

Algorithmes et Pensée Computationnelle

Semaine 6

Algorithmes de recherche

1. Recherche séquentielle
2. Recherche binaire
3. Arbres de recherche binaire

Le but de cette séance est de se familiariser avec les algorithmes de recherches.

1 Recherche séquentielle (ou recherche linéaire)

1.1 Définition

Une recherche **linéaire** (ou **séquentielle**) est une méthode permettant de trouver un élément dans une liste, un tableau ou un dictionnaire. Elle vérifie un à un chaque élément de gauche à droite jusqu'à ce qu'une correspondance soit trouvée ou que toute la liste ait été recherchée.

Si l'élément recherché est trouvé, l'algorithme **renvoie l'index**, c'est-à-dire la position, de l'élément dans la liste donnée.

Sa complexité dans le pire des cas est de **O(n)**, la longueur de la liste, et dans le meilleur des cas de **O(1)**, lorsque l'élément se trouve en première position. Dans la pratique, l'algorithme de recherche séquentielle n'est pas souvent utilisé en vue de sa complexité élevée et des alternatives de recherche plus efficaces comme la recherche binaire.

1.2 Exercices

Question 1: (🕒 5 minutes) language : **Python**

A partir des éléments ci-dessous, écrivez une fonction qui cherche **x** dans la liste.

La fonction doit retourner l'index de l'élément correspondant de la liste si **x** est dans la liste et "-1" si **x** n'est pas dans la liste (avec **x = 100**)

Python :

```
1 def plus_proche_sequentielle(liste, x):
2     #complétez ici
3
4
5
6     L = [3,55,6,8,3,5,56,33,6,5,3,2,99,53,532,75,21,963,100,445,56,56,24]
7     x = 100
8
9     plus_proche_sequentielle(L, x)
10
11     %%time #Permet d'afficher le temps d'exécution de l'algorithme
12     print(plus_proche_sequentielle(L, x))
```

Conseil

Définissez votre fonction de recherche linéaire en utilisant une boucle `for` ou une boucle `while`.

Attention : la fonction doit retourner l'index de la valeur et non pas la valeur. Pour cela, veuillez à utiliser `range(len(liste))` avec la boucle `for` et une incrémentation "`i = i+1`" avec la boucle `while`.

La fonction `print()` vous permet d'afficher l'index lorsqu'il a été trouvé et un autre message le cas échéant.

>_ Solution

Python :

```
1 #Définition de la fonction
2 def recherche_sequentielle(liste, x):
3     for i in range(len(liste)): #i représente l'index
4         if liste[i] == x:
5             print("X est présent dans la liste à l'index :", i)
6             return i
7
8     else: #Utilisez "else" s'il n'y a pas de "break"
9         print("X n'est pas présent dans la liste")
10        return -1
11
12 #Déclaration de la liste et de la variable x
13 l = [3,55,6,8,3,5,56,33,6,5,3,2,99,53,532,75,21,963,100,445,56,45,12,56,24]
14 x = 100
15
16 #Exécution de l'algorithme
17 recherche_sequentielle(l, x)
18
19 %%time #Permet d'afficher le temps de calcul
20 print(recherche_sequentielle(l, x))
```

Question 2: (🕒 10 minutes) language : Python

Considérez une liste d'entiers non triée L ainsi qu'un entier e. Écrivez un programme qui retourne l'élément de la liste L dont la valeur est la plus proche de e en utilisant une recherche séquentielle.

Exemple :

L = [16, 2, 25, 8, 12, 31, 2, 56, 58, 63]

e = 50

Résultat attendu : 56

Python :

```
14 #Definition de la fonction ayant pour argument une liste et un nombre
15 def plus_proche_sequentielle(list,n):
16     diff = None #Initialisation de la variable pour la différence
17     resultat = None #Initialisation de la variable pour le résultat
18
19     #Complétez ici
20
21 #Déclaration de la liste et de la variable e
22 L = [16, 2, 25, 8, 12, 31, 2, 56, 58, 63]
23 e = 50
24
25 #Exécution de la fonction
26 plus_proche_sequentielle(L,e)
27
28 %%time
29 print(plus_proche_sequentielle(L,e))
```

💡 Conseil

Complétez la fonction `plus_proche_sequentielle` et exécutez le code.

Veillez à utiliser les valeurs absolues pour comparer les différences, la plus petite pouvant être positive ou négative. La fonction `abs()` retourne la valeur absolue. Exemple : `abs(3-10)` retourne 7.

Étant donné que la liste est **non triée**, l'algorithme doit obligatoirement la parcourir intégralement.

