# Mathematik Cheat Sheet

## 1. Allgemeines

### 1.1. Zahlenmengen

- $\mathbb{N}$ = natürliche Zahlen = $\{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ = ganze Zahlen = $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ = rationale Zahlen, z.b. $\frac{p}{q}$ (p, q $\in \mathbb{Z}$, q $\neq$ 0)
- $\mathbb{R}$ = reelle Zahlen, „alle Zahlen", z.b. $\pi$
- $\mathbb{C}$ = komplexe Zahlen = {a + ib | i = $\sqrt{-1}$, a,b $\in \mathbb{R}$ }

**Für Intervalle**: Runde Klammer schließt die Grenzen aus, Eckige Klammern ein.

### 1.2. Binomialkoeffizienten

- $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\cdot(n-j)!}$ ,**für** $j \leq n$
- $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$
- $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

### 1.3. Binomische Formeln

| | |
|---|---|
| 1. Binomische Formel: | $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ |
| 2. Binomische Formel: | $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ |
| 3. Binomische Formel: | $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ |
| Bnomischer Lehrsatz: | $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$ |

Den Binomischen Lehrsatz kannst du auch aus dem pascalschen Dreieck entnehmen.

### 1.4. Quatratische Gleichung

#### 1.4.1. p-q Formel

Grundlage ist ein Polynom: $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

#### 1.4.2. Mitternachtsformel

Grundlage ist ein Polynom: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### 1.5. Potenzrechnung

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad e^{\ln x} = x$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad -a^{-1} = \frac{-1}{a} = \frac{a^{-1}}{-1}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

### 1.6. Bruchrechnung

| | | |
|---|---|---|
| Division | $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ | Multiplizieren mit dem Kehrwert |
| Multiplikation | $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ | |
| Kürzen | $\frac{2}{2\cdot 3} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ | Nur Faktoren, keine Summanden!! |

**Trick 17:** $\frac{x-1}{x+4} = \frac{x+4-5}{x+4} = \frac{x+4}{x+4} - \frac{5}{x+4} = 1 - \frac{5}{x+4}$

### 1.7. Wurzelrechnung

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ wenn } b \neq 0$$

### 1.8. Sinus & Cosinus

| Bogenmaß | Grad | $\sin x$ | $\cos x$ | $\tan x$ |
|---|---|---|---|---|
| $0\pi$ | $0°$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $\frac{1}{6}\pi$ | $30°$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\frac{1}{4}\pi$ | $45°$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $1$ |
| $\frac{1}{3}\pi$ | $60°$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{1}{2}\pi$ | $90°$ | $1$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $\frac{2}{3}\pi$ | $120°$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ |
| $\frac{3}{4}\pi$ | $135°$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-1$ |
| $\frac{5}{6}\pi$ | $150°$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\frac{1}{1}\pi$ | $180°$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\frac{7}{6}\pi$ | $210°$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\frac{5}{4}\pi$ | $225°$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $1$ |
| $\frac{4}{3}\pi$ | $240°$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{3}{2}\pi$ | $270°$ | $-1$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $\frac{5}{3}\pi$ | $300°$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ |
| $\frac{7}{4}\pi$ | $315°$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-1$ |
| $\frac{11}{6}\pi$ | $330°$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cong 0.70710678$ und $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cong 0.8660254$

sowie $\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0577350269$

### 1.9. Ableitung trigonometrischer Funktionen

$$\begin{array}{ccc} -\cos(x) & \rightarrow & \sin(x) \\ \uparrow & & \downarrow \\ -\sin(x) & \leftarrow & \cos(x) \end{array}$$

$$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$(\cot(x))' = -\frac{1}{sin^2(x)}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arccot}\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

## 2. Mengenlehre

### 2.1. Definition

Ist $E$ eine Eigenschaft, die ein Element haben kann oder auch nicht, so beschreibt man die Menge der $E$ erfüllenden Elemente durch:

A = $\{x | x$ hat Eigenschaft $E\}$

### 2.2. Teilmengen

Sind A und B Mengen, so heißt A Teilmenge oder auch Untermenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

**Merke zu Teilmengen**

1. Jede Menge A ist Teilmenge von sich selbst, das heißt $A \subset A$
2. Jede Menge A hat die leere Menge als Teilmenge, das heißt: $\emptyset \subset A$
3. Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so folgt $A \subseteq C$
4. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$

### 2.3. Operationen

| | | |
|---|---|---|
| $A \subseteq B$ | | A ist Teilmenge von B |
| $A \cup B$ | A vereinigt B | $A \cup B = \{x | x \in A$ oder $x \in B\}$ |
| $A \cap B$ | A geschnitten B | $A \cap B = \{x | x \in A$ und $x \in B\}$ |
| $A \setminus B$ | A ohne B | $A \setminus B = \{x | x \in A$ und $x \notin B\}$ |
| $\mathcal{P}(A)$ | Potenzmenge A | Potenzmenge der Menge A |
| $A \in B$ | A Element von B | A ist ein Element von B |
| $A \notin B$ | A kein Element von B | A ist nicht in B enthalten |

### 2.4. Potenzmenge

Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen.

