Determinantes

Motivación

- El concepto de determinantes surgió del estudio de patrones especiales presentes en las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.
- Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \tag{1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \tag{2}$$

- O escrito de manera matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

- La solución general para este sistema puede expresarse de la siguiente manera:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \tag{3}$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \tag{4}$$

- Observa que las dos fracciones tienen el mismo denominador, $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

- La solución anterior es válida siempre que $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

- Este valor numérico se conoce como el **determinante** de la matriz de coeficientes del sistema.

Determinante de una Matriz

- Es una propiedad matemática fundamental **asociada a una matriz cuadrada.**
- Se denota como $\det(\mathbf{A})$ o $|\mathbf{A}|$ y es un número real que se calcula de una manera específica para cada matriz.
- Otra práctica común es indicar el cálculo del determinante de una matriz mediante la eliminación de los corchetes e incluyendo barras verticales:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Determinante de una matriz de 2×2

El determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

está dado por:

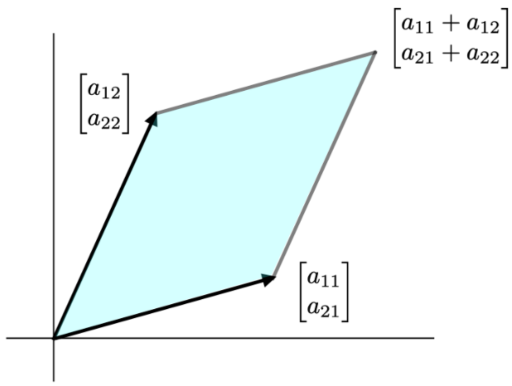
$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

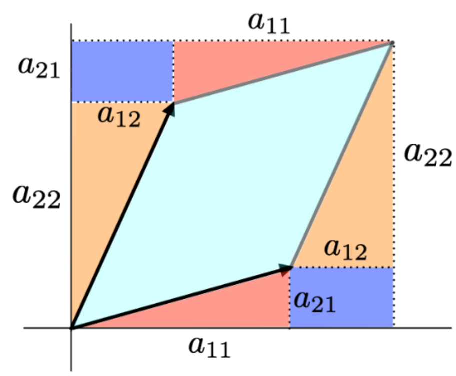
Por ejemplo:

Matriz	Determinante
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5)$	$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - (-3)(1) = 4 + 3 = 7. \quad (10)$
(6)	(11)
$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (7)$	$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 1(4) = 4 - 4 = 0. \quad (12)$
(8)	(13)
$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (9)$	$|\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0(4) - \frac{3}{2}(2) = 0 - 3 = -3. \quad (14)$

Interpretación geométrica del determinante de una matriz de 2×2

Calculemos el área del paralelogramo delimitado por las columnas de una matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.



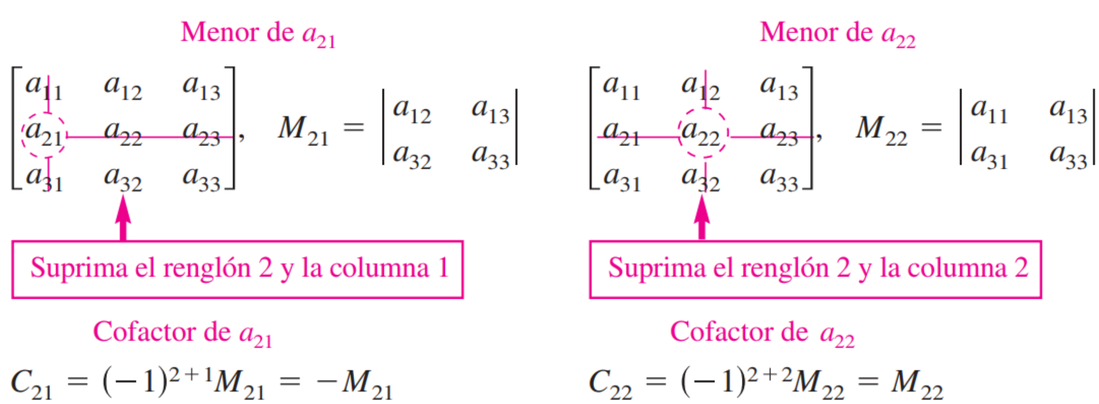


Menores y Cofactores de una Matriz

- Para definir el determinante de una matriz cuadrada de orden mayor que 2, es necesario obtener menores y cofactores.
- Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, entonces el **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz obtenida al suprimir el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A.
- El **cofactor** C_{ij} está dado por la fórmula: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

  Por ejemplo:

  Para una matriz de 3×3, entonces los menores y los cofactores de a_{21} y a_{22} son como se muestra en el diagrama presentado a continuación.



