Capítulo 1

ANÁLISIS DE CONCEPTOS FORMALES

1.1. ¿Qué es FCA?

El Análisis de Conceptos Formales (FCA) es un método de análisis de datos con creciente popularidad en distintos ámbitos como puede ser la minería de datos, preprocesamiento de datos o descubrimiento del conocimiento.
FCA analiza los datos que describen relaciones entre un conjunto de objetos y un conjunto de atributos y genera dos tipos de salida a partir de dichos datos.
El primer tipo es un **retículo de conceptos**. Un retículo de conceptos es un conjunto de conceptos formales ordenados jerárquicamente por una relación subconcepto-superconcepto.
Los conceptos formales son agrupaciones que representan objetos, cosas, nociones como "organismos que viven en el agua", "números divisibles por 3 y 4 ", etc. Formalmente, se pueden definir como pares $\langle A, B\rangle$ donde $A \subseteq X$ es un conjunto de objetos y $B \subseteq Y$ es un conjunto de atributos, tal que todos los elementos de A son todos los objetos que tienen los atributos de B y los elementos de B son los atributos comunes a todos los objetos de A.
El segundo tipo de salida es un **conjunto de implicaciones de atributos**.
Las implicaciones de atributos describen una dependencia concreta válida en los datos de entrada, como pueden ser "todos los números divisibles por 3 y 4 son divisibles por 6", "todo encuestado mayor de 60 está jubilado", etc.
La característica que diferencia a este método de análisis de datos de otros es la inherente integración entre tres componentes del procesamiento de datos y del conocimiento:

- el descubrimiento y razonamiento con conceptos en los datos,
- el descubrimiento y razonamiento de dependencias en los datos,
- y la visualización de los datos, conceptos y dependencias.

1.2. Contexto formal

Un contexto formal es la entrada de datos de FCA y se puede definir como una tripleta $\langle X, Y, I\rangle$, donde X es un **conjunto de objetos**, Y es un **conjunto de atributos** e I una **relación binaria**, $I \subseteq X \times Y$, que muestra qué objeto posee qué atributo. Como se ha dicho en la introducción, formalmente se puede considerar como un grafo bipartito que refleje las relaciones entre los conjuntos X y Y, o también como una tabla con los objetos ocupando las filas y los atributos en las columnas, y de forma que un valor booleano en la celda *(x,y)* significa que el objeto x tiene el atributo y.
Ejemplo: En la 1.1, se muestra un ejemplo de contexto formal representado como tabla.

I	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	×	×	×	×
x_2	×		×	×
x_3		×	×	×
x_4		×	×	×
x_5	×			

Figura 1.1: Representación en tabla de un Contexto Formal

En la tabla $\times$ indica que un objeto tiene un determinado atributo así como un espacio en blanco indica que el objeto no tiene el atributo. Por ejemplo, si los objetos son coches y los atributos son características de los coches tal que y_1 es el atributo "tener ABS", los coches x_1, x_2 y x_5 tendrían ABS pero x_3 y x_4 no.
Una tabla con atributos lógicos puede ser representado por una tripleta $\langle X, Y, I\rangle$ donde I es una relación binaria entre X e Y.

1.3. Operadores de derivación

Con el fin de poder trabajar más cómodamente con la relación I, definimos los operadores de derivación $\uparrow: 2^X \to 2^Y$ y $\downarrow: 2^Y \to 2^X$ como:

$$A^{\uparrow} = \{y \in Y : \forall x \in A \langle x, y\rangle \in I\} \text{ donde } A \subseteq X$$
$$B^{\downarrow} = \{x \in X : \forall y \in B \langle x, y\rangle \in I\} \text{ donde } B \subseteq Y$$

El operador $\uparrow\downarrow$ verifica algunas propiedades interesantes que serán fundamentales para poder desarrollar la teoría formal (matemáticamente, por verificar las siguientes propiedades, decimos que es un operador de cierre):

- idempotencia: $A^{\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow} = A^{\uparrow\downarrow}$,
- monotonía: $A_1 \subseteq A_2 \to A_1^{\uparrow\downarrow} \subseteq A_2^{\uparrow\downarrow}$,
- extensividad: $A \subseteq A^{\uparrow\downarrow}$

Obsérvese que, en general, no se verifica que $A^{\uparrow\downarrow} = A$. Cuando un conjunto de objetos, $A \subseteq X$ verifica que $A^{\uparrow\downarrow} = A$ se llama cerrado. Una definición similar se obtiene para hablar de conjuntos de atributos cerrados, es decir, subconjuntos del conjunto Y.

Ejemplo: Para la tabla de la Figura 1.1 tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\{x_2\}^{\uparrow} = \{y_1, y_3, y_4\}, \{x_2, x_3\}^{\uparrow} = \{y_3, y_4\},\\
&\{x_1, x_4, x_5\}^{\uparrow} = \emptyset,\\
&X^{\uparrow} = \emptyset, \emptyset^{\uparrow} = Y,\\
&\{y_1\}^{\downarrow} = \{x_1, x_2, x_5\}, \{y_1, y_2\}^{\downarrow} = \{x_1\},\\
&\{y_2, y_3\}^{\downarrow} = \{x_1, x_3, x_4\}, \{y_2, y_3, y_4\}^{\downarrow} = \{x_1, x_3, x_4\},\\
&\emptyset^{\downarrow} = X, Y^{\downarrow} = \{x_1\}.
\end{aligned}
$$

1.4. Conceptos Formales

El Concepto Formal es la noción básica del FCA. La definición de Concepto Formal se puede hacer desde varios enfoques:

- Psicología
  Murphy G. L.: The Big Book of Concepts. MIT Press, 2004.
  Margolis E., Laurence S.: Concepts: Core Readings. MIT Press, 1999.

- Lógica
  Tichy P.: The Foundations of Frege's Logic. W. De Gryuter, 1988.
  Materna P.: Conceptual Systems. Logos Verlag, Berlin, 2004.

- Inteligencia Artifical (aprendizaje de conceptos)
  Michalski, R. S., Bratko, I. and Kubat, M. (Eds.), Machine Learning and Data Mining: Methods and Applications, London, Wiley, 1998.

- Grafos conceptuales
  Sowa J. F.: Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations. Course Technology, 1999.

- Modelado conceptual, paradigma orientado a objetos, ...

- Tradicional / Lógica de Port-Royal
  Arnauld A., Nicole P.: La logique ou l'art de penser, 1662 (Logic Or The Art Of Thinking, CUP, 2003).

La noción de concepto usado en FCA está inspirado en la Lógica de Port-Royal (lógica tradicional) y se define como un par formado por un conjunto de objetos (**extensión**) y un conjunto de atributos (**intensión**) de forma que la extensión está formada por todos los objetos que comparten los atributos dados y la intensión por los atributos compartidos por los objetos dados.

Ejemplo:

- concepto: COCHE
- extensión: conjunto de todos los coches (Mercedes, Nissan, Toyota,...)
- intensión: tiene motor, tiene asientos, tiene ruedas, ...

A partir de los operadores de derivación definidos en el apartado anterior se puede decir que un par $\langle A, B\rangle$ se llama un concepto formal de un contexto si verifica:

- $A \subseteq X, B \subseteq Y$,
- $A^{\uparrow} = B, B^{\uparrow} = A$.

Aunque puede parecer una definición un poco arbitraria, intuitivamente un par, $\langle A, B\rangle$, es un concepto en el contexto si:

- cada objeto de A tiene todos los atributos de B,
- para cada objeto en X que no está en A, existe un atributo en B que el objeto no tiene,
- para cada atributo en Y que no está en B, hay un objeto en A que no tiene ese atributo.

Luego, en cierta forma, conseguimos introducir en la definición formal de concepto las dos partes que filosóficamente considerábamos esenciales: por una parte, el conjunto de objetos con propiedades comunes, y por otra el conjunto de atributos que caracterizan a dichos objetos. Únicamente aquellos pares de conjuntos que tienen una conexión perfectamente cerrada establecen un concepto por sí mismos. Allí donde no hay atributos ausentes ni contraejemplos entre sus objetos. En esta situación, los conjuntos A y B son cerrados y se llaman, respectivamente, la extensión y la intensión del concepto. Para un conjunto de objetos, A, el conjunto de sus atributos comunes, $A^{\uparrow}$, describe de alguna forma la similitud de los objetos de A, mientras que el conjunto $A^{\uparrow\downarrow}$ es la agrupación de objetos que tienen como atributos comunes a $A^{\uparrow}$ (en particular, estarán todos los objetos de A, es decir, $A \subseteq A^{\uparrow\downarrow}$).
Por tanto, un concepto, en la representación matricial, se puede reconocer por medio de una submatriz maximal (no necesariamente formada por celdas contiguas) de tal manera que todas las celdas de la submatriz son verdaderas.

I	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	×	×	×	×
x_2	×		×	×
x_3		×	×	×
x_4		×	×	×
x_5	×			

Figura 1.2: Concepto Formal

En la Figura 1.2 la zona sombreada representa el concepto formal $\langle A_1, B_1\rangle = \langle \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{y_3, y_4\}\rangle$ porque $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}^{\uparrow} = \{y_3, y_4\}$ y $\{y_3, y_4\}^{\downarrow} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.
En la representación como grafo bipartito se reconocerá como subgrafo bipartito completo (es decir, aquel que tiene todas las aristas posibles). Una definición más formal sería que $\langle A, B\rangle$ es un concepto formal si y sólo si $\langle A, B\rangle$ es un punto fijo de $\langle \uparrow, \downarrow\rangle$.

