type `int` est entière, et vous n'aurez ainsi qu'à utiliser l'opérateur de division normal `\` : `126 \ 10 = 12`

>_ Solution

Python :

```
1 def sum_digits(number):
2     if number == 0:
3         return 0
4     else:
5         return (number % 10) + sum_digits(number // 10)
6
7 print(sum_digits(126))
```

Java :

```
1 public class question6 {
2     public static int sum_digits(int number) {
3         if(number == 0){
4             return 0;
5         } else{
6             return (number%10) + sum_digits(number/10);
7         }
8     }
9
10    public static void main(String[] args){
11        System.out.println(sum_digits(126));
12    }
13 }
```

Question 7: (🕒 10 minutes) Fibonacci

La suite de Fibonacci est définie récursivement par les propriétés suivantes :

- si n est égal à 0 ou 1 : $\text{fibonacci}(0) = \text{fibonacci}(1) = 1$
- si n est supérieur ou égal à 2, alors : $\text{fibonacci}(n) = \text{fibonacci}(n - 1) + \text{fibonacci}(n - 2)$

Voici son implémentation en Java :

```
9     public static int fibonacci(int n) {
10         if(n == 0 | n == 1){
11             return n;
12         } else{
13             return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2);
14         }
15     }
```

Quel est la complexité de l'algorithme ci-dessus ?

💡 Conseil

Aidez-vous d'un exemple (`fibonacci(3)`, `fibonacci(4)`,...)

Pour formaliser la formule de complexité, on peut poser que $T(n)$ énumère le nombre d'opérations requises pour calculer `fibonacci(n)`. Ainsi, $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + c$, c étant une constante. Vous pouvez alors énumérer le nombre d'opérations pour `fibonacci(3)`, `fibonacci(4)`... et essayer de trouver la complexité en terme de $O()$.

1. $O(n^2)$
2. $O(n)$
3. $O(\log(n))$
4. $O(2^n)$

>_ Solution

La complexité de cet algorithme est $O(2^n)$.

3 Algorithmes de Tri (60 minutes)

Question 8: (🕒 20 minutes) Tri à bulles (Bubble Sort)

Le tri à bulles consiste à parcourir une liste et à comparer ses éléments. Le tri est effectué en permutant les éléments de telle sorte que les éléments les plus grands soient placés à la fin de la liste.

Concrètement, si un premier nombre x est plus grand qu'un deuxième nombre y et que l'on souhaite trier l'ensemble par ordre croissant, alors x et y sont mal placés et il faut les inverser. Si, au contraire, x est plus petit que y , alors on ne fait rien et l'on compare y à z , l'élément suivant.

Soit la liste `l=[1, 2, 4, 3, 1]`, triez les éléments de la liste en utilisant un tri à bulles. Combien d'itérations effectuez-vous ?

— Python :

```
1 def tri_bulle(l):
2     for i in range(len(l)):
3         #TODO: Code à compléter
4
5 if __name__ == "__main__":
6     l = [1, 2, 4, 3, 1]
7     tri_bulle(l)
8     print(liste_triee)
```

— Java :

```
1 public class question8 {
2     public static void tri_bulle(int[] l) {
3         for (int i = 0; i < l.length - 1; i++){
4             //TODO: Code à compléter
5         }
6     }
7
8     public static void printArray(int l[]){
9         int n = l.length;
10        for (int i = 0; i < n; ++i)
11            System.out.print(l[i] + " ");
12
13        System.out.println();
14    }
15
16
17    public static void main(String[] args){
18        int[] l = {1, 2, 4, 3, 1};
19        tri_bulle(l);
20        printArray(l);
21    }
22 }
```

```
21 }
22 }
```

Conseil

En Java, utilisez une variable temporaire que vous nommerez **temp** afin de faire l'échange de valeur entre deux éléments de la liste.

>_ Solution

Python :

```
1 def tri_bulle(l):
2     n = len(l)
3
4     for i in range(n):
5         # Les i derniers éléments sont dans leur bonne position
6         for j in range(0, n-i-1):
7
8             # parcourir la liste de 0 à n-i-1
9             # Echanger si l'élément trouvé est supérieur
10            # au prochain élément
11            if l[j] > l[j+1]:
12                l[j], l[j+1] = l[j+1], l[j]
13
14 if __name__ == "__main__":
15     l = [1, 2, 4, 3, 1]
16     tri_bulle(l)
17     print(l)
```

Java :

```
1 public class question8 {
2     public static void tri_bulle(int[] l) {
3         int n = l.length;
4         for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
5             for (int j = 0; j < n-i-1; j++) {
6                 if (l[j] > l[j+1]) {
7                     // échange l[j+1] et l[i]
8                     int temp = l[j];
9                     l[j] = l[j+1];
10                    l[j+1] = temp;
11                }
12            }
13        }
14
15        public static void printArray(int l[]){
16            int n = l.length;
17            for (int i = 0; i < n; ++i)
18                System.out.print(l[i] + " ");
19
20            System.out.println();
21        }
22
23
24        public static void main(String[] args){
25            int[] l = {1, 2, 4, 3, 1};
26            tri_bulle(l);
27            printArray(l);
28        }
29    }
```

L'algorithme a une complexité de $O(n^2)$ car il contient deux boucles qui parcourent la liste.

