

Algorithmes et Pensée Computationnelle

Algorithmes spatiaux

Le but de cette séance est de comprendre la structure de données spatiales et d'implémenter quelques algorithmes d'indexation spatiale. Au terme de cette séance, l'étudiant sera en mesure d'utiliser quelques algorithmes spatiaux pour résoudre des problèmes de base de façon efficiente.

1 Nearest-Neighbor

Dans cette section, nous allons implémenter une recherche du plus proche voisin. Le but de cette méthode est de trouver le voisin le plus proche du point de départ en tenant compte ce point de "départ" et un ensemble de points. Nous allons implémenter cet algorithme et ensuite l'étendre à un algorithme des "k plus proches voisins" (recherche des k voisins les plus proches plutôt que du seul voisin le plus proche). Nous vous recommandons de traiter les questions dans l'ordre.

Question 1: (🕒 5 minutes) La fonction de distance : Python

Pour implémenter notre recherche, nous avons besoin d'écrire une fonction permettant de calculer la distance euclidienne entre 2 points. Ecrivez une fonction qui permet de calculer la distance entre 2 points.

💡 Conseil

Soit 2 points en 2 dimensions (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , la distance euclidienne entre ces 2 points est donnée par : $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Vous pouvez définir un point comme étant un tuple de deux entiers. Exemple : `point1=(4,5); point2=(1,3)`

>_ Solution

```
1 import math #permet d'importer la librairie nécessaire au calcul de la racine carrée
2
3 def calculate_distance(point1,point2):
4     #Implémentez la formule de la distance euclidienne entre 2 point ici
5     return math.sqrt((point1[0]-point2[0])**2+(point1[1]-point2[1])**2)
```

Note : Vous auriez pu utiliser `(...)**0.5` en lieu et place de la fonction `math.sqrt(.)`

Question 2: (🕒 10 minutes) Nearest-neighbor search

Implémentez la recherche du voisin le plus proche. L'algorithme fonctionne de la façon suivante :

1. Traversez chaque point.
2. Pour chaque point, calculez sa distance par rapport au point de départ.
3. Retournez les coordonnées du point le plus proche.

Votre fonction devra retourner les coordonnées (x,y) du point le plus proche ainsi que sa distance par rapport au point de départ.

💡 Conseil

Utilisez la fonction de distance de la question 1 et parcourez les points à l'aide d'une boucle `for`. Si votre input est `[[2,3],[5,6],[1,4],[2,4],[3,5]]` et que le point de départ est `[4,4]`, alors l'output devra être `([3,5] 1.414)`.

Note : Pour que votre programme fonctionne, écrivez votre algorithme du plus proche voisin dans le même programme que celui de la Question 1.

>_ Solution

Note : Veuillez à ajouter la fonction définie à l'exercice 1 pour que ce bout de code fonctionne.

```
1 #Question 2
2 #WARNING : Veuillez ajouter le code de la question 1 au code ci-dessous pour que cela fonctionne.
3 #Librairie qui permettent de visualiser le résultat (pas nécessaire à la résolution du problème)
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import numpy as np
6 import math
7
8 def nearest_neighbor(start, point_set):#start correspond au point de départ, point_set correspond à l'ensemble
   des points
9     for i in range(len(point_set)):#on parcourt tout les point de l'ensemble
10
11         if i == 0:
12             min_distance = calculate_distance(start, point_set[0])
13             nearest_nei = point_set[0]
14             #La distance minimale n'étant pas définie, on doit l'initialiser à la première itération, c'est ce qu'on fait ici
15
16         distance = calculate_distance(start, point_set[i])
17
18         if distance < min_distance:
19             min_distance = calculate_distance(start, point_set[i])
20             nearest_nei = point_set[i]
21
22         #Cette partie du code détermine si le point actuellement considéré, est plus proche du point de départ que
   les points
23         #parcouru jusqu'ici. Si c'est le cas, on redéfinit la distance minimale et "enregistre" les coordonnées du point
24
25     return nearest_nei, min_distance
26
27 a = np.array([(1,2), (5,6), (7,8), (2,5), (9,1)])#List de points
28 b = (3,4)#Point de départ
29
30 point, distance = nearest_neighbor(b,a)
31 #Devrait output [2,5]
32
33 print("Le voisin le plus proche est ", point, " avec une distance de ", distance)
34
35 #Vous ne devez pas comprendre ce bout de code, il vous permet de visualiser le résultat
36 #Le point de départ apparait en orange, le voisin le plus proche en rouge
37 plt.scatter(a[:,0],a[:,1])
38 plt.scatter(b[0], b[1], color = 'orange')
39 plt.scatter(point[0], point[1], color = 'green')
```