1.5. Retículo de conceptos de un contexto

En el conjunto de todos los conceptos puede establecerse una relación de orden relacionada con las nociones de subconcepto y superconcepto. Esta relación de orden está basada en la relación de inclusión de objetos y atributos. Su definición es la que sigue:
Para los conceptos formales $\langle A_1, B_1\rangle, \langle A_2, B_2\rangle \in \langle X, Y, I\rangle$, se cumple que $\langle A_1, B_1\rangle \leq \langle A_2, B_2\rangle \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 (\Leftrightarrow B_2 \subseteq B_1)$

- $\leq$ representa la ordenación subconcepto-superconcepto.

- $\langle A_1, B_1\rangle \leq \langle A_2, B_2\rangle$ significa que $\langle A_1, B_1\rangle$ es más específico que $\langle A_2, B_2\rangle$ ($\langle A_2, B_2\rangle$ es más general).

Por ejemplo, dados los conceptos COCHE y VEHICULO tendríamos la relación $COCHE \leq VEHICULO$ (el concepto COCHE es más específico que el concepto VEHICULO).
Cada par de conceptos en este orden parcial tiene una única máxima cota inferior, que es el concepto generado por $A_1 \cap A_2$. Simétricamente, cada par de conceptos en este orden parcial tiene una única mínima cota superior, que es el concepto generado por los atributos $B_1 \cap B_2$.
Estas operaciones que calculan el máximo y mínimo de dos conceptos satisfacen los axiomas que definen un retículo, y es fácil probar que cualquier retículo finito puede ser generado como el retículo de conceptos de algún contexto (por ejemplo, si L es el

retículo, se crea un contexto en el que X=Y=L y la relación $\langle x, y\rangle \in I \Leftrightarrow x \leq y$ en el retículo).

Ejemplo: Consideremos el siguiente contexto formal:

		a	b	c	d	e	f	g	h	i
sanguijuela	1	x	x					x		
brema	2	x	x					x	x	
rana	3	x	x	x				x	x	
perro	4	x		x				x	x	x
maleza acuática	5	x	x		x		x			
caña	6	x	x	x	x		x			
haba	7	x		x	x	x				
maíz	8	x		x	x		x			

Figura 1.3: ContextoFormal

a: necesita el agua para vivir, b: vive en el agua, c: vive en la tierra, d: necesita clorofila para producir comida, e: dos hojas de la semilla, f: hoja de una semilla, g: puede moverse, h: tiene extremidades, i: amamanta a sus crías
Del anterior contexto formal $\langle X, Y, I\rangle$ se pueden deducir los siguientes conceptos formales:

$$C_0 = \langle\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \{a\}\rangle, C_1 = \langle\{1,2,3,4\}, \{a,g\}\rangle, C_2 = \langle\{2,3,4\}, \{a,g,h\}\rangle,$$
$$C_3 = \langle\{5,6,7,8\}, \{a,d\}\rangle, C_4 = \langle\{5,6,8\}, \{a,d,f\}\rangle, C_5 = \langle\{3,4,6,7,8\}, \{a,c\}\rangle,$$
$$C_6 = \langle\{3,4\}, \{a,c,g,h\}\rangle, C_7 = \langle\{4\}, \{a,c,g,h,i\}\rangle, C_8 = \langle\{6,7,8\}, \{a,c,d\}\rangle,$$
$$C_9 = \langle\{6,8\}, \{a,c,d,f\}\rangle, C_{10} = \langle\{7\}, \{a,c,d,e\}\rangle, C_{11} = \langle\{1,2,3,5,6\}, \{a,b\}\rangle,$$
$$C_{12} = \langle\{1,2,3\}, \{a,b,g\}\rangle, C_{13} = \langle\{2,3\}, \{a,b,g,h\}\rangle, C_{14} = \langle\{5,6\}, \{a,b,d,f\}\rangle,$$
$$C_{15} = \langle\{3,6\}, \{a,b,c\}\rangle, C_{16} = \langle\{3\}, \{a,b,c,g,h\}\rangle, C_{17} = \langle\{6\}, \{a,b,c,d,f\}\rangle,$$
$$C_{18} = \langle\{\}, \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}\rangle$$

El correspondiente retículo de conceptos *B(X, Y, I)* se muestra en la Figura 1.4:

1.6. Implicaciones de atributos

Las implicaciones de atributos representan dependencias entre ellos tales como:

- todos los números divisibles por 2 y por 3 son divisibles por 6

- todos los pacientes con el síntoma s_2 y el síntoma s_5 tienen también el síntoma s_1 y el s_3.

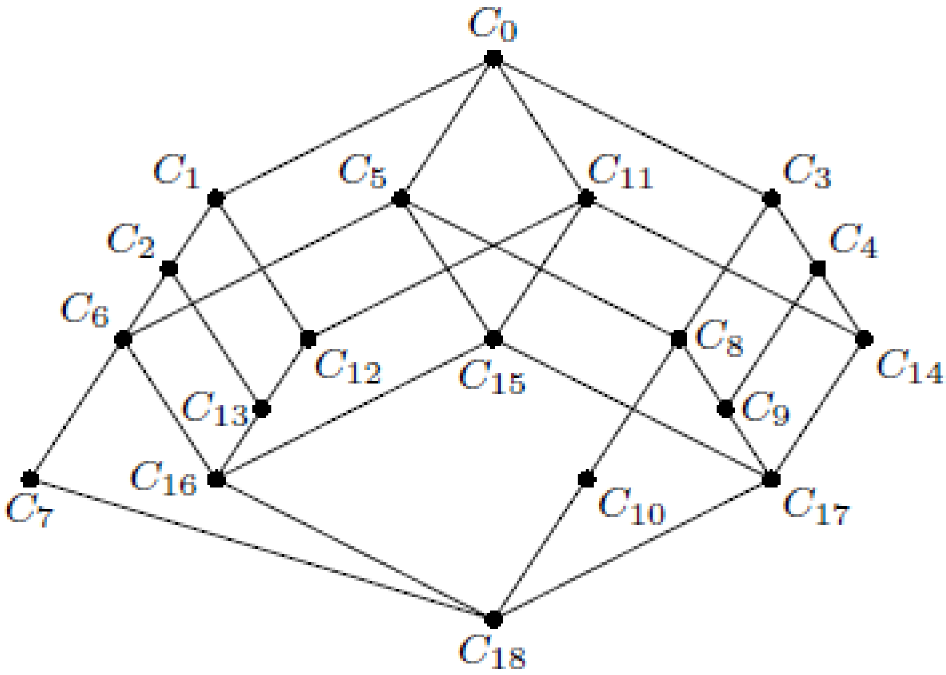

Figura 1.4: Retículo de conceptos *B(X, Y, I)*

Siendo Y un conjunto de atributos no vacío, una implicación de atributos en Y es una expresión

$$A \Rightarrow B \text{ donde } A \subseteq Y \text{ y } B \subseteq Y$$

Ejemplos:

- Dado $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $\{y_2, y_3\} \Rightarrow \{y_1, y_4\}, \{y_2, y_3\} \Rightarrow \{y_1, y_2, y_3\}, \emptyset \Rightarrow \{y_1, y_2\}, \{y_2, y_4\} \Rightarrow \emptyset$ son implicaciones de atributos en Y.

- Dado $Y =$ *ver la tele,comer comida basura,correr regularmente, presión arterial normal,presión arterial alta*, entonces {ver la tele} $\Rightarrow$ {presión arterial alta}, {correr regularmente $\Rightarrow$ presión arterial normal} son implicaciones de atributos en Y.

La estructura con la cual evaluamos las implicaciones de atributos son las filas de las tablas de los contextos formales, que pueden considerarse como el conjunto de atributos de cada objeto.
Por lo que, una implicación de atributos $A \Rightarrow B$ en el conjunto de atributos Y es válida en un conjunto si y sólo si

$$A \subseteq M \Rightarrow B \subseteq M$$

- Escribimos

$$|A \Rightarrow B|_{\mathcal{M}} \begin{cases} 1 \text{ si } A \Rightarrow B \text{ es verdadero en } \mathcal{M}, \\ 0 \text{ si } A \Rightarrow B \text{ no es verdadero en } \mathcal{M}. \end{cases}$$

- Sea M un conjunto de atributos de algún objeto x. $|A \Rightarrow B|_M$ quiere decir que "si x tiene todos los atributos de A, entonces x tiene todos los atributos de B". Por lo que, $C \subseteq M$ es lo mismo que decir "si x tiene todos los atributos de C" .

Ejemplo: Dado $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

$A \Rightarrow B$	M	$\|\|A \Rightarrow B\|\|_M$	why
$\{y_2, y_3\} \Rightarrow \{y_1\}$	$\{y_2\}$	1	$A \not\subseteq M$
$\{y_2, y_3\} \Rightarrow \{y_1\}$	$\{y_1, y_2\}$	1	$A \not\subseteq M$
$\{y_2, y_3\} \Rightarrow \{y_1\}$	$\{y_1, y_2, y_3\}$	1	$A \subseteq M$ and $B \subseteq M$
$\{y_2, y_3\} \Rightarrow \{y_1\}$	$\{y_2, y_3, y_4\}$	0	$A \subseteq M$ but $B \not\subseteq M$
$\{y_2, y_3\} \Rightarrow \{y_1\}$	$\emptyset$	1	$A \not\subseteq \emptyset$
$\emptyset \Rightarrow \{y_1\}$	$\{y_1, y_4\}$	1	$\emptyset \subseteq M$ and $B \subseteq M$.
$\emptyset \Rightarrow \{y_1\}$	$\{y_3, y_4\}$	0	$\emptyset \subseteq M$ but $B \not\subseteq M$.
$\{y_2, y_3\} \Rightarrow \emptyset$	any M	1	$\emptyset \subseteq M$

Figura 1.5: Implicaciones de atributos

Dado $\mathcal{M} \subseteq 2^Y$, una implicación $A \Rightarrow B$ en Y es válida en $\mathcal{M}$ si es verdadero en cada $M \in \mathcal{M}$.