> Es sei A eine Menge. Dann versteht man unter der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge A die Menge aller Teilmengen von A. Auch die Menge $\emptyset$ hat eine Teilmenge es gilt: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Berechnet wird die Potenzmenge mit Hilfe von $2^{|A|}$ (Zwei hoch Kardinalität von A)

### 2.5. Kardinalität

Beschreibt die Menge aller Elemente einer Menge.

> Es sei A eine endliche Menge. Dann versteht man unter der Kardinalität oder auch Mächtigkeit von A die Anzahl der Elemente von A und schreibt dafür $|A|$, manchmal auch $\#A$. Hat A unendlich viele Elemente, so sagt man, A hat die Kardinalität unendlich, und schreibt $|A| = \infty$

**Beispiel**

$M = \{1, 2\}$
$P(M) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
Nicht jedoch $\{2, 1\}$! Es gilt $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

### 2.6. Komplement

Das Komplement ist die Differenz zwischen gegebener Menge und Grundmenge.

### 2.7. Lösungsalgorithmus

**Arbeitsablauf**

1. $\setminus$ entfernen
2. De Morgan'sche Gesetze anwenden
3. Assoziativ- und Distributiv- Gesetze im Wechsel mit dem Vereinfachen

### 2.8. Vereinfachen

| | | |
|---|---|---|
| $A \cup A = A$ | $A \cap \emptyset = \emptyset$ | $\overline{\overline{A}} = A$ |
| $A \cap A = A$ | $A \cup \overline{A} = G$ | $\overline{\emptyset} = G$ |
| $A \cup G = G$ | $A \cap \overline{A} = \emptyset$ | $\overline{G} = \emptyset$ |
| $A \cap G = A$ | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | $\emptyset \neq \{\emptyset\}$!!! |
| $A \cup \emptyset = A$ | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | |

### 2.9. Regeln

| | |
|---|---|
| Kommutativ | $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ |
| Assoziativ | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$<br>$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ |
| Distributiv | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| Adjunktiv | $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$ |
| De Morgan'sche Regeln | $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$<br>$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ |
| De Morgan'sche Gesetz | $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ |

### 2.10. Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt $A \times B$ (A kreuz B) ist die Menge aller geordneten Paare $(a, b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$

## 3. Relationen

### 3.1. Definition

Eine (zweistellige) Relation $R$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen $A$ und $B$.

$R \subseteq A \times B$

### 3.2. Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation ist eine zweistellige Relation auf einer Ausgangsmenge $M$ mit bestimmten Eigenschaften.

$R \subseteq M \times M$

**Eigenschaften**

1. **Reflexivität**
   Jedes Element der Ausgangsmenge $M$ steht mit sich selbst in Beziehung.
   Für alle $a \in M$ gilt $(a, a) \in R$
2. **Symmetrie**
   Zu jedem Paar $(a, b)$ ist auch die Umkehrung in $R$ enthalten.
   Wenn $(a, b) \in R$, dann ist auch $(b, a) \in R$
3. **Transitivität**
   Stehen drei Elemente verkettet in Beziehung, dann stehen sie auch direkt in Beziehung.
   Wenn $(a, b), (b, c) \in R$ dann ist auch $(a, c) \in R$

# 4. Aussagenlogik

## 4.1. Operationen

| | | |
|---|---|---|
| $A \wedge B$ | A und B | Konjunktion |
| $A \vee B$ | A oder B | Disjunktion |
| $A \leftrightarrow B$ | A genau dann, wenn B | Äquivalenz oder Bijunktion |
| $A \rightarrow B$ | wenn A dann B | Implikation oder Subjunktion |

## 4.2. Regeln

| | |
|---|---|
| Kommutativ | $A \wedge B = B \wedge A$<br>$A \vee B = B \vee A$<br>$A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$ |
| Assoziativ | $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$<br>$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$<br>$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$ |
| Distributiv | $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$<br>$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$<br>$A \rightarrow (B \vee C) = (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$<br>$A \rightarrow (B \wedge C) = (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$<br>$(A \vee B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$<br>$(A \wedge B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$ |
| Adjunktiv (Absorbtion) | $A \wedge (A \vee B) = A$<br>$A \vee (A \wedge B) = A$ |
| Klammerntausch | $A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \wedge B) \rightarrow C$ |
| Kontraposition | $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$ |
| de Morganschen Regeln | $\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$<br>$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ |
| Umwandeln | $A \wedge B = \neg (A \rightarrow \neg B)$<br>$A \vee B = \neg A \rightarrow B$<br>$A \rightarrow B = \neg A \vee B$<br>$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$<br>$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ |
| Vereinfachen | $A \wedge \neg A =$ immer Falsch!<br>$A \vee \neg A =$ immer Richtig!<br>$A \wedge \neg A \vee B \wedge A = B \wedge A$ |

