

Übungsaufgaben zur Potentialtheorie

WiSe 2012/2013

Janina Kammann
Marius Kriegerowski
Moritz Nieschlag
Doreen Kasper

3. November 2012

1. Aufgabenteil

Im Rahmen der Masterveranstaltung *GP-M-POTT*THEO wurden uns die mathematisch-physikalischen Grundlagen der Potentialtheorie vermittelt, welche nun in den folgenden Übungen an ausgewählten geophysikalischen Beispielen veranschaulicht werden. Die hierfür verwendeten Programme sowie graphischen Darstellungen wurden mittels der Software Matlab erstellt und sind dem anschließenden Anhang dieser Arbeit zu entnehmen. Die von uns verwendeten Gleichungen zur Aufgabebearbeitung basieren auf dem Vorlesungsskript oder in der Vorlesung bereitgestellter Literatur.

Im ersten Aufgabenteil des Übungsblattes sollen drei Sätze Legendre Polynome als Funktion der geographischen Länge und Breite berechnet und programmiert werden. Die jeweiligen Polynome unterscheiden sich durch verschiedene Ordnungen n und Grade m , wobei für diese folgende Bedingung gilt: $m \leq n$.

Die in den anschließenden Darstellungen berechneten Polynome definieren sich aus folgender Beziehung:

$$(A_{n,m} \cos m\Phi + B_{n,m} \sin m\Phi) * P_n^m(\theta) \quad (1.1)$$

Laut Aufgabenstellung gilt für die Koeffizienten der Zusammenhang: $A_{n,m} = B_{n,m} = 1$. Da die Legendre-Polynome auf der Verwendung beliebig orthogonaler Funktionen basieren haben wir für die Normalisierung der zonalen Kugelfunktionen eine Schmidt-Normalisierung mittels der Matlabfunktion 'sch' durchgeführt, sodass aus der Basis des aufgespannten Vektorraums eine Orthonormalbasis konstruiert wird. Durch die Normalisierung wird des Weiteren eine Wichtung der Koeffizienten in einem Intervall von $[-1, 1]$ vorgenommen.

Die nachfolgenden Darstellungen zeigen die Ergebnisse der programmierten Legendre-Polynome. Der entsprechend dokumentierte Programmcode ist dem Anhang A zu entnehmen.

Die erste Graphik veranschaulicht eine zonale Darstellung der Legendre-Polynome. In diesem Fall ist die Ordnung des Polynoms stets durch $m=0$ definiert und der Grad des Polynoms variierbar (hier $n=9$). Da Polynom P_9^0 definiert sich über 9 Nullstellen und ist unabhängig von den Längengraden (θ) (da $m=0$). Verschiedene Beispiele zeigen, dass durch Erhöhung der Koeffizienten m und n die beschriebenen Gebiete der Funktion kleiner 'gefächert' sind. Die zweite Abbildung für P_6^6 ist sektoriell, das heißt der Grad des Polynoms entspricht seiner Ordnung sodass gilt: $m=n=6$. In diesem Fall ist das Polynom unabhängig von dem Breitengrad und durch 12 Nullstellen definiert. Die dritte Graphik veranschaulicht die allgemeine Kugelflächenfunktion P_9^3 ; eine tesserale Darstellung der unterschiedlichen Koeffizienten.