- De nuevo,

$$|A \Rightarrow B|_{\mathcal{M}} \begin{cases} 1 \text{ si } A \Rightarrow B \text{ es verdadero en } \mathcal{M}, \\ 0 \text{ si } A \Rightarrow B \text{ no es verdadero en } \mathcal{M}. \end{cases}$$

por lo tanto, $|A \Rightarrow B|_{\mathcal{M}} = min_{M \in \mathcal{M}} |A \Rightarrow B|_M$
Así llegamos a la definición de la validez de una implicación de atributos en un contexto formal.
Una implicación $A \Rightarrow B$ en Y es verdadera en un contexto formal $\langle X, Y, I\rangle$ si y sólo si $A \Rightarrow B$ es verdadera en

$$|A \Rightarrow B|_{\langle X,Y,I\rangle} = 1 \text{ si } A \Rightarrow B \text{ es verdadero en } \langle X, Y, I\rangle$$

- $\{x\}^{\uparrow}$ es el conjunto de atributos de **x**. Por lo que, $\mathcal{M} = \left\{\{x\}^{\uparrow} : x \in X\right\}$ es la colección cuyos elementos son justo los conjuntos de atributos de los objetos de $\langle X, Y, I\rangle$, es decir las filas de la tabla del contexto formal. Así que, $|A \Rightarrow B|_{\langle X,Y,I\rangle} = 1$ si y sólo si $A \Rightarrow B$ es verdadero en cada fila de $\langle X, Y, I\rangle$ si y sólo si para cada fila de $\langle X, Y, I\rangle$: si x tiene todos los atributos de A entonces x tiene todos los atributos de B.

Con esta definición, las implicaciones obedecen las reglas de Armstrong (reflexiva, aumentativa y transitiva) comunes en las dependencias funcionales que se dan entre los atributos de una base de datos:

$$\frac{B \subseteq A}{A \Rightarrow B}, \frac{A \Rightarrow B}{A \cup C \Rightarrow B \cup C^{\downarrow}}, \frac{D \Rightarrow B, B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$$

A partir de la definición de implicación y de las propiedades básicas que verifica, podemos definir un cálculo lógico que nos permitiría realizar sistemas de deducción completos sobre el contexto actual. En cierta forma, hemos pasado de tener un conocimiento por ejemplos a disponer de un conocimiento abstracto que introduce sistemas de razonamiento más elaborados en nuestro mundo, partiendo únicamente de las observaciones concretas que hemos realizado, es decir, hemos aprendido reglas generales a partir de ejemplos.

1.7. Estructuras matemáticas relacionadas con el FCA

En esta sección se describen las estructuras matemáticas en las que se basa el FCA y sus propiedades.

1.7.1. Conexiones de Galois

Conexión de Galois: Una conexión de Galois entre dos conjuntos X e Y es un par $\langle f, g\rangle$ de $f : 2^X \to 2^Y$ y $g : 2^Y \to 2^X$ cumpliendo para $A, A_1, A_2 \subseteq X, B, B_1, B_2 \subseteq Y$:

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_2) \subseteq f(A_1), \tag{1.1}$$

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow g(B_2) \subseteq g(B_1), \tag{1.2}$$

$$A \subseteq g(f(A)), \tag{1.3}$$

$$B \subseteq f(g(B)). \tag{1.4}$$

Puntos fijos de conexiones de Galois: Para una conexión de Galois $\langle f, g\rangle$ entre dos conjuntos X e Y, al conjunto

$$fix(\langle f, g\rangle) = \{\langle A, B\rangle \in 2^X \times 2^Y | f(A) = B, g(B) = A\}$$

es llamado conjunto de puntos fijos de $\langle f, g\rangle$

Teorema 1.7.1 (operadores de derivación para conexiones de Galois). *Para un contexto formal $\langle X, Y, I\rangle$, el par de operadores $\langle \uparrow' \downarrow' \rangle$ inducidos por $\langle X, Y, I\rangle$ es una conexión* *de Galois entre X e Y.*

Lema 1.7.2. *(encadenamiento de conexiones de Galois) Para una conexión de Galois $\langle f, g\rangle$ entre dos conjuntos X e Y se cumple que $f(A) = f(g(f(A)))$ y $g(B) = g(f(g(B)))$ para cualquier $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.*

1.7.2. Operadores de cierre

Operador de cierre: Un operador de cierre en el conjunto X es un mapeo $C : 2^X \to 2^Y$ que cumple para cada $A, A_1, A_2 \subseteq X$

$$A \subseteq C(A), \tag{1.5}$$

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow C(A_1) \subseteq C(A_2), \tag{1.6}$$

$$C(A) \subseteq C(C(A)). \tag{1.7}$$

Puntos fijos de operadores de cierre: Para un operador de cierre $C : 2^X \to 2^Y$, al conjunto

$$fix(C) = \{A \subseteq X | C(A) = A\}$$

es llamado punto fijo de C.

Teorema 1.7.3 (desde conexiones de Galois a operadores de cierre)**.** *Si $\langle f, g\rangle$ es una conexión de Galois entre X e Y entonces $C_X = f \circ g$ es un operador de cierre en X y $C_Y = g \circ f$ es un operador de cierre en Y.*

Teorema 1.7.4. *(extensiones e intensiones)*

$$Ext(X, Y, I) = \left\{B^{\downarrow} | B \subseteq Y\right\},$$
$$Int(X, Y, I) = \left\{A^{\uparrow} | A \subseteq X\right\}$$

Teorema 1.7.5. *La menor extensión que contiene a $A \subseteq X$ es $A^{\uparrow\downarrow}$. La menor intensión que contiene a $B \subseteq Y$ es $B^{\downarrow\uparrow}$.*

1.7.3. Extensiones, intensiones, retículo de conceptos

Teorema 1.7.6. *Para cualquier contexto formal $\langle X, Y, I\rangle$*

$$
\begin{aligned}
&Ext(X,Y,I) = fix(\uparrow\downarrow),\\
&Int(X,Y,I) = fix(\downarrow\uparrow),\\
&\mathcal{B}(X,Y,I) = \left\{\left\langle A, A^{\uparrow}\right\rangle |A \in Ext(X,Y,I)\right\},\\
&\mathcal{B}(X,Y,I) = \left\{\left\langle B^{\downarrow}, A\right\rangle |B \in Int(X,Y,I)\right\}.
\end{aligned}
$$

Observación

El teorema anterior dice: A fin de obtener $\mathcal{B}(X,Y,I)$ podemos:

1. procesar *Ext(X, Y, I)*,
2. para cada $A \in Ext(X,Y,I)$ generar $\left\langle A, A^{\uparrow}\right\rangle$.

1.7.4. Definición concisa de conexiones de Galois

Hay una condición simple la cual es equivalente a las condiciones (1) - (4) de la definición de conexión de Galois.

Teorema 1.7.7. *$\langle f, g\rangle$ es una conexión de Galois entre X e Y si y sólo si para todo $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$:*

$$A \subseteq g(B) \text{ sii } B \subseteq f(A) \tag{1.8}$$

1.7.5. Conexiones de Galois, unión e intersección

El siguiente teorema describe el comportamiento básico de las conexiones de Galois respecto a la unión y a la intersección.

Teorema 1.7.8. *$\langle f, g\rangle$ es una conexión de Galois entre X e Y cuando $A_j \subseteq X, j \in J$ y $B_j \subseteq Y, j \in J$ tenemos que*

$$f\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f(A_j), \tag{1.9}$$

$$g\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} g(B_j), \tag{1.10}$$

1.7.6. Cada conexión de Galois es inducida por una relación binaria

No sólo todos los pares de operadores de derivación forman un Galois, todos las conexiones de Galois es un operador de derivación de un contexto formal particular.

Teorema 1.7.9. *Sea $\langle f, g\rangle$ una conexión de Galois entre X e Y. Considérese un contexto formal $\langle X, Y, I\rangle$ tal que I está definido por*

$$\langle x, y\rangle \in I \text{ sii } y \in f(\{x\}) \text{ o, equivalentemente, sii } x \in g(\{y\}), \tag{1.11}$$

para cada $x \in X$ e $y \in Y$. Entonces $\langle \uparrow', \downarrow'\rangle = \langle f, g\rangle$, esto es, los operadores de derivación $\langle \uparrow', \downarrow'\rangle$ inducido por $\langle X, Y, I\rangle$ coincide con $\langle f, g\rangle$.

Observaciones

- La relación I inducida a partir de $\langle f, g\rangle$ por (11) se indicará por $I_{\langle f,g\rangle}$.
- De ahí que, hemos establecido dos mapeos:
  $I \mapsto \langle \uparrow', \downarrow'\rangle$ asigna una conexión de Galois a una relación binaria I. $\langle \uparrow, \downarrow\rangle \mapsto I_{\langle \uparrow, \downarrow\rangle}$ asigna una relación binaria a una conexión de Galois.