Question 3: (🕒 15 minutes) K-nearest-neighbor search

Améliorez l'algorithme créé précédemment afin qu'il puisse trouver les K plus proches voisins.

💡 Conseil

Appliquez l'algorithme du plus proche voisin K-fois. À la fin de chaque itération retirez le voisin le plus proche de l'ensemble des points sur lequel l'algorithme s'applique. De cette façon, vous trouverez le second voisin le plus proche, le troisième, etc...

Votre fonction devra retourner une liste sous la forme : $[[x_1, y_2, distance1], [x_2, y_2, distance2], \dots]$. Avec comme entrée $[[2,3],[5,6],[1,4],[2,4],[3,5]]$, comme point de départ $[4,4]$ et un nombre de voisins $K=2$, votre algorithme retournera : $[[3, 5, 1.4142], [2, 4, 2.0]]$.

Note : Pour que votre programme fonctionne, écrivez votre algorithme du plus proche voisin dans le même programme que celui des questions 1 et 2. Vous pouvez réutiliser le code des questions 1) et 2) pour cet exercice.

>_ Solution

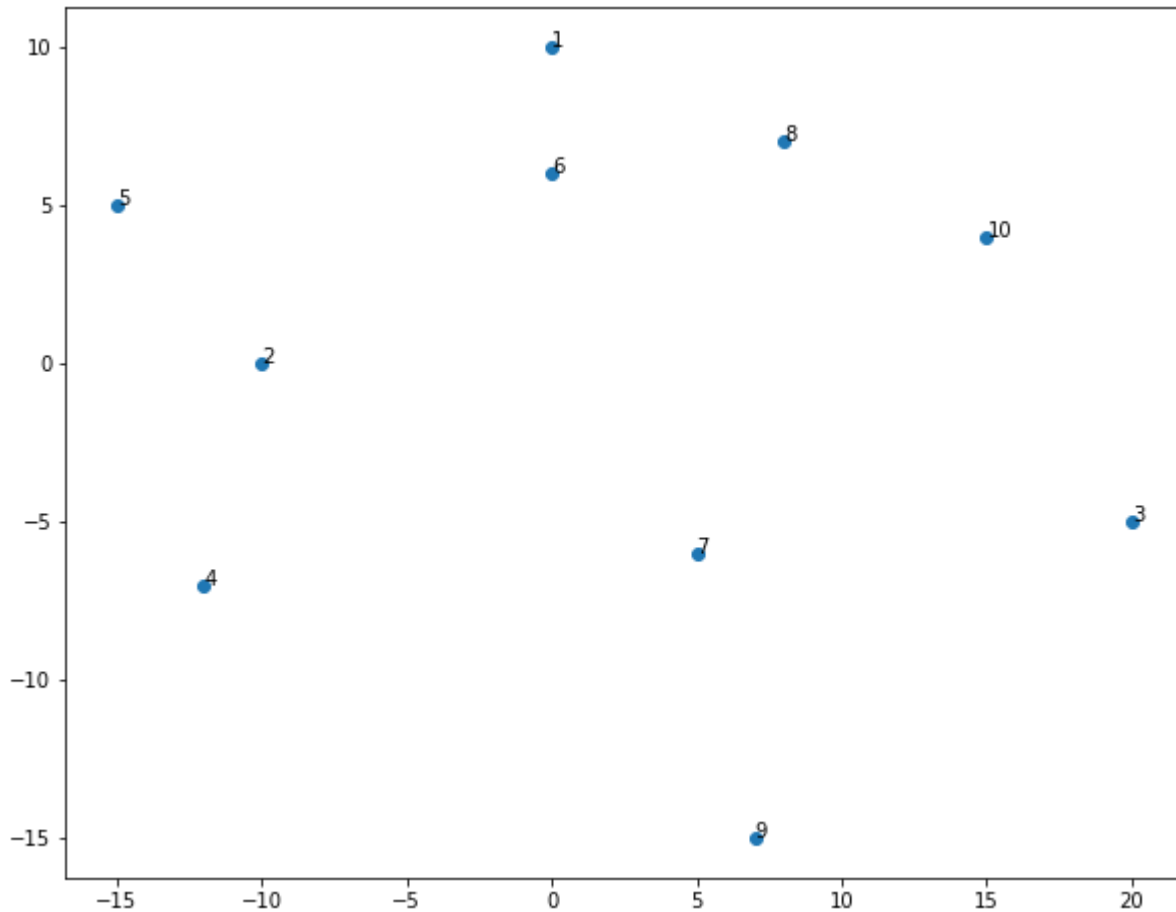
Note : Veuillez ajouter les fonctions des questions 1 et 2 pour que ce bout de code fonctionne.

```
1 #Question 3
2 #WARNING :Veuillez ajouter les fonctions des questions 1 et 2 pour que le code ci-dessous fonctionne
3 #Librairie qui permettent de visualiser les données, pas nécessaire pour la résolution de l'exercice
4 import numpy as np