## 4.3. Beispiel

Detleff fragt Anna: "Liebst du Peter, oder ist es nicht so, dass du Peter oder mich liebst?", darauf Antwortet Anna "Nein".
Für die Aussage Anna liebt Peter setzen wir P und für Anna liebt Detleff G. Die Frage lautet somit "Gilt P, oder gilt nicht P ∧ G?". Formal bedeutet das:

$$P \vee \neg (P \vee G)$$

Da Anna mit "neinäntwortet, muss der ganze Block negativiert werden.

$$\neg (P \vee \neg (P \vee G))$$

## 4.4. Wahrheitstafeln

**Konjunkiton** (UND)

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**Disjunktion** (ODER)

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

**Bijunktion** (ist richtig wenn beide gleich sind)

| $A$ | $B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**Implikation** (aus A folgt B)

| $A$ | $B$ | $A \rightarrow B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \wedge B \rightarrow A \vee B$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

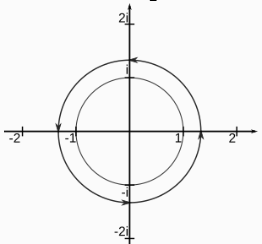
# 5. Komplexe Zahlen

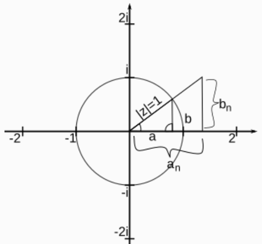
## 5.1. Notation

**Kartesische Form**
$z = a + b \cdot i$

**Trigonometrische Form / Polarform**
$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

## 5.2. Visualisierung




| | | |
|---|---|---|
| $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ | $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ | siehe Tabelle |
| $\tan(\varphi) = \frac{\|b\|}{\|a\|}$ | $\cos(\varphi) = \frac{a}{\|z\|}$ | $\sin(\varphi) = \frac{b}{\|z\|}$ |

| x,y | (in Grad) | (im Bogenmaß) |
|---|---|---|
| $a > 0, b \geq 0$ | $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ | $\varphi = arctan \frac{b}{a}$ |
| $a < 0$ | $\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 180°$ | $\varphi = arctan \frac{b}{a} + \pi$ |
| $a > 0, b \leq 0$ | $\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 360°$ | $\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 2\pi$ |
| $a = 0, b > 0$ | $\varphi = 90°$ | $\varphi = \frac{\pi}{2}$ |
| $a = 0, b < 0$ | $\varphi = 270°$ | $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ |
| $a = 0, b = 0$ | $\varphi = 0°$ | $\varphi = 0$ |

## 5.3. Potenzen von i

| | |
|---|---|
| $i = \sqrt{-1}$ | $i^4 = 1$ |
| $i^2 = -1$ | $i^5 = i$ |
| $i^3 = -i$ | $i^6 = -1$ |

## 5.4. Rechenoperationen

**Addition**

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

**Subtraktion**

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

**Multiplikation**

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| (\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1) i) \cdot |z_2| (\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) i) = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) i)$$

**Division**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)\, i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} i$$

**Potenzierung**

$$z^n = (a + bi)^n = (|z| \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi i))^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi) i)$$

**Wurzel** $\{k \in \mathbb{N} | k = 0 \text{ bis } n - 1\}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a + bi}$$

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) i\right)$$

Es gibt immer $n$ Ergebnisse die in $z_k$ für $k = 0$ bis $k = n - 1$ berechnet werden.

# 6. Vektoren und Matrizen

Matrizen vom Typ (m,1) sind Vektoren (1-Spaltig). Die Zeilen eines Vektors sind auch die Dimension des Vektors. Ein Zeilenvektor ist eine Matritze vom Typ (1, n).

## 6.1. Rechenoperationen

### 6.1.1. Skalar

Die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar (einer Zahl) c.

$$-1 \cdot A = -A$$
$$c \cdot A = A \cdot c = Ac = cA$$
$$c_1 \cdot (c_2 \cdot A) = (c_1 \cdot c_2) \cdot A$$
$$(c_1 + c_2) \cdot A = c_1 \cdot A + c_2 \cdot A$$
$$c \cdot (A + B) = cA + cB$$

### 6.1.2. Multiplikation

- Zeile von Matrix A mal Spalte von Matrix B
- Matrix A muss so viele Spalten haben wie Matrix B Zeilen hat
- Nicht kommutativ!! $A \cdot B \neq B \cdot A$

