① MATRICES CUADRADAS (DEFINICIONES)

- Una matriz cuadrada es una matriz con el mismo número de filas y columnas, es decir: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- La diagonal de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es el conjunto de elementos con el mismo subíndice, $i=j$, es decir $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.
- La traza de A, escrita como $tr(A)$ es la suma de los elementos de la diagonal:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

PROPIEDADES DE LA TRAZA

1) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
2) $tr(kA) = k\,tr(A)$
3) $tr(A^T) = tr(A)$
4) $tr(AB) = tr(BA)$

- La matriz identidad, denotada por I, es una matriz cuadrada con 1's en su diagonal y ceros en las demás posiciones.
- Las potencias de una matriz A se definen como:

$$A^0 = I,\quad A^1 = A,\quad A^2 = AA,\quad A^3 = A^2 A,\ \dots,\ A^n = A^{n-1}A$$

Ejemplo: Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

a) Calcula A^2 y su traza $\rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$ $tr(A^2) = 7+22 = 29$

b) Calcula A^3 y su traza $\rightarrow \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$ $tr(A^2) = -11-106 = -117$

c) Calcula B^2 y su traza $\rightarrow \begin{bmatrix} 14 & -1 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$ $tr(B^2) = 23$

d) Calcula B^3 y su traza $\rightarrow \begin{bmatrix} -47 & 12 \\ 60 & 13 \end{bmatrix}$ $tr(B^2) = -34$

② MATRICES ESPECIALES

- Una matriz cuadrada D es diagonal si sus entradas fuera de la diagonal son cero. Tal matriz se denota como:

$$D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$$

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$diag(3,-7,2)$, $diag(4,-5)$, $diag(6,0,-9,8)$

- Una matriz cuadrada U es triangular superior si todos sus elementos debajo de la diagonal son cero, esto es $a_{ij}=0$ para $i>j$. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

- Una matriz L es triangular inferior si todos sus elementos arriba de la diagonal son cero, esto es $a_{ij}=0$ para $i<j$. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

- Una matriz cuadrada A es simétrica si $A^T = A$. Es decir, $a_{ij} = a_{ji}$

- Una matriz cuadrada A es antisimétrica si $A^T = -A$. Es decir, $a_{ij} = -a_{ji}$. Observa que $a_{ii} = -a_{ii}$ implica que $a_{ii} = 0$.

Ejemplos: Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Por inspección, ¿Qué características tiene c/matriz?

A) Es simétrica. Es decir $A = A^T$
B) Es antisimetrica. Es decir $B^T = -B$
C) Es no cuadrada

- Una matriz cuadrada A es ortogonal si $A^T = A^{-1}$. Es decir $AA^T = A^TA = I$.

Ejemplo: Sea $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, comprueba que A es ortogonal.

$$AA^T = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \\ -4 & -7 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 1+64+16 & 4-32+28 & 8+8-16 \\ 4-32+28 & 16+16+49 & 32-4-28 \\ 8+8-16 & 32-4-28 & 64+1+16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta, esto es si $AA^T = A^TA$. Si A es simetrica, ortogonal, o antisimétrica entonces A es normal.

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, comprueba que A es normal

$$AA^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36+9 & 18-18 \\ 18-18 & 9+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36+9 & -18+18 \\ -18+18 & 9+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$

② INVERSA DE UNA MATRIZ

Una matriz cuadrada A es invertible o no singular si existe una matriz B tal que $AB = BA = I$.

Llamaremos a la matriz B la inversa de A, denotada por A^{-1}. Observa que si B es la inversa de A, A es la inversa de B.

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1 Inversa de una matriz de 2x2

Sea A una matriz arbitraria de 2x2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Buscamos la matriz B tal que $AB = I$. Es decir:

$$\underbrace{\overset{A}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}}_{\text{valores conocidos}}\ \underbrace{\overset{B}{\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix}}}_{\text{incógnitas}} = \overset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Hagamos la multiplicación:

$$\begin{bmatrix} au+bx & av+by \\ cu+dx & cv+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir que:

$au + bx = 1$ ①
$cu + dx = 0$ ②
$av + by = 0$ ③
$cv + dy = 1$ ④

1. Para encontrar u y x, usaremos ① y ②
2. Despejamos x en ②:

$x = \frac{-cu}{d}$ ⑤

3. Sustituimos en ①:

$au + b(cu/d) = 1$

$au - \frac{bcu}{d} = 1$

$\frac{adu - bcu}{d} = 1$

$u(ad-bc) = d$

$u = \frac{d}{(ad-bc)}$

NOTA: $ad-bc$ es el determinante de A (o $|A|$)

$\boxed{u = \frac{d}{|A|}}$ ⑥

4. Sustituimos u en ⑤

$x = \frac{\frac{-cd}{|A|}}{\frac{d}{1}}$

$x = \frac{-cd}{d|A|}$

$\boxed{x = \frac{-c}{|A|}}$

1. Para encontrar v y y, usaremos ③ y ④
2. Despejamos y en ③:

$y = \frac{-av}{b}$ ⑦

3. Sustituimos en ③

$cv + d\left(\frac{-av}{b}\right) = 1$

$cv - adv/b = 1$

$(cb-ad)v/b = 1$

$(cb-ad)v = b$

$v = \frac{-b}{(ad-bc)}$

$\boxed{v = \frac{-b}{|A|}}$ ⑧

4. Sustituimos v en ⑦

$y = \frac{\frac{ab}{|A|}}{\frac{b}{1}}$

$\boxed{y = \frac{a}{|A|}}$

Entonces tenemos que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Nota: En caso de que $|A| = 0$, la matriz no tiene inversa.

Pregunta: ¿Como encontrarias la expresión de la inversa de una matriz de 3x3? ¿De nxn? Encontrar la inversa es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones con n incognitas

EJERCICIOS / TAREA

1) Calcula la traza y la inversa (si existe) para las siguientes matrices:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

$|A| = -2$ $|B| = 9$ $|C| = 0$

$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2) Sea $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, comprueba que es ortogonal e invertible.

$|A| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

3) Encuentra el valor de k tal que la siguiente matriz sea antisimétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2k+3 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & -2k-3 \end{bmatrix}$$

$2k+3 = 0$ $-2k-3 = 0$
$k = -3/2$ $k = -3/2$

4) Encuentra el valor de k tal que la siguiente matriz sea simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

$k = -k$ $k = 0$
$2k = 0$