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 import math
7
8 def K_nearest_neighbor(start,point_set, K):
9     temp = point_set #crée une copie de notre ensemble de point
10    k_nearest_nei = []
11
12    for j in range(K):#A chaque itération on applique l'algorithme du nearest neighbor mais sur un ensemble de
13        point réduit
14        point, distance = nearest_neighbor(start,temp)
15        point.append(distance)
16        k_nearest_nei.append(point)
17        temp.remove(point)#On retire de l'ensemble de points le voisin le plus proche, de cette manière, à chaque
18        itération,
19        #le voisin le plus proche sera de plus en plus éloigné.
20
21    return k_nearest_nei
22
23 a = [[1,2], [5,8], [7,8], [2,5], [9,1]]#Liste de points
24 b = (3,4)#Point de départ
25 K = 2
26
27 n = K_nearest_neighbor(b,a,K)
28 print(n)
29
30 #Vous n'avez pas besoin de comprendre ce bout de code, il permet de visualiser votre résultat
31 a = np.array([[1,2], [5,8], [7,8], [2,5], [9,1]])
32 plt.scatter(a[:,0],a[:,1])
33 plt.scatter(b[0], b[1], color = 'Orange')
34
35 for i in range(K):
36     plt.scatter(n[i][0], n[i][1], color = 'green')
```

2 K-dimensional tree

Question 4: (🕒 5 minutes) KD-Tree, un échauffement : Papier

Vous trouverez ci-dessous une liste de points numérotés de 1 à 10. Placez-les dans un KD-Tree et dessinez la séparation de l'espace qui en résulte.