1.7.7. Teorema de representación para conexiones de Galois

Teorema 1.7.10. *(de representación)*
$I \mapsto \langle \uparrow', \downarrow'\rangle$ y $\langle \uparrow, \downarrow\rangle \mapsto I_{\langle \uparrow, \downarrow\rangle}$ son mutuamente mapeos inversos entre el conjunto de relaciones binarias entre X e Y y el conjunto de todas las conexiones de Galois entre X e Y.

Observaciones
En particular, el teorema anterior asegura que (1)-(4) describe completamente todas las propiedades de nuestros operadores inducidos por los datos $\langle X, Y, I\rangle$.

1.7.8. Estructura jerárquica de retículo de conceptos

Sabemos que $\mathcal{B}(X, Y, I)$ (conjunto de todos los conceptos formales) con $\leq$ (jerarquía subconcepto-superconcepto) es un conjunto parcialmente ordenado. Ahora, la cuestión es: ¿Cuál es la estructura de $\langle \mathcal{B}(X, Y, I), \leq\rangle$?
Resulta que $\langle \mathcal{B}(X, Y, I), \leq\rangle$ es un retículo completo (se verá en la parte de Teorema principal de retículos de conceptos).
Retículo de conceptos $\approx$ jerarquía de conceptos completa
Que $\langle \mathcal{B}(X, Y, I), \leq\rangle$ sea un retículo es una buena noticia.
Concretamente, se dice que para cualquier colección de conceptos formales $K \subseteq \mathcal{B}(X, Y, I)$, contiene tanto la "generalización directa" $\bigvee K$ de conceptos de K (supremo de K) , como la "especialización directa" $\bigwedge K$ de conceptos de K (ínfimo de K). En este sentido, es una jerarquía completa de conceptos.
A continuación se detalla el Teorema principal de retículos de conceptos.

Teorema 1.7.11. *Para un operador de cierre C en X, el conjunto parcialmente ordenado $\langle fix(C), \subseteq \rangle$ de puntos fijos de C es un retículo completo con ínfimo y supremo dado por*

$$\bigwedge_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} A_j, \tag{1.12}$$

$$\bigvee_{j \in J} A_j = C(\bigcup_{j \in J} A_j). \tag{1.13}$$

1.8. Teorema Principal de Retículo de Conceptos

Teorema 1.8.1. *1. $\mathcal{B}(X, Y, I)$ (1) es un retículo completo con ínfimo y supremo dado por*

$$\bigwedge_{j \in J} \langle A_j, B_j \rangle = \left\langle \bigcap_{j \in J} A_j, (\bigcup_{j \in J} B_j)^{\downarrow\uparrow} \right\rangle = \bigvee_{j \in J} \langle A_j, B_j \rangle = \left\langle (\bigcup_{j \in J} A_j)^{\uparrow\downarrow}, (\bigcap_{j \in J} B_j) \right\rangle. \tag{1.14}$$

2. Además, un retículo completo arbitrario $\mathbf{V} = (V, \leq)$ es isomorfo a $\mathcal{B}(X, Y, I)$ si y sólo si hay mapeos $\gamma : X \to V, \mu : Y \to V$ tal que

a) $\gamma(X)$ es $\bigvee$-irreducible en V, $\mu(Y)$ es $\bigwedge$-irreducible en V;

b) $\gamma(X) \leq \mu(Y)$ sii $\langle x, y \rangle \in I$.

Observaciones

1. $K \subseteq V$ es supremo-irreducible en V si y sólo si para cada $v \in V$ existe $K' \subseteq K$ tal que $v = \bigvee K'$ (es decir, todo elemento v de V es supremo de algún elemento de K).
   Igualmente para el ínfimo-irreducible de K en V (todo elemento v de V es ínfimo de algún elemento de K).

2. Supremo (ínfimo)-irreducibilidad establece que puedan ser considerados bloques de trabajo de V.

¿Qué dice el Teorema Principal? La parte (1) dice que $\mathcal{B}(X, Y, I)$ es un retículo y describe su ínfimo y supremo. La parte (2) provee la forma de etiquetar un retículo de conceptos para que esa información no se pierda.

1.8.1. Etiquetado de diagramas de retículos de conceptos

El etiquetado tiene dos reglas:

- $\gamma(x) = \left\langle \{x\}^{\uparrow\downarrow}, \{x\}^{\uparrow} \right\rangle$ ... objeto del concepto de x - etiquetado para x,

- atributo del concepto de y - etiquetado para y.

¿Cómo vemos las extensiones e intensiones en un diagrama de Hasse etiquetado? Consideremos el concepto formal $\langle A, B\rangle$ correspondiente al nodo c de un diagrama etiquetado del retículo de conceptos $\mathcal{B}(X, Y, I)$. ¿Qué es la extensión y la intensión en $\langle A, B\rangle$?

- $x \in A$ si y sólo si el nodo con la etiqueta x se encuentra en el camino desde c hacia abajo,

- $y \in B$ si y sólo si el nodo con la etiqueta y se encuentra en el camino desde c hacia arriba.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	X	X	X	X
x_2		X	X	X
x_3		X	X	X
x_4	X			

Figura 1.6: Contexto Formal

$\mathcal{B}(X, Y, I) = \{\langle \{x_1\}, Y\rangle, \langle \{x_1, x_2, x_3\}, \{y_2, y_3, y_4\}\rangle, \langle \{x_1, x_4\}, \{y_1\}\rangle, \langle X, \emptyset\rangle\}$
El diagrama correspondiente:

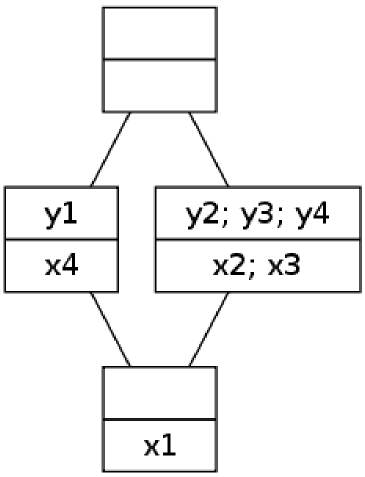

Figura 1.7: Diagrama de etiquetado del retículo de conceptos

Sea c el nodo del concepto $\langle \{x_2, x_3\}, \{y_2, y_3, y_4\} \rangle$. La extensión de c son los x_i de los nodos del camino desde c hacia abajo, es decir $\{x_2, x_3, x_1\}$.

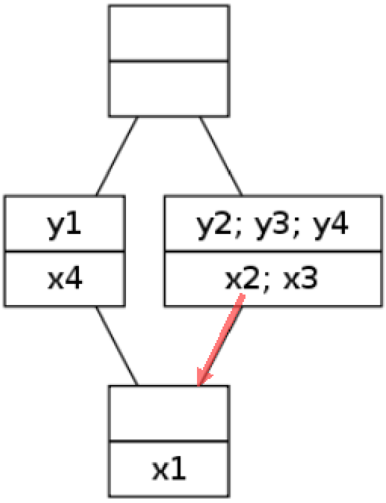

Figura 1.8: Extensión del concepto $\langle \{x_2, x_3\}, \{y_2, y_3, y_4\} \rangle$

La intensión de c son los y_i de los nodos del camino desde c hacia arriba, es decir $\{y_2, y_3, y_4\}$.

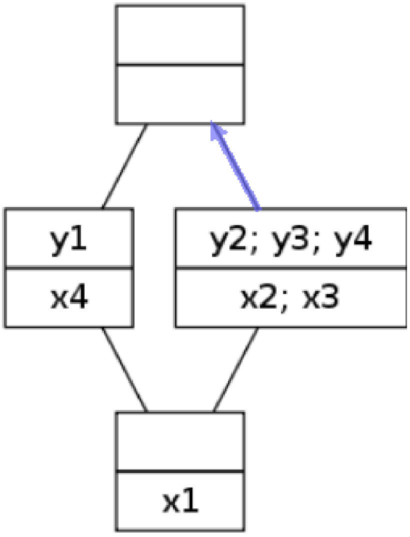

Figura 1.9: Intensión del concepto $\langle \{x_2, x_3\}, \{y_2, y_3, y_4\} \rangle$

1.9. Clarificación y reducción de conceptos formales

Un contexto formal puede ser redundante y es posible borrar algunos de sus objetos o atributos y obtener un contexto formal para el cual el retículo de conceptos asociado es isomorfo al del contexto formal original.

Para ello se definirán dos nociones principales: contexto formal clarificado y contexto formal reducido.

Definición (contexto clarificado): Un contexto formal $\langle X, Y, I\rangle$ es clarificado cuando

$$\{x_1\}^{\uparrow} = \{x_2\}^{\uparrow} \text{ implica } x_1 = x_2 \text{ para todo } x_1, x_2 \in X;$$
$$\{y_1\}^{\downarrow} = \{y_2\}^{\downarrow} \text{ implica } y_1 = y_2 \text{ para todo } y_1, y_2 \in Y.$$

La clarificación consiste en la eliminación de idénticas filas y columnas (queda sólo una de las filas/columnas idénticas).

Ejemplo:
El contexto formal de la derecha resulta de aplicar la clarificación del contexto formal de la izquierda.

