Espacios vectoriales

Espacio vectorial

Un espacio vectorial consta de cuatro elementos:

1. Un conjunto no vacío de vectores (o elementos).
2. Un conjunto de escalares (números reales o complejos, aunque aquí sólo abordaremos ejemplos con números reales).
3. Operación de adición. Debe definirse una operación de adición que tome dos vectores (o elementos) y produzca otro vector del mismo conjunto.
4. Operación de multiplicación escalar. Debe definirse una operación de multiplicación por escalar que tome un número real o complejo y un vector (o elemento) y produzca otro vector (o elemento) del mismo conjunto.

Definición:

Sea V un conjunto sobre el que están definidas dos operaciones (la suma vectorial y la multiplicación escalar). Si los siguientes axiomas se cumplen para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V y todo escalar (número real) c y d, entonces V se denomina espacio vectorial.

(Suma)

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en V.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.
4. V contiene un vector cero tal que para todo $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
5. Para todo $\mathbf{u} \in V$, hay un vector en V denotado por $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(Multiplicación escalar)

6. $c\mathbf{u} \in V$.
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$.
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$.
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$.
10. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$.

Ejemplos de conjuntos que son espacios vectoriales

Para demostrar que un conjunto es un espacio vectorial, debe tener los cuatro elementos (conjunto no vacio de vectores, conjunto de escalares, suma vectorial y multiplicación por escalar) y verificar los diez axiomas anteriores.

Ejemplo 1. $\mathbb{R}^n$ con las operaciones estándar de vectores.

Sus elementos son:

1. Conjunto de vectores (o elementos): el conjunto de vectores por n de números reales.
2. Conjunto de escalares: el conjunto de números reales.
3. Operación de suma vectorial definida, que produce otro vector con n números reales.
4. Operación de multiplicación por escalares, que produce otro vector con n números reales.

Como ya hemos visto en clase, el espacio cumple con los 10 axiomas.

Ejemplo 2. El conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que dos.

Sus elementos son:

1. Conjunto de vectores (o elementos): el conjunto de todos los polinomios de la forma $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
2. Conjunto de escalares: el conjunto de números reales.
3. La suma de dos polinomios $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ se define de la forma usual como:

$$p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

4. El múltiplo escalar de $p(x)$ por el escalar c se define como:

$$cp(x) = ca_2x^2 + ca_1xca_0.$$

La comprobación de cada uno de los 10 axiomas que definen un espacio vectorial es una aplicación directa de las propiedades de los números reales.

- $p(x) + q(x)$ pertenece al conjunto porque $a_2 + b_2$, $a_1 + b_1$ y $a_0 + b_0$ son números reales, por lo tanto el polinomio $(a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$ es un polinomio de grado menor o igual que 2.

- Para comprobar el axioma conmutativo de la suma:

$$
\begin{aligned}
p(x)+q(x) &= (a_2x^2+a_1x+a_0)+(b_2x^2+b_1x+b_0) && (1)\\
&= (a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0) && (2)\\
&= (b_2+a_2)x^2+(b_1+a_1)x+(b_0+a_0) && (3)\\
&= (b_2x^2+b_1x+b_0)+(a_2x^2+a_1x+a_0) && (4)\\
&= q(x)+p(x) && (5)
\end{aligned}
$$

Espacios vectoriales importantes

- $\mathbb{R}$: el conjunto de todos los números reales.
- $\mathbb{R}^2$: el conjunto de todos los vectores en el plano.
- $\mathbb{R}^3$: el conjunto de todas los vectores tridimensionales.
- $\mathbb{R}^n$: el conjunto de todos vectores de n coordenadas.
- $C(-\infty,\infty)$: el conjunto de todas las funciones continuas definidas sobre la recta numérica.
- P: el conjunto de todos los polinomios.
- P_k: el conjunto de todos los polinomios de grado $\leq k$.
- $M_{m,n}$: el conjunto de todas las matrices de $m\times n$.
- $M_{n,n}$: el conjunto de todas las matrices cuadradas de $n\times n$.

Conjuntos que NO son espacios vectoriales

- Para demostrar que un conjunto no es un espacio vectorial, sólo necesita encontrar un axioma que no se satisfaga.

Ejemplo 3. El conjunto de los enteros

El conjunto de todos los enteros (con las operaciones estándar) no es un espacio vectorial porque no es cerrado bajo la multiplicación escalar. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}.$$

El resultado no pertenece al conjunto de números enteros.

Ejemplo 4. Un conjunto de vectores en el plano con operaciones *no estándar*

Sea V el conjunto de todos los pares ordenados de números reales, con la operación estándar de suma y la siguiente definición *no estándar* de multiplicación escalar:

$$c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$$

¿Cuál es el axioma que no se satisface?

Solución.

El décimo axioma no se cumple y el conjunto con sus dos operaciones no es un espacio vectorial.

Por ejemplo:

$$1(1,1) = (1,0) \neq (1,1)$$

Ejercicio. El conjunto de todas las matrices invertibles de tamaño 3×3

Sea M el conjunto de todas las matrices invertibles de tamaño 3×3, con las operaciones estándar de suma y multiplicación escalar.

Muestra que este conjunto no es un espacio vectorial.

Solución

Considera las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ambas matrices son invertibles, ya que $|\mathbf{A}| = 1$ y $|\mathbf{B} = -1|$, por lo tanto $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M$. Por el axioma 1, se debe cumplir que la matriz resultante $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ pertenezca a M.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, el determinante de esta matriz resultante es cero, $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = 0$, es decir, es una matriz no invertible y por lo tanto no pertenece a M.

```
In [ ]:
```