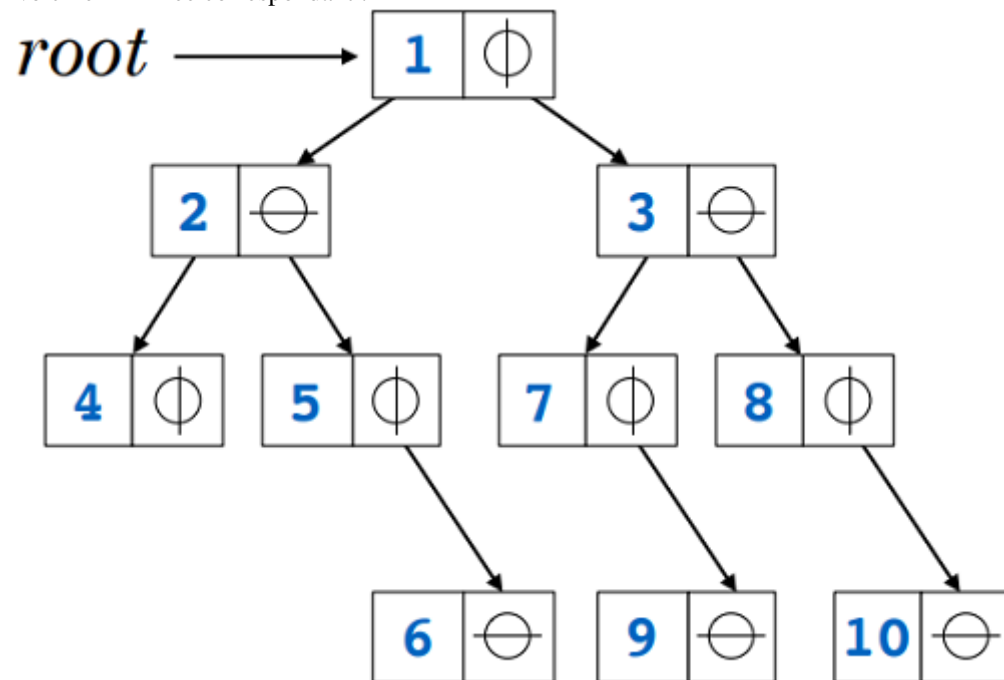


💡 Conseil

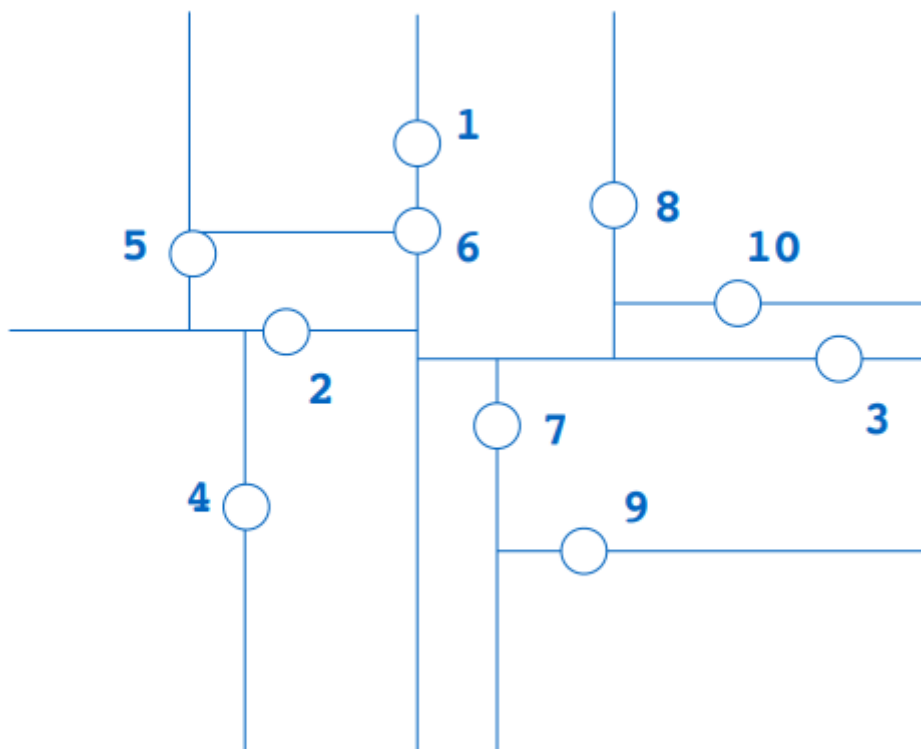
La première division se fait de façon verticale. Assurez-vous de bien insérer les points dans l'ordre (point 1, point 2, etc..). Les nœuds se situant au même niveau devraient diviser l'espace selon le même axe.

>_ Solution

Voici le KD-Tree correspondant :



Et la division de l'espace qui en résulte :



Question 5: (🕒 15 minutes) KD-Tree : Python

L'objectif de cet exercice est d'écrire une fonction permettant d'ajouter un nœud à un KD-Tree. Les nœuds sont de la forme ((x,y), enfant à gauche, enfant à droite), x et y étant les coordonnées du nœud considéré. Complétez le code contenu dans le fichier **Question5.py**.

