Задача для допуска

Задача 1.

Постановка задачи

Требуется найти корни кубического уравнения методом бисекции (деления отрезка пополам).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Задание

1. Провести отделение корней аналитически, в зависимости от параметров a, b, cd

2. Написать программу, выполняющую методом дихотомии следующие действия:

а) Отделение корней

б) Уточнение корней

3. Провести тестирование программы на разные входные параметры a, b, cd

Примечание. В программе также нужно учитывать шаг Δ для выделения корней и заданную точность ϵ.

Задача 2.

Вывести формулу и разделенной разности k-го порядка и доказать ее справедливость методом математической индукции

Задача 3.

Вывести погрешность интерполяционной квадратурной формул трапеции и Симпсона.

Примечание. Также в необходимый минимум для допуска на экзамен является 20% правильно решенных задач на контрольных работах. Контрольных работ будет 2: Промежуточная перед контрольной неделей и финальная перед зачетной неделей.

Лабораторные работы

Лабораторная работа №1

Постановка задачи

Пусть имеются некоторые данные $(x_i, f_i); i = 0, 1, ..., N$ где $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$. Требуется интерполировать эти данные, используя интерполяционный полином и кубический сплайн.

Задание

1. Используя значения функции $f_i = f(x_i)$ на равномерной сетке $x_i = a + ih$, где $h = (b - a)/N$, образовать таблицу исходных данных $(x_i, f_i); i = 0, 1, ..., N$.

2. Написать программы, реализующие интерполяцию интерполяционным полиномом и кубическим сплайном.

3. Для тестирования программ в качестве f использовать кубический полином.

4. Построить интерполяционные кривые интерполяционного полинома и кубического сплайна и сравнить их с графиком исходной функции.

5. Рассмотреть поведение интерполяционного полинома и кубического сплайна при увеличении числа узлов интерполяции.

Примечание. У каждого студента будет своя функция.

Лабораторная работа №2

Постановка задачи

Написать программу нахождения численного решения определенного интеграла [1] [2] с помощью интерполяционных квадратурных формул:

$$I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

где функция f не имеет особенностей на конечном отрезке $[a, b]$.

Задание

1.Вычислить значения подынтегральной функции $f_i = f(x_i)$ на равномерной сетке $x_i = a + ih$, $h = (b - a)/N$, $i = 0, 1, ..., N$ и найти приближенное значение интеграла $I(f)$ по двум составным квадратурным формулам.

2. Сравнить полученные результаты, применив правило Рунге

Примечание. У каждого студента свой определенный интеграл.

Лабораторная работа №3

Постановка задачи

Найти решение системы алгебраических уравнений [1], [2], [3]:

$$Ax = b$$

и исследовать свойства матрицы A

Задание

1. Решить систему $Ax = b$ двумя прямыми и итерационными методами решения СЛАУ. В итоговых программах должны быть приведены 4 метода.

2. Для матрицы A выполнить: LU и QR разложения. Привести: $||A||_k$ и $\nu_k(A)$; $||L||_k$ и $\nu_k(L)$; $||U||_k$ и $\nu_k(U)$; $||Q||_k$ и $\nu_k(Q)$; $||R||_k$ и $\nu_k(R)$ для $k = 1, 2, \infty$. Сделать вывод об обусловленности матрицы A и о матрицах, полученных в следствии разложения.

3. Решить систему $Ax = b$ для A - трехдиагональной матрицы методом прогонки.

4. Выполнить проверку полученного решения.

Примечание. У каждого студента своя матрица для пунктов 1 и 2. На приеме задач необходимо демонстрировать решение СЛАУ на других матрицах, предложенных преподавателем.

Лабораторная работа №4

Постановка задачи

Найти корни нелинейного уравнения [1], [2]:

$$f(x) = 0 \quad x \in [a, b]$$

где f - непрерывная и гладкая функция. Задача включает в себя два этапа: 1) отделение корней; 2) уточнение корней.

Задание

1. Отделить корни.

2. Уточнить корни методом бисекции (деления отрезка пополам) до точности ϵ

3. Уточнить корни двумя итерационными методами до точности ϵ. Сравнить использованные методы. Графическая иллюстрация.

Примечание. У каждого студента свой набор уравнений.

Лабораторная работа №5

Постановка задачи

Решить дифференциальную задачу

$$F[y(x)] = 0,$$

используя методы конечных разностей [2], [4], [5].

Задание

1. Составить разностную схему с с: $k = 1$, $k = 2$, $k = 4$ - порядком аппроксимации дифференциальной задачи. Проверить устойчоивть полученной разностной схемы, используя теорему Лакса.

2. Аналитически показать порядок аппроксимации и главные члены невязки.

3. Показать аналитически порядок сходимости разностных схем.

4. Используя правило Рунге, показать численно порядок сходимости разностных схем.

5. Построить графики для трех схем.

Лабораторная работа №6

Постановка задачи

Методами конечных разностей решить задачу Коши для одномерного нелинейного уравнения переноса [4], [5]

$$u_t + f(u)_x = 0$$

Задание

1. Построить численное решение задачи Коши для одномерного уравнения переноса для функций $f(u) = cu$, где $c = const$, и $f(u) = \frac{u^2}{2}$ двумя разностными схемами.

2. Построить графики численного и точного решения на фиксированный момент времени (момент времени выбрать самостоятельно).

3. Если точное решение не определено в пространстве элементарных функций, то показать сходимость численного решения на последовательности сгущающихся сеток.

3. Вывести устойчивость и монотонность разностных схем для случая линейного уравнения переноса.

Список литературы

[1] *Шарый С.П.* Курс вычислительной математики

[2] *Самарский А.А. Гулин А.В.* Численные методы, Изд. М.:Наука, 1989, 430 с.

[3] *Сорокин С.Б.* Вычислительные методы линейной алгебры. Конспект лекций с задачами

[4] *Остапенко В.В.* http://e-lib.nsu.ru/dsweb/Get/Resource-7456/page00000.pdf

[5] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. Изд. М.:Наука, 1977, 657 с.

[6] *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. Изд. М.:Наука, 1977, 440 с.