I	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	×	×	×	×
x_2	×		×	×
x_3		×	×	×
x_4		×	×	×
x_5	×			

I	y_1	y_2	y_3
x_1	×	×	×
x_2	×		×
x_3		×	×
x_5	×		

Figura 1.10: Clarificación

Teorema 1.9.1. *Si $\langle X_1, Y_1, I_1\rangle$ es un contexto clarificado resultante de $\langle X_2, Y_2, I_2\rangle$ por clarificación, entonces $\mathcal{B}(X_1, Y_1, I_1)$ es isomorfo a $\mathcal{B}(X_2, Y_2, I_2)$.*

Definición (objetos y atributos reducibles):
Para un contexto formal $\langle X, Y, I\rangle$, un atributo $y \in Y$ es reducible si y sólo si existe $Y' \subset Y$ con $y \notin Y'$ tal que

$$\{y\}^{\downarrow} = \bigcap_{z \in Y'} \{z\}^{\downarrow},$$

es decir, la columna correspondiente a y es la intersección de las columnas correspondientes a los elementos (z) de Y'. Un objeto $x \in X$ es reducible si y sólo si existe

$X' \subset X$ con $x \notin X'$ tal que

$$\{x\}^{\uparrow} = \bigcap_{z \in X'} \{z\}^{\uparrow},$$

es decir, la fila correspondiente a x es la intersección de filas correspondientes a los elementos (z) de X'.

<u>Ejemplo:</u> Dado el contexto formal

	y_1	y_2	y_3
x_1			X
x_2	X	X	X
x_3	X		

y_2 es reducible $(Y' = y_1, y_3)$.

<u>Observaciones</u>

- Si un elemento y (valor real del atributo) es una combinación lineal de otros atributos, éste puede ser eliminado. Cuidado, esto depende de lo que se hace con los atributos. La intersección es una combinación particular de atributos.

- La (no-)reducibilidad en $\langle X, Y, I\rangle$ está conectado con la llamada $\bigwedge$-(ir-)reducibilidad y $\bigvee$-(ir)reducibilidad en $\mathcal{B}(X, Y, I)$.

- En un retículo completo $\langle \bigvee, \leq\rangle$ es llamado $\bigwedge$-irreducible si no hay $U \subset V$ con $v \notin U$ tal que $v = \bigwedge U$. Igualmente para $\bigvee$-irreducibilidad.

- Por definición, y es reducible si y sólo si hay $Y' \subset Y$ con tal que

$$\left\langle \{y\}^{\downarrow}, \{y\}^{\downarrow\uparrow} \right\rangle = \bigwedge_{z \in Y'} \left\langle \{z\}^{\downarrow}, \{z\}^{\downarrow\uparrow} \right\rangle \tag{1.15}$$

Sea $\langle X, Y, I\rangle$ clarificado. Entonces en (16), para cada $z \in Y'$: $\{y\}^{\downarrow} \neq \{z\}^{\downarrow}$, y por lo tanto, $\left\langle \{y\}^{\downarrow}, \{y\}^{\downarrow\uparrow} \right\rangle$. Por consiguiente, y es reducible si y sólo si $\left\langle \{y\}^{\downarrow}, \{y\}^{\downarrow\uparrow} \right\rangle$ es un ínfimo de atributos de conceptos diferente de $\left\langle \{y\}^{\downarrow}, \{y\}^{\downarrow\uparrow} \right\rangle$. Ahora, como todo concepto $\langle A, B\rangle$ es un ínfimo de algún atributo de conceptos (los atributos de conceptos $\bigwedge$-irreducibles), obtenemos que y no es reducible si y sólo si $\left\langle \{y\}^{\downarrow}, \{y\}^{\downarrow\uparrow} \right\rangle$ es $\bigwedge$-irreducible en $\mathcal{B}(X, Y, I)$.

Por lo que, si $\langle X, Y, I\rangle$ es clarificado, y no es reducible si y sólo si $\left\langle \{y\}^{\downarrow}, \{y\}^{\downarrow\uparrow} \right\rangle$ es $\bigwedge$-irreducible.

Supongamos que $\langle X, Y, I\rangle$ no es clarificado debido a que $\{y\}^{\downarrow} = \{z\}^{\downarrow}$ para algún $z \neq y$. Entonces se puede ver que y es reducible por definición sólo haciendo que $Y' = \{z\}$. Sin embargo, puede suceder que $\left\langle \{y\}^{\downarrow}, \{y\}^{\downarrow\uparrow} \right\rangle$ sea $\bigwedge$-irreducible y puede suceder que y sea $\bigwedge$-irreducible .

Ejemplo:
En la figura 1.11 se muestran dos contextos no clarificados. En la izquierda, y_2 es reducible y $\left\langle \{y_2\}^{\downarrow}, \{y_2\}^{\downarrow\uparrow} \right\rangle$ $\bigwedge$-reducible. En la derecha, y_2 es reducible pero $\left\langle \{y_2\}^{\downarrow}, \{y_2\}^{\downarrow\uparrow} \right\rangle$ $\bigwedge$-irreducible.

I	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1			×	
x_2	×	×	×	×
x_3	×	×	×	×
x_4	×			

I	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	×		×		
x_2		×		×	
x_3	×	×	×	×	
x_4	×		×		

Figura 1.11: Contextos no clarificados

Igualmente para la reducibilidad de objetos. Si $\langle X, Y, I\rangle$ es clarificado, entonces x no es reducible si y sólo si $\left\langle \{x\}^{\uparrow\downarrow}, \{x\}^{\uparrow} \right\rangle$ es $\bigwedge$-irreducible en $\mathcal{B}(X, Y, I)$.
Por lo que, es conveniente considerar la reducibilidad en los contextos clarificados, luego, la reducibilidad de objetos y atributos corresponden a $\bigvee$ - y $\bigwedge$-reducibilidad de objetos y atributos de conceptos.

Teorema 1.9.2. *Sea $y \in Y$ reducible en $\langle X, Y, I\rangle$. Entonces $\mathcal{B}(X, Y - \{y\}, J)$ es isomorfo a $\mathcal{B}(X, Y, I)$ donde $J = I \cap (X \times (Y - \{y\}))$ resulta de eliminar la columna y de $\langle X, Y, I\rangle$.*

Definición (contexto formal reducido): $\langle X, Y, I\rangle$ es

- reducido por filas si no existe ningún objeto $x \in X$ reducible,
- reducido por columnas si no existe ningún atributo $y \in Y$ reducible,
- reducido si es reducido por filas y por columnas.

Por la observación anterior, si $\langle X, Y, I\rangle$ no es clarificado, entonces o bien algún objeto es reducible (si hay filas iguales) o algún atributo es reducible (si hay columnas iguales). Por lo que, si $\langle X, Y, I\rangle$ es reducido, éste es clarificado.
La relación entre reducibilidad de objetos/atributos y $\bigvee$- y $\bigwedge$-reducibilidad de objetos/atributos de conceptos lleva a la siguiente conclusión:
Un clarificado $\langle X, Y, I\rangle$ es

- reducido por filas si y sólo si todos los objetos de concepto son $\bigvee$-irreducible,

- reducido por columnas si y sólo si todos los atributos de concepto son $\bigwedge$-irreducible,

1.9.1. Reducción de contextos formales por relaciones de vectores

¿Cómo averiguar qué objetos y atributos son reducibles?

Definición:
Para $\langle X, Y, I\rangle$, se definen las relaciones $\nearrow \swarrow \updownarrow$ entre X e Y por

- $x \swarrow y$ sii $\langle x, y\rangle \notin I$ y si $\{x\}^{\uparrow} \subset \{x_1\}^{\uparrow}$ entonces $\langle x_1, y\rangle \in I$.
- $x \nearrow y$ sii $\langle x, y\rangle \notin I$ y si $\{y\}^{\downarrow} \subset \{y_1\}^{\downarrow}$ entonces $\langle x, y_1\rangle \in I$.
- $x \updownarrow y$ sii $x \swarrow y$ y $x \nearrow y$.

Por lo que, si $\langle x, y\rangle \in I$ entonces no ocurre $x \nearrow y, x \swarrow y, x \updownarrow y$. Las relaciones de vectores pueden por lo tanto ser introducidas en la tabla de $\langle X, Y, I\rangle$ como en el siguiente ejemplo:

I	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	×	×	×	×
x_2	×	×		
x_3		×	×	×
x_4		×		
x_5		×	×	

I	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	×	×	×	×
x_2	×	×	$\updownarrow$	$\swarrow$
x_3	$\updownarrow$	×	×	×
x_4	$\nearrow$	×	$\nearrow$	
x_5	$\nearrow$	×	×	$\updownarrow$

Figura 1.12: Representación de relaciones de vectores

Teorema 1.9.3. *(las relaciones de vectores y la reducibilidad) Para cualquier $\langle X, Y, I\rangle$, $x \in X, y \in Y$:*

- $\left\langle \{x\}^{\uparrow\downarrow}, \{x\}^{\uparrow} \right\rangle$ *es $\bigvee$-irreducible sii existe $y \in Y$ tal que $x \swarrow y$;*
- $\left\langle \{x\}^{\uparrow\downarrow}, \{x\}^{\uparrow} \right\rangle$ *es $\bigwedge$-irreducible sii existe $x \in X$ tal que $x \nearrow y$;*

Considérese el siguiente problema:

INPUT: Contexto formal arbitrario $\langle X_1, Y_1, I_1\rangle$

OUTPUT: Un contexto reducido $\langle X_2, Y_2, I_2\rangle$

Este problema se puede resolver con el siguiente algoritmo:

1. clarificar $\langle X_1, Y_1, I_1 \rangle$ para obtener un contexto clarificado $\langle X_3, Y_3, I_3 \rangle$, borrando las filas y columnas iguales,

2. calcular las relaciones de vectores $\nearrow$ y $\swarrow$ para $\langle X_3, Y_3, I_3 \rangle$,

3. obtener $\langle X_2, Y_2, I_2 \rangle$ a partir de $\langle X_3, Y_3, I_3 \rangle$ borrando los objetos x de X_3 para los que no existe $y \in Y_3$ con $x \swarrow y$, y atributos y de Y_3 para los que no existe $x \in X_3$ con $x \nearrow y$. Esto es:

$$\begin{aligned} X_2 &= X_3 - \{x | \text{ no existe } y \in Y_3 \text{ tal que } x \swarrow y\}, \\ Y_2 &= Y_3 - \{y | \text{ no existe } x \in X_3 \text{ tal que } x \nearrow y\}, \\ I_2 &= I_3 \cap (X_2 \times Y_2). \end{aligned}$$

Ejemplo:

Calcular las relaciones de vectores $\nearrow$, $\swarrow$ y $\updownarrow$ para el siguiente contexto formal:

I_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	X	X	X	X
x_2	X	X		
x_3		X	X	X
x_4		X		
x_5		X	X	

Figura 1.13: Contexto de entrada

Empezamos con $\nearrow$. Necesitamos recorrer las celdas en la tabla que no contengan $\times$ y decidir si aplicar $\nearrow$.

La primera de dichas celdas corresponde a $\langle x_2, y_3 \rangle$. Por definición $x_2 \nearrow y_3$ sii para cada $y \in Y$ tal que $\{y_3\}^{\downarrow} \subset \{y\}^{\downarrow}$ tenemos $x_2 \in \{y\}^{\downarrow}$. El único y que cumple la condición es y_2 para el cual tenemos $x_2 \in \{y_2\}^{\downarrow}$, de ahí que $x_2 \nearrow y_3$.

Y así sucesivamente hasta $\langle x_5, y_4 \rangle$ para los que obtenemos $x_5 \nearrow y_4$.

Continuamos con $\swarrow$. Recorremos las celdas de la tabla que no contienen X y decidimos si aplicar $\swarrow$. La primera de dichas celdas corresponde a $\langle x_2, y_3 \rangle$. Por definición, $x_2 \swarrow y_3$ sii para cada $x \in X$ tal que $\{x_2\}^{\uparrow} \subset \{x\}^{\uparrow}$. El único x que cumple la condición es x_1 para el que tenemos que $y_3 \in \{x\}^{\uparrow}$, de ahí que $x_2 \swarrow y_3$.

Y así sucesivamente hasta $\langle x_5, y_4 \rangle$ para los que obtenemos $x_5 \swarrow y_4$.

Las relaciones de vectores se muestran en la siguiente tabla:

I_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	X	X	X	X
x_2	X	X	$\updownarrow$	$\swarrow$
x_3	$\updownarrow$	X	X	X
x_4	$\nearrow$	X	$\nearrow$	
x_5	$\nearrow$	X	X	$\updownarrow$

Figura 1.14: Cálculo de relación de vectores

Por lo que, el correspondiente contexto reducido es

I_1	y_1	y_3	y_4
x_2	X		
x_3		X	X
x_5		X	

Figura 1.15: Contexto reducido

Para un retículo completo $\langle V, \leq \rangle$ y $v \in V$, señalar que

$$v_* = \bigvee_{u \in V, u < v} u,$$
$$v^* = \bigwedge_{u \in V, u < v} u.$$

Sea $\langle X_1, Y_1, I_1 \rangle$ clarificado , $X_2 \subseteq X_1$ y conjuntos de objetos y atributos irreducibles, respectivamente, sea $I_2 = I_1 \cap (X_2 \times Y_2)$ (restricción de I_1 a los objetos y atributos irreducibles).
¿Cómo podemos obtener a partir de los conceptos de $\mathcal{B}(X_1, Y_1, I_1)$ los conceptos de $\mathcal{B}(X_2, Y_2, I_2)$? La respuesta está basada en:

1. $\langle A_1, B_1 \rangle \mapsto \langle A_1 \cap X_2, B_1 \cap Y_2 \rangle$ es un isomorfismo de $\mathcal{B}(X_1, Y_1, I_1)$ en $\mathcal{B}(X_2, Y_2, I_2)$.

2. Por lo tanto, cada extensión A_2 de $\mathcal{B}(X_1, Y_1, I_1)$ es de la forma $A_2 = A_1 \cap X_2$ donde A_1 es una extensión de $\mathcal{B}(X_1, Y_1, I_1)$ (igual para las intensiones).

3. Para $x \in X_1 : x \in A_1$ sii $\{x\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 \subseteq A_1 \cap X_2$, para $y \in Y_1 : y \in B_1$ sii $\{y\}^{\downarrow\uparrow} \cap Y_2 \subseteq B_1 \cap Y_2$.

Aquí, $\uparrow$ y $\downarrow$ son operadores inducidos por $\langle X_1, Y_1, I_1\rangle$. Por lo que, dado $\langle A_2, B_2\rangle \in \mathcal{B}(X_2, Y_2, I_2)$, el correspondiente $\langle A_1, B_1\rangle \in \mathcal{B}(X_1, Y_1, I_1)$ es dado por

$$A_1 = A_2 \cup \left\{ x \in X_1 - X_2 | \{x\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 \subseteq A_2 \right\}, \tag{1.16}$$

$$B_1 = B_2 \cup \left\{ y \in Y_1 - Y_2 | \{y\}^{\downarrow\uparrow} \cap Y_2 \subseteq B_2 \right\}, \tag{1.17}$$

Ejemplo

A la izquierda un contexto formal clarificado $\langle X_1, Y_1, I_1\rangle$, a la derecha un contexto reducido $\langle X_2, Y_2, I_2\rangle$ (ver el ejemplo anterior).

I_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	×	×	×	×
x_2	×	×		
x_3		×	×	×
x_4		×		
x_5		×	×	

I_2	y_1	y_3	y_4
x_2	×		
x_3		×	×
x_5		×	

Figura 1.16: Contextos de entrada

Vamos a determinar $\mathcal{B}(X_1, Y_1, I_1)$ primero calculando $\mathcal{B}(X_2, Y_2, I_2)$ y luego usando el método descrito anteriormente para obtener conceptos $\mathcal{B}(X_1, Y_1, I_1)$ de los correspondientes conceptos de $\mathcal{B}(X_2, Y_2, I_2)$.

$\mathcal{B}(X_2, Y_2, I_2)$ está formado por:

$$\langle \emptyset, Y_2\rangle, \langle \{x_2\}, \{y_1\}\rangle, \langle \{x_3\}, \{y_3, y_4\}\rangle, \langle \{x_3, x_5\}, \{y_3\}\rangle, \langle X_2, \emptyset\rangle$$

.

Necesitamos recorrer todos los $\langle A_2, B_2\rangle \in \mathcal{B}(X_2, Y_2, I_2)$ y determinar el correspondiente $\langle A_1, B_1\rangle \in \mathcal{B}(X_1, Y_1, I_1)$ usando (17) y (18). Nótese: $X_1 - X_2 = \{x_1, x_4\}, Y_1 - Y_2 = \{y_2\}$.

1. para $\langle A_2, B_2\rangle = \langle \emptyset, Y_2\rangle$ tenemos
   $\{x_1\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 = \{x_1\} \cap X_2 = \emptyset \subseteq A_2$,
   $\{x_4\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 = X_1 \cap X_2 = X_2 \nsubseteq A_2$,
   de ahí que $A_1 = A_2 \cup \{x_1\} = \{x_1\}$, y
   $\{y_2\}^{\downarrow\uparrow} \cap Y_2 = \{y_2\} capY_2 = \emptyset \subseteq B_2$,
   por lo que $B_1 = B_2 \cup \{y_2\} = Y_1$. Por eso, $\langle A_1, B_1\rangle = \langle \{x_1\}, Y_1\rangle$.

2. para $\langle A_2, B_2\rangle = \langle \{x_2\}, \{y_1\}\rangle$ tenemos
   $\{x_1\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 = \emptyset \subseteq A_2$, $\{x_4\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 \nsubseteq A_2$,

de ahí que $A_1 = A_2 \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2\}$, y

$\{y_2\}^{\downarrow\uparrow} \cap Y_2 = \{y_2\} \cap Y_2 = \emptyset \subseteq B_2$,

por lo que $B_1 = B_2 \cup \{y_2\} = \{y_1, y_2\}$. Por eso, $\langle A_1, B_1\rangle = \langle \{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}\rangle$.

3. para $\langle A_2, B_2\rangle = \langle \{x_3\}, \{y_3, y_4\}\rangle$ tenemos

   $\{x_1\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 = \emptyset \subseteq A_2, \{x_4\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 = X_2 \nsubseteq A_2$,

   de ahí que $A_1 = A_2 \cup \{x_1\} = \{x_1, x_3\}$ y

   $\{y_2\}^{\downarrow\uparrow} \cap Y_2 = \{y_2\} \cap Y_2 = \emptyset \subseteq B_2$,

   por lo que $B_1 = B_2 \cup \{y_2\} = \{y_2, y_3, y_4\}$. Por eso, $\langle A_1, B_1\rangle = \langle \{x_1, X_3\}, \{y_2, y_3, y_4\}\rangle$.