💡 Conseil

Voici le pseudo-code permettant d'ajouter un nœud à un KD-Tree :

```
ADD(node,point,cutaxis) :  
    if node = NIL  
        node ← Create-Node  
        node.point = point  
        return node  
    if point[cutaxis] ≤ node.point[cutaxis]  
        node.left = ADD(node.left, point, (cutaxis + 1) modulo k  
    else  
        node.right = ADD(node.right, point, (cutaxis+1) modulo k  
    return node
```

Si votre réponse est correcte, le code de **Question5.py** devrait afficher : [(0, 10), [(-10, 0), None, None], None].

>_ Solution

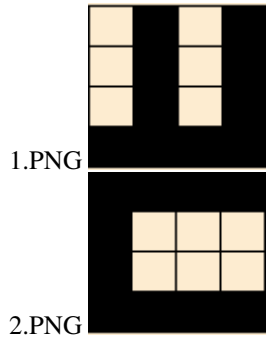
```
1  # Question 5  
2  
3  root = [(0,10), None, None] #Nous définissons ici juste la racine de l'arbre  
4  k = 2 # Ici nous travaillerons en 2 dimensions  
5  point = (-10,0) #Point que nous voulons ajouter dans le graphe  
6  
7  def add_node(node,point,cutaxis = 0):  
8  
9      if node is None: #Si le noeud n'existe pas, nous sommes donc dans une feuille, et il faut créer le noeud  
10         node = [point,None,None]  
11         return node  
12  
13         if point[cutaxis] <= node[0][cutaxis]: #1 Voir le pdf de correction.  
14             node[1] = add_node(node[1], point, cutaxis + 1 % k)  
15  
16         else:  
17             node[2] = add_node(node[2], point, cutaxis + 1 % k)  
18  
19         return node  
20  
21  add_node(root,point)  
22  
23  print(root)
```

Commentaire #1 : Si la coordonnée du point à ajouter est inférieure à celle du nœud selon l'axe de découpe en considération, alors le point doit se trouver dans le sous-arbre de gauche. Par convention, le nœud de gauche correspond dans la liste [(x,y), nœud de gauche, nœud de droite] à l'indice 1, par conséquent, on appelle la fonction de façon récursive pour ajouter le point, mais cette fois-ci en partant d'un cran plus bas dans l'arbre. Cela se répète jusqu'à ce qu'un ait atteint les feuilles et qu'un nouveau nœud doive être créé.

3 Quad-Tree

Question 6: (🕒 10 minutes) Une mise en train : Papier

Encodez les images ci-dessous dans un Quad-Tree.



💡 Conseil

Pour réussir cet exercice, vous devez diviser chaque nœud en 4 sous-espaces de taille égale, et ce autant de fois que nécessaire. La branche la plus à gauche correspond au quadrant NW puis en allant de gauche à droite : NE, SE, SW.

Votre arbre devrait avoir une profondeur de 2 et disposer de 16 feuilles.

>_ Solution

Image 1 :

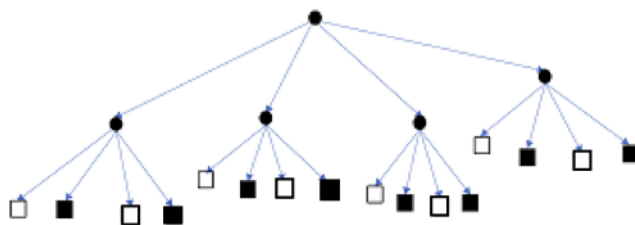
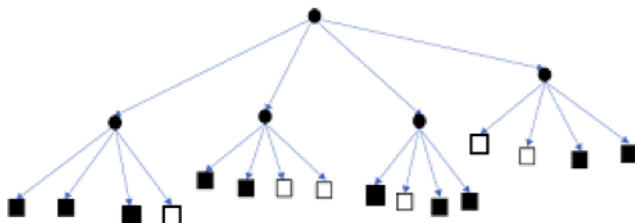


