

高校数学の範囲内でのガウス積分の導出

2024 年 12 月 3 日

ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を、重積分の変数変換などを用いず、高校数学の範囲内で導出しよう。

補題 1

$x \geq 0$ に対して、次の不等式が成り立つ。

$$1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$$

証明

右側は不等式 $e^x \geq 1+x$ ($x \in \mathbb{R}$) から従い、左側はこの x を $-x$ としたものである。 ■

補題 2

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくと、以下の性質が成り立つ¹。

$$(1) I_{n+1} \leq I_n$$

$$(2) I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

$$(3) I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$(4) I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$(5) I_{2n} \cdot I_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} n(I_{2n+1})^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} n(I_{2n-2})^2 = \frac{\pi}{4}$$

証明

¹!! は「二重階乗」という記号で、

(1) $\cos^{n+1} \theta \leq \cos^n \theta$ なので明らか。

(2) 部分積分で漸化式を立てる。

(3) (2)を繰り返し使う。

(4) (2)を繰り返し使う。

(5) (3)と(4)を辺々掛け合わせる。

(6) (1)と(2)より、

$$\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\frac{2n+1}{2n+2} I_{2n}}{I_{2n}} = \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n+1}} = 1$$

よって、

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

が成り立ち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$ なので、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

が成り立つ。 ■

$$\begin{aligned} (7) \quad n(I_{2n+1})^2 &= \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \cdot n I_{2n} I_{2n+1} \\ &= \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \cdot \frac{n\pi}{2(2n+1)} \quad (\because (5)) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \times \frac{\pi}{4} \quad (\because (6)) \\ &= \frac{\pi}{4} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8) \quad n(I_{2n-2})^2 &= \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \cdot n I_{2n-2} I_{2n-1} \\ &= \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \cdot \frac{n\pi}{2(2n-1)} \quad (\because (5)) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \times \frac{\pi}{4} \quad (\because (6)) \\ &= \frac{\pi}{4} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$$

$$(2n)!! = 2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2$$

$$0!! = 1$$

と定義される。

定理 1 : ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

証明

$R \rightarrow \infty$ を考えるので、 $R > 1$ としてよい。 R を超えない最大の整数を n とおき、 $a = \frac{R}{\sqrt{n}}$ とおくと、 $a \geq 1$ となる。

補題 1 の x に t^2 ($t \geq 0$) を代入して、

$$1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1 + t^2} \quad (1)$$

$0 \leq t \leq 1$ の範囲では、式 (1) の各辺はいずれも非負であるので、各辺を n 乗して、

$$(1 - t^2)^n \leq e^{-nt^2} \leq \frac{1}{(1 + t^2)^n} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

これを $t \in [0, 1]$ で積分して、

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt \quad (2)$$

一方、 $1 \leq t \leq a$ の範囲では、式 (1) の最左辺は正でないが、それ以外は正であるので、

$$0 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1 + t^2} \quad (1 \leq t \leq a)$$

この各辺を n 乗して、

$$0 \leq e^{-nt^2} \leq \frac{1}{(1 + t^2)^n} \quad (1 \leq t \leq a)$$

これを $t \in [1, a]$ で積分して、

$$0 \leq \int_1^a e^{-nt^2} dt \leq \int_1^a \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt \quad (3)$$

式 (2) と式 (3) の辺々を足して、

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \leq \int_0^a e^{-nt^2} dt \leq \int_0^a \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt \quad (4)$$

式 (4) の最左辺について、 $t = \sin \theta$ と置換すると、

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta)^n \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \theta d\theta = I_{2n+1} \quad (5)$$

式 (4) の最右辺について、 $t = \tan \theta$ と置換する。 $\tan \alpha = a$ となる角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) をとると、

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \int_0^\alpha \frac{1}{(1+\tan^2 \theta)^n} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\
&= \int_0^\alpha \cos^{2n-2} \theta d\theta \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} \theta d\theta = I_{2n-2}
\end{aligned} \tag{6}$$

式 (4) の中辺について、 $t = \frac{x}{\sqrt{n}}$ と置換すると、

$$\begin{aligned}
\int_0^a e^{-nt^2} dt &= \int_0^{a\sqrt{n}} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^R e^{-x^2} dx \quad \left(\because a = \frac{R}{\sqrt{n}} \right)
\end{aligned} \tag{7}$$

式 (4), 式 (5), 式 (6), 式 (7) より、

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^R e^{-x^2} dx \leq I_{2n-2} \\
\therefore \sqrt{n} I_{2n+1} &\leq \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} I_{2n-2} \\
\therefore \sqrt{n(I_{2n+1})^2} &\leq \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n(I_{2n-2})^2}
\end{aligned} \tag{8}$$

ここで、 $n = \lfloor R \rfloor$ であつたので、 $R \rightarrow \infty$ のとき $n \rightarrow \infty$ となる。さらに、補題2の (7), (8) より、式 (8) の最左辺・最右辺は $n \rightarrow \infty$ のときともに $\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ に収束する。よって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が成り立つ。ゆえに

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であるので

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \blacksquare$$