高校数学の範囲内でのガウス積分の導出

2025 年 2 月 20 日

ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

を、重積分の変数変換などは用いず、高校数学の範囲内で導出しよう。

補題 1

$x \geq 0$ に対して、次の不等式が成り立つ。

$$1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$$

証明

右側は不等式 $e^x \geq 1 + x \quad (x \in \mathbb{R})$ から従い、左側はこの x を $-x$ としたものである。∎

補題 2

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおくと、以下の性質が成り立つ[1]。

(1) $I_{n+1} \leq I_n$

(2) $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$

(3) $I_{2n} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}$

(4) $I_{2n+1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

(5) $I_{2n} \cdot I_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n+1)}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(I_{2n+1})^2 = \frac{\pi}{4}$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(I_{2n-2})^2 = \frac{\pi}{4}$

証明

[1] !! は「二重階乗」という記号で、

(1) $\cos^{n+1}\theta \leq \cos^{n}\theta$ なので明らか。

(2) 部分積分で漸化式を立てる。

(3) (2)を繰り返し使う。

(4) (2)を繰り返し使う。

(5) (3)と(4)を辺々掛け合わせる。

(6) (1)と(2)より、

$$\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\frac{2n+1}{2n+2}I_{2n}}{I_{2n}} = \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n+1}} = 1$$

よって、

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

が成り立ち、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2} = 1$ なので、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

が成り立つ。 ∎

(7)
$$\begin{aligned} n\left(I_{2n+1}\right)^2 &= \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \cdot n\, I_{2n} I_{2n+1} \\ &= \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \cdot \frac{n\pi}{2(2n+1)} \qquad (\because (5)) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \times \frac{\pi}{4} \qquad (\because (6)) \\ &= \frac{\pi}{4} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned} n\left(I_{2n-2}\right)^2 &= \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \cdot n\, I_{2n-2} I_{2n-1} \\ &= \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \cdot \frac{n\pi}{2(2n-1)} \qquad (\because (5)) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \times \frac{\pi}{4} \qquad (\because (6)) \\ &= \frac{\pi}{4} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2n-1)!! &= (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1 \\ (2n)!! &= 2n\cdot(2n-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2 \\ 0!! &= 1 \end{aligned}$$

と定義される。

定理 1：ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

証明

$R \to \infty$ を考えるので、$R > 1$ としてよい。R を超えない最大の整数を n とおき、$a = \frac{R}{\sqrt{n}}$ とおくと、$a \geq 1$ となる。

補題 1 の x に t^2 $(t \geq 0)$ を代入して、

$$1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \tag{1}$$

$0 \leq t \leq 1$ の範囲では、式 (1) の各辺はいずれも非負であるので、各辺を n 乗して、

$$\left(1 - t^2\right)^n \leq e^{-nt^2} \leq \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

これを $t \in [0, 1]$ で積分して、

$$\int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} dt \tag{2}$$

一方、$1 \leq t \leq a$ の範囲では、式 (1) の最左辺は正でないが、それ以外は正であるので、

$$0 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \qquad (1 \leq t \leq a)$$

この各辺を n 乗して、

$$0 \leq e^{-nt^2} \leq \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} \qquad (1 \leq t \leq a)$$

これを $t \in [1, a]$ で積分して、

$$0 \leq \int_1^a e^{-nt^2} dt \leq \int_1^a \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\, dt \tag{3}$$

式 (2) と式 (3) の辺々を足して、

$$\int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n dt \leq \int_0^a e^{-nt^2} dt \leq \int_0^a \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\, dt \tag{4}$$

式 (4) の最左辺について、$t = \sin\theta$ と置換すると、

$$\int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\theta\right)^n \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta\, d\theta = I_{2n+1} \tag{5}$$

式 (4) の最右辺について、$t = \tan\theta$ と置換する。$\tan\alpha = a$ となる角 $\alpha\,(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ をとると、

$$
\begin{aligned}
\int_0^a \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \int_0^\alpha \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^n} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \int_0^\alpha \cos^{2n-2}\theta d\theta \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\theta\, d\theta = I_{2n-2} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

式 (4) の中辺について、$t = \frac{x}{\sqrt{n}}$ と置換すると、

$$
\begin{aligned}
\int_0^a e^{-nt^2} dt &= \int_0^{a\sqrt{n}} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^R e^{-x^2} dx \qquad \left(\because a = \frac{R}{\sqrt{n}}\right) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

式 (4), 式 (5), 式 (6), 式 (7) より、

$$
\begin{aligned}
I_{2n+1} &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^R e^{-x^2} dx \leq I_{2n-2} \\
\therefore \sqrt{n}\, I_{2n+1} &\leq \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n}\, I_{2n-2} \\
\therefore \sqrt{n(I_{2n+1})^2} &\leq \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n(I_{2n-2})^2} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

ここで、$n = \lfloor R \rfloor$ であったので、$R \to \infty$ のとき $n \to \infty$ となる。さらに、補題 2 の (7), (8)より、式 (8) の最左辺・最右辺は $n \to \infty$ のときともに $\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ に収束する。よって、はさみうちの原理より、

$$
\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
$$

が成り立つ。ゆえに

$$
\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
$$

であるので

$$
\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad \blacksquare
$$