Soit un nombre entier n , et une liste triée l . Ecrivez un programme Python qui insère la valeur n dans la liste l tout en s'assurant que la liste l reste triée.

```
1 def insertion_entier(liste, number):
2     # TODO : Compléter ici
3
4     print(insertion_entier([2, 4, 6], 1))
```

>_ Exemple

En passant les arguments suivants à votre programme : $n=5$ et $l=[2,4,6]$. Ce dernier devra retourner $l=[2,4,5,6]$

>_ Solution

```
1 def insertion_entier(liste, number):
2     # ajoute un élément à la liste
3     liste.append(number)
4     n = len(liste) - 1
5     while n > 0 and liste[n - 1] > number:
6         liste[n] = liste[n - 1]
7         n -= 1
8     liste[n] = number
9     return liste
10
11 print(insertion_entier([2, 4, 6], 1))
```

Question 10: (🕒 20 minutes) Tri par insertion - 2 (Insertion Sort)

Dans l'algorithme de tri par insertion, on parcourt le tableau à trier du début à la fin. Au moment où on considère le i -ème élément, les éléments qui le précèdent sont déjà triés. Pour faire l'analogie avec l'exemple du jeu de cartes, lorsqu'on est à la i -ème étape du parcours, le i -ème élément est la carte saisie, les éléments précédents sont la main triée et les éléments suivants correspondent aux cartes encore en désordre sur la table.

L'objectif d'une étape est d'insérer le i -ème élément à sa place parmi ceux qui le précède. Il faut pour cela trouver où l'élément doit être inséré en le comparant aux autres, puis décaler les éléments afin de pouvoir effectuer l'insertion. En pratique, ces deux actions sont fréquemment effectuées en une passe, qui consiste à faire "remonter" l'élément au fur et à mesure jusqu'à rencontrer un élément plus petit.

Compléter le code suivant pour trier la liste l définie ci-dessous en utilisant un tri par insertion. Combien d'itérations effectuez-vous ?

— Python :

```
1 def tri_insertion(l):
2     for i in range(1, len(l)):
3         #TODO: Code à compléter
4
5     if __name__ == "__main__":
6         l = [2, 43, 1, 3, 43]
7         tri_insertion(l)
8         print(l)
```

— Java :

```
1 public class question10 {
2     public static void tri_insertion(int[] l) {
3         for (int i = 1; i < l.length; i++){
4             //TODO: Code à compléter
5         }
6     }
7
8     public static void printArray(int l[]){
9         int n = l.length;
10        for (int i = 0; i < n; ++i)
11            System.out.print(l[i] + " ");
12        System.out.println();
13    }
14 }
```



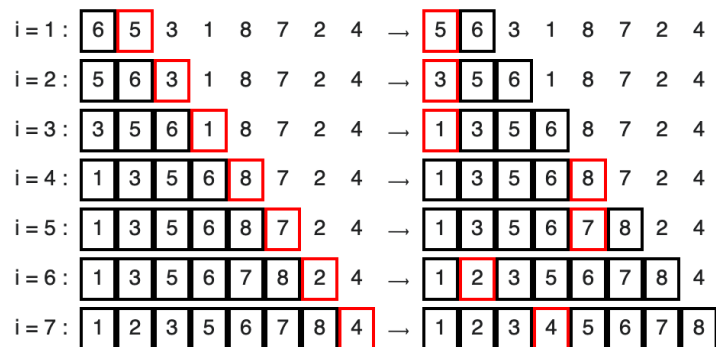
```

13     }
14
15
16     public static void main(String[] args){
17         int[] l = {2, 43, 1, 3, 43};
18         tri.insertion(l);
19         printArray(l);
20     }
21 }

```

💡 Conseil

Référez vous à la figure du dessous pour un exemple de tri par insertion.
Référez vous aussi aux diapositives 18 à 72 du cours.



