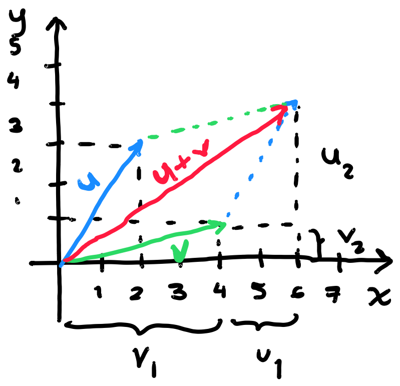
① Operaciones vectoriales en el plano

SUMA Y RESTA VECTORIAL

Para sumar dos vectores en el plano, se suman sus componentes correspondientes. Sean $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ y $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ dos vectores bidimensionales, la suma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ está definida como:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1,u_2)+(v_1,v_2)$$
$$=(u_1+v_1,\ u_2+v_2)$$

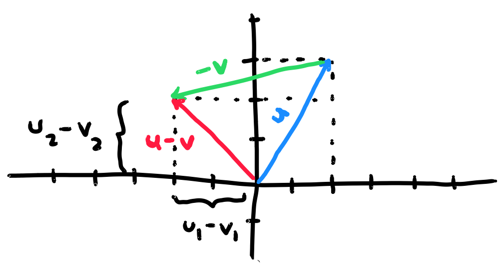
Geométricamente, la suma de dos vectores en el plano puede representarse como la diagonal de un paralelogramo que tiene a **u** y **v** como sus lados adyacentes.



②

Análogamente, la resta de dos vectores se refiere a restar sus componentes correspondientes:

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=(u_1,u_2)-(v_1,v_2)$$
$$=(u_1-v_1,\ u_2-v_2)$$



EJEMPLOS

1) Calcula y muestra la representación gráfica de cada suma.

a) $\mathbf{u}=(1,4)$, $\mathbf{v}=(2,-2)$

b) $\mathbf{u}=(3,-2)$, $\mathbf{v}=(-3,2)$

c) $\mathbf{u}=(2,1)$, $\mathbf{v}=(0,0)$

SOLUCION

a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(1,4)+(2,-2)=(3,2)$

b) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(3,-2)+(-3,2)=(0,0)=\mathbf{0}$

c) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(2,1)+(0,0)=(2,1)$

③

2. Calcula la magnitud y el ángulo de dirección de cada vector resultante

a) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

(Primer cuadrante)

$\theta=\tan^{-1}(2/3)=33.69°$ (0.588 rad)

b) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|=\sqrt{0^2+0^2}=\sqrt{0}=0$

(El vector es el mismo origen, su magnitud es cero y no tiene ángulo de dirección)

c) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}=2.236$

(Primer cuadrante)

$\theta=\tan^{-1}(1/2)=26.57°$ (0.464 rad)

MULTIPLICACION DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Sean c un escalar y **v** un vector. El resultado de multiplicar c por **v** es un vector tal que cada componente es el resultado de multiplicar la componente en **v** por c.

Es decir, $c\mathbf{v}=c(v_1,v_2)=(cv_1,\ cv_2)$.

④

Dados $\mathbf{v}=(-2,5)$ y $\mathbf{u}=(3,4)$ encuentre:

a) $\frac{1}{2}\mathbf{v}=\frac{1}{2}(-2,5)=(\frac{1}{2}\cdot(-2),\ \frac{1}{2}(5))=(-1,\ 2.5)$

b) $\frac{1}{2}\mathbf{u}=\frac{1}{2}(3,4)=(\frac{1}{2}\cdot 3,\ \frac{1}{2}\cdot 4)=(1.5,\ 2)$

c) $\frac{1}{2}\mathbf{v}+\mathbf{u}=(-1,2.5)+(3,4)=(-1+3,\ 2.5+4)=(2,6.5)$

d) $\frac{1}{2}\mathbf{v}+\frac{1}{2}\mathbf{u}=(-1,2.5)+(1.5,2)=(-1+1.5,\ 2.5+2)=(\frac{1}{2},4.5)$

e) $\mathbf{u}-\mathbf{v}=(3,4)-(-2,5)=(3-(-2),\ 4-5)=(5,-1)$

Propiedades de la suma vectorial y de la multiplicación escalar-vector en el plano

Sean **u**,**v**,**w** vectores en el plano, y sean c y d escalares:

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ es un vector en el plano	Cerradura-adición
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$	conmutativa
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$	asociativa
4. $(\mathbf{u}+\mathbf{0})=\mathbf{u}$	identico-aditiva
5. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$	inverso-aditiva
6. $c\mathbf{u}$ es un vector en el plano	cerradura-mult.
7. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$	distributiva
8. $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$	distributiva.
9. $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$	asociativa-mult.
10. $1(\mathbf{u})=\mathbf{u}$	identico-mult.

⑤ Demostración de algunas propiedades por aplicación directa.

> una demostracion es una serie de pasos lógicos para demostrar un argumento o hipótesis.

1. Demostrar que $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=[(u_1,u_2)+(v_1,v_2)]+(w_1,w_2)$
$=(u_1+v_1,\ u_2+v_2)+(w_1+w_2)$
$=(u_1+v_1+w_1,\ u_2+v_2+w_2)$
$=(u_1+(v_1+w_1),\ u_2+(v_2+w_2))$
$=(u_1,u_2)+(v_1+w_1,\ v_2+w_2)$
$=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$. L.q.q.d.

2. Demostrar que $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$

$(c+d)\mathbf{u}=(c+d)(u_1,u_2)$
$=((c+d)u_1,\ (c+d)u_2)$
$=(cu_1+du_1,\ cu_2+du_2)$
$=(cu_1,cu_2)+(du_1,du_2)$
$=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$. L.q.q.d.

⑥ EJERCICIOS

Sean: $\mathbf{u}=(-2,3)$, $\mathbf{v}=(2,-4)$, $\mathbf{w}=(-3,-2)$, $c=3/2$, $d=1/2$,

$\underbrace{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}}_{\text{vectores}}$ $\underbrace{c,d}_{\text{escalares}}$

Resuelve:

1. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})=(-2,3)+(2,-4)=(-2+2,\ 3-4)=(0,-1)$
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=(0,-1)+(-3,-2)=(0-3,\ -1-2)=(-3,-3)$
3. $c\mathbf{u}=(3/2)(-2,3)=(-3,\ 9/2)$
4. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=(3/2)\cdot(0,-1)=(0,\ -3/2)$
5. $(c+d)\mathbf{u}=(3/2+1/2)(-2,3)=2(-2,3)=(-4,6)$
6. $(cd)\mathbf{u}=(3/4)(-2,3)=(-3/2,\ 9/4)$
7. $d\mathbf{v}=(1/2)(2,-4)=(1,-2)$
8. $(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(2,-4)+(-3,-2)=(2-3,\ -4-2)=(-1,-6)$
9. $(\mathbf{u}-\mathbf{w})=(-2,3)-(-3,-2)=(-2-(-3),\ 3-(-2))=(1,5)$
10. $c\mathbf{w}=(3/2)(-3,-2)=(-9/2,\ -3)$