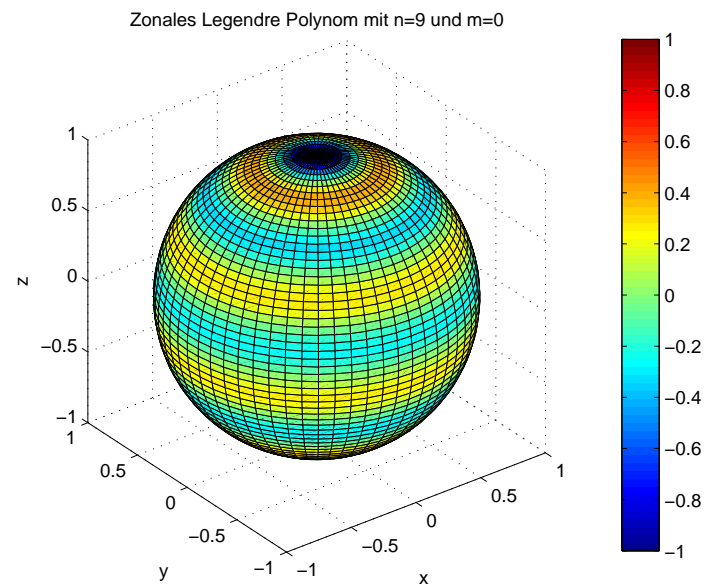


Abb. 1.1.: Legendre-Polynom P_9^0 - zonal

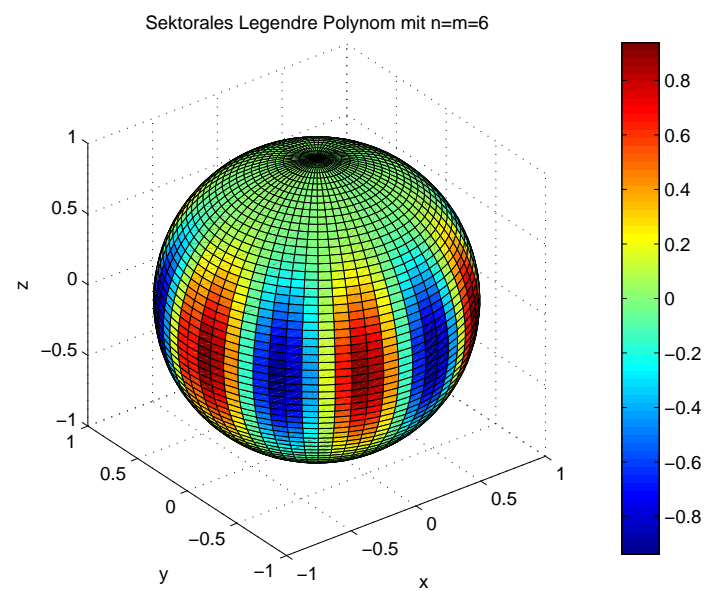


Abb. 1.2.: Legendre-Polynom P_6^6 - sektoral

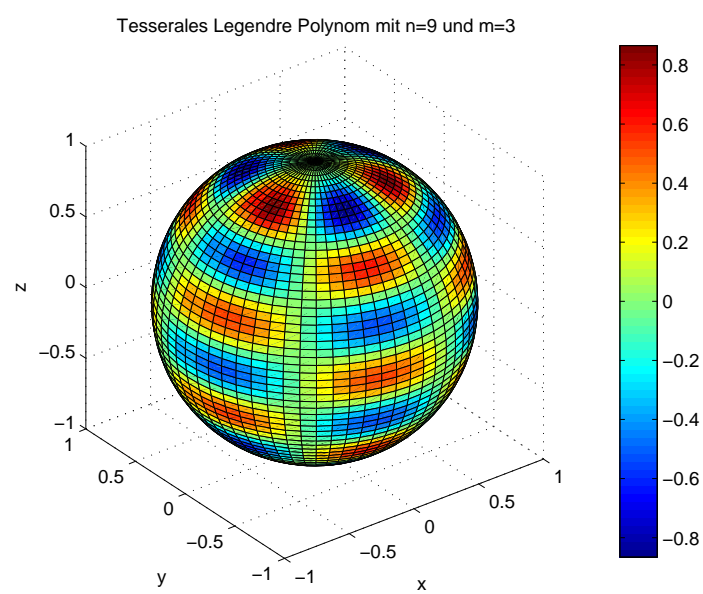


Abb. 1.3.: Legendre-Polynom P_9^3 - tesseral

2. Aufgabenteil 2

In dieser Aufgabe soll das Schwerfeld der Erde, welches beispielsweise aus Satellitenmessungen bekannt ist mittels der in Aufgabe 1 berechneten Legendre Polynome dargestellt werden. Die dazugehörigen Datensätze zur Berechnung notwendiger Parameter haben wir der Institution des Helmholtz Centre Potsdam (GFZ German Research Centre For Geosciences) aus folgender Internetseite entnommen: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>.

