① VECTORES EN $\mathbb{R}^3$ (VECTORES ESPACIALES)

Los vectores en $\mathbb{R}^3$, llamados vectores espaciales, conservan las propiedades de suma vectorial y multiplicación escalar en $\mathbb{R}^2$. Es decir
Sean:

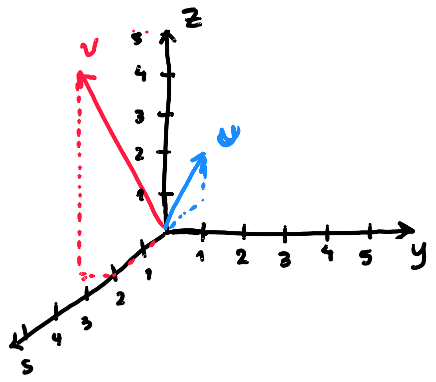
$u=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3$
$v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$
$a\in\mathbb{R}$

entonces:

$u+v=(u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3)$

$au=(au_1,\ au_2,\ au_3)$

También podemos representar vectores en $\mathbb{R}^3$ de forma gráfica. Por ejemplo, los vectores $u=(-1,0,1)$ y $v=(2,-1,5)$ se representan como:



Ejemplos

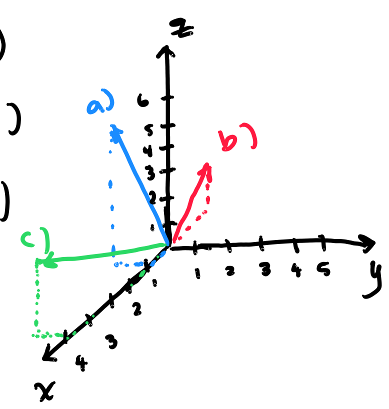
Dados $u=(-1,0,1)$ y $v=(2,-1,5)$

Encuentre y grafique los siguientes vectores:

a) $u+v=(-1,0,1)+(2,-1,5)$
$=(1,-1,6)$

b) $2u=2(-1,0,1)=(-2,0,2)$

c) $v-2u=(2,-1,5)-(-2,0,2)$
$=(4,-1,3)$



② MAGNITUD O NORMA DE UN VECTOR

Nota: a partir de esta sección nos referiremos a la magnitud de un vector v como su norma, y la denotaremos por $\|v\|$.

Sea $v=(v_1,v_2,v_3)$ un vector en $\mathbb{R}^3$, entonces su norma se define como:

$$\|v\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

PREGUNTAS 1. ¿La norma de un vector puede ser negativa?

2. ¿La norma de un vector puede ser cero?

1. La norma de un vector no puede ser negativa. Es decir $\|v\|\geq 0$.
2. $\|v\|=0$ si y sólo si v es el vector nulo

VECTOR UNITARIO

Un vector unitario es aquel cuya magnitud (o norma) es igual a 1. Son vectores que indican la dirección de otros vectores sin cambiar su longitud.

Dado un vector v en el espacio $\mathbb{R}^3$, su vector unitario correspondiente, denotado como $\hat{v}$, se calcula dividiendo el vector v por su norma:

$$\hat{v}=\frac{v}{\|v\|}$$ (normalización de v)

Este vector se llama vector unitario en la dirección de v.

③ Notación $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$

Cualquier vector $u\in\mathbb{R}^3$ puede expresarse en la forma:

$$u=(u_1,u_2,u_3)=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}$$

donde $\hat{i},\hat{j}$ y $\hat{k}$ son vectores unitarios. Es decir:

$\hat{i}=(1,0,0)$ vector unitario en el eje x.
$\hat{j}=(0,1,0)$ vector unitario en el eje y.
$\hat{k}=(0,0,1)$ vector unitario en el eje z.

Para comprobar que son unitarios, calculemos su magnitud.

$\|\hat{i}\|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$
$\|\hat{j}\|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1$
$\|\hat{k}\|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$

Veamos a detalle.

