Algorithmes et Pensée Computationnelle

Consolidation 2

Les exercices de cette série sont une compilation d'exercices semblables à ceux vus lors des semaines précédentes. Le but de cette séance est de consolider les connaissances acquises lors des travaux pratiques des dernière semaines.

Question 1: (🕓 *10 minutes*) **Complexité**
Analysez la complexité pour les deux codes suivants. Est-ce la même pour fun() et fun2() ? Pourquoi ?

```
1  def fun(n):
2      for i in range(n):
3          for j in range(n):
4              print (n)
5
6  def fun2(n):
7      for i in range(n):
8          print (n)
9      for j in range(n):
10         print (n)
```

Solution

Non, ils n'ont pas la même complextié. Fun() a une complexité de O(n*n) car il s'agit de deux boucles imbriquées. En revanche, fun2() a une complexité de O(n+n) car il s'agit de deux boucles indépendante.

Question 2: (🕓 *10 minutes*) **Complexité**
Quel est la complexité de ce code ?

```
1  def fun(k):
2      if k == 1:
3          print ('Done')
4      else:
5          k = k/2
6  fun(k)
```

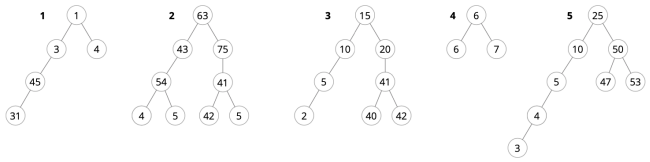
Solution

Question 3: (🕓 *10 minutes*)
Ecrivez un programme python qui permet d'imprimer tous les nombres impairs à partir de 1 jusqu'à un nombre n défini par l'utilisateur (qui doit être supérieur à 1) : Exemple : si n = 6, résultat attendu : 1, 3, 5

Solution

```
1  def displayOddNumbers(limit):
2      for nb in range(limit+1):
3          if nb % 2 == 1:
4              print(nb)
5
6  limit = int(input("What is the limit of the function displayOddNumbers(limit)? "))
7
8  print("Odd numbers between 0 and " + str(limit) + ": ")
9  displayOddNumbers(limit)
```

Question 4: (🕓) Lesquels (ou lequel) de ces arbres est un arbre binaire (binary tree) ? Donnez leur hauteur (height).



Solution

1. Il ne s'agit pas d'un arbre binaire car il n'y a pas decondition qui est remplie à chaque noeuds. Sa hauteur est de 3.
2. Il ne s'agit pas d'un arbre binaire car il n'y a pas de condition qui est remplie à chaque noeuds. Sa hauteur est de 3.
3. Il s'agit d'un arbre binaire car une condition peut être appliquée à chaque noeud. Sa hauteur est de 3.
4. Il s'agit d'un arbre binaire car une condition peut être appliquée à chaque noeud. Sa hauteur est de 1.
5. Il s'agit d'un arbre binaire car une condition peut être appliquée à chaque noeud. Sa hauteur est de 4.

Question 5: (*10 minutes*) **Trie complexité**

Trier la liste de fonctions suivante selon leur croissance assymptotique :

$$n^{\sqrt{n}}, n \cdot log(n), n^{1/log(n)}, log(log(n)), \sqrt{n}, 3^n/n^5, 2^n \tag{1}$$

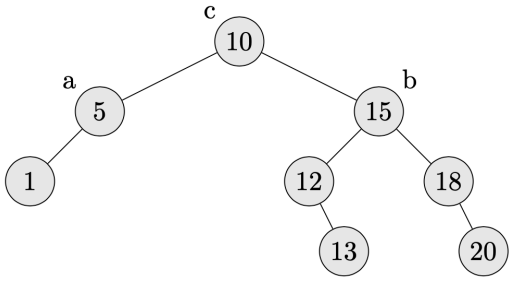
Solution

- D'abord la constante : $n^{1/log(n)} = (2^{log(n)})^{1/log(n)}$
- Ensuite le $log(log(n))$
- Puis $n^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n} \cdot log_2(n)}$
- Puis 2^n
- Enfin $3^n/n^5$

Question 6: (*20 minutes*) **Théorie**

1. Donner en pseudo code un algorithme ayant une complexité temporelle de O(log n) qui prend comme argument un tableau trié A[1, ..., n] de n nombres et une clé k et qui retourne "OUI" si A contient k et "NON" sinon.
2. Quelle est la hauteur maximum et la hauteur minimale d'un arbre binaire de recherche ayant n éléments ? Quel arbre est meilleur ? Justifier.
3. Considerer l'arbre binaire suivant :
   Dessiner les arbres obtenus après executions de chacune des opérations suivantes (chaque opération

$T =$



est exécutée en commençant par l'arbre ci-dessus - les opérations ne sont pas exécutée séquentiellement).

(a) TREE-INSERT(T, z) avec z.key = 0
(b) TREE-INSERT(T, z) avec z.key = 17
(c) TREE-INSERT(T, z) avec z.key = 14
(d) TREE-DELETE(T, a)
(e) TREE-DELETE(T, b)
(f) TREE-DELETE(T, c)

Solution

1. Etant donné que les nombres du tableau A sont triés, nous utilisons l'algorithme de recherche binaire. L'algorithme de recherche binaire prend comme argument un tableau A, une clé k, des indices p et q et retourne "OUI" si A[p . . . q] contient la clé k et "NON" autrement. Comme A[p . . . q] est trié, nous pouvons comparer k avec l'élément du milieu mid = $\lfloor (p+q)//2 \rfloor$ et :

   — Si A[mid] = k return "OUI"

   — Si A[mid] $>$ k, alors cherchons k dans le tableau A[p . . . (mid-1)] en appelant récursivement l'algorithme BINARY-SEARCH(A, k, p, mid-1)

   — Si A[mid] $<$ k, alors cherchons k dans le tableau A[(mid + 1) . . . q] en appelant récursivement l'algorithme BINARY-SEARCH(A, k, mid+1, q)

   The pseudo-code of the procedure is as follows :

```
1  def binary_search(A, k, p, q):
2      if (q < p):
3          return "NON" # array is empty so it doesn't contain k
4      else:
5          mid = (p+q)//2
6      if (A[mid] == k):
7          return "OUI"
8      elif (A[mid] > k):
9          return binary_search(A, k, p, mid-1)
10     else: # A[mid] < k
11         return binary_search(A, k, mid+1, q)
```

   Note that we solve the original problem by calling BINARY-SEARCH(A, k, 1, n).