4. para $\langle A_2, B_2\rangle = \langle \{x_3, x_5\}, \{y_3\}\rangle$ tenemos

   $\{x_1\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 = \emptyset \subseteq A_2, \{x_4\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 = X_2 \nsubseteq A_2$,

   de ahí que $A_1 = A_2 \cup \{x_1\} = \{x_1, x_3, x_5\}$ y

   $\{y_2\}^{\downarrow\uparrow} \cap Y_2 = \{y_2\} \cap Y_2 = \emptyset \subseteq B_2$,

   por lo que $B_1 = B_2 \cup \{y_2\} = \{y_2, y_3\}$. Por eso, $\langle A_1, B_1\rangle = \langle \{x_1, x_3, x_5\}, \{y_2, y_3\}\rangle$.

5. para $\langle A_2, B_2\rangle = \langle X_2, \emptyset\rangle$ tenemos

   $\{x_1\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 = \emptyset \subseteq A_2, \{x_4\}^{\uparrow\downarrow} \cap X_2 = X_2 \subseteq A_2$,

   de ahí que $A_1 = A_2 \cup \{x_1, x_4\} = X_1$, y

   $\{y_2\}^{\downarrow\uparrow} \cap Y_2 = \{y_2\} \cap Y_2 = \emptyset \subseteq B_2$,

   por lo que $B_1 = B_2 \cup \{y_2\} = \{y_2\}$. Por eso, $\langle A_1, B_1\rangle = \langle X_1, \{y_2\}\rangle$.

1.10. Algoritmos para el cálculo de retículos de conceptos

Consideremos el problema del cálculo de retículos de conceptos, es decir, el siguiente problema:
INPUT: contexto formal $\langle X, Y, I\rangle$, OUTPUT: retículo de conceptos $\mathcal{B}(X, Y, I)$ (posiblemente más $\leq$)

- A veces se necesita calcular el conjunto $\mathcal{B}(X, Y, I)$ del concepto formal sólo.
- A veces se necesita calcular el conjunto $\mathcal{B}(X, Y, I)$ y la jerarquía conceptual $\leq$. $\leq$ puede ser calculado a partir de $\mathcal{B}(X, Y, I)$ por definición de $\leq$. Pero eso no es eficiente. Existen algoritmos que pueden calcular $\mathcal{B}(X, Y, I)$ y $\leq$ simultáneamente, lo cual es más eficiente que primero calcular $\mathcal{B}(X, Y, I)$ y luego $\leq$.

En los siguientes apartados describiremos los algoritmos ”Next-Closure” de Ganter y el del ”Vecino superior” de Lindig.

1.10.1. Algoritmo Next-Closure

Autor: Bernhard Ganter (1987)

Entrada: contexto formal $\langle X, Y, I \rangle$,

Salida: *Int(X, Y, I)* ... todas las intensiones (igualmente, *Ext(X, Y, I)* ... todas las extensiones).

Lista todas las intensiones (o extensiones) en orden lexicográfico. Nótese que $\mathcal{B}(X, Y, I)$ puede ser reconstruido a partir de *Int(X, Y, I)* debido a

$$\mathcal{B}(X, Y, I) = \left\{ \left\langle B^{\downarrow}, B \right\rangle | B \int Int(X, Y, I) \right\}$$

Es uno de los algoritmos más populares y fácil de implementar.

Se describe Next-Closure para intensiones.

Supongamos $Y = \{1, ..., n\}$,esto es, denotamos los atributos con enteros positivos, de esta manera, fijamos un orden de atributos.

Definición

Para $A, B \subseteq Y, i \in 1, ..., n$

$$A <_i B \text{ sii } i \in B - A \text{ y } A \cap \{1, ..., i-1\} = Bcap \{1, ..., i-1\},$$
$$A < B \text{ sii } A <_i \text{ para algún } i$$

Nota: ¡... orden lexicográfico, esto es, todo par de conjuntos distintos $A, B \subseteq$ son comparables.

Para $i = 1$, establecemos $\{1, ..., i-1\} = \emptyset$.

Podríamos pensar en $B \subseteq Y$ en términos de sus características de vector. Para $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 3, 4, 6\}$, la característica de vector de $\mathcal{B}$ es 1011010.

Definición

Para $A \subseteq Y, i \in \{1, ..., n\}$

$$A \oplus i := ((A \cap \{1, ..., i-1\}) \cup \{i\})^{\downarrow\uparrow}$$

<u>Ejemplo</u>

I	1	2	3	4
x_1	×	×		×
x_2	×	×	×	×
x_3		×		

- $A = \{1, 3\}, i = 2.$

  $A \oplus i = ((\{1, 3\} \cap \{1, 2\}) \cup \{2\})^{\downarrow\uparrow} = (\{1\} \cup \{2\})^{\downarrow\uparrow} = \{1, 2\}^{\downarrow\uparrow} = \{1, 2, 4\}$

- $A = 2, i = 1.$

  $A \oplus i = ((\{2\} \cap \emptyset) \cup \{1\})^{\downarrow\uparrow} = \{1\}^{\downarrow\uparrow} = \{1, 2, 4\}$

Lema
Para cualquier $B, D, D_1, D_2 \subseteq Y$:

(1) Si $B <_i D_1, B <_j D_2$, y $i < j$ entonces $D_2 <_i D_1$;

(2) Si $i \notin B$ entonces $B < B \oplus i$;

(3) Si $B <_i D$ y $D = D^{\downarrow\uparrow}$ entonces $B \oplus i \subseteq D$;

(4) Si $B <_i D$ y $D = D^{\downarrow\uparrow}$ entonces $B <_i B \oplus i$.

Teorema 1.10.1. *La menor intensión B^+ mayor que $B \subseteq Y$ es dada por*

$$B^+ = B \oplus i$$

donde i es el mayor elemento con $B <_i B \oplus i$.

Pseudo-código del algoritmo Next-Closure

1. `A:=` $\emptyset^{\downarrow\uparrow}$`; (leastIntent)`
2. `store(A);`
3. `while not (A = Y) do`
4. `A: = A+;`
5. `store(A);`
6. `endwhile.`

complejidad: la complejidad de tiempo de cálculo de A^+ es $O(|X| \cdot |Y|^2)$: la complejidad de cálculo de $C^\uparrow$ es $O(|X| \cdot |Y|)$; la complejidad de cálculo de $A \oplus i$ es por tanto $O(|X| \cdot |Y|)$. Para obtener A^+ necesitamos calcular $A \oplus i$ $|Y|$-veces en el peor de los casos. Como resultado, la complejidad de calcular A^+ es $O(|X| \cdot |Y|^2)$.
La complejidad de tiempo de Next-Closure es $O(|X| \cdot |Y|^2 \cdot \mathcal{B}(X, Y, I))$.

complejidad de retardo de tiempo polinómico N: el método para calcular A^+ desde A tiene complejidad polinómica, por tanto, el algoritmo Next-Closure tiene un tiempo de retardo polinómico.

Observaciones

- Si $\downarrow\uparrow$ es sustituido por un operador de cierre C arbitrario, el algoritmo Next-Closure calcula todos los puntos fijos de C.

- Por lo que, el algoritmo Next-Closure es esencialmente un algoritmo para el cálculo de todos los puntos fijos de un operador de cierre C dado.

- La complejidad computacional de Next-Closure depende de la complejidad computacional del cálculo de *C(A)* (cálculo de cierre de un conjunto arbitrario A).

1.10.2. Algoritmo UpperNeighbor

Autor: Christian Lindig (Fast Concept Analysis, 2000)
Entrada: Contexto formal $\langle X, Y, I\rangle$
Salida: $\mathcal{B}(X, Y, I)$ y $\leq$

La idea básica del algoritmo es:

1. comenzar con el menor concepto formal $\left\langle \emptyset^{\uparrow\downarrow}, \emptyset^{\uparrow} \right\rangle$,

2. para cada $\langle A, B\rangle$ generar todos los vecinos superiores y guardar la información necesaria

3. ir al próximo concepto

El punto crucial es cómo calcular los vecinos superiores de un $\langle A, B\rangle$ dado.

Teorema 1.10.2. *Si $\langle A, B\rangle \in \mathcal{B}(X, Y, I)$ no es el concepto más grande entonces $(A \cup \{x\})^{\uparrow\downarrow}$, con $x \in X - A$, es una extensión de un vecino superior de $\langle A, B\rangle$ sii para cada $z \in (A \cup \{x\})^{\uparrow\downarrow} - A$ tenemos $(A \cup \{x\})^{\uparrow\downarrow} = (A \cup \{z\})^{\uparrow\downarrow}$.*

Observaciones

En general, para $x \in X - A, (A \cup \{x\})^{\uparrow\downarrow}$ no tiene que ser una extensión de un vecino superior de $\langle A, B \rangle$.

Pseudo-código del algoritmo UpperNeighbor

1. `min:= X - A;`
2. `neighbors :=` $\emptyset$`;`
3. `for` $x \in X - A$ `do`
4. $B_1 := (A \cup \{x\})^{\uparrow}; A_1 := B_1^{\downarrow};$
5. `if (`$min \cap ((A_1 - A) - \{x\}) = \emptyset$`) then`
6. `neighbors:= neighbors` $\cup\{(A_1, B_1)\}$
7. `else min:= min -` $\{x\}$`;`
8. `enddo.`

complejidad: tiempo de retardo polinómico con retardo $O(|X|^2 \cdot |Y|)$ (igual que la versión para las extensiones del algoritmo Next-Closure).

