انجمن دانش آموزی تقدیم می کند

ریاضی نیمسال اول

فهرست

نویسنده کامبیز آزما_حسام کریمی

ویراستار رادین حبیبی

صفحه آرا حسام کریمی

فصل اول

اعداد گویا

فصل اول:اعداد گویا

در سال های گذشته با مجموعه های مختلفی از اعداد آشنا شدیم:

اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4 \dots\}$

اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0,1,2,3,4 \dots\}$

اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{-2,-1,0,1,2 \dots\}$

این مجموعه ها روابطی با هم دارند. اعداد طبیعی زیر مجموعه اعداد حســـابی، و اعداد حسابی زیر مجموعه اعداد صحیح هست.:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$$

اعداد گویا مجموعه دیگری از اعداد حقیقی هســتند.اعداد گویا در واقع همان اعداد کسری هستند که ما سال های گذشته با آنها آشنا شدیم.

تعریف:اعداد گویا،اعداد هستند که می توان آنها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نوش(کسر) ولی مخرج نسبت(کسر) نباید صفر باشد:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z} \ and \ q \neq 0\}$$

پیوستگی اعداد گویا:

اعداد گویا نامتناهی هستند اما پیوسته نیستند. برای اثبات این موضوع تنها باید مثال نقضی برای پیوسته بودن اعداد گویا پیدا کنیم. یکی از این مثال نقض ها عدد رادیکال دو هست. اگر اثبات کنیم رادیکال دو عدد گویا نیست، آنگاه اثبات می شود اعداد گویا پیوسته نیستند. برای اثبات گویا نبودن رادیکال دو می توان از برهان خلف استفاده کرد.

۱ـ اگر رادیکال دو گویا باشد آنگاه می توان آن را به صورت نسبت دو عدد نوشت. صورت و مخرج را به ساده ترین صورت می نویسیم به همین خاطر ،صورت و مخرج نسبت به هم اول هستند(شمارنده مشترک آنها یک است):

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \ and \ (p,q) = 1$$

۲ـ طرفین رو به توان دو میرسانیم:

$$(\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2 \ \rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

۳ـ طرفین را ضربدر $\frac{1}{2}$ می کنیم:

$$2 \times \frac{1}{2} = \frac{p^2}{q^2} \times \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{1} = \frac{p^2}{2q^2}$$

۴ـ طرفین و وسطین می کنیم:

$$p^2 = 2q^2$$

۵ـ چون p^2 برابر اســت با ۲ ضــربدر عددی،آنگاه p^2 عددی زوج اســت. و چون تنها اعداد زوج به توان ۲ عددی زوج می شـوند،آنگاه خود p هم عددی زوج است(ب م م آن با ۲ قطعا بزرگ تر از یک است):

$$p^2 = 2 \times q^2 \to (p^2, 2) > 1 \to (p, 2) > 1$$

۶ـ چون p عددی زوج است آنگاه می توان آن را به صورت ۲ ضربدر عددی نوشت:

$$p = 2k$$

۷ـ این تساوی را در تساوی قسمت۴ جایگذاری می کنیم:

$$(2k)^2 = 2q^2 \to 4k^2 = 2q^2$$

۸ـ طرفین را ضربدر $\frac{1}{2}$ می کنیم:

$$\frac{1}{2} \times 4k^2 = \frac{1}{2} \times 2q^2 \to 2k^2 = q^2$$

۹ـ چون q^2 دو ضـربدر عددی اسـت می توان نتیجه گرفت q^2 زوج اسـت و چون فقط عددی زوج به توان دو زوج می شود آنگاه q زوج است:

$$q^2 = 2 \times k^2 \to (q^2, 2) > 1 \to (q, 2) > 1$$

۱۰ـ در قسمت ۵ اثبات کردیم p عددی زوج است و در قسمت ۹ اثبات کردیم q عددی زوج است آنگاه ب م م آنها قطعا بزرگتر یا مساوی ۲ خواهد بود(زیرا هر دو حداقل عامل مشترک ۲ را در خود دارند):

$$(p, q) \geq 2$$

۱۱ـ نامعادله قسمت ۱۰ با نامعادله قسمت ۱ (که از فرضیات مسئله بود) در تضاد است. در قسمت ۱ گفتیم که صورت و مخرج نسبت(کسر) نسبت به هم اول هستند ولی اثبات شد ب م م آنها حداقل ۲ است. پس طبق برهان خلف چون ما به تضاد رسیدیم آنگاه اثبات می شود رادیکال دو عددی گویا نیست و این مثال نقضی برای پیوسته بودن اعداد گویا است پس اثبات می شود اعداد گویا پیوسته نیستند.

چرا مخرج نمی تواند صفر باشد؟:

از برهان خلف استفاده می کنیم و فرض می کنیم مخرج صفر تعریف شده و امکان پذیر است:

۱- عددی که مخالف صفر است را تصور می کنیم(برای اینکه کسر صفر نشود) این عدد را تقسیم بر صفر می کنیم.

$$(x \neq 0)\,\frac{x}{0}$$

۲- سپس کسر ایجاد شده را در صفر ضرب می کنیم تا مخرج ساده شود و حاصل X می شود.

$$\frac{x}{0} \times 0 = x$$

۳- حال از روش دیگر حل میکنیم: می دانیم هر عدد که در صفر ضرب شود حاصلش صفر می شود پس حاصل صفر می شود:

$$(\frac{x}{0}) \times 0 = 0$$

۴- از تساوی شماره ۳ و ۴ نتیجه گیری می شود که X برابر صفر است که این با قسمت ۱(فرضیات) در تضاد است در نتیجه اثبات می شود نمی توان مخرج کسر را صفر گذاشت. (این استدلال به ما میگوید اگر مخرج کسر صفر باشد آنگاه می توان به این نتیجه رسید هر عدد در صورت گذاشته شود که صفر نیست مثل ۱،۲،۳،۱۰،۱۰۱ برابر صفر هست که این یک تناقض بزرگ است)

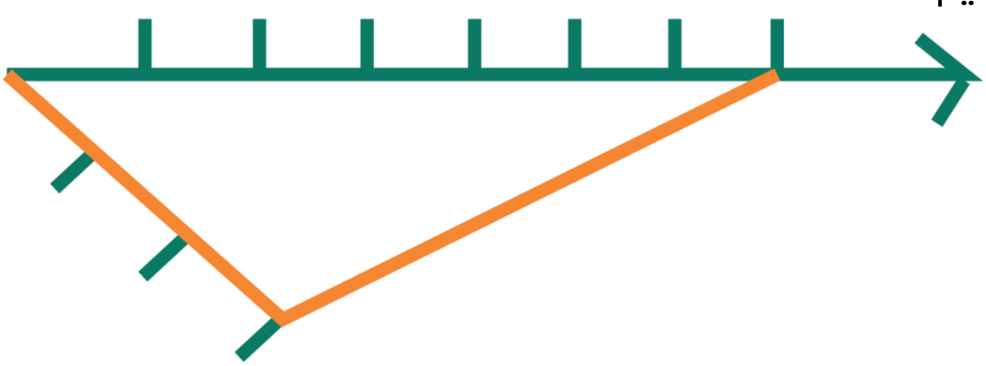
نشان دادن اعداد گویا روی محور اعداد:

برای نشـــان دادن اعداد گویا راه های مختلفی وجود دارد. یکی از این راه ها را که خطای خیلی کمی دارد برای شما توضیح میدهیم:

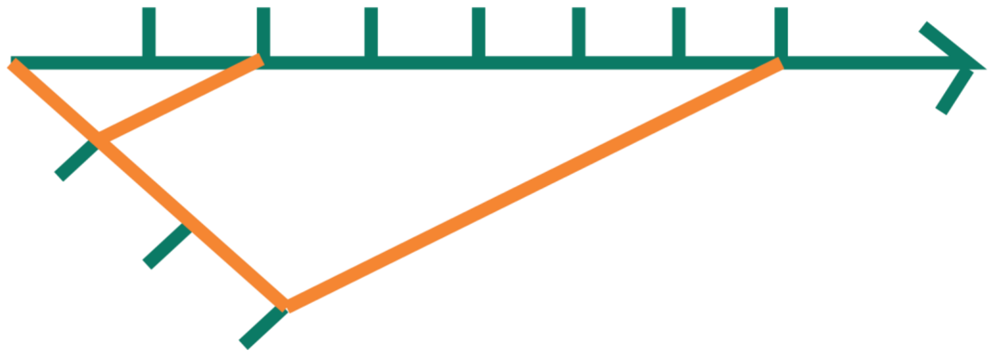
۱- فرض کنید می خواهید عدد $\frac{7}{3}$ را روی محور اعداد نشان دهیم. ابتدا به اندازه صورت کسر(۷) یک محور رسم می کنیم.

۲- ســپس به اندازه مخرج(۳) یک محور دیگر رســم می کنیم که با محور اول یک زاویه دلخواهی دارد.

۳ـ سپس آخرین عدد محور دوم را(۳) به آخرین عدد محور اول(۷) توسط یک پاره خط وصل میکنیم.



۵ــحال به طور موازی از عدد یک پاره خط دوم به طور موازی به قسـمتی از محور اول وصل می کنیم، مکانی که نشان می دهد، مکان عدد مورد نظر($\frac{7}{3}$) است.



فصل دوم

بردار

فصل دوم: بردار

در سال گذشته با مفهوم بردار آشنا شدیم.

در صـفحه مختصـات می توانیم به هر نقطه یک عدد و به هر عدد یک بردار نسـبت دهیم.

جمع بردار:

جمع مختصاتی:

برای اینکه مختصـات بردار برایند را پیدا کنیم کافیسـت تمام مولفه های طول را با هم و تمام مولفه های عرض را با هم جمع کنیم. حاصل مختصات بردار برایند است:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix}$$

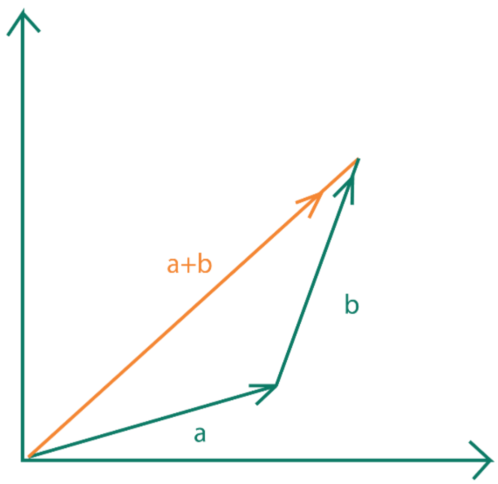
جمع برداری:

اگر ما چند بردار داشته باشیم که به صورت متوالی،در امتداد هم رسم شده اند،بردار برایند برداری است که نقطه ابتدا اولین بردار را به نقطه انتها آخرین بردار متصل کند.

پس برای جمع چند بردار می توانیم آنها (را با استفاده از خاصیت انتقال) در امتداد هم قرار دهیم و بردار برایند را رسم کنیم. البته باید دقت کنیم جهت و طول هیچ برداری عوض نشود.

روش های جمع دو بردار:

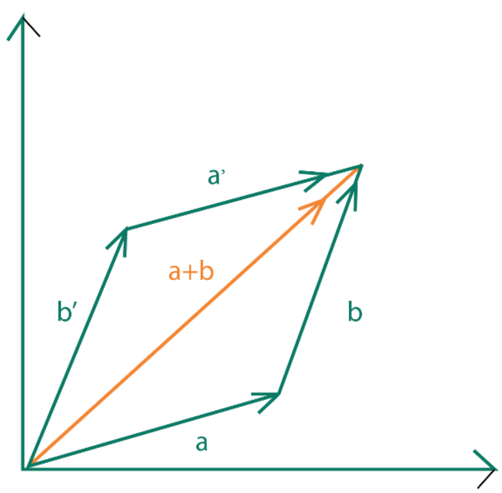
قاعده مثلث:



برای جمع دو بردار می توانیم از قاعده مثلث استفاده کنیم.

برای این کار باید دو بردار را به صورت دو ضلع مثلث در امتداد هم قرار دهیم. بردار برایند ضلع سوم این مثلث است و نقطه ابتدا بردار اول را به نقطه انتها بردار دوم وصل می کند.

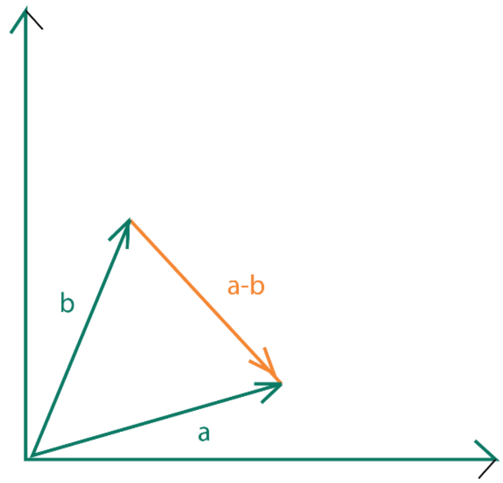
قاعده متوازی الاضلاع:



اگر بردار ها در امتداد هم نبودند،از قاعده متوازی الاضلاع استفاده می کنیم.ابتدا دو بردار(که در امتداد هم نیستند) را دو ضلع متوازی الاضلاع در نظر میگیریم.سپس برداری مانند بردار اول را،موازی با خودش در امتداد بردار دوم رسم می کنیم.همین کار را برای بردار دوم هم می کنیم.در آخر یک متوازی الاضلاع تشکیل می شود که قطر آن بردار برایند است. دقت کنید قطری بردار برایند است که نقطه ابتدا بردار اول و دوم را به نقطه انتها دو بردار دیگر وصل کند.

تفریق بردار ها:

برای تفریق کردن بردار ها باید تفریق را به جمع تبدیل کنیم. برای اینکار تنها باید بردار تفریق کننده را قرینه کنیم سپس با بردار تفریق شونده جمع کنیم.

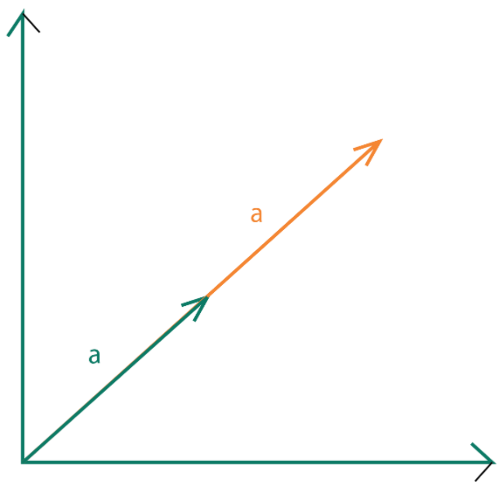


ضرب عدد در بردار:

برای ضرب یک عدد در بردار باید آن عدد را در مولفه طول و عرض بردار ضرب کنیم.