2. Hauteur minimale et maximale d'un arbre binaire.
   — La hauteur maximum d'un arbre binaire est atteinte quand l'arbre n'est constitué d'une seule branche.

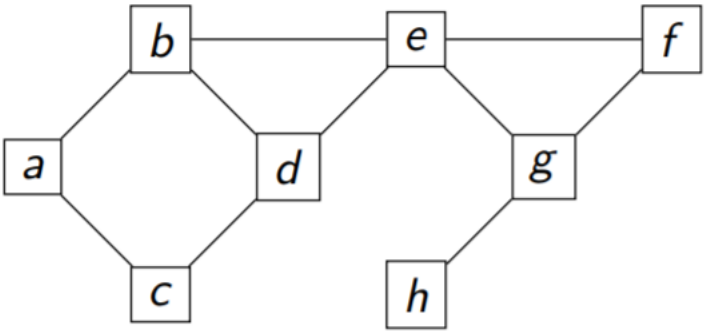
   — La hauteur minimum est atteinte lorsque l'arbre binaire est "complet" : nous ne pouvons pas ajouter un noeud sans augmenter la hauteur de l'arbre hauteur de un.

3. Après execution de chaque opération, nous obtenons :
   (a) Figure A : TREE-INSERT(T, z) avec z.key = 0
   (b) Figure B : TREE-INSERT(T, z) avec z.key = 17
   (c) Figure C : TREE-INSERT(T, z) avec z.key = 14
   (d) Figure D : TREE-DELETE(T, a)
   (e) Figure E : TREE-DELETE(T, b)
   (f) Figure F : TREE-DELETE(T, c)

Question 7: (*5 minutes*) **Breadth-First Search algorithm : Papier**

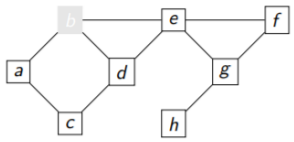
Le but du Breadth-first search (BFS) ou parcours en largeur est d'explorer le graphe à partir d'un sommet donné (sommet de départ ou sommet source).

Appliquez l'algorithme de BFS au graphe suivant :



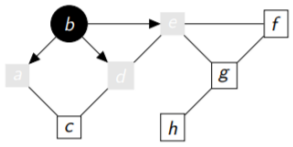
Solution

a)



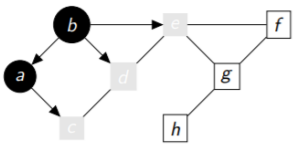
Q = [b]
0

b)



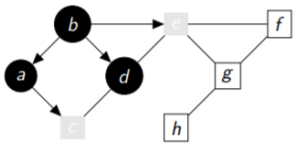
Q = [a, d, e]
1, 1, 1

c)



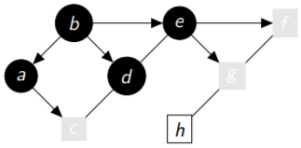
Q = [d, e, c]
1, 1, 2

d)



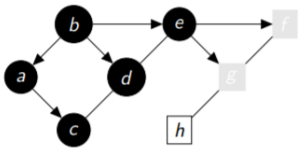
Q = [e, c]
1, 2

d)



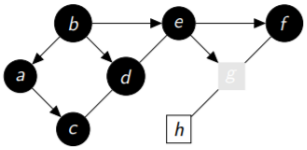
Q = [c, f, g]
2, 2, 2

e)



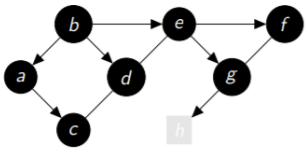
Q = [f, g]
2, 2

f)



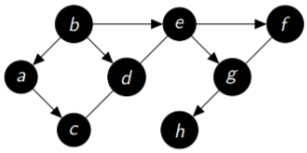
Q = [g]
2

g)



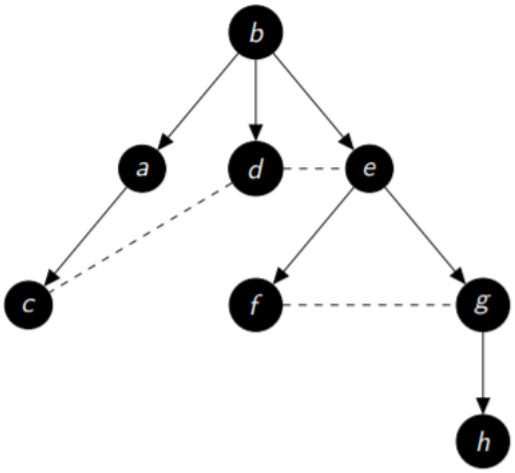
Q = [h]
3

h)



Q = Ø

Ci-dessous l'arborescence associée au parcours.



L'ordre de parcours est : ligne après ligne (de la racine vers les feuilles) et de gauche à droite pour une ligne.