1. VECTORES

1.1. Conceptos básicos

1 Escalar:

- Es un número o cantidad. Representa una magnitud. No tiene orientación/dirección ni componentes en varias dimensiones.

Vector:

- En Álgebra: Lista ordenada de números, por ejemplo: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 3.6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $(11, 0, 2)$

  cuyos elementos representan magnitudes en diferentes dimensiones.

  En Física: Un segmento orientado entre dos puntos, que tiene magnitud y dirección.

- El término vector se deriva del latín "vectus", que significa llevar o transportar.

  Intuición: Si queremos "llevar" un objeto de un punto origen $(0,0)$ a un punto destino (x_1, x_2) el "viaje" se puede representar por un segmento de recta de $(0,0)$ a (x_1, x_2).

Notación 2

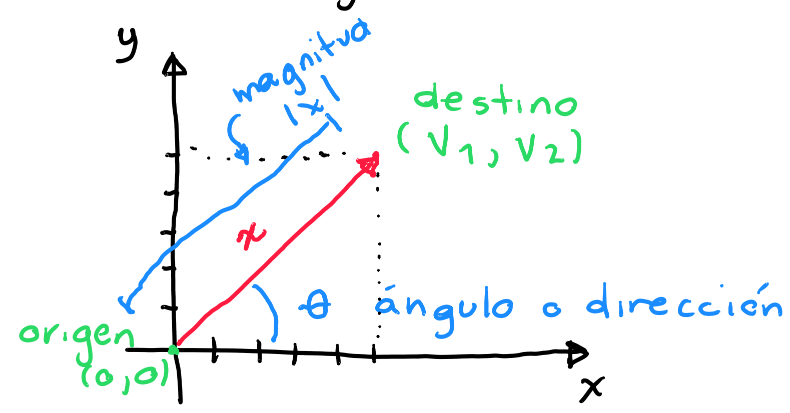
- Notación: Los vectores se representan con letras minúsculas en negritas. Por ejemplo: $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$.
- El número de elementos en "la lista" es el tamaño (o dimensión) del vector. Por ejemplo, el vector:

  $$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  tiene tamaño 3.
- Usamos subíndices para referirnos a los elementos en un vector. Por ejemplo: v_1 en el vector de arriba es 5, v_2 es 0 y v_3 es 1.

Vectores en el plano 3

Los vectores de dos dimensiones, por ejemplo: $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ pueden representarse geométricamente como un segmento de recta dirigido:



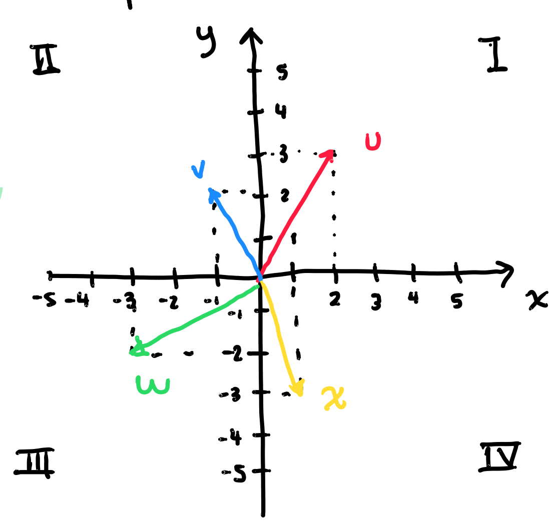
Las coordenadas v_1 y v_2 se denominan componentes del vector $\mathbf{v}$.

Dos vectores en el plano $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ son iguales si y sólo si $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$

- Ejemplo 1

Representa en el plano los vectores

a) $\mathbf{u} = (2, 3)$
b) $\mathbf{v} = (-1, 2)$
c) $\mathbf{w} = (-3, -2)$
d) $\mathbf{x} = (-1, 3)$



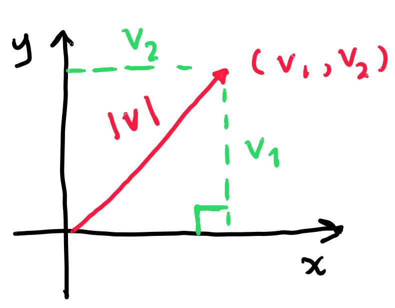
4 Propiedades de los vectores en el plano

- Magnitud

La magnitud de un vector se define como:

$$\boxed{|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Podemos deducir la expresión anterior nosotros mismos, usando el teorema de Pitágoras



Ejemplo.

