Sistemas de ecuaciones lineales

- Una ecuación lineal con respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una ecuación que puede escribirse en la forma estándar:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b, \qquad (1)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son valores escalares (conocidos).

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son llamados los coeficientes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- b es llamado el término independiente
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas de la ecuación.

- La solución a la ecuación anterior es una lista de valores para las incógnitas, tal que al sustituirlos en la ecuacion (1) se cumpla la igualdad. Es decir:

$$x_1 = k_1, \; x_2 = k_2, \; \ldots, \; x_n = k_n$$

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n = b$$

Ejemplo: $1x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \qquad (2)$

¿Cual de los siguientes vectores es la solución a la ec. (2)?

$u = (5, 2, 1) \qquad v = (1, 2, 3)$

En este caso, el vector $u = (5,2,1)$ es la solución de la ecuación.

$$1(5) + 2(2) - 3(1) = 6$$
$$5 + 4 - 3 = 6$$

Un sistema de ecuaciones lineales es una lista de m ecuaciones lineales con las mismas n incógnitas. Su forma estándar es:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} (3)$$

El sistema anterior se puede expresar de forma matricial como:

$$Ax = b$$

donde:

$$\underset{A \in \mathbb{R}^{m\times n}}{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}, \quad \underset{x \in \mathbb{R}^{n\times 1}}{x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} \quad y \quad \underset{b \in \mathbb{R}^{n\times 1}}{b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}$$

A se conoce como la matriz de coeficientes, x es el vector de incógnitas y b es el vector de términos independientes.

Otra manera de representar a un sistema de ec. lineales es por medio de su matriz aumentada M.

$$M = [A, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el sistema siguiente:

$$\begin{array}{l} 7x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = -1 \end{array} \quad \text{equivale a} \quad \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La notación $Ax = b$ no solamente nos sirve para agrupar ecuaciones lineales en una sola expresión. También nos da un indicio de como resolver el sistema:

Pregunta: ¿Cómo resolvemos una simple ec. lineal?

$$\begin{array}{l|l} ax = b & 2x = 4 \\ x = b/a & x = 4/2 \\ x = a^{-1}b & x = (2)^{-1}\,4 \end{array}$$

Podemos extender esta idea a un sistema de ecuaciones $Ax = b$. Si A es cuadrada, entonces podemos usar la inversa de A para resolver el sistema:

$$Ax = b$$
$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$
$$Ix = A^{-1}b$$
$$x = A^{-1}b$$

No todas las matrices tienen inversa. La inversa de una matriz, si existe, es única.
Una matriz tiene inversa si su determinante es diferente de cero.

Solucion p/sistemas de 2x2 (2 ecs., 2 incógnitas)

Ejemplo: Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 - 2x_2 = 1$$
$$x_1 - x_2 = 3$$

Paso (1). Escribimos en forma matricial.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}, \quad x = A^{-1}b$$

Paso (2). Calculamos el determinante

$$|A| = (1)(-1) - (-2)(1) = -1 + 2 = 1 \qquad |A| \neq 0 \therefore \exists^{*} A^{-1}$$

Paso (3). Usamos la fórmula p/la inversa de una matriz de 2x2:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso (4). Encontramos x:

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+6 \\ -1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Paso (5) (opcional) Comprobamos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}}_{x} = \begin{bmatrix} 5-4 \\ 5-2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}$$

Solucion p/sistemas de nxn

Considera el siguiente sistema.

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$-8x_2 - 2x_3 = -12$$
$$x_3 = 2$$

Responde:

a) ¿Cual es su forma matricial?

b) ¿Que caracteristicas tiene la matriz de coeficientes?

c) ¿Cómo resolvemos?

Cuando la matriz de coeficientes es triangular, podemos resolver fácilmente el sistema

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) Matriz triangular superior

c) Por sustitución: $x_3 = 2$

conociendo $x_3 \rightarrow x_2 = (-12 + 2x_3)/-8 = 1$

conociendo $x_2, x_3 \rightarrow x_3 = (5 - x_2 - x_3)/2 = 1$