Ejercicio

Determina todos los menores y los cofactores de:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución.

- Menores:

$$\begin{matrix} M_{11} = -1 & M_{12} = -5 & M_{13} = 4 \\ M_{21} = 2 & M_{22} = -4 & M_{23} = -8 \\ M_{31} = 5 & M_{32} = -3 & M_{33} = -6 \end{matrix}$$

- Cofactores:

$$\begin{matrix} C_{11} = -1 & C_{12} = 5 & C_{13} = 4 \\ C_{21} = -2 & C_{22} = -4 & C_{23} = 8 \\ C_{31} = 5 & C_{32} = 3 & C_{33} = -6 \end{matrix}$$

Determinante de una matriz cuadrada

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ y $n \geq 2$, entonces el determinante de $\mathbf{A}$ es la suma de los elementos en el primer renglón de $\mathbf{A}$ multplicados por sus cofactores.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} & (15) \\ &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}. & (16) \end{aligned}$$

Nota: Aunque el determinante se define como una expansión por cofactores del primer renglón, puede demostrarse que el determinante puede ser evaluado por la expansión de cualquier renglón o columna.

Ejercicios

Encuentra el determinante de:

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -8 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \\ 5 & -10 & -3 \end{bmatrix}$

Propiedades

Condiciones que generan un determinante cero. Si A es una matriz cuadrada y una de las siguientes condiciones es cierta, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$.

1. Un renglón (o columna) consta completamente de ceros.
2. Dos renglones (o columnas) son iguales.
3. Un renglón (o columna) es un múltiplo de otro renglón (o columna)

Operaciones con renglones. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices cuadradas.

1. Si $\mathbf{B}$ es obtenida a partir de A al intercambiar dos renglones, entonces $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.
2. Si $\mathbf{B}$ es obtenida a partir de $\mathbf{A}$ al sumar un múltiplo de un renglón de $\mathbf{A}$ a otro renglón de $\mathbf{A}$, entonces $\det(\mathbf{B} = \det(\mathbf{A})$.
3. Si $\mathbf{B}$ es obtenida a partir de $\mathbf{A}$ al multiplicar un renglón de $\mathbf{A}$ por una constante c diferente de cero, entonces $\det(\mathbf{B}) = c \cdot \det(\mathbf{A})$

Determinante de una matriz producto. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas de orden n, entonces $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

Determinante de un escalar múltiplo de una matriz. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$ y c es un escalar, entonces el determinante de $c\mathbf{A}$ está dado por $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$.

Determinante de una matriz invertible. Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es invertible (no singular) si y sólo si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Determinante de una traspuesta. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, entonces $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Adjunta de una matriz

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, entonces la matriz de cofactores de $\mathbf{A}$ tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

La transpuesta de esta matriz se llama adjunta de $\mathbf{A}$ y se denota como $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$, es decir:

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Encontrar la adjunta de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Solución.

$$\mathrm{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz dada por su adjunta

Si $\mathbf{A}$ es una matriz invertible de $n \times n$, entonces:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathrm{adj}(\mathbf{A})$$

Ejemplo

Usa la adjunta para hallar $\mathbf{A}^{-1}$, donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- Determinante
- Matriz de Cofactores
- Adjunta
- Inversa
- Comprobación

Solución.

- Determinante: 3
- Cofactores: $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicios / Tarea

1. Encontrar menores, cofactores, determinante e inversa de las matrices siguientes:

   a. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

   b. $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

   c. $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

   d. $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

   a. $\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$

   b. $\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

   c. $\begin{vmatrix} \lambda+2 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

   d. $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

In [ ]:
```
import numpy as np
A = np.asarray([[0, 2, 1],
                [3, -1, 2],
                [4, 0, 1]])
print(np.linalg.det(A))

B = np.asarray([[-3, 2, 1],
                [4, 5, 6],
                [2, -3, 1]])
print(np.linalg.det(B))

C = np.asarray([[-3, 4, 2],
                [6, 3, 1],
                [4, -7, -8]])
print(np.linalg.det(C))

D = np.asarray([[-1, 2, 2],
                [3, -6, 4],
                [5, -10, -3]])
print(np.linalg.det(D))

P = np.asarray([[1, 2],
                [3, 4]])
Q = np.asarray([[1, 4, -2],
                [3, 2, 0],
                [-1, 4, 3]])
R = np.asarray([[2, 4, 6],
                [0, 3, 1],
                [0, 0, -5]])
S = np.asarray([[1, 0, -8, 2],
                [0, 8, -1, 10],
                [0, 0, 0, 1],
                [0, 0, 0, 2]])
print(np.linalg.det(P))
print(np.linalg.det(Q))
print(np.linalg.det(R))
print(np.linalg.det(S))
```