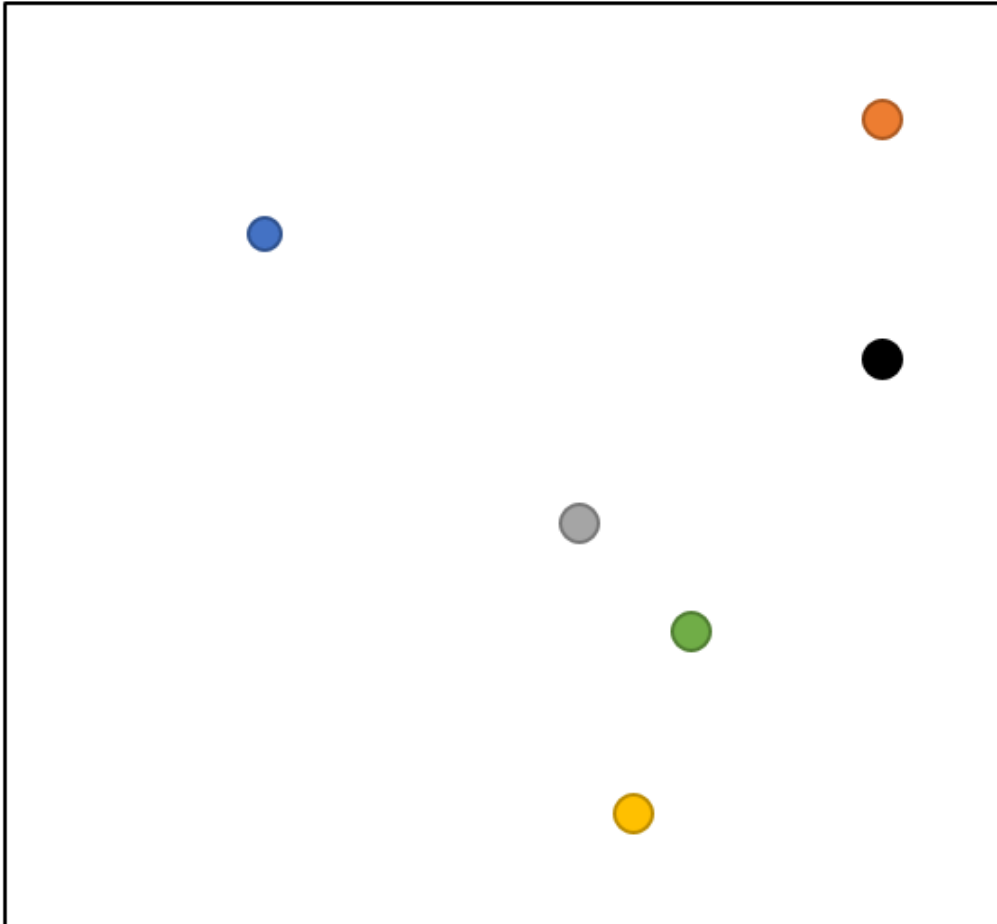
Image 2 :



Question 7: (🕒 10 minutes) Une mission capitale : Papier

Récemment embauché par la CIA, vous êtes à la recherche d'un individu se cachant dans une des villes suivantes : Bleu, Orange, Noir, Gris, Vert et Jaune. Votre mission, si vous l'acceptez, est de créer un Quad-Tree qui vous permettra de géolocaliser le criminel de façon efficace. Vous trouverez ci-dessous une carte de villes. Créez le Quad-Tree et rétablissez la justice.