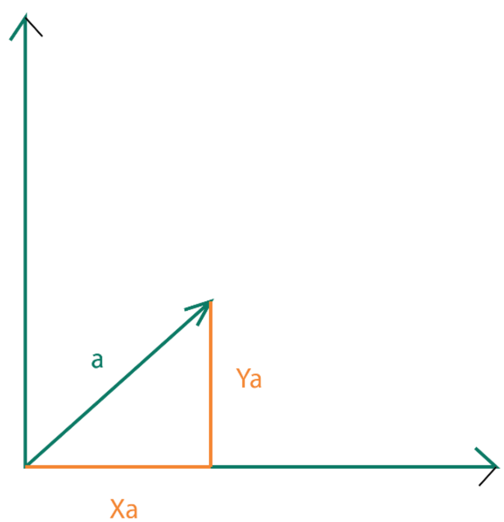
رسم ضرب عدد در بردار:

برای رسم ضرب یک عدد در بردار کافیست به اندازه عدد ضرب شده،بردار مورد نظر را رسم کنیم.باید دقت کنیم بردار ها در امتداد هم باشند.



طول بردار:

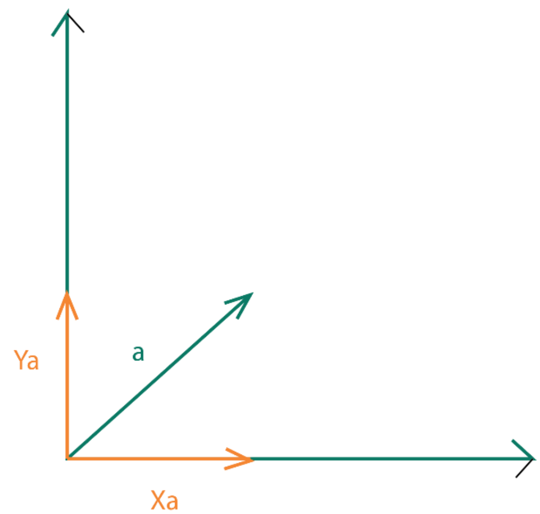
طول یک بردار با مختصات $\begin{bmatrix}X\\y\end{bmatrix}$ برابر است با $\sqrt{x^2+y^2}$. این رابطه با توجه به قضیه فیثاغورس اثبات می شود. ابتدا بردار را رسم می کنیم.سپس مولفه های عمودی و افقی آن را رسم می کنیم(بردار های یکه) به صورتی که بردار مد نظر وتر مثلثی را تشکیل دهد. سپس با استفاده از قضیه فیثاغورس اثبات می شود اندازه وتر مثلث که اندازه بردار ما هست برابر $\sqrt{x^2+y^2}$ است.



تجزیه بردار ها:

برای تجزیه یک بردار به دو یا چند بردار باید بردار هایی را پیدا کنیم که جمع آنها بردار مد نظر می شود.

تجزیه بردار به دو بردار مولفه طولی و عرضی:



برای تجزیه بردار به دو بردار باید آن بردار را به بردار های مولفه طولی و افقی تجزیه کنیم. برای رسم بردار مولفه طولی باید از ابتدا بردار،به اندازه مولفه طولی بردار اصلی، در جهت بردار اصلی فقط در راستا محور طول ها حرکت کنیم.

برای رسم مولفه عرضی هم به اندازه مولفه عرضی بردار اصلی، و در جهت بردار اصلی فقط در راستا محور عرض ها حرکت کنیم.

فصل سوم

عبارت جبری

فصل سوم: عبارت جبری

در سال گذشته با عبارت جبری آشنا شدیم. عبارت جبری عبارتی است که دارای متغیر است.

اتحاد:

معادله ای که به ازای هر عدد حقیقی برقرار باشد اتحاد نامیده میشود. در اتحاد ما دو یا چند عبارت که بین آنها ضرب است یا دارای توان هستند را گسترش یا به اصطلاح بسط میدهیم. در این قسمت با برخی از اتحاد ها آشنا می شویم:

اتحاد مربع دو جمله ای: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

اتحاد مزدوج: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

اتحاد چاق لاغر: $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 - b^3$

اتحاد جمله مشترک: $(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$

تجزیه:

تجزیه دقیقا برعکس اتحاد است. به جای بسط دادن عبارات آنها را تبدیل به ضرب چند عبارت یا عباراتی که دارای توان هستند میکند. برای تجزیه کردن ما باید از اتحاد ها کمک بگیریم:

مثال: کمک از اتحاد مزدوج:

$$4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$$

ترکیبیات:

فرض کنید یک کلاس ۲۲ نفره داریم و می خواهیم ۲ نفر (نماینده و شـــهردار) به صورت تصادفی انتخاب کنیم. به چند راه می توانیم این کار را انجام دهیم؟

به عمل بالا **انتخاب** گفته می شـود. تعداد حالات انتخاب از این روش به دســت می آید:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

دو اتحاد مهم از انتخاب:

۱. $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

اثبات:

۱ـ ابتدا به صورت دیگری جمع را مینویسیم:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1!)((n-1)-(k-1))!}$$

۲ـ حال صورت و مخرج کسر اول را در $(n-k)$ و k ضرب کرده و ساده سازی می کنیم:

$$\frac{(n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

۳ـ مخرج مشترک گرفته و از $(n-1)!$ فاکتور می گیریم:

$$\frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

۲. $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

اثبات:

۱. ابتدا به روشی که توضیح داده شد $\binom{n}{n-k}$ را می نویسیم:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!}$$

۲. سپس $(n-(n-k))!$ را ساده می کنیم:

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k)!} = \binom{n}{k}$$

اتحاد نیوتن:

به نظر شما اگر بخواهیم عبارت $(x+y)^n$ را حساب کنیم آیا باید این کار را دستی انجام دهیم یا الگویی وجود دارد؟ ایا برای این عبارت اتحادی وجود دارد؟

در واقع اتحاد نیوتن بسط کلی ای برای عبارات دو جمله ای است و بیان می کند :

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^{n-0}y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 \ldots \binom{n}{n}x^{n-n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

همان طور که مشـــاهده میکنید بین درجه عبارت و ضـــرایب و توان های هر جمله الگویی خاص برقرار اســـت.با این اتحاد میتوان هر عبارت دو جمله ای با هر درجه ای حساب کرد.

کاربرد های اتحاد نیوتن:

فرض کنید به شـــما بگویند در عبارت $(a+b)^5$ ضـــریب جمله $a^3\,b^2$ چند است؟شما راحت با استفاده از اتحاد نیوتن می توانید محاسبه کنید: $\binom{5}{2} = 10$

اثبات:

برای اثبات اتحاد نیوتن هر الگو را جداگانه اثبات میکنیم.

۱ـ الگوی توانی:

ابتدا با یک مثال شــروع می کنیم. دقت کنید در این مثال ما ضــرایب را در نظر نمی گیریم.