### 6.1.3. Determinante

- Ist $\det A \neq 0$ dann ist die Matrix invertierbar
- Ist $\det A = 0$ dann ist die Matrix Linear abhängig
- Schachbrettmuster (beginnend oben links mit + - + -..)
- Entwicklung am einfachsten nach der Spalte oder Zeile mit den meisten 0er.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$detA = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4 \cdot (1 * 5 - 1 * 3) = -8$$

## 6.2. Inverse Matrix

Invertierbar sind nur Matrizen des Typ (n, n) also quadratische Matrizen. Eine Matrix ist dann invertierbar wenn die Determinante $\neq 0$ ergibt.

| | |
|---|---|
| $A^{-1} \cdot A = I$ | $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ |
| $A \cdot A^{-1} = I$ | $I \cdot A = A$ |
| $I \cdot A^{-1} = A^{-1}$ | |

# 7. Vektoren

## 7.1. Vektor aufstellen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

## 7.2. Rechenoperation

| | |
|---|---|
| Addition | $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ |
| Multiplikation | $\vec{a} = c \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb_1 \\ cb_2 \end{pmatrix}$ |
| Betrag | $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_1{}^2}$ |
| Skalarprodukt | $\vec{a} * \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ |
| Kreuzprodukt | $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ |

Ist das Skalarprodukt = 0 dann sind die Vektoren orthogonal (senkrecht) zueinander!

# 8. Geraden und Ebenen

## 8.1. Schnittpunkte

**Gerade** Den Schnittpunkt von zwei geraden erhält man indem man die beiden Geradengleichungen gleich setzt.

**Ebene** Bei Einer Ebene funktioniert die Berechnung des Schnittpunktes analog zu dem einer Geraden.

## 8.2. Winkel

**Gerade und Gerade**

$$\cos\alpha = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right|$$

**Gerade und Ebene**

$$\cos\alpha = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right|$$

## 8.3. Formen

### 8.3.1. Geraden

Allgemeine Form:

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

$\vec{p}$ = Stützvektor und $\vec{u}$ = Richtungsvektor.

### 8.3.2. Ebenen

| | |
|---|---|
| Parameterform | $E: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ |
| Normalform | $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ |

$\vec{p}$ = Stützvektor und $\vec{u}, \vec{v}$ = Spannvektor

**Umformen:**

1. Parameter → Normalform
2. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ (Kreuzprodukt der Richtungsvektoren
3. $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$
4. Koordinatenform aufstellen
   $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$ (Normalform aus multipliziert)

# 9. Grenzwerte

Der Grenzwert oder Limes einer Folge ist eine Zahl, der die Folge beliebig nah kommt. Eine Folge ist **konvergent** wenn sie solch einen Wert besitzt, ansonsten **divergent**

## 9.1. Berechnung

Bei $n \to \infty$ teilt man durch die variable mit der höchsten Potenz, das Ergebnis ist dann der Grenzwert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2n^2 - 1}{\lim_{n\to\infty} n^2 + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

**Ergebnisse**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1} = 1$ | $\frac{1}{0} = \infty$ | $\frac{0}{1} = 0$ | $\frac{1}{17} = \frac{1}{17}$ |

**Vorsicht** bei $\lim_{n\to a}$, also Limes gegen eine Zahl a. Zunächst setzt man die Zahl a ein und prüft das Ergebnis. Es darf nicht $\frac{0}{0}$ raus kommen. Es wird sich im Zähler und/oder Nenner ein $n - a$ befinden. Die Folge muss dann in Linearfaktoren zerlegt werden und danach die 3 eingesetzt werden.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 5x}{2x^2 + 32x - 34} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(x-5)}{2(x-1)(x+17)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-5)}{2(x+17)} = \frac{-4}{36} = -\frac{1}{9}$$

**Ablauf bei $\lim_{n\to a}$**

1. Schauen ob man etwas ausklammern kann oder muss
2. Anwendung der p-q Formel um die Nullstellen zu berechnen
3. Sind die Nullstellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 5$ dann ist die Auflösung der Binomischen Formel $(x+4)(x-5)$
4. Binomische Formel zur Kontrolle ausmultiplizieren
5. Nun im Zähler und Nenner kürzen
6. Danach wird $a$ eingesetzt und das Ergebnis ist der Grenzwert.

**Der Satz von l'Hospital** Ist Anwendbar wenn im Zähler und Nenner 0 oder beide $\infty$ sind.
Hierbei wird der Zähler und Nenner separat abgeleitet und der Limes vom somit entstandenen Bruch berechnet. Hierbei gilt wieder die Ergebnistabelle oben.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{e^x - e^(-x)} = \frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2x \cdot \cos 2x}{e^x + e^(-x)} = \frac{0}{1} = 0$$

# 10. Konvergenz von Reihen

Es sei eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ gegeben. So ist diese (absolut) Konvergent nach folgenden Kriterien (siehe auch Formelsammlung S. 76):

| | |
|---|---|
| Quotientenkriterium | $q = \lim i \to \infty \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right|$ |
| Wurzelkriterium | $q = \lim i \to \infty \sqrt[i]{\lvert a_i \rvert}$ |
| Leibnitzkriterium | siehe 10.3 |
| Majorantenkriterium | siehe 10.2 |
| Minorantenkriterium | siehe 10.1 |

- $q < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert
- $q > 1 \Rightarrow$ Reihe divergiert
- $q = 1$ Aussage unmöglich!