L'algorithme doit calculer la différence entre `e` et chaque élément de la liste `L` en gardant toujours la plus petite différence trouvée. À la fin, il retourne l'élément de la liste correspondant à la plus petite différence.

>_ Solution

Python :

```
1 #Definition de la fonction ayant pour argument une liste et un nombre
2 def plus_proche_sequentielle(liste,n):
3     diff = None #Initialisation de la variable pour la différence
4     resultat = None #Initialisation de la variable pour le résultat
5
6     #Solution
7     for i in liste:
8         if not diff or abs(i-n) < diff: #old diff
9             diff = abs(i-n) #new diff #
10            resultat = i
11
12    return resultat, diff
13
14 #Déclaration de la liste L et de la variable e
15 L = [16, 2, 25, 8, 12, 31, 2, 56, 58, 63]
16 e = 50
17
18 #Exécution de la fonction
19 plus_proche_sequentielle(L,e)
20
21 %%time
22 print(plus_proche_sequentielle(L,e))
```

Question 3: (🕒 5 minutes) language : Python

Considérez une **liste d'entiers triés** `L` ainsi qu'un entier `e`. Écrivez un programme qui retourne l'index de l'élément `e` de la liste `L` en utilisant une recherche séquentielle. Si `e` n'est pas dans `L`, retournez -1.

Exemple :

`L = [1231321,3213125,3284016,4729273,5492710]`

`e = 3284016`

Résultat attendu : 2

```
31 def recherche_lineaire(L,e):
32     for i in L: #Ici, i correspond à la valeur et non l'index.
33         #complétez ici
34
35     L = [1231321,3213125,3284016,4729273,5492710]
36     e = 3284016
37     recherche_lineaire(L,e)
38
39     %%time
40     print(recherche_lineaire(L,e))
```

Conseil

Une liste triée permet une recherche plus efficace à l'aide d'un algorithme plus simple.

Veillez à retourner l'index de la valeur dans la liste. La fonction `index()` retourne l'index d'un élément au sein d'une liste.

Exemple et syntaxe : `lst.index(i)` va indiquer la position de l'élément `i` dans la liste `lst`.

>_ Solution

Python :

```
1 def recherche_lineaire(L,e):
2     for i in L:
3         #Solution
4         if i == e:
5             return L.index(i)
6     return -1
7
8 L = [1231321,3213125,3284016,4729273,5492710]
9 e = 3284016
10 recherche_lineaire(L,e)
11
12 %%time
13 print(recherche_lineaire(L,e))
```

2 Recherche binaire

2.1 Définition

Le but de la recherche binaire est de trouver l'élément x plus rapidement. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser **une liste d'éléments triée**.

La complexité de l'algorithme de recherche binaire est $O(\log n)$. Cependant, il ne faut pas oublier le coût lié à l'obtention d'une liste triée à partir d'une liste non triée.

L'algorithme de recherche binaire divise l'intervalle de recherche par deux à chaque coup jusqu'à ce qu'il trouve l'élément x ou que l'intervalle soit vide.

Ainsi, si x est plus petit que l'élément du milieu, l'algorithme va choisir la moitié de gauche comme intervalle de recherche et ainsi de suite. Si x est plus grand que l'élément du milieu la recherche va se faire dans la moitié droite de l'intervalle.

La recherche binaire regarde les comparaisons d'ordre, alors que la recherche séquentielle regarde les comparaisons d'égalité pour trouver x .

2.2 La récursivité

Une fonction récursive est une fonction qui s'appelle elle-même pendant son exécution. Vous trouverez ci-dessous un exemple de fonction récursive utilisée pour le calcul factoriel.

```
41 def factoriel(n):
42     if n == 1:
43         return n
44     else:
45         return n * factoriel(n - 1)
46
47 factorielle(4)
48 #La fonction calcul 4 factoriel et retourne le résultat
49 #Rappel : 4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24
```

Les fonctions récursives sont courantes en informatique car elles permettent aux programmeurs d'écrire des programmes efficaces en utilisant une quantité minimale de code. L'inconvénient est qu'elles peuvent provoquer des boucles infinies et d'autres résultats inattendus si elles ne sont pas écrites correctement. Si la fonction n'inclut pas les cas appropriés pour arrêter l'exécution, la récursivité se répétera à l'infini, provoquant le plantage du programme ou, pire encore, l'arrêt de tout le système informatique.