۲ـ فرض کنید عبارت ما $(a+b)^4$ اسـت. آن را به صـورت ضرب ۴ عبارت $(a+b)$ می نویسیم:

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

۲ـ ابتدا ۴ تا a را در هم ضرب میکنیم:

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = a^4 +$$

۳ ـ سپس به جای a آخری، در b ضرب می کنیم:

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = a^4 + a^3b +$$

۴ـ به همین ترتیب ادامه می دهیم:

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = a^4 + a^3b + a^2b^2 +$$

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 +$$

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

همان طور که متوجه شـــدید،هر بار که به جای a در b ضـــرب میکنیم از توان های a یکی کمتر و به توان های b یکی اضافه می شود. پس اگر درجه ما n باشد،ابتدا n تا a را در هم ضـــرب میکنیم،ســـپس یک b و n-1 ، a را در هم ضـــرب میکنیم تا وقتی تعداد a ها صفر و b ها n شود:

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots b^n$$

نکته: می توان نتیجه گیری دیگری نیز گرفت که همیشـــه جمع توان های a وb برابر است با درجه عبارت.

الگو ضرایب:

برای توضیح این الگو هم ابتدا با یک مثال شروع می کنیم:

فرض کنید می خواهیم بدانیم چند عدد a^2b^2 در عبارت $(a+b)^4$ وجود دارد.

ابتدا بررسی میکنیم چند عدد a و چند عدد b در عبارت وجود دارد:

چهار عدد : $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$

حال حالاتی که عبارت a^2b^2 را میسازند می نویسیم:

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = aabb$$

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = abab$$

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = abba$$

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = bbaa$$

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = baba$$

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = baab$$

همان طور که دیدید در کل ۶ حالت برای ســاخت a^2b^2 وجود دارد. در واقع حاصل تمام این حالت ها a^2b^2 میشود پس ضریب a^2b^2 در $(a+b)^4$ برابر ۶ است.

اگر به مثال توجه کنید میبینید حالاتی که a^2b^2 را میسازند همان حالات چیدن دو تا a و دو تا b در کنار هم است.

در واقع ما چهار عدد متغیر داریم و می خواهیم دو تا از آنها را انتخاب کنیم. که می شود: $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6$

به طور کلی می توان گفت برای محاسبه ضریب عبارت $a^{n-k}b^k$ در عبارت $(a+b)^n$ باید تعداد حالات انتخاب a یا b را محاسبه کنیم که برابر است با $\binom{n}{k}$ (دقت کنید فرقی ندارد تعداد حالات انتخاب a را مد نظر بگیریم یا تعداد انتخاب حالا b زیرا باهم برابر هستند: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. اگر هم دقت کنید انتخاب a ناخودآگاه با انتخاب b همراه است یعنی اگر شما تعداد حالات انتخاب a را محاسبه کنید همزمان تعداد حالا انتخاب b را هم محاسبه کردید وبرعکس. به همین خاطر عموما برای خلاصه سازی تعداد حالات انتخاب b را ضریب قرار میدهند.)

الگوی کلی:

برای اثبات کل الگو میاییم الگو توانی و الگو ضرایب را کنار هم قرار میدهیم که به ما میگوید:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1\dots\binom{n}{n}a^0b^n$$

این عبارت را میتوانیم به صورت زیر خلاصه کنیم:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

(نکته: برای خلاصه سازی از سیگما استفاده میکنیم. معنی این عبارت یعنی: مجموع جملات $\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k}$ به ازای $k=0$ تا $k=n$ (یعنی k را صــفر قرار میدهیم، بعد جمله را به علاوه k برابر ۱ میکنیم تا وقتی k برابر n شود)

مثلث خیام_پاسکال:

این مثلث یک الگوی ساده دارد! هر عدد پایینی حاصل جمع دو عدد بالایی آن است. الگوی ضرایب را در مثلث خیام پاسکال هم مشاهده می کنیم. می توانیم توان جمله را به صورت ردیف مثلث پیدا کنیم و ضرایب را قرار دهیم.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

درجه عبارت جبری:

درجه یک جمله ای: بزرگترین توان یک متغیر در یک جمله، درجه آن جمله است.

درجه چند جمله ای ها: اگر عبارت دارای چند جمله بود، جمع توان ها در هر جمله را محاسـبه می کنیم،سـپس جمله ای که جمع توان های آن بیشـتر از بقیه بود،مجموع توان هاش درجه جمله است.

معادله و ریشه و نمودار آن:

ریشه:

با معادله در سال قبل آشنا شدیم. معادله بیان برابری دو عبارت است که معمولا دارای متغیر هستند. ریشه های یک معادله(یا عبارت) مقادیری(جواب هایی) هستند که اگر در معادله قرار دهیم حاصل صفر میشود.

فرض کنید یک معادله درجه اول داریم به شکل زیر داریم:

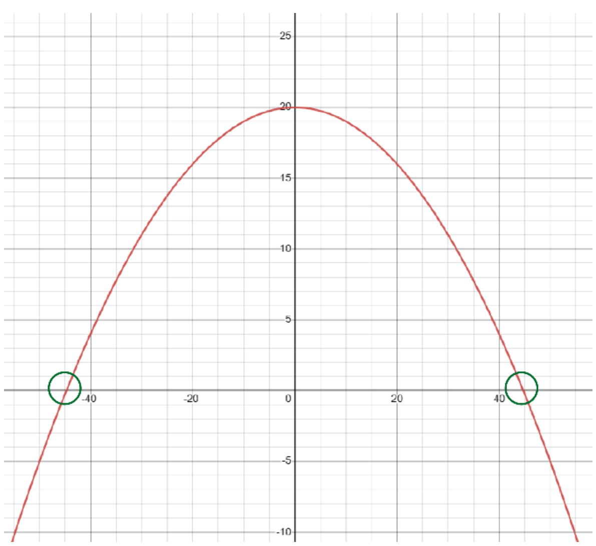
$$2x + 6 = y$$

حال مقادیری که به ازای آن جواب معادله صفر میشود ریشه معادله نام دارد:

$$2x = -6 \rightarrow x = -3$$

پس ریشه این معادله۳ – است زیرا اگر آن را در معادله قرار دهیم جواب معادله صفر می شود.

نمودار:



هر معادله میتواند یک نمودار درست کند.اگر مقادیری که در معادله قرار میدهیم را مولفه طول و جواب های معادله را مولفه عرض در نظر بگیریم، هر جواب معادله یک نقطه به ما میدهد. مجموع این نقاط، نمودار یک معادله را میسازند.با نمودار معادلات مختلف در فصل چهارم بیشتر آشنا میشوید.

ارتباط ریشه و نمودار یک معادله:

ریشه ها نقاطی از نمودار یک معادله هستند که مولفه عرض آنها صفر است.در واقع نقاطی از نمودار که در آنها نمودار با محور طول ها برخود کرده است.

معادله درجه اول:

فرم کلی معادله درجه اول: $ax + b = y$

روش حل: متغیر هارا به یک طرف و اعداد ثابت را به یک طرف می بریم سپس طرفین را بر ضریب X تقسیم می کنیم:

$$ax + b = cx + d \to (a - c)x = d - b \to \mathrm{x} = \frac{d - b}{a - c}$$

ریشه معادله درجه اول: یک معادله درجه اول همیشه ریشه حقیقی دارد یعنی همیشه مقداری حقیقی برای x می توان در نظر گرفت که معادله را صفر می کند.