Gegeben sind die Reihen:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i ; \sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

## 10.1. Majorantenkriterium

ist $b_i \geq 0$ konvergent für alle $i$. Gilt dann $|a_i| \leq b_i$ für alle $i$, so konvergiert die Reihe mit $a_i$ absolut.

## 10.2. Minorantenkriterium

ist $b_i$ eine divergente Reihe mit $b_i \geq 0$ für alle $i$. Gilt dann $|a_i| \geq b_i$ für alle $i$, so konvergiert die Reihe mit $a_i$ nicht.

## 10.3. Leibnitzkriterium

**Bedingungen**

1. Eine Alternierende Reihe
2. $\lim_{i\to\infty} u_i = 0$
3. strenge Monotonie $\forall i \Rightarrow u_i > u_{i+1}$ wenn $u_i$ positiv oder $u_i < u_{i+1}$ falls sie negativ sind.

Es sei $u_i$ eine Folge von Zahlen, die entweder alle positiv oder alle negativ sind. Somit entspricht die folgende Reihe einer **alternierenden** Reihe:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i u_i$$

**Vorsicht!**

Dies bedeutet nicht . . . Ausführliche Konvergenzbedingngen Seite 73 / 74 in Formelsammlung

# 11. Potenzreihen

Es sei:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i$$

## 11.1. Konvergenzradius

Der Konvergenzradius $r$ beschreibt den maximalen Abstand von $x_0$ zu einem Konvergenzpunkt. Konvergent sind alle $r$ für die gilt:

$$< x_0 - r, x_0 + r >$$

Das verhalten im Rendpunkten muss seperat bestimmt werden. Die spitzen Klammern sund dann gegen ] (wenn die Grenze enthalten ist) oder ) (wenn die Grenze nicht enthalten ist) auszutauschen.
Zur Berechnung gibt es die folgenden beiden Methoden:

$$r = \lim_{i\to\infty} \left| \frac{c_i}{c_{i+1}} \right|$$

$$r = \frac{1}{\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|c_i|}}$$

## 11.2. Operationen

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i$$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x - x_0)^i$$

## 11.3. Taylorreihen

Die Taylorreihe von f ist definiert durch:

$$T_f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i$$

Voraussetzung ist das f unendlich eof differenzierbar ist. Bricht man die Summation nach n Summanden ab erhält man das Taylorpolynom vom Grad n. **Restglieddarstellungen**

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{n+1}(t) dt$$

und

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

# 12. Funktionen

## 12.1. Grundlagen

| | |
|---|---|
| Lineare Funkt. | $y(x) = mx + b$ |
| Tangente | $y(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) - x_0$ |
| Normale | $y(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot x + f(x_0) + \frac{x_0}{f'(x_0)}$ |
| Quadr. Funkt. | $y(x) = ax^2 + 2bx + c$ |
| Produktregel | $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0)$ |
| Quotientenregel | $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}$ |
| Kettenregel | $h(x) = f(x) \circ g(x)$ |
| | $h'(x) = g'(x_0) \cdot f'(g(x_0))$ |
| Exp. Funkt. | $f(x) = a^x \to f(x)' = \ln a \cdot a^x$ |

## 12.2. Polynomdivision

$$\frac{x^2 + 3x + 16}{x - 2}$$

**Ablauf Polynomdivision**

1. Größte Exponent aus beiden Polynomen ermitteln
2. Dividieren und zurückmultiplizieren
3. Substrahieren und von vorne beginnen
4. Rest aufschreiben

## 12.3. Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2 + 16}{x \cdot (x - 2)}$$

**Partialbruchzerlegung bei reelen Nullstellen**

1. Nennerpolynom in Linearfaktoren aufteilen
2. Aufteilen der Linearfaktoren auf die Partialbrüche
3. Im Zähler steht jeweils eine Konstante
4. Nun mit dem Nennerpolynom multiplizieren
5. Die Nenner aus den Brüchen kürzen
6. Die Nullstellen der Linearfaktoren einsetzen
7. Die Variablen ausklammern und nach Exponent sortieren.
8. Restliche Konstanten mit einem LGS bestimmen

## 12.4. Flächenberechnung

Die Fläche unter einer Kurve entspricht ihrem Integral.