2.3 Exercices

Question 4: (🕒 20 minutes) language : Python

A partir de la liste d'éléments **triée** ci-dessous, écrivez premièrement **une fonction récursive** puis **une fonction itérative** qui cherche x dans la liste. La fonction doit retourner l'**index** de l'élément correspondant de la liste si x est dans la liste et -1 dans le cas contraire.

Ici, $x = 5$.

```
50 #Version récursive
51
52 def recherche_binaire_recursive(liste,s,r,x):
53     #complétez ici
54
55     L=[1,3,4,5,7,8,9,15]
56     s = 0
57     r = len(L)
58     x = 5
59     recherche_binaire_recursive(L,s, r, x)
60
61     %%time
```

```

62 print(recherche.binaire_recursive(L,s, r, x))
63
64 #####
65
66 #Version itérative
67
68
69 def recherche.binaire_iterative(liste,s,r,x):
70     #complétez ici
71
72     L = [1,3,4,5,7,8,9,15]
73     s = 0
74     r = len(L)-1
75     x = 7
76     recherche.binaire_iterative(L,s, r, x)
77
78     %% time
79     print(recherche.binaire_iterative(L,s, r, x))

```

Conseil

Complétez la fonction récursive `recherche.binaire_recursive` et la fonction itérative `recherche.binaire_iterative`.

Détails sur les arguments de la fonction :

L : La liste dans laquelle nous effectuons la recherche

s : Le premier élément de la liste (index [0])

r : Le dernier élément de la liste (index [longueur de la liste -1])

x : La valeur recherchée.

Ainsi, à chaque itération, vos fonction vont modifier les valeurs de base données en argument pour resserrer l'intervalle jusqu'à trouver la valeur recherchée.

Pour définir le milieu d'un intervalle qui contient un nombre pair ou impair d'éléments, utilisez la fonction `int()`. Exemple :

liste1 = [1,2,3,4,5] s = 0 r = len(liste1) Calcul du milieu de l'intervalle :

- $(s+r)/2 = (0+5)/2 = 2.5$ #Pas de correspondance

- `int((s+r)/2) = int((0+5)/2) = int(2.5) = 2` #Arrondi vers le bas

Pour la version itérative, il est conseillé d'utiliser une boucle `while`.

>_ Solution

Python :

```
1 #Version récursive
2 def recherche_binaire_recursive(liste,s,r,x): #s as first index and r as last index of liste
3     #SOLUTION
4     mid = int((s+r)/2) #int arrondi vers le bas
5     print(mid)
6     if liste[mid] < x:
7         return recherche_binaire_recursive(liste, mid, r, x)
8     elif liste[mid] > x:
9         return recherche_binaire_recursive(liste, s, mid, x)
10    elif liste[mid] == x:
11        print("X in liste at index: ", mid)
12        return mid
13    else:
14        print ("X not in liste")
15
16    L=[1,3,4,5,7,8,9,15]
17    s = 0
18    r = len(L) #8 --> first mid = 4 --> "7" in L --> 7>5 --> new mid = (0+4)/2 = 2, etc.
19    x = 5
20    recherche_binaire_recursive(L,s, r, x)
21
22
23    %%time
24    print(recherche_binaire_recursive(L,s, r, x))
```

>_ Solution

Python :

```
1 #Version itérative
2 def recherche_binaire_iterative(liste,s,r,x):
3     #SOLUTION
4     while s <= r:
5         mid = int(s + (r-s)/2)
6         print(mid)
7         if liste[mid] == x:
8             print("X presents in liste at index: ", mid)
9             return mid
10        elif liste[mid] < x:
11            s = mid+1
12        else:
13            r = mid - 1
14        print("X not present in liste")
15        return -1
16    L = [1,3,4,5,7,8,9,15]
17    s = 0
18    r = len(L)
19    x = 15
20    recherche_binaire_iterative(L,s, r, x)
21
22    %%time
23    print(recherche_binaire_iterative(L,s, r, x))
```

Question 5: (🕒 15 minutes) language : Python

Considérez une liste d'entiers **triés** L ainsi qu'un entier e . Écrivez un programme qui retourne l'élément de la liste L le plus proche de e en utilisant une recherche binaire.

On vous donne une liste d'entiers **triés** L ainsi qu'un entier e . Écrivez un programme retournant la valeur dans L la plus proche de e en utilisant une recherche binaire (binary search).