معادله درجه دوم:

فرم کلی معادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c = y$

معادله درجه دو همیشه دارای ریشه حقیقی نیست. در ادامه توضیح میدهیم کی معادله ریشه حقیقی دارد(بعد از توضیح روش دلتا)

روش حل:

۱ـ روش ریشه گیری: اگر به توان معادله درجه دو را به صورت $x^2 = k$ در آورد،می توان معادله را به روش ریشه گیری حل کرد:

$$ax^2 + c = u \rightarrow \frac{1}{a} \times ax^2 + c = \frac{1}{a} \times u \rightarrow x^2 + \frac{c}{a} = \frac{u}{a} \rightarrow x^2 = \frac{u}{a} - \frac{c}{a}$$

$$\rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{d}{a} - \frac{c}{a}}$$

۲ـ روش مربع کامل:

۱ـ در این روش ابتدا ضریب x^2 را از بین میبریم سپس متغیر ها را به یک طرف و اعداد ثابت را به طرف دیگر می بریم:

$$x^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + bx = -c$$

۳-سپس ابتدا ضریب X را نصف می کنیم و بعد به توان دو میرسانیم و به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$$x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = -c + (\frac{b}{2})^2$$

۳ـ طرفی که متغیر هست طبق اتحاد مربع دو جمله ای، مربع کامل می‌شود:

$$x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = x^2 + 2(\frac{b}{2} \times x) + (\frac{b}{2})^2 = (x + \frac{b}{2})^2 \rightarrow (x + \frac{b}{2})^2 = -c + (\frac{b}{2})^2$$

۴- سـپس از دو طرف جذر می گیریم و متغیر را به یک طرف و اعداد ثابت را به طرف دیگر می بریم تا معادله حل شود:

$$\sqrt{(x + \frac{b}{2})^2} = \sqrt{-c + (\frac{b}{2})^2} \rightarrow x + \frac{b}{2} = \sqrt{-c + (\frac{b}{2})^2} \rightarrow x = \sqrt{-c + (\frac{b}{2})^2} - \frac{b}{2}$$

روش تجزیه گیری:

اگر به توان معادله درجه دو را تبدیل به ضرب دو یا چند عبارت کرد میتوان آن را به روش تجزیه گیری حل کرد. این روش خود زیر مجموعه هایی دارد:

تجزیه گیری به کمک فاکتور گیری:

اگر معادله درجه دو عدد ثابت نداشــته باشــد می توان آن را به روش فاکتور گیری حل کرد.

۱ـ ابتدا از x فاکتور میگیریم.

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0$$

۲ـ سپس چون ضرب دو عبارت صفر شده است آنگاه نتیجه گیری می کنیم یکی از عبارات قطعا صفر است پس معادله دو جواب دارد یکی x صفر است یکی $ax + b$ صفر است:

$$x(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow \mathrm{x} = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

تجزیه گیری به کمک اتحاد ها:

می توان از اتحاد های مختلف در تجزیه کردن معادله درجه دو کمک گرفت:

۱ـ به کمک اتحاد مزدوج:

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0 \rightarrow x = \pm 3$$

۲ـ به کمک اتحاد جمله مشترک:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow (x + 3)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

روش دلتا:

یکی دیگر از راه های حل معادله درجه دو روش دلتا اســـت. با روش دلتا می توان همواره مقدار x را بر اساس ضرایب x و x^2 و عدد ثابت نوشت:

اگر معادله درجه دو به این شکل باشد:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

روش دلتا برای این معادله به این شکل خواهد بود:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اثبات:

۱. ابتدا فرم کلی معادله درجه دو را می نویســـیم و طرفین را بر a تقســـیم می کنیم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

۲. ســـپس مخرج و صـــورت $\frac{b}{a}$ در ۲ ضـــرب می کنیم (که تاثیری در حاصـــل کســـر ندارد)

$$\rightarrow x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$$

۳. سپس ضریب b را از کسر خارج می کنیم.

$$\rightarrow x^2 + 2(\frac{b}{2a})x + \frac{c}{a} = 0$$

۴. حال دو عبارت $+\frac{b^2}{4a^2}$ و $-\frac{b^2}{4a^2}$ را به دو طرف تساوی اضافه می کنیم (که تاثیری در حاصل معادله ندارد چون قرینه همدیگرند و حاصل جمعشان صفر است)

$$\rightarrow x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

۵. حالا از اتحاد مربع استفاده می کنیم:

$$\rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

۶. حال دو طرف تساوی را با $-\frac{c}{a}$ $+\frac{b^2}{4a^2}$ جمع می کنیم:

$$\rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = +\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

۷. حال از دو طرف تساوی جذر می گیریم:

$$\rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

۸. سپس طرف راست تساوی را مخرج مشترک می گیریم:

$$\to x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} \to x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

۹. حال می توان مخرج کسر را از جذر خارج کرد (زیرا مربع کامل است)

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

۱۰.حال دو طرف تساوی را با $-\frac{b}{2a}$ جمع می کنیم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

نکته: علامت مثبت منفی $(\pm)$ به این دلیل پشت رادیکال ها قرار دارد که هم مقدار مثبت رادیکال و هم مقدار منفی آن به توان دو یکسان هستند. پس هم منفی رادیکال و هم مثبت رادیکال در معادله صدق می کند.

نکته۲: به عبارت $b^2 - 4ac$، دلتا میگویند.

ریشه معادله درجه دو: یک معادله درجه دو همیشه دارای ریشه حقیقی نیست.به نظر شما چه وقت جواب عبارت

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حقیقی نیست؟

زمانی جواب این عبارت عددی حقیقی نمیشود که عدد درون رادیکال $(b^2 - 4ac)$ منفی شود. در واقع همه چیز به مقدار دلتا ربط دارد.

به طور کلی سه حالت برای ریشه یک معادله درجه دو وجود دارد:

۱ـ دلتا منفی باشد: معادله ریشه حقیقی ندارد یعنی هیچ مقدار حقیقی نمی تواند معادله را صفر کند

۲ـ دلتا صفر باشد: معادله تنها یک ریشه حقیقی دارد. یعنی یک مقدار حقیقی می تواند معادله را صفر کند.

۳ـ دلتا مثبت باشد: معادله دو ریشه حقیقی دارد. یعنی دو مقدار حقیقی می تواند معادله را صفر کند.

قضیه اساسی جبر:

قضیه اساسی جبر یکی از قضایای مهم جبر است که توسط گاوس اثبات شد.

قضیه اساسی جبر بیان میکند هر عبارت تک متغیره درجه n دارای n ریشه مختلط هست که لزوما حقیقی نیستند. در واقع ما میتوانیم یک عبارت درجه n را به صورت ضرب چند عبارت درجه اول و درجه دو بنویسیم. اگر تمام ریشه های آن حقیقی باشد،میتوان آن را کامل به عبارات درجه اول تجزیه کنیم ولی اگر عبارت دارای ریشه غیر حقیقی باشد برخی قسمت های آن را باید به عبارات درجه دو بدون ریشه تجزیه کرد.

مثال: می خواهیم ریشه های عبارت $x^5 + x^4 + x + 1$ را پیدا کنیم.طبق قضیه اساسی جبر ۵ ریشه مختلط دارد.

۱ـ ابتدا از عبارت $(x^5 + x^4)$، x^4 را فاکتور میگیریم:

$$x^4(x+1) + (x+1)$$

۲ـسپس از عبارت $(x+1)$ فاکتور میگیریم:

$$x^4(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^4+1)$$

۳ـ می بینیم یکی از ریشه های عبارت پیدا شد که مربوط به عبارت $(x+1)$ است.حال باید عبارت (x^4+1) را تبدیل به ضرب چند عبارت درجه دو بدون ریشه کنیم (زیرا عبارت (x^4+1) هیچ گاه صفر نمیشود و به همین خاطر ریشه ندارد). برای اینکه بتوان اتحاد مربع دو جمله ای را اجرا کرد،باید عبارت را با $+2x^2 - 2x^2$ جمع کنیم(اضافه کردن $+2x^2 - 2x^2$ تاثیری در عبارت ندارد و باعث عوض شدن آن نمیشود زیرا جواب آن صفر است) :

$$x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2$$

اتحاد مربع دو جمله

۴ـ حال عبارت $2x^2$ را به صورت دیگری می نویسیم:

$$(x^2+1)^2-(\sqrt{2}\,x)^2$$

۵ ـ سپس طبق اتحاد مزدوج:

$$(x^2+1+\sqrt{2}\,x)(x^2+1-\sqrt{2}\,x)$$

۶ـ حال کل عوامل را در کنار هم جمع میکنیم:

$$x^5+x^4+x+1=(x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x+1)$$

۷ ـ حال هر کدام از عوامل را از نظر ریشه هایشان برسی میکنیم:

$$x+1=0\to x=-1$$ یک ریشه حقیقی

$$x^2-\sqrt{2}\,x+1=0\to x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{-2}}{2}\text{،}\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2}$$ دو ریشه غیر حقیقی

$$x^2+\sqrt{2}\,x+1=0\to x=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{-2}}{2}\text{،}\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2}$$ دو ریشه غیر حقیقی

همان طور که مشاهده می کنید این عبارت درجه ۵ در مجموع دارای ۵ ریشه مختلط هســـت که یکی از آنها حقیقی هســـت. با همین روش میتوان عبارات زیادی را به عوامل شان تجزیه کرد و ریشه های شان را پیدا کرد.

تعداد ریشه های حقیقی یک عبارت درجه n :

به طور کلی چند جمله ها یا عباراتی که درجه آنها زوج است قطعا تعداد ریشه های حقیقی آنها زوج یا صفر و آنهایی که درجه شان فرد است قطعا تعداد ریشه های حقیقی شان فرد است.

اثبات شهودی:

می دانیم طبق قضیه اساسی جبر یک عبارت درجه n می توان به صورت ضرب چند عبارت درجه اول دارای ریشـــه حقیقی و چند عبارت درجه دوم بدون ریشـــه حقیقی نوشت و باید در کل دارای n ریشه مختلط باشد. هر عبارت درجه ۲ خود ۲ ریشه غیر حقیقی به وجود می آورد. حال فرض کنید درجه ما ۶ باشـــد. حالات تجزیه کردن آن را می نویسیم:

۲ نشـان دهنده عبارت درجه دو اسـت و یعنی ۲ ریشـه غیر حقیقی و ۱ نشـان دهنده عبارت درجه اول است و یعنی ۱ ریشه حقیقی:

$$6 = 2 + 2 + 2$$

$$6 = 2 + 2 + (1 + 1)$$

$$6 = 2 + (1 + 1) + (1 + 1)$$

$$6 = (1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1)$$

همان طور که دیدید تعداد ریشـه های حقیقی که رنگ آنها سـبز هست همیشـه زوج است. زیرا باید برای حذف هر عبارت درجه ۲، ۲ عدد عبارت درجه اول داشته باشیم که این نشـان میدهد همیشـه تعداد عبارات درجه اول که تعداد ریشـه های حقیقی هستند، ضریبی از عدد ۲ است.

حال فرض کنید یک عبارت درجه ۵ داریم. تعداد حالات تجزیه کردن آن را مانند قسمت قبل می نویسیم:

$$5 = 2 + 2 + 1$$

$$5 = 2 + (1 + 1) + 1$$

$$5 = (1 + 1) + (1 + 1) + 1$$

همان طور که میبینید تعداد ریشه های حقیقی همیشه فرد است زیرا نمی شود که عبارت درجه ۵ را کامل به عبارات درجه ۲ بدون ریشه تجزیه کرد پس همیشه یک ریشه حقیقی دارد.

از دو قسمت بالا می توان نتیجه گرفت عباراتی که درجه آنها زوج است یا ریشه حقیقی ندارند یا تعداد شان زوج است و آنهایی که درجه شان فرد هست حتما دارای یک ریشه حقیقی هستند و تعداد ریشه هایشان همیشه فرد است.

تابع:

یک تابع یک رابطه ی دوتایی (دو طرفه) است که به ازای هر عنصری که دریافت می کند، دقیقا یک عنصر نسبت می دهد.

مثال:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

دامنه تابع: به همه ی مقادیری که تابع میتواند دریافت کند دامنه گفته می شود.

برد تابع: به همه ی مقادیری که تابع میتواند خروجی دهد برد گفته می شود.

نکته: دامنه و برد بعضی توابع محدود است، یعنی همه ی اعداد حقیقی را نمیتواند بپذیرد و یا نمیتواند خروجی دهد.

مثال محدودیت دامنه: در مثال زیر چون ورودی در مخرج است نمیتواند صفر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

مثال محدودیت برد: در مثال زیر چون ورودی به توان دو رسیده پس خروجی نمیتواند منفی باشد.

$$f(x) = x^2$$

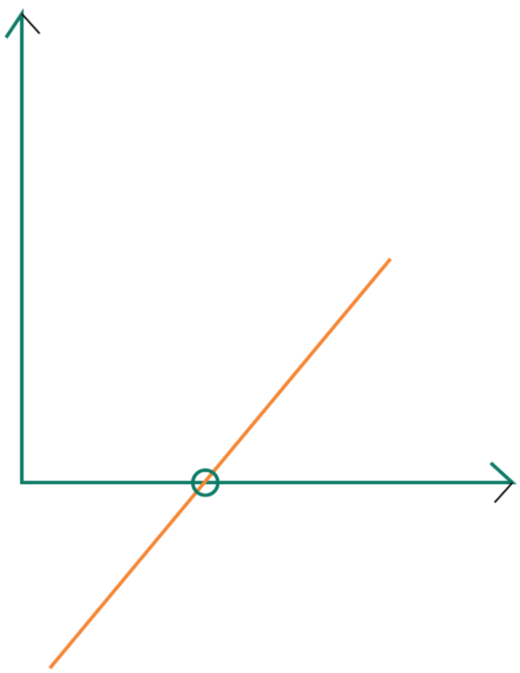
فصل چهارم

رسم و نمودار

فصل چهارم:رسم و نمودار

خط:

اگر ما متغیر در معادله درجه اول را مولفه طول و جواب معادله را مولفه عرض در نظر بگیریم،نقاط بدست آمده از این معادله یک خط راست را میسازند به همین خاطر به معادله درجه اول معادله خط میگویند.



ریشه:

مختصات نقطه ای که در آن خط با محور طول ها برخورد می کند ریشه معادله است زیرا مولفه عرض آن صفر است.

عرض از مبدا:

عرض از مبدا عدد ثابتی است که معمولا آن را با b نشان میدهند.عرض از مبدا یعنی محل برخورد نمودار با محور عرض ها. یا در واقع جواب معادله به ازای x صفر.

شیب:

شیب در خط راست نسبت تغییرات افقی به عمودی بین دو نقطه است.شیب نمودار معادله درجه اول در تمام قسمت ها ثابت است. کافیست مختصات دو نقطه از نمودار را داشته باشیم $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ تا شیب با رابطه رو به رو محاسبه شود:

$$m = \frac{y - y'}{x - x'}$$

اگر ما به معادله خط دسترسی داشته باشیم نیاز نیست شیب را اینگونه حساب کنیم زیرا شیب خط ضریب x است.

اثبات:

۱ـ فرض کنید دو نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ از نمودار $ax + b = y$ را داریم. طبق تعریف شیب:

$$m = \frac{y - y'}{x - x'}$$

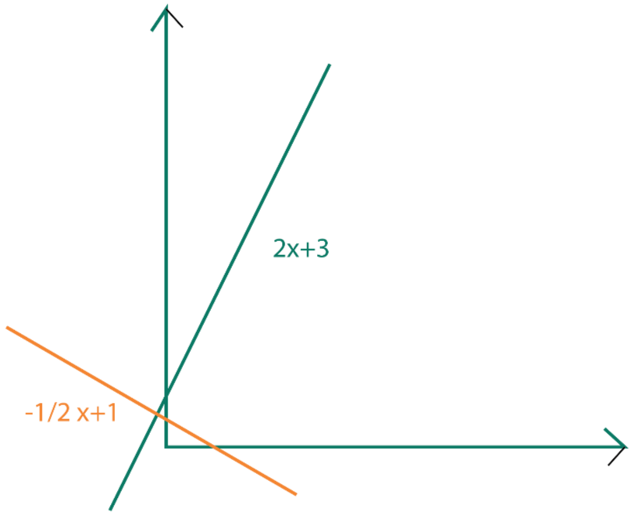
۲ـ حال مولفه y را نسبت به مولفه x مینویسیم:

$$m = \frac{(ax + b) - (ax' + b)}{x - x'}$$

۳ـ ساده سازی میکنیم و اثبات میشود شیب برابر است با ضریب x:

$$m = \frac{(ax + b) - (ax' + b)}{x - x'} = \frac{ax - ax'}{x - x'} = \frac{a(x - x')}{x - x'} = a$$

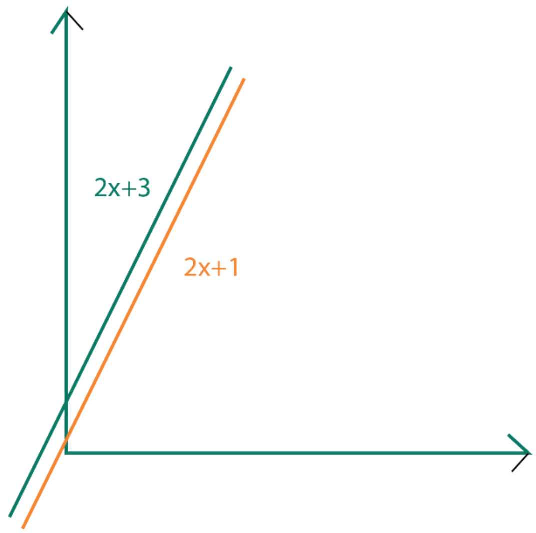
روابط بین دو خط عمود و دو خط موازی:



دو خط زمانی بر هم عمود هستند که شیب آنها قرینه و عکس هم باشد(عرض از مبدا تاثیری ندارد).

برای مثال دو خط زیر بر هم عمود هستند:

$$2x + 3 \perp -\frac{1}{2}x + 1$$

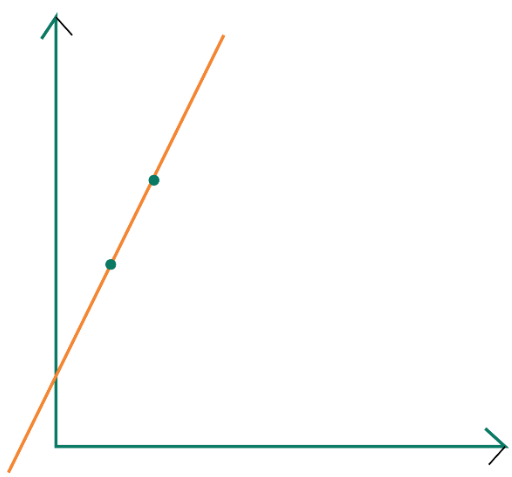


دو خط زمان موازی هستند که شیب آنها برابر باشد(عرض از مبدا تاثیری ندارد).

برای مثال دو خط زیر با هم موازی هستند:

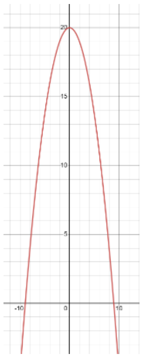
$2x + 3 \parallel 2x + 1$

رسم خط:



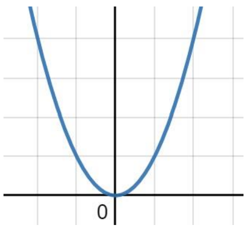
برای رسم کردن یک خط کافیست دو نقطه از آن را داشته باشیم، سپس خطی میکشیم که از آن دو رد شود. برای اینکار دو x مختلف در معادله قرار می دهیم و دو y متعامد با آن ها را پیدا می کنیم.

سهمی:

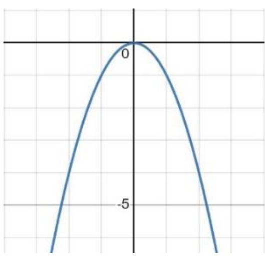


اگر ما متغیر در معادله درجه دوم را مولفه طول و جواب معادله را مولفه عرض در نظر بگیریم، نقاط بدســـت آمده از این معادله یک منحنی را میسازند که به آن سـهمی میگویند به همین خاطر به معادله درجه دو، معادله سهمی نیز میگویند.

شاخه های سهمی:



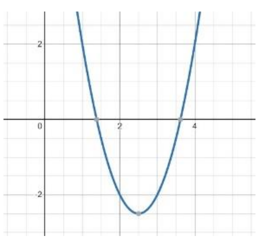
اگر ضریب x^2 در معادله سهمی مثبت باشد،شاخه های سهمی رو به بالا است .



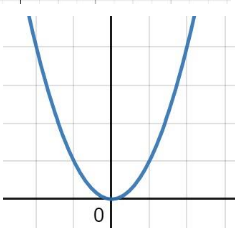
اگر ضریب x^2 در معادله سهمی منفی باشد،شاخه های سهمی رو به پایین است.