**zwischen zwei Funktionen**

1. die Funktionen gleich setzen: $f(x) - g(x) = h(x)$
2. Schnittpunkte ermitteln $h(x) = 0$
3. $h(x)$ Integrieren und die Nullstellen als Grenzen einsetzen.
4. Mehrere Schnittpunkte müssen einzeln berechnet werden.
5. Ergebnisse zusammenrechnen.

## 12.5. Kurvendiskussion

In $x_0$ gilt:

| | |
|---|---|
| lokales Max-/Minimum in | $f'(x_0) = 0$ |
| lokales Minimum in | $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f''(x_0) > 0$ |
| lokales Maximum in | $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f''(x_0) < 0$ |
| lokales Minimum in | n ist gerade $\Rightarrow f^n(x_0) > 0$ |
| locales Maximum in | n ist gerade $\Rightarrow f^n(x_0) < 0$ |
| Wendepunkt | Bedingung: $f''(x_0) = 0$ |
| | Vorzeichenwechsel: $f' \to f'''(0) \neq 0$ |
| Sattelpunkt | zusätzlich zu Wendepunkt-bed.: $f'(x) = 0$ |
| Pol | $\lim x \to x_0 f(x) = \pm\infty$ |

Auf dem Intervall I gilt:

| | |
|---|---|
| konvex | $f''(x) \geq 0 \forall x \in I$ |
| konkav | $f''(x) \leq 0 \forall x \in I$ |
| monoton steigend | $f'(x) \geq 0 \forall x \in I$ |
| monoton fallend | $f'(x) \leq 0 \forall x \in I$ |
| streng monoton steigend | $f'(x) > 0 \forall x \in I$ |
| streng monoton fallend | $f'(x) < 0 \forall x \in I$ |

Wendepunkt bedeutet der Drehsinn der Kurventangente wird geändert.

# 13. Integrale

Lineare Gleichung → einfache Ableitung

## 13.1. Analyse des Integrals

| | |
|---|---|
| Produkt | Partielle Integration<br>Substitution |
| Brüche | Umformen zu einem **Produkt**<br>Partialbruchzerlegung<br>Polynomdifision |

## 13.2. Substitutionsregel

**Voraussetzung** ist das es eine innere Funktion gibt!
Gegeben sind zwei Funktionien bei der die eine aus einer inneren und äußeren Funktion besteht und die andere als Ableitung der inneren Funktion geschrieben werden kann.

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

So lässt sich das Integral durch Substitution vereinfachen und das Ergebnis zurück substituieren.
**Beispiel:**

$$\int \frac{x^2}{x^3-17}dx = \int x^2 \cdot \frac{1}{x^3-17}dx$$

$$g(x) = x^3 - 17 \Rightarrow g'(x) = 3x^2$$

$$\frac{1}{3}\int 3x^2 \cdot \frac{1}{x^3-17}dx \Rightarrow \frac{1}{3}\int g'(x) \cdot f(g(x))dx$$

$$g'(x) = \frac{dg}{dx} \Rightarrow dg = g'(x)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{1}{g}dg = \frac{1}{3}ln(g) + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}ln(x^3 - 17) + c$$

## 13.3. Partielle Integration

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:
$\int \mathbf{f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) -} \int \mathbf{f(x) \cdot g'(x)dx}$

## 13.4. Anwendungen

**Uneigentliches Integral**

Ist eine der Grenzen des Integrals mit $\infty$ gegeben, so gilt für das Integral:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

und analog auch im positiven Bereich

**Volumen eines Rotationskörper**

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

**Bogenlänge**

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

## 13.5. Numerische Integration

Es gibt verschiedene Verfahren zur Berechnung von Näherungen von Integralen. Eines davon ist die **Trapezregel**:

$$T_n = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Die Schrittweite zwischen den betrachteten Punkten:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Für den Abstand zwischen Näherung und Integralwert gilt:

$$|T_n - \int_a^b f(x)dx| \le h^2 \cdot \frac{b-a}{12} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Eine genauere Methode bietet die **Simpsonregel**:

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

$$S_n = \frac{h}{3}(\Sigma_1 + 4 \cdot \Sigma_2 + 2 \cdot \Sigma_3)$$

Wobei gilt:
$\Sigma_1$ = Die Summe von $f_0$ und $f_{2n}$
$\Sigma_2$ = Die Summe von $f_i$ mit ungeradem i
$\Sigma_3$ = Die Summe von $f_i$ mit geradem i

Für die Genauigkeit gilt hier:

$$|S_n = \int_a^b f(x)dx| \le h^4 \cdot \frac{b-a}{180} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

# 14. Differenzialgleichung

## 14.1. Differenzierbarkeit einer Funktion

Gegeben ist eine Funktion f(x) deren Differenzierbarkeit in einem Punkt $x_0$ bestimmt werden soll. Dann gilt, wenn der $\lim_{x\to x_0}$ existiert, ist die Funktion für in $x_0$ Differenzierbar.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## 14.2. Differenzialgleichung 1. Ordnung

### 14.2.1. Trennung der Variablen

Gegeben ist eine Differenzialgleichung der Form:

$$y' = g(x) * h(y)$$

dann schreibt man diese um zu:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

und löst zu y auf.