Résultat attendu : 56

```

80 def plus_proche_binaire(liste,n):
81     #complétez ici
82
83
84     L = [1, 2, 5, 8, 12, 16, 24, 56, 58, 63]
85     e = 41
86     plus_proche_binaire(L,e)
87
88     %%time
89     print(plus_proche_binaire(L,e))
90

```

Conseil

Veillez à définir des variables **min** et **max** délimitant l'intervalle de recherche et une variable booléenne **found** initialisée **false** et qui devient **true** lorsque l'algorithme a trouvé la valeur la plus proche de **e**.

>_ Solution

Python :

```

1  def plus_proche_binaire(liste,n):
2      #SOLUTION
3
4      min = 0
5      max = len(liste)
6      found = False
7      while min <= max and not found: # 0<10 and true puis 6<10 and true, etc.
8          mid = (max+min)//2 # mid = 5 --> 16 in list
9          print(mid)
10         if n > liste[mid]: # 41>16
11             min = mid + 1 # min = 5+1=6
12         elif n < liste[mid]:
13             max = mid - 1
14         else:
15             found = True
16     if found:
17         return n
18     else:
19         return liste[mid]
20
21     L = [1, 2, 5, 8, 12, 16, 24, 56, 58, 63]
22     e = 41
23     plus_proche_binaire(L,e)
24
25     %%time
26     print(plus_proche_binaire(L,e))

```

Question 6: (🕒 10 minutes) language : Python

Considérez une liste d'entiers triés **L** ainsi qu'un entier **e**. Écrivez un programme qui retourne l'index de l'élément **e** de la liste **L** en utilisant une recherche binaire. Si **e** n'est pas dans **L**, retournez **-1**.

Exemple :

L = [1231321,3213125,3284016,4729273,5492710]

e = 3284016

Résultat attendu : 2

```

91 def recherche_binaire(liste,e):

```



```

92     first = 0
93     last = len(L)-1
94
95     #complétez ici
96
97
98     L = [1231321,3213125,3284016,4729273,5492710]
99     e = 3284016
100    recherche_binaire(L,e)
101
102    %%time
103    print(recherche_binaire(L,e))
104

```

💡 Conseil

Inspirez-vous des exercices et des conseils précédents.

>_ Solution

Python :

```

1  def recherche_binaire(liste,e):
2      first = 0 #correspond à l'index du premier élément de la liste
3      last = len(liste)-1 #correspond à l'index du dernier élément de la liste
4      #SOLUTION
5      while first <= last:
6          mid = int((first+last)/2) #l'élément du milieu. La fonction int() permet d'obtenir un entier dans le cas ou
          "first + last" est un nombre impair
7          print(mid)
8          if liste[mid] == e:
9              return mid #Si la condition est juste, la fonction retourne l'index de la valeur recherchée dans la liste
10         else:
11             if liste[mid] > e:
12                 last -= 1
13             else:
14                 first +=1
15         return False # Si la condition de la ligne 8 n'est jamais remplie, la fonction retourne "False"
16
17     L = [1231321,3213125,3284016,4729273,5492710]
18     e = 3284016
19     recherche_binaire(L,e)
20
21     %%time
22     print(recherche_binaire(L,e))

```

Question 7: (🕒 10 minutes) language : Python

Matrice en Python

Considérez une matrice ordonnée m et un élément l.

Une matrice ordonnée répond aux critères suivants :

$m[i][j] \leq m[i+1][j]$ (une ligne va du plus petit au plus grand)

$m[i][j] \leq m[i][j+1]$ (une colonne va du plus petit au plus grand)

Écrivez un algorithme qui retourne la position de l'élément l dans m. Si l n'est pas présent dans m alors il faut retourner (-1, -1)

Exemple 1 : si $m = [[1,2,3,4],[4,5,7,8],[5,6,8,10],[6,7,9,11]]$ et que $l=7$. Nous souhaitons avoir la réponse (1,2) OU (3,1) (l'une des deux, pas besoin de retourner les deux résultats).

Exemple 2 : si `m=[[1,2],[3,4]]` et que `l=7`. Nous souhaitons avoir la réponse `(-1,-1)` car 7 n'est pas dans la matrix m.

```
105 def recherche_matricielle(m,l):
106     #complétez ici
107
108
109     m=[[1,2,3,4],[4,5,7,8],[5,6,8,10],[6,7,9,11]]
110     l=7
111     recherche_matricielle(m,l)
112
```

Conseil

Pour cet exercice il est nécessaire d'utiliser une double boucle `for`, c'est-à-dire : une boucle `for` dans une boucle `for`. Cela permet de parcourir tout les éléments d'un tableau à deux dimensions à l'exemple d'une matrice.