>_ Solution

Python :

```
1 def tri_insertion(l):
2     for i in range(1, len(l)):
3         key = l[i]
4         j = i - 1
5
6         while j >= 0 and key < l[j]:
7             l[j + 1] = l[j]
8             j -= 1
9         l[j + 1] = key
10
11
12 if __name__ == "__main__":
13     l = [2, 43, 1, 3, 43]
14     tri_insertion(l)
15     print(l)
```

Java :

```
1 public class question10 {
2     public static void tri_insertion(int[] l) {
3         for (int i = 1; i < l.length; i++){
4             int key = l[i];
5             int j = i - 1;
6
7             while (j >= 0 && l[j] > key) {
8                 l[j + 1] = l[j];
9                 j = j - 1;
10            }
11            l[j + 1] = key;
12        }
13    }
14
15    public static void printArray(int l[]){
16        int n = l.length;
17        for (int i = 0; i < n; ++i)
18            System.out.print(l[i] + " ");
19    }
20
21    public static void main(String[] args){
22        int[] l = {2, 43, 1, 3, 43};
23        tri_insertion(l);
24        printArray(l);
25    }
26 }
```

La complexité de l'algorithme est de $O(n^2)$ car nous utilisons 2 boucles imbriquées, qui dans le pire des cas, parcourent la liste deux fois.

Question 11: (🕒 30 minutes) Tri fusion (Merge Sort)

À partir de deux listes triées, on peut facilement construire une liste triée comportant les éléments issus de ces deux listes (leur *fusion*). Le principe de l'algorithme de tri fusion repose sur cette observation : le plus petit élément de la liste à construire est soit le plus petit élément de la première liste, soit le plus petit élément de la deuxième liste. Ainsi, on peut construire la liste élément par élément en retirant tantôt le premier élément de la première liste, tantôt le premier élément de la deuxième liste (en fait, le plus petit des deux, à supposer qu'aucune des deux listes ne soit vide, sinon la réponse est immédiate).

Les étapes à suivre pour implémenter l'algorithme sont les suivantes :

1. Si le tableau n'a qu'un élément, il est déjà trié.
2. Sinon, séparer le tableau en deux parties plus ou moins égales.
3. Trier récursivement les deux parties avec l'algorithme de tri fusion.
4. Fusionner les deux tableaux triés en un seul tableau trié.

Soit la liste *l* suivante [38, 27, 43, 3, 9, 82, 10], trie les éléments de la liste en utilisant un tri fusion. Combien d'itération effectuez-vous ?

— Python :

```

1 def merge(partie_gauche, partie_droite):
2     # TODO: Code à compléter
3
4 def tri_fusion(l):
5     # TODO: Code à compléter
6
7 if __name__ == "__main__":
8     l = [38, 27, 43, 3, 9, 82, 10]
9     print(tri_fusion(l))

```

— Java :

```

1 public class question11 {
2     // Fusionne 2 sous-listes de arr[].
3     // Première sous-liste est arr[l..m]
4     // Deuxième sous-liste est arr[m+1..r]
5     public static void merge(int arr[], int l, int m, int r) {
6         // TODO: Code à compléter
7     }
8
9     // Fonction principale qui trie arr[l..r] en utilisant
10    // merge()
11    public static void tri_fusion(int arr[], int l, int r){
12        // TODO: Code à compléter
13    }
14
15    public static void printArray(int l[]){
16        int n = l.length;
17        for (int i = 0; i < n; ++i)
18            System.out.print(l[i] + " ");
19
20        System.out.println();
21    }
22
23
24    public static void main(String[] args){
25        int[] l = {38, 27, 43, 3, 9, 82, 10};
26        tri_fusion(l, 0, l.length - 1);
27        printArray(l);
28    }
29 }

```

Conseil

- L'algorithme est récursif.
- Revenez à la visualisation de l'algorithme dans les diapositives 83 à 111 pour comprendre comment marche concrètement le tri fusion.