Für die Aufgabenbearbeitung wurde das Datenfile *osu89a.gfc* verwendet, welches die Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung bis zu verschiedenen Graden und Ordnungen mit dazugehörigen Standardabweichungen enthält. Das Einlesen des Files erfolgte via `load('osu.txt')`. Für die Berechnung des Potentials ist zu beachten, dass die Koeffizienten der Polynome bis zum 10. Grad korrigiert werden (siehe Aufgabenblatt). Aufgrund der linearen Approximation des Potentials wird durch die Korrektur der Koeffizienten erreicht, dass die ersten Terme aus der Reihenentwicklung eine stärkere Wichtung erhalten, sodass ellipsoide Anteile (bzgl. des Referenzellipsoids) im Potentialfeld nicht überwiegen und auch sehr geringe Anomalien zu erkennen sind. Das Programm zur Berechnung des Schwerepotentials ist folgend strukturiert:

- Einlesen des Datenfiles
- Deklaration der Variablen
- Anordnung der Koeffizienteneinträge in neue Matrizen C_{nm} und S_{nm} mit dazugehörigem Grad und Ordnung
- Korrektur der Koeffizienten
- Schleife über θ und Φ
- Berechnung der Legendre Polynome (+ Schmidt-Normalisierung)
- Berechnung des Potentials über Schleife (m,n) und Summenbildung
- graphische Darstellung des Schwerepotentials

Eine detaillierte Beschreibung ist dem Programmcode im Anhang zu entnehmen. Die Berechnung des Potentials der Erde basiert auf folgendem Zusammenhang:

$$U_g = \frac{\gamma M}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{mn}(\theta) [C_{nm} \cos m\Phi + S_{nm} \sin m\Phi] \quad (2.1)$$

Die zwei folgenden Abbildungen zeigen, dass variierende Ordnungen (n) der Legendre Polynome unterschiedliche Ergebnisse für das Schwerepotential liefern. Demnach bestimmt die Höhe der Ordnungen n und damit die Anzahl berechneter Koeffizienten das Auflösungsvermögen der zu ermittelnden Größe. Bei der Berechnung des Potentials mit $n=200$ werden auch kleinste Anomalien sichtbar, während für $n=5$ kleinskalige Undulationen nicht berücksichtigt werden. Dies ist auf die kurzwelligen Anteile der Koeffizienten zurückzuführen, welche durch eine hohe Ordnung der Kugelflächenfunktionen sichtbar beziehungsweise für Koeffizienten $n \leq 5$ unterdrückt werden.