1.11. Contextos multivaluados y escalamiento conceptual

Un contexto $\langle X, Y, I \rangle$ es multivaluado, cuando los elementos de I pueden tener más de dos valores. Por ejemplo:

	age	education	symptom
Alice	23	BS	1
Boris	30	MS	0
Cyril	31	PhD	1
David	43	MS	0
Ellen	24	PhD	1
Fred	64	MS	0
George	30	Bc	0

Figura 1.17: Contexto multivaluado

Formalmente, un contexto multivaluado es una tupla $\mathcal{D} = \langle X, Y, W, I \rangle$ donde X es un conjunto finito no vacío de objetos, Y es un conjunto finito de atributos, W es un conjunto de valores e I es una relación ternaria entre X, Y y W que se define como:

$$I \subseteq X \times Y \times W : \langle x, y, w \rangle \in I, \langle x, y, v \rangle \in I \Rightarrow w = v$$

- Un contexto multivaluado puede representarse como una tabla cuyas filas son $x \in X$, columnas $y \in Y$ y la intersección de la fila x y la columna y contiene valores tomados de $\langle x, y, w \rangle \in I$. Si no existe la relación $\langle x, y, w \rangle \in I$, la intersección de la fila x con la columna y contendrá un espacio en blanco.

- Se puede ver que $y \in Y$ puede considerarse una función parcial de X a W. Por lo tanto, escribimos $y(x) = w$ en lugar de $\langle x, y, w \rangle \in I$.

Al conjunto $dom(y) = \{x \in X : \langle x, y, w \rangle \in I\}$ para algún $w \in W$ se le llama dominio de y. El atributo es llamado completo si $dom(y) = X$, es decir, si la tabla contiene algún valor en todas las filas de la columna correspondiente a y. Un contexto multivaluado es llamado *completo* si cada uno de sus atributos es *completo*.

- Desde el punto de vista de la teoría de bases de datos relacionales, un contexto multivaluado completo es básicamente una relación en el esquema relacional Y. Concretamente, para cada $y \in Y$ puede considerarse un atributo en el sentido de las bases de datos relacionales y afirmar que

$$D_y = \{w : \langle x, y, w \rangle \in I \text{ para algún } x \in X\}, \; D_y \text{ es el dominio de } y.$$

Ejemplo: Consideremos el contexto multivaluado representado en la siguiente figura:

	age	education	symptom
Alice	23	BS	1
Boris	30	MS	0
Cyril	31	PhD	1
David	43	MS	0
Ellen	24	PhD	1
Fred	64	MS	0
George	30	Bc	0

Figura 1.18: Contexto multivaluado

donde:

- X = {Alice, Boris, ..., George}

- Y = {age, education, symptom}
- W = {0, 1, ..., 150, BS, MS, PhD, 0, 1}
- $\langle Alice, age, 23\rangle \in I, \langle Alice, education, BS\rangle \in I, ..., \langle George, symptom, 0\rangle \in I$

Con lo que tenemos que, $age(Alice) = 23, education(Alice) = BS, symptom(George) = 0$.

1.11.1. Escalamiento conceptual

Para poder usar FCA como entrada contextos multivaluado éstos deben ser procesados para convertirlos en contextos formales con valores simples. A este proceso de le llama *escalamiento conceptual*.
Para ello, para cada atributo $y \in Y$ debe definirse una escala de sus valores.
Si $\langle X, Y, W, I\rangle$ es un contexto multivaluado, una escala para un atributo $y \in Y$ es un contexto formal $S_y = \langle X_y, Y_y, I_y\rangle$ tal que $D_y \subseteq X_y$. Los objetos $w \in X_y$ son llamados valores de escala, los atributos de Y_y son llamados atributos de escala.

Ejemplo:

	e_{BS}	e_{MS}	e_{PhD}
BS	1	0	0
MS	0	1	0
PhD	0	0	1

Figura 1.19: Escala para el atributo *education*

La tabla de la figura es una escala para el atributo $y = education$. Aquí $S_y = \langle X_y, Y_y, I_y\rangle, X_y = \{BS, MS, PhD\}, Y_y = \{e_{BS}, e_{MS}, e_{PhD}\}$, I_y son los valores de la tabla.

Ejemplo:

	a_y	a_m	a_0
0	1	0	0
⋮	1	0	0
30	1	0	0
31	0	1	0
⋮	0	1	0
60	0	1	0
61	0	0	1
⋮	0	0	1
150	0	0	1

	a_y	a_m	a_0
0-30	1	0	0
31-60	0	1	0
61-150	0	0	1

Figura 1.20: Escala para el atributo *age*

La figura 1.20 es una escala para el atributo *age* (la tabla de la derecha es una versión abreviada de la de la izquierda). Aquí, $S_y = \langle X_y, Y_y, I_y \rangle, X_y = \{0, ..., 150\}, Y_y = \{a_y, a_m, a_0\}, I_y$ son los valores de la tabla.

Ejemplo: Una escala diferente para el atributo *age* es:

	a_{vy}	a_y	a_m	a_0	a_{v0}
0-25	1	0	0	0	0
26-35	0	1	0	0	0
36-55	0	0	1	0	0
56-75	0	0	0	1	0
76-150	0	0	0	0	1

Figura 1.21: Escala para el atributo *age*

a_{vy} ... muy joven, a_y . . . joven, a_m . . . mediana edad, a_o . . . mayor, $a_v o$ . . . muy mayor.
La elección la hace el usuario y depende del nivel de precisión deseado.
Los dos tipos de escalas más importantes son:

- **Escalamiento nominal:** Los valores del atributo y no se ordenan de forma natural o no se desea tener ese orden en cuenta, es decir, y es una variable nominal.

- **Escalamiento ordinal:** Los valores del atributo y se ordenan de forma natural, es decir, y es una variable ordinal.

Ejemplo

	e_{BS}	e_{MS}	e_{PhD}
BS	1	0	0
MS	0	1	0
PhD	0	0	1

	e_{BS}	e_{MS}	e_{PhD}
BS	1	0	0
MS	1	1	0
PhD	1	1	1

Figura 1.22: Izquierda: escala nominal. Derecha: escala ordinal.

En la figura 1.22, a la izquierda se muestra una escala nominal para el atributo $y =$ *education*. A la derecha se muestra una escala ordinal para el atributo y=*education* con $BS \leq MS \leq PhD$.
El escalamiento conceptual define el significado de una escala de atributos de Y_y.
Aplicando dicho proceso al ejemplo de la figura 1.17, la tabla se podría transformar en:

	a_y	a_m	a_o	e_{BS}	e_{MS}	e_{PhD}	symptom
Alice	1	0	0	1	0	0	1
Boris	1	0	0	0	1	0	0
Cyril	0	1	0	0	0	1	1
David	0	1	0	0	1	0	0
Ellen	1	0	0	0	0	1	1
Fred	0	0	1	0	1	0	0
George	1	0	0	1	0	0	0

Figura 1.23: Contexto con escalamiento conceptual aplicado: contexto derivado

Si nos fijamos en la figura anterior:

- Han sido insertados nuevos atributos: a_y ... young, a_m ... middle-aged, a_0 ... old, e_BS ... licenciado en Ciencias, e_MS ... tiene máster en Ciencias, e_PhD ... Doctor en Filosofía.

- Después del escalamiento, la información puede ser procesada mediante FCA.

El contexto formal derivado es obtenido a partir del contexto multivaluado de partida y las escalas de cada uno de sus atributos. A este proceso se le llama *escalamiento simple*.
Asumamos que $Y_{y_1} \cap Y_{y_2} = \emptyset$ para $y_1, y_2 \in Y$. Entonces, para un contexto multivaluado $\mathcal{D} = \langle X, Y, W, I \rangle$, escalas $S_y(y \in Y)$, el contexto formal derivado es $\langle X, Z, J \rangle$ donde:

- $Z = U_{y \in Y} Y y \in Y$,

- $\langle x, z \rangle \in J$ sii $y(x) = w \wedge \langle w, z \rangle \in I_y$

$\langle X, Y, W, I \rangle \to \langle X, Z, J \rangle$ significa que:

- los objetos del contexto derivado son los mismos que los del contexto multivaluado original.

- cada columna que representa un atributo y es reemplazada por columnas que representan a escala de atributos $z \in Y_y$.

- El valor $y(x)$ es reemplazado por la fila del contexto de escala S_y.

Ejemplo: En la siguiente figura, se muestra el contexto formal y las escalas nominales para los atributos *age* y *education*.

	age	education	symptom
Alice	23	BS	1
Boris	30	MS	0
Cyril	31	PhD	1
David	43	MS	0
Ellen	24	PhD	1
Fred	64	MS	0
George	30	Bc	0

	a_y	a_m	a_0
0-30	1	0	0
31-60	0	1	0
61-150	0	0	1

	e_{BS}	e_{MS}	e_{PhD}
BS	1	0	0
MS	0	1	0
PhD	0	0	1

Figura 1.24: Contexto formal y escalas nominales para *age* y *education*

El contexto formal derivado es:

	a_y	a_m	a_o	e_{BS}	e_{MS}	e_{PhD}	symptom
Alice	1	0	0	1	0	0	1
Boris	1	0	0	0	1	0	0
Cyril	0	1	0	0	0	1	1
David	0	1	0	0	1	0	0
Ellen	1	0	0	0	0	1	1
Fred	0	0	1	0	1	0	0
George	1	0	0	1	0	0	0

Figura 1.25: Contexto formal derivado