>_ Solution

Python :

```
1 def merge(partie_gauche, partie_droite):
2     # créer la liste qui sera retournée à la fin
3     liste_fusionnee = []
4
5     # définir un compteur pour l'index de la liste de gauche
6     compteur_gauche = 0
7     # pareil pour la liste de droite
8     compteur_droite = 0
9
10    longueur_gauche = len(partie_gauche)
11    longueur_droite = len(partie_droite)
12
13    # continuer jusqu'à ce que l'un des index (ou les deux) atteigne l'une des longueurs (ou les deux)
14    while compteur_gauche < longueur_gauche and compteur_droite < longueur_droite:
15        # comparer les éléments actuels, ajouter le plus petit à la liste fusionnée
16        # et augmenter le compteur de cette liste
17        if partie_gauche[compteur_gauche] < partie_droite[compteur_droite]:
18            liste_fusionnee.append(partie_gauche[compteur_gauche])
19            compteur_gauche += 1
20        else:
21            liste_fusionnee.append(partie_droite[compteur_droite])
22            compteur_droite += 1
23
24    # s'il y a encore des éléments dans les listes, il faut les ajouter à la liste fusionnée
25    liste_fusionnee += partie_gauche[compteur_gauche:longueur_gauche]
26    liste_fusionnee += partie_droite[compteur_droite:longueur_droite]
27
28    return liste_fusionnee # retourner la liste fusionnée
29
30
31 def tri_fusion(l):
32     # compléter la fonction
33     longueur = len(l) # calculer la longueur de la liste
34     # s'il n'y a pas plus d'un élément, retourner la liste
35     if longueur == 1 or longueur == 0:
36         return l
37     # sinon, diviser la liste en deux
38     elif longueur > 1:
39         # convertir la variable en nombre entier (l'index ne peut pas être un nombre à virgule)
40         index_milieu = int(longueur / 2)
41         # la partie gauche va du 1er élément à celui du milieu
42         partie_gauche = l[0:index_milieu]
43         # la partie droite va du milieu à la fin de la liste
44         partie_droite = l[index_milieu:longueur]
45
46         # appeler la fonction tri_fusion à nouveau sur la partie gauche (récursivité)
47         partie_gauche_triee = tri_fusion(partie_gauche)
48         # même chose pour la partie droite
49         partie_droite_triee = tri_fusion(partie_droite)
50
51         liste_fusionnee = merge(partie_gauche_triee, partie_droite_triee) # enfin, joindre les 2 parties
52
53         # retourner le résultat
54         return liste_fusionnee
55
56
57 if __name__ == "__main__":
58     l = [38, 27, 43, 3, 9, 82, 10]
59     print(tri_fusion(l))
```

>_ Solution

Java :

```
1 // Solution question 11 – 1/2
2 public class question11 {
3     // Fusionne 2 sous-listes de arr[].
4     // Première sous-liste est arr[l..m]
5     // Deuxième sous-liste est arr[m+1..r]
6     public static void merge(int arr[], int l, int m, int r) {
7         // Trouver la taille des deux sous-listes à fusionner
8         int n1 = m - l + 1;
9         int n2 = r - m;
10
11        /* Créer des listes temporaires */
12        int L[] = new int[n1];
13        int R[] = new int[n2];
14
15        /* Copier les données dans les sous-listes temporaires */
16        for (int i = 0; i < n1; ++i) {
17            L[i] = arr[l + i];
18        }
19        for (int j = 0; j < n2; ++j) {
20            R[j] = arr[m + 1 + j];
21        }
22
23        /* Fusionner les sous-listes temporaires */
24        // Indexes initiaux de la première et seconde sous-liste
25        int i = 0, j = 0;
26
27        // Index initial de la sous-liste fusionnée
28        int k = l;
29        while (i < n1 && j < n2) {
30            if (L[i] <= R[j]) {
31                arr[k] = L[i];
32                i++;
33            } else {
34                arr[k] = R[j];
35                j++;
36            }
37            k++;
38        }
39
40        /* Copier les éléments restants de L[] */
41        while (i < n1) {
42            arr[k] = L[i];
43            i++;
44            k++;
45        }
46
47        /* Copier les éléments restants de R[] */
48        while (j < n2) {
49            arr[k] = R[j];
50            j++;
51            k++;
52        }
53    }
54
55    // Fonction principale qui trie arr[l..r] en utilisant
56    // merge()
57    public static void tri_fusion(int arr[], int l, int r) {
58        if (l < r) {
59            // Trouver le milieu de la liste
60            int m = (l + r) / 2;
61
62            // Trier les première et la deuxième parties de la liste
63            tri_fusion(arr, l, m);
64            tri_fusion(arr, m + 1, r);
65
66            // Fusionner les deux parties
67            merge(arr, l, m, r);
68        }
69    }
}
```

>_ Solution

```
1 // Solution question 11 – 2/2
2 public static void affiche_liste(int l[]) {
3     int n = l.length;
4     for (int i = 0; i < n; ++i)
5         System.out.println(l[i] + " ");
6 }
7
8
9 public static void main(String[] args) {
10     int[] l = {38, 27, 43, 3, 9, 82, 10};
11     tri_fusion(l, 0, l.length - 1);
12     affiche_liste(l);
13 }
14 }
```

Le tri fusion est un algorithme récursif. Ainsi, nous pouvons exprimer sa complexité temporelle via une relation de récurrence : $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$. En effet, l'algorithme comporte 3 étapes :

1. "Divide Step", qui divise les listes en deux sous-listes, et cela prend un temps constant
2. "Conquer Step", qui trie récursivement les sous-listes de taille $n/2$ chacune, et cette étape est représentée par le terme $2T(n/2)$ dans l'équation.
3. La dernière étape consiste à fusionner les listes, sa complexité est de $O(n)$.

La solution à cette équation est $O(n \log n)$.