(1) MATRICES

Una matriz puede denotarse como un arreglo rectangular de m renglones por n columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

n columnas

m filas

Las matrices se denotan con letras mayusculas (A, B, c, etc) y cada elemento con la letra minuscula correspondiente y los subíndices ij que indican la fila y columna respectivamente.

Por ejemplo en la matriz anterior el elemento a_{2n} es el elemento en la segunda fila y n-ésima columna de A.

Una matriz de m filas y n columnas suele denotarse como $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

a) ¿Cuál es la dimensión de A?

b) ¿Cuál es el elemento a_{12}?

c) ¿Cuál es el elemento a_{21}?

d) Responde las anteriores para B

(2) Una matriz que sólo tiene 1 columna se denomina matriz columna (o vector columna).

Una matriz que sólo tiene 1 renglón se denomina matriz renglón (o vector renglón)

(3) SUMA, RESTA Y MULTIPLICACION ESCALAR

Si A y B son de tamaño $m\times n$, entonces su suma es la matriz C de tamaño $m\times n$ dada por $C = A + B$.

Nota: La suma de matrices de diferente tamaño no está definida.

Ejemplo:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} -1+1 & 2+3 \\ 0-1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y k es un escalar, entonces el multiplo escalar de A por k es la matriz de tamaño $m\times n$ dada por:

$$kA = [k a_{ij}], \quad i = 1,2,\ldots,m, \; j = 1,2,\ldots,n.$$

Ejemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $k = 1/2$

$$kA = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 5/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

A menudo es conveniente reescribir una matriz como kA factorizando k de cada elemento.

(4) Ejemplos

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

encuentra

a) $3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

b) $-B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

c) $3A - B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(5) MULTIPLICACION DE MATRICES

El producto de matrices está definido si y sólo si:

El número de columnas de la matriz a la izquierda es igual al número de filas de la matriz a la derecha

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, entonces el producto $C = AB$ se obtiene de multiplicar los elementos del iésimo renglón de A por los elementos correspondientes de la j-ésima columna de B.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Ejemplos: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Calcular AB

b) Calcular BA

$$AB = \begin{bmatrix} (1)(0)+(2)(1) & (1)(1)+(2)(2) \\ (3)(0)+(4)(1) & (3)(1)+(4)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0)(1)+(1)(3) & (0)(2)+(1)(4) \\ (1)(1)+(2)(3) & (1)(2)+(2)(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Más ejemplos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 & -1 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1]$

e) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$