>_ Solution

Python :

```
1 def recherche_matricielle(m,l):
2     #complétez ici
3     for i in range(len(m)): # "Pour chaque ligne de la matrice" ou "Pour chaque liste de la liste"
4         for j in range(len(m[i])): # "Pour chaque colonne de la matrice" ou "Pour chaque élément de la liste"
5             if m[i][j] == l:
6                 return (i,j)
7     return (-1,-1)
8
9 m=[[1,2,3,4],[4,5,7,8],[5,6,8,10],[6,7,9,11]]
10 l=7
11 recherche_matricielle(m,l)
```

3 Arbre de recherche binaire

3.1 Définition

Un arbre de recherche binaire est une structure de donnée au même titre que les listes, tuples, dictionnaires, etc. Leur particularité est qu'au lieu d'ordonner les éléments les uns à la suite des autres, les arbres de recherche binaire enregistrent les valeurs de manière relationnelle.

En effet, l'arbre est divisé en branches qui peuvent elles-même contenir deux branches (enfants) et ainsi de suite. Lorsqu'une branche n'a pas de branches subséquentes (enfants), on parle de feuille.

Les branches peuvent donc contenir de 0 à 2 autres branches. On parle alors de la branche à gauche et de celle à droite. La branche de gauche est forcément plus petite que la branche parente et celle de droite est forcément plus grande.

De cette façon, on garantit que l'arbre est toujours ordonné même en rajoutant ou en retirant des éléments

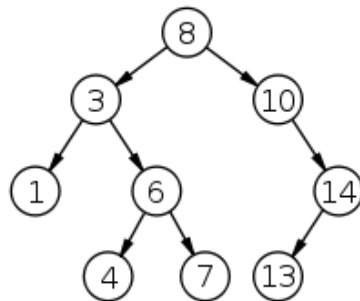


FIGURE 1 – Exemple d'arbre binaire

3.2 Exercices

Question 8: (🕒 15 minutes) langage : **Python**

Dans l'exercice suivant nous vous donnons un arbre binaire avec les mêmes valeur que le schéma précédent et dont la racine est la variable `root`.

Ecrivez une fonction qui retourne **True** si la valeur `value` est dans l'arbre et **False**, sinon. Vous pouvez utiliser la variable `value` pour afficher la valeur d'une node et les variables `left` et `right` sur les **nodes** pour accéder aux branches enfants, `node.value`, `node.left` et `node.right`.

Complétez la fonction `recherche_arbre`.

```
113 import sys
114 import traceback
115 from Arbre import Arbre
116
117 def recherche_arbre(node, value):
118     # Complétez ici
119
120
121
122 def handle_error(): #Fonction appelée dans le bloc "except" qui gère les erreurs
123     → tb = sys.exc_info()
124     traceback.print_tb(tb)
125     tb_info = traceback.extract_tb(tb)
126     filename, line, func, text = tb_info[-1]
127     print("Une erreur s'est produite sur la ligne {} dans la déclaration {}".format(line, text))
128
129 try: #try permet de tester le code pour détecter les erreurs.
130
```

```

131 tree = Arbre(8, 3, 1, 6, 4, 7, 10, 14, 13)
132 root = tree.root
133 assert recherche_arbre(root, 4) == True # devrait trouver
134 assert recherche_arbre(root, 7) == True # devrait trouver
135 assert recherche_arbre(root, 18) == False # ne devrait pas trouver
136 assert recherche_arbre(root, 21) == False # ne devrait pas trouver
137
138 print("Bonne réponse avec le premier arbre")
139 except AssertionError: # "except" permet de gérer l'erreur
140     handle_error()
141     print("Mauvaise réponse")
142
143 try:
144     tree = Arbre(1, 3, 9, 6, 14, -17, 110, 124, 13, -1, 9, 1, 40, -98, 120, 23)
145     root = tree.root
146     assert recherche_arbre(root, 14) == True # devrait trouver
147     assert recherche_arbre(root, 110) == True # devrait trouver
148     assert recherche_arbre(root, 39) == False # ne devrait pas trouver
149     assert recherche_arbre(root, 18) == False # ne devrait pas trouver
150     print("Bonne réponse avec le deuxième arbre")
151 except AssertionError as err:
152     handle_error()
153     print("Mauvaise réponse")
154
155

```

Conseil

Indice : Utilisez une fonction récursive.

>_ Solution

Python :

```

1 def recherche_arbre(node, value):
2     #Solution
3     if node == None:
4         return False
5
6     if node.value == value:
7         return True
8     if node.value > value:
9         return recherche_arbre(node.left, value)
10    else:
11        return recherche_arbre(node.right, value)

```