### 14.2.2. Variation der Konstanten

mit reelen Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ wird eine Differenzialgleichung erster Ordung folgender Form **variierbare** Differenzialgleichung genannt:

$$y' = y \cdot g_1(x) + g_2(x) \quad (1)$$

**Lösungsweg mit Beispiel**

1. Untersuchen der Differenzialgleichung
$y' = -2xy + x \cdot e^{-x^2}$
2. Man erstellt die Lösung des homogenen Problems gemäß 14.2.1 :
$g_1(x) = -2x \Rightarrow y_h(x) = C \cdot e^{-x^2}$
3. Ersetzen (variieren) der Konstante $C$ durch $C(x)$
$y(x) = C(x) * e^{-x^2}$
4. Bestimmung der Ableitung $y'(x)$
$y'(x) = C(x)(-2x)e^{-x^2} + C'(x)e^{-x^2}$
5. Einsetzen der Gleichungen von Punkt 3. 4. in die Differenzialgleichug 1.
$C(x)(-2x)e^{-x^2} + C'(x)e^{-x^2} = (-2x)C(x) \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}$
$\Rightarrow C'(x)e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2}$
6. Bestimmung von $C'(x)$
$C'(x) = x$
7. Integrieren von $C'(x)$
$C(x) = \frac{x^2}{2} + K$
8. Einsetzen in die Gleichung von Punkt 3.
$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + K\right) \cdot e^{-x^2}$

## 14.3. Lineare Differenzialgleichung - Homogener Fall

**Lösungsweg**

1. Differenzialgleichung analysieren
2. Charakteristische Polynom aufschreiben
3. Die Nullstellen finden
4. Fundamentalmenge aufschreiben
5. Allgemeine Lösung aufschreiben / ableiten
6. Anfangswerte einsetzen
7. Lösung des Anfangswerteproblems aufschreiben

Sei die Differenzialgleichung der Form:

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

Dann bestimmt man das **charakteristische Polynom**

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Das charakteristische Polynom n-ter Ordnung hat nun k verschiedene **reelle Nullstellen** $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ mit der jeweiligen Vielfachheit $\mu_1 \ldots \mu_k$, wobei gilt $\mu_1 + \ldots \mu_k = n$
Dann bildet die Funktionenmenge

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{\mu_1 - 1}e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_k x}, \ldots x^{\mu_k - 1}e^{\lambda_k x}$$

ein **Fundamentalsystem** dieser Differenzielgleichung.
**Achtung bei komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms!!**
Für Gleichung 2. Ordnung sei die Form:

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

Dann gilt: $D = \frac{a_1{}^2}{4} - a_0 < 0$ (=komplexe Lösung)
Dann lässt sich der Lösungsweg wie folgt abkürzen:

$$\alpha = -\frac{a_1}{2}\text{und}\beta = \sqrt{-\left(\frac{a_1{}^2}{4} - a_0\right)}$$

$$(x) = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

## 14.4. Lineare Differenzialgleichung - Inhomogener Fall

Allgemein hat die Differenzialgleichung dann die Form:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

Allgemeine Lösung:

- Bestimmen der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung
- addieren einer speziellen Lösung $y_p(x)$ (**partikuläre Lösung**) Hierfür benötigt man meist eine **Ansatzfunktion**:

1. $b(x)$ ist in der Form $f(x) \cdot e^{ax}$
   - Dabei ist f(x) ein Polynom m-ten Grades und a eine reelle Zahl
   - Dann gilt: Ist a eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms so gibt es eine partikuläre Lösung der Form

     $$y_p(x) = x^k \cdot q(x) \cdot e^{ax}$$

     Mit einem Polynom q(x) vom Grad m. Ist a keine Nullstelle so ist k = 0 zu setzen.
   - Koeffizientenvergleich um q(x) zu bestimmen.
   - Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen Gleichung $y_h(x)$ und der partikulären Lösung $y_p(x)$
2. Die Differenzialgleichung hat die Form

   $$y' + ay = d_1sin(\omega x) + d_2cos(\omega x)$$

   - Feste reelle Zahlen $a, d_1, d_2, \omega$
   - Dann gibt es eine partikuläre Lösung der Form

     $$y_p(x) = b_1sin(\omega x) + b_2cos(\omega x)$$

     mit demselben $\omega$
3. Die Differenzialgleichung hat die Form

   $$y'' + a_1y' + a_0y = d_1sin(\omega x) + d_2cos(\omega x)$$

   - mit festen reellen Zahlen $a_0, a_1, d_1, d_2, \omega$
   - Dann gilt:
     - Ist $i\omega$ keine Nullstelle des charakt. Polynoms dann gibt es eine Lösung der Form:

       $$y_p(x) = b_1sin(\omega x) + b_2cos(\omega x)$$

     - sonst

       $$y_p(x) = x \cdot (b_1sin(\omega x) + b_2cos(\omega x))$$

# 15. Wahrscheinlichkeiten

### 15.1. Wahrscheinlichkeitsraum

Sei F ein Ereignisfeld, p eine Wahrscheinlichkeit auf F und $\Omega$ ein Ergebnisraum von F, so nenn man das Tripel $(\Omega, F, p)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum. $(F, p)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsfeld.

### 15.2. Zufallsgröße

Sei $(\Omega, F, p)$ ein **Wahrscheinlichkeitsraum**. Dann ist:
Eine auf $\Omega$ definierte reelle Funktion X heißt **Zufallsgröße**, wenn für jede reele Zahl x gilt: $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \in F$ (Abkürzung: $(X \leq x) \in F$)

Außerdem heißt für alle $x \in R$ durch $F_X(x) = p(X \leq x)$ definierte Funktion **Verteilungsfunktion** (kurz: Verteilung) von X **Eigenschaften einer Verteilungsfunktion:**

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$ für alle $x \in R$
- $F_X(x)$ ist auf ganz R monoton steigend.
- $$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$
  und
  $$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$
- $F_X(x)$ ist auf ganz R rechtsseitig stetig
- Für alle $a < b \in R$ ist:
  $$p(a < X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$
- Für alle $a < b \in R$ ist
  $$p(a < X < b) = p(X < b) - p(X \leq a)$$
  $$= \lim_{x \to b_{x<b}} F_X(x) - F_X(a)$$

### 15.3. Diskrete Verteilungen

hat nur endlich viele oder abzählbar viele Werte. Sei X eine dikrete Zufallsgröße mit Werten $\{x_k\}$ und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\{p_k\}$. Dann ist für jedes x die Verteilungsfunktion wie folgt zu berechnen:

$$F_X(x) = \sum_{k \text{ mit } x_k \leq x} p_k$$

### 15.4. Erwartungswert

nennt man

$$E(X) = \sum_k x_k \cdot p_k$$

von X, wenn X eine diskrete Zufallsgröße ist und $p_l$ die Einzelwahrscheinlichkeiten. Voraussetzung für dessen Existenz ist $\sum_k |x_k| \cdot p_k < \infty$
Es sei X eine diskrete Zufallsgröße mit Erwartungswert E(X). Dann nennt man im Fall der Existenz die Zahl $V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_k (x_k - E(X))^2 \cdot p_k$ **die Varianz von X**. Die Quadratwurzel daraus, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ nennt man die **Standardabweichung** der Zufallsgröße X.
Die Varianz ist genau dann gleich null, wenn die Verteilung der Zufallsgröße in einem Punkt konzentriert ist. $P(X = c) = 1$ Man nennt dies **Einpunktverteilung**

**Steinersche Gleichung**

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Es gilt:

$$p(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

**gleichverteilt**, wenn die Zufallsgröße X endlich viele Werte $x_1, x_2, x_3, ..x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_k = p(X = x_k) = \frac{1}{n}$$

für k = 1,2,...n annehmen kann. Dann gilt Erwartungswert

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

und die Varianz

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k)^2$$

### 15.5. Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße heißt binomialverteilt mit Parametern n und p, wenn sie die WErte k = 1, 2, ..n mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_k = p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

annehmen kann.
Es gilt dann für den Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$ und für die Varianz: $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

### 15.6. Normalverteilung

$$f_X(x) = \phi(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Es sei X eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsgröße. Dann gilt für alle reelen Zahlen a und b mit $a \leq b$:

$$p(X \leq a) = p(X < a) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$p(X \geq b) = 1 - p(X < b) = 1 - \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$p(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

**Ist** $\Phi(-x)$ gilt immer $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$!
**Tabelle** der Standardisierten Normalverteilung MAI10 S. 79

### 15.7. Poisson-Verteilung

Ist anwendbar, wenn bei der Binomialverteilung ein sehr großes n gegenüber einem kleinem p steht. Es gilt dann

$$\lim_{n \to \infty_{n*p \to \lambda}} p^k (1 - p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Eine Zufallsgröße X besitzt eine Poisson-Verteilung, wenn sie die abzählbar unendlich vielen Werte k =0, 1, 2, 3... mit den Einzelwahrschinlichkeiten

$$p_k = p(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

für k = 0,1,2... annehmen kann. $\lambda = n \cdot p$ Für die Zufallsgröße X gilt dann: Erwartungswert $E(X) = \lambda$ und Varianz $V(X) = \lambda$