Calcular la magnitud de los siguientes vectores:

a) $\mathbf{u} = (2, 3)$
b) $\mathbf{v} = (-1, 2)$
c) $\mathbf{w} = (-3, -2)$
d) $\mathbf{x} = (-1, 3)$

Solución.

a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{(2^2 + 3^2)} = \sqrt{(4 + 9)} = \sqrt{13} \approx 3.60$
b) $|\mathbf{v}| = \sqrt{((-1)^2 + 2^2)} = \sqrt{(1 + 4)} = \sqrt{5} \approx 2.24$
c) $|\mathbf{w}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(9 + 4)} = \sqrt{13} \approx 3.60$
d) $|\mathbf{x}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{(1 + 9)} = \sqrt{10} \approx 3.16$

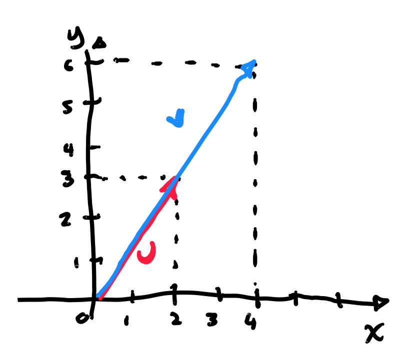
Multiplicación de un vector por un escalar 5

Multiplicar un vector $\mathbf{v}$ por un escalar $a \neq 0$ tiene el efecto de multiplicar la longitud (magnitud) del vector por el valor absoluto de ese escalar.

Ejemplo.

Sea $\mathbf{u} = (2, 3)$ y $a = 2$, entonces el vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ es:

$2\mathbf{u} = (2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (4, 6)$

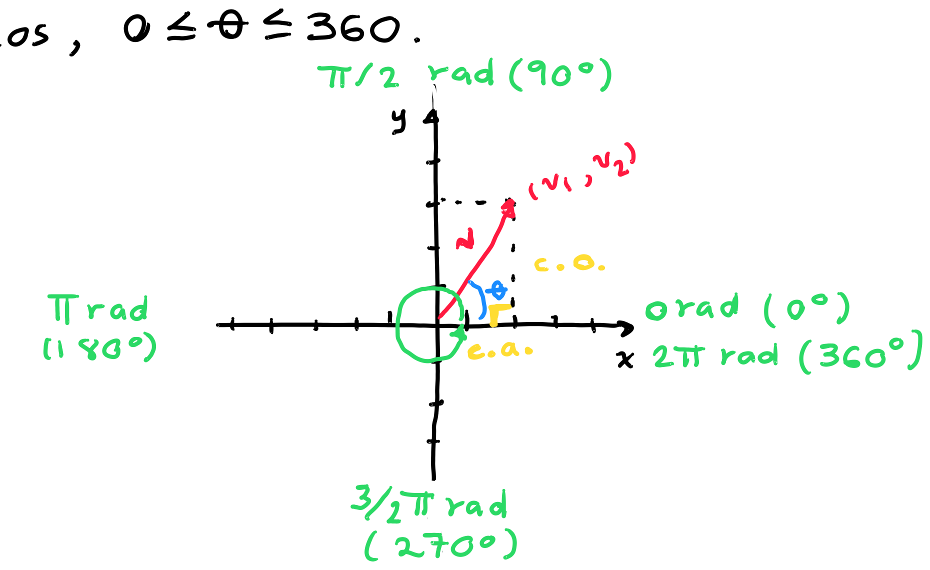


Ángulo o dirección de un vector

El ángulo θ es el ángulo que forma el vector con el lado positivo del eje x.

En radianes, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

En grados, $0 \leq \theta \leq 360$.



6

Usamos trigonometría para calcular el ángulo

1. $\tan\theta = \frac{v_2}{v_1}$
2. despejamos θ: $\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)}$
3. ?

Ejemplo.

Calcular el ángulo de los siguientes vectores

a) $\mathbf{u} = (2, 3)$
b) $\mathbf{v} = (-1, 2)$
c) $\mathbf{w} = (-3, -2)$
d) $\mathbf{x} = (-1, 3)$

$$\boxed{\text{grados} = \frac{(\text{radianes})(180)}{\pi}}$$

Solución

a) $\theta = \tan^{-1}(3/2) \approx 0.98$ rad $(56.31°)$
b) $\theta = \tan^{-1}(2/-1) \approx -1.11$ rad $(-63.43°)$
c) $\theta = \tan^{-1}(-2/-3) \approx 0.59$ rad $(33.69°)$
d) $\theta = \tan^{-1}(3/-1) \approx -1.25$ rad $(-71.56°)$

¿Qué notas en los ejemplos b, c, d?

3. - Si el vector está en el cuadrante I, la dirección del ángulo es $|\theta|$ (rad y grados)
   - Si el vector está en el cuadrante II, la dirección del ángulo es $(\pi - |\theta|)$ radianes o $(180° - |\theta|)$ grados.
   - Si el vector está en el cuadrante III, la dirección del ángulo es $(\pi + |\theta|)$ radianes o $(180° + |\theta|)$ grados.
   - Si el vector está en el cuadrante IV, la dirección del ángulo es $(2\pi - |\theta|)$ radianes o $(360° - |\theta|)$ grados.

Es decir:

b) $(\pi - 1.11) \approx 2.03$ rad $(116.56°)$
c) $(\pi + 33.69) \approx 3.73$ rad $(213.7°)$
d) $(2\pi - 1.25) \approx 5.03$ rad $(288.43°)$