$u_1\hat{i}=u_1(1,0,0)=(u_1,0,0)$
$u_2\hat{j}=u_2(0,1,0)=(0,u_2,0)$
$u_3\hat{k}=u_3(0,0,0)=(0,0,u_3)$

Es decir que: $u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}=u$

SUMA DE VECTORES Y PRODUCTO ESCALAR-VECTOR EXPRESADOS EN NOTACIÓN $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$

Sean $u=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}$, $v=v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k}$ y c un escalar, entonces:

$u+v=(u_1+v_1)\hat{i}+(u_2+v_2)\hat{j}+(u_3+v_3)\hat{k}$

$cu=cu_1\hat{i}+cu_2\hat{j}+cu_3\hat{k}$

④ PRODUCTO CRUZ

Existe una operación especial para vectores en $\mathbb{R}^3$, llamada producto cruz y denotada por $u\times v$. Se calcula como sigue:

$$u\times v=(u_2v_3-u_3v_2)\hat{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\hat{j}+(u_1v_2-v_2u_1)\hat{k}$$

$$=\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}\hat{i}+\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}\hat{k}$$

Pasos:

1) Cubre la primera columna y calcula el determinante de la submatriz.

2) Cubre la segunda columna, calcula el determinante de la submatriz y cambia el signo.

3) Cubre la tercera columna y calcula el determinante de la submatriz.

DETERMINANTE P/ MATRICES DE 2×2

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

$$-\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-(ad-bc)=bc-ad$$

Ejemplos. Encuentra el producto cruz $u\times v$, para $u=4\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$, $v=2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}$.

$$u\times v=\begin{vmatrix}4&3&6\\2&5&-3\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}4&3&6\\2&5&-3\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}4&3&6\\2&5&-3\end{vmatrix}\hat{k}$$

$=[(3)(-3)-(6)(5)]\hat{i}-[(4)(-3)-(6)(2)]\hat{j}+[(4)(5)-(3)(2)]\hat{k}$

$=(-9-30)\hat{i}-(-12-12)\hat{j}+(20-6)\hat{k}$

$=-39\hat{i}+24\hat{j}+14\hat{k}$

PREGUNTA: ¿Qué es el resultado del producto cruz? ¿escalar? ¿vector? ¿matriz?

- El resultado del producto cruz es un vector
- El producto cruz también se llama producto vector o producto externo de u y v.

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL PRODUCTO CRUZ

Sean $u,v,w\in\mathbb{R}^3$ y c un escalar. Entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $u\times v=-(v\times u)$
2. $u\times(v+w)=(u\times v)+(u\times w)$
3. $c\times(u\times v)=cu\times v=u\times cv$
4. $u\times 0=0\times u=0$
5. $u\times u=0$
6. $u\cdot(v\times w)=(u\times v)\cdot w$

Nota: La propiedad 6 involucra el producto punto, que veremos más adelante.

EJERCICIOS. Dados $u=(1,-2,1)$ y $v=(3,1,-2)$

1. Escribe los vectores en su notación $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$
2. Grafica los vectores en el plano 3D.
3. Calcula $u\times v$
4. Calcula $v\times u$
5. Calcula $v\times v$

SOLUCIÓN

$$u\times v=\begin{vmatrix}1&-2&1\\3&1&-2\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}1&-2&1\\3&1&-2\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}1&-2&1\\3&1&-2\end{vmatrix}\hat{k}$$

$=[4-1]\hat{i}-[-2-3]\hat{j}+[1+6]\hat{k}$

$=3\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k}$

$$v\times u=\begin{vmatrix}3&1&-2\\1&-2&1\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}3&1&-2\\1&-2&1\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}3&1&-2\\1&-2&1\end{vmatrix}\hat{k}$$

$=[1-4]\hat{i}-[3+2]\hat{j}+[-6-1]\hat{k}$

$=-3\hat{i}-5\hat{j}-7\hat{k}$ (Propiedad 1)

$$v\times v=\begin{vmatrix}3&1&-2\\3&1&-2\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}3&1&-2\\3&1&-2\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}3&1&-2\\3&1&-2\end{vmatrix}\hat{k}$$

$=(-2+2)\hat{i}-(-6+6)\hat{j}+(3-3)\hat{k}$

$=0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}$. (Propiedad 5.)