💡 Conseil

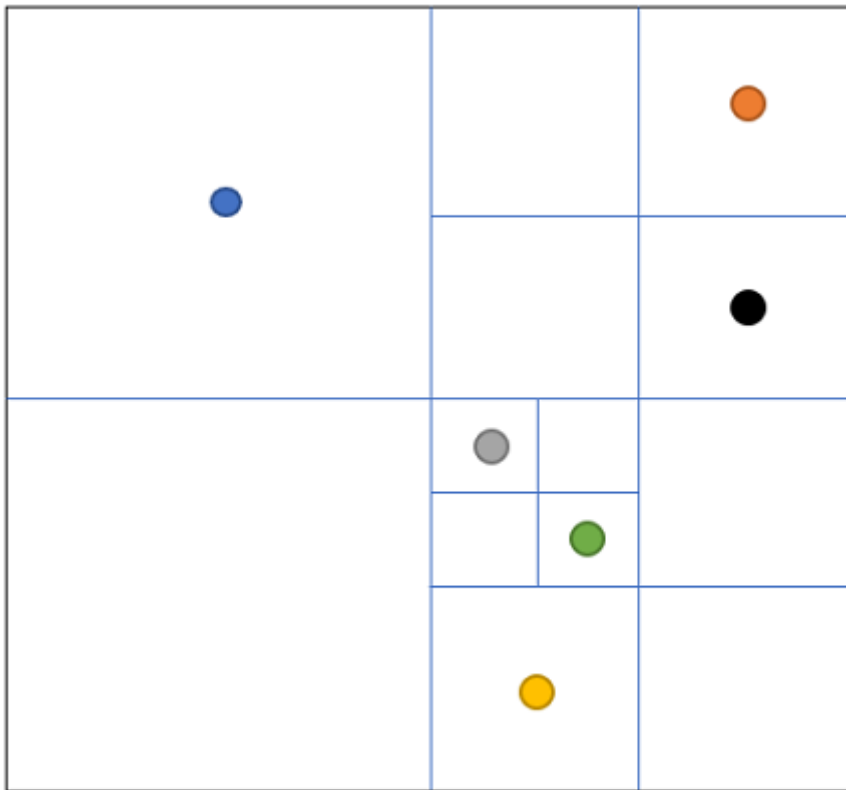


Commencez par diviser la carte de la ville de la façon adéquate puis construisez le graphe.

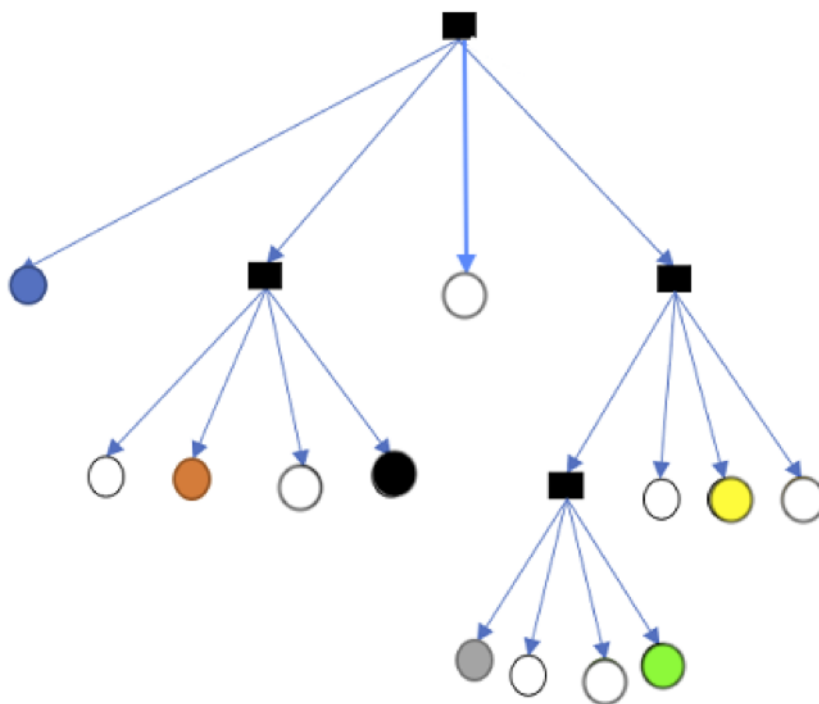
Remarque : Les différentes branches de l'arbre n'auront pas toutes la même profondeur.

>_ Solution

Voici la division de la carte qui permet de construire le Quad-Tree :



Le Quad-Tree qui en résulte :



Note : Un rond blanc correspond à un quadrant vide.