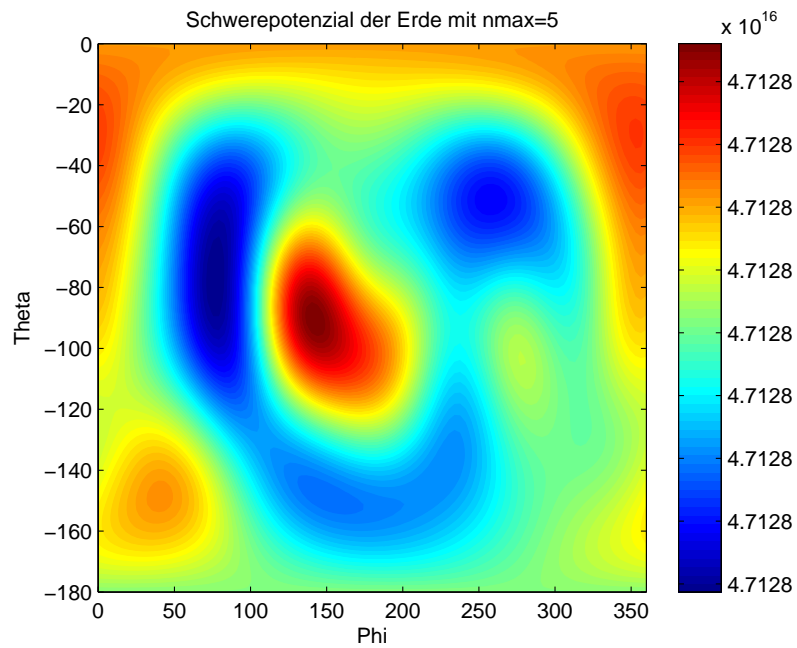


Abb. 2.1.: Das Schwerepotential für $n_{\max}=5$ - sehr geringe Auflösung

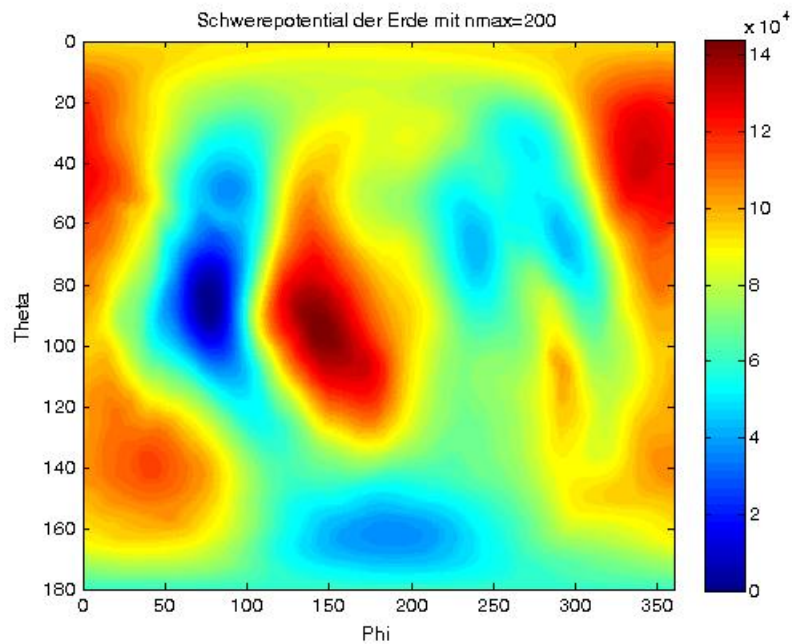


Abb. 2.2.: Das Schwerepotential für $n_{\max}=200$ - geringe Anomalien sichtbar

In den anschließenden Abbildungen sind drei Auschnitte dargestellt die besonders starke Schwereanomalien aufweisen. Die Ursache für die langwelligen Anomalien sind auf großräumige Dichtevariationen im Erdmantel beziehungsweise in der Erdkruste zurückzuführen. Eine höhere Gesteinsdichte erzeugt demnach eine zusätzliche Gravitationsbeschleunigung, wodurch der Massenüberschuss eine positive Schwereanomalie bewirkt und das Geoid "ausbeult". Andererseits werden durch geringere Dichten negative Schwereanomalien verursacht die "Eindellungen" des Geoids hervorrufen. Die Ursache für die Dichtevariationen. Die Dichtevariationen im Erdmantel werden durch die Geodynamik der Mantelkonvektion begründet. Demnach weist extrem heißes Mantelmaterial eine geringe Dichte auf und steigt nach oben, wogegen sich kalte Regionen durch eine hohe Dichte ausweisen und absinken. Folglich sind abtauchende Konvektionsströme ursächlich für positive Schwereanomalien (Beulen) und aufsteigende Konvektionsströme verantwortlich für negative Anomalien (Dellen).

Die anschließenden Abbildungen zeigen regionale Beispiele des Schwerepotenzials auf der Erde, welche sich durch unterschiedliche Extrema der Anomalien charakterisieren.

Das erste Beispiel (Abbildung ...) umfasst das Gebiet im Süden Indiens. Hier deutet sich ein lokales Minimum des Schwerepotentials an. Dies ist auf einen Chondriteneinschlag zurückzuführen, bei dem Gesteinsfragmente aus der Erdkruste und Materie des Erdmantels abgespalten und in den Erdbit transportiert wurde. Aus diesem Ereignis resultierte schließlich die gravitative Akkretion (Formation) des Erdmondes. Des Weiteren zeigt sich auch an der Anomalie im Bereich des Himalya-Gebirges, dass die Topographie zu lateral variablen Massenvariation führt. Direkt neben der stark negativen Anomalie über Indien zeichnet sich dagegen das Gebiet über Indonesien und dem südöstlichen Indischen Ozean

durch eine maximal positive Schwereanomalie aus (Abbildung ...). Das letzte Beispiel zeigt einen Ausschnitt einer Subduktionszone die im Westen vor der südamerikanischen Küste liegt und bei der sich die ozeanische Kruste der Nasca-Platte unter die Kontinentalplatte Südamerikas schiebt (Abbildung...).? Im Gegenteil zu der Umgebungsregion definiert sich der Kontinentalrand durch ein lokales Maximum der Schwereanomalie. Dieses kann durch die Zugbelastung der ausgedünnten Platte hervorgerufen werden, da sich das darunter liegende Mantelmaterial nach oben aufwölbt. Eine weitere Ursache für die positive Schwereanomalie ist auf die schweren Basaltintrusionen in die leichtere Kruste zurückzuführen. Negative Schwereanomalien in diesen Bereichen würden dagegen aufgrund der hohen Temperaturen und der Manteldynamik auf eine sehr hohe Aktivität deuten. Die folgenden Abbildungen zeigen die zuvor beschriebenen Beispiele:

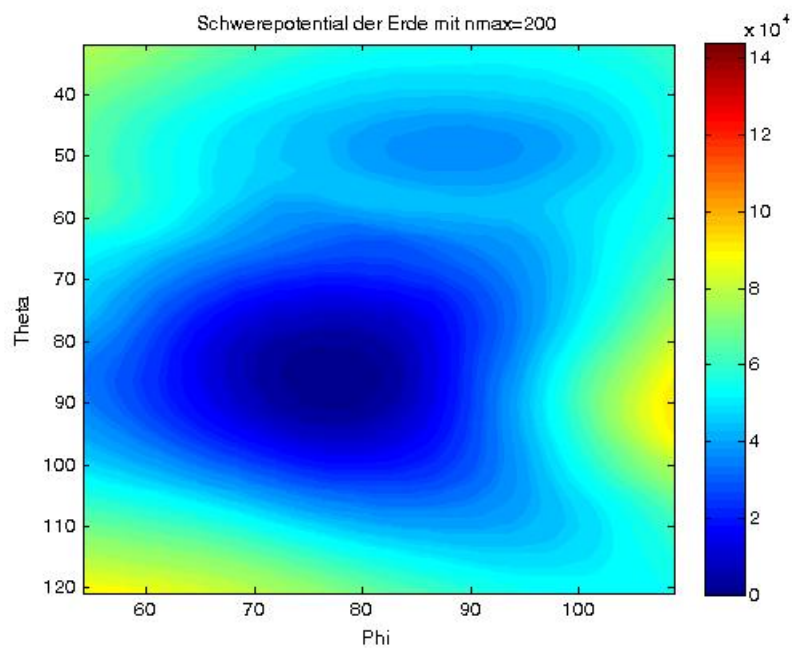


Abb. 2.3.: Auszug des Schwerepotentials der Erde - Indien

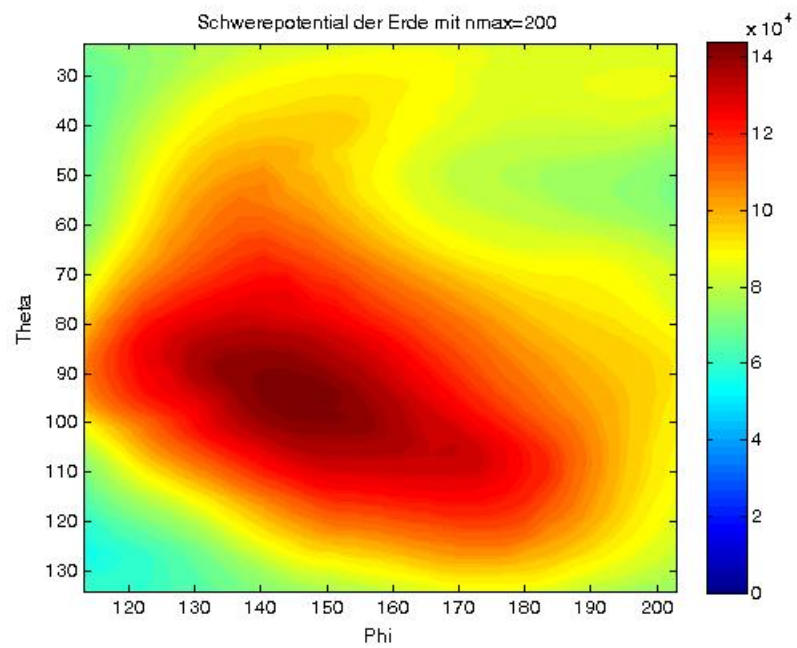


Abb. 2.4.: Auszug des Schwerepotentials der Erde - Südostasien