ریشه:

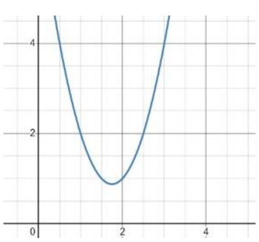
همان طور که گفتیم سـه حالت برای ریشـه های معادله درجه دو وجود دارد:



۱ـ دو ریشه حقیقی دارد: سهمی با محور طول ها دو برخورد دارد:



۲ـ یک ریشـــه حقیقی دارد: ســـهمی با محور طول ها یک برخورد دارد:



۳ـ ریشه حقیقی ندارد: سهمی با محور طول ها برخورد ندارد:

راس سهمی:

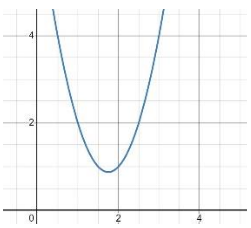
راس سهمی نقطه ای است که نسبت به ضریب x^2 تعریف می شود.

اگر در معادله سهمی، ضریب x^2 مثبت باشد،راس سهمی پایین ترین نقطه سهمی است(مینیمم):

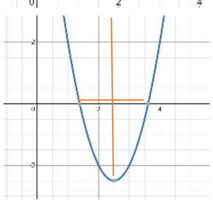
اگر در معادله سهمی، ضریب x^2 عددی منفی باشد،راس سهمی بالاترین نقطه سهمی است(ماکسیمم):

مختصات نقطه راس سهمی بر اساس فرمول دلتا برابر است با: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

محور تقارن سهمی:

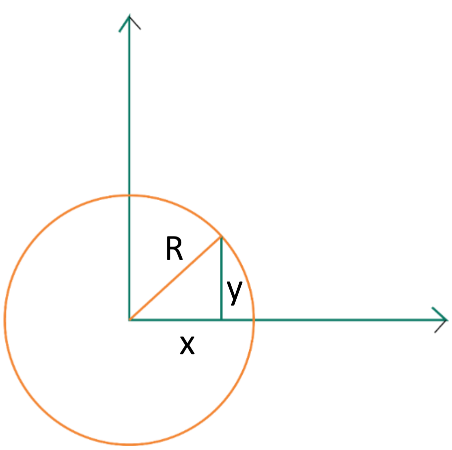


هر سهمی یک محور تقارن دارد. محور تقارن سهمی خطی عمودی است که از راس سهمی میگذرد. برای رسم محور تقارن سهمی کافیست نقطه سهمی را پیدا کنید و از آن خطی عمودی تا آخر سهمی رسم کنید:



اگر به ریشه های معادله سهمی دسترسی داشتید میتوانید بین دو ریشه را پیدا و خطی عمودی از آن به بالا و پایین رسم کنید:

دایره:



دایره مکان هندسی نقاطی است که از یک نقطه(مرکز دایره) فاصله ای ثابت(شعاع دایره) دارند.

معادله دایره در واقع نقاطی است که اگر مولفه هایشان را در معادله قرار دهیم رابطه همیشه برقرار است(Rشعاع دایره و x وy مولفه های نقطه هستند):

$$x^2 + y^2 = R^2$$

اثبات:

۱ـ ابتدا دایره ای دلخواه را تصور کنید:

۲ ـ سپس یک نقطه از روی محیط آن را در نظر بگیرید:

۳ ـ مولفه طولی و عرضی آن را رسم می کنیم:

حال از مرکز دایره شعاعی را به نقطه مورد نظر میکشیم:

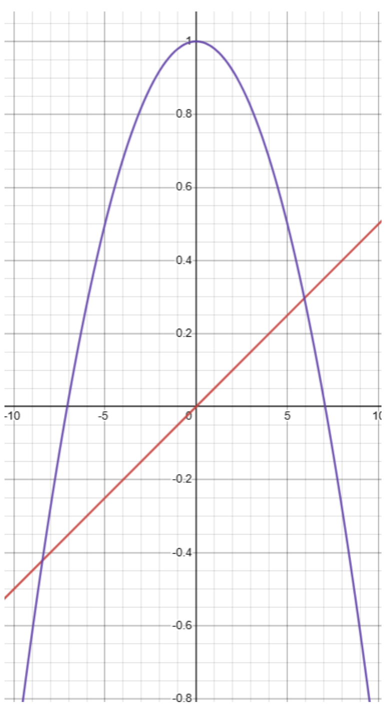
یک مثلث قائم الزاویه تشکیل شد پس طبق فیثاغورس:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

حل معادله درجه دو به روش هندسی:

فرض کنید معادله ای به شکل زیر به شما میدهند: $\frac{x}{20} = \frac{x^2}{50} + 1$

برای حل این معادله میتوان از روش هندسه و نمودار ها کمک گرفت.



۱ـ ابتدا نموداری که از معادله $\frac{x}{20}$ حاصل میشود را رسم میکنیم(خط).

۲ـ سپس نموداری که از معادله $\frac{x^2}{50} + 1$ حاصل میشود را رسم میکنیم(سهمی).

۳ـ نقطه برخورد این دو نمودار، نقطه ای است که هم در معادله $\frac{x}{20}$ صدق میکند هم در معادله $\frac{x^2}{50} + 1$ که در واقع جواب معادله است.

می توان از روش هندسی برای حل معادلات زیادی کمک گرفت.

سوالات – آقای معارف وند

۱ـ عبارت $(5x+5)^5$ را بسط دهید.

۲ـ آیا می توان عبارت درجه ۶ نوشت که دقیقا ۵ ریشه حقیقی داشته باشد؟چرا؟

۳ـ ضریب جمله x^2y^3 در عبارت $(2x+\frac{1}{2}y)^5$ چند است؟

۴ـ با استفاده از اتحاد نیوتن الگویی برای $(x-y)^n$ پیدا کنید

۵ـ حاصل $(5x-5)^5 \; - \; (5x+5)^5$ را پیدا کنید

۶ـ حاصل 104^5 را پیدا کنید(از اتحاد نیوتن کمک بگیرید)

۷ـ ثابت کنید(می توانید از اتحاد پاسکال کمک بگیرید) :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

۸ـ ضریب عبارت x^8y در $(x^2+y)^5$ چند است؟

۹ـ کسر زیر را ساده کنید:

$$\frac{(x^2+y^2)^5}{(x+y)^5}$$

۱۰ـ حاصل 96^4 را پیدا کنید(با کمک اتحاد ها):

سوالات – آقای یوسفی

۱ـ اگر $x+\frac{1}{2x}=10$ حاصل $x^2+\frac{1}{4x^2}$ را محاسبه کنید

۲ـ دو نمودار $2x+1$ و x^2+1 در چه نقطه ای با هم برخورد می کنند؟

۳ـ مساحت حاصل زیر دو نمودار $2x=y,-\frac{1}{2}x$ و محور طول ها را محاسبه کنید.

۴ـ معادله زیر را به روش هندسی حل کنید(تبدیل به دو معادله جدا بکنید):

$$2x^2-2x-4=0$$

۵ـ معادله زیر را به روش مربع کامل حل کنید:

$$x^2-8x+7=0$$

۶ـ عبارت زیر را تجزیه کنید:

$$4x^2+16x+15$$

۷ـ نشان دهید حاصل ضریب چهار عدد طبیعی متوالی به اضافه ۱،همواره مربع کامل عددی صحیح است.

۸ـ معادله زیر را حل کنید:

$$(x-1)(x-2)=1$$

۹ـ یک معادله درجه دو به این صورت است $2x^2+bx+5$ مقدار b باید چند باشد تا معادله ریشه حقیقی نداشته باشد؟

۱۰ـ عبارت $x^4+x^3+x^2$ چند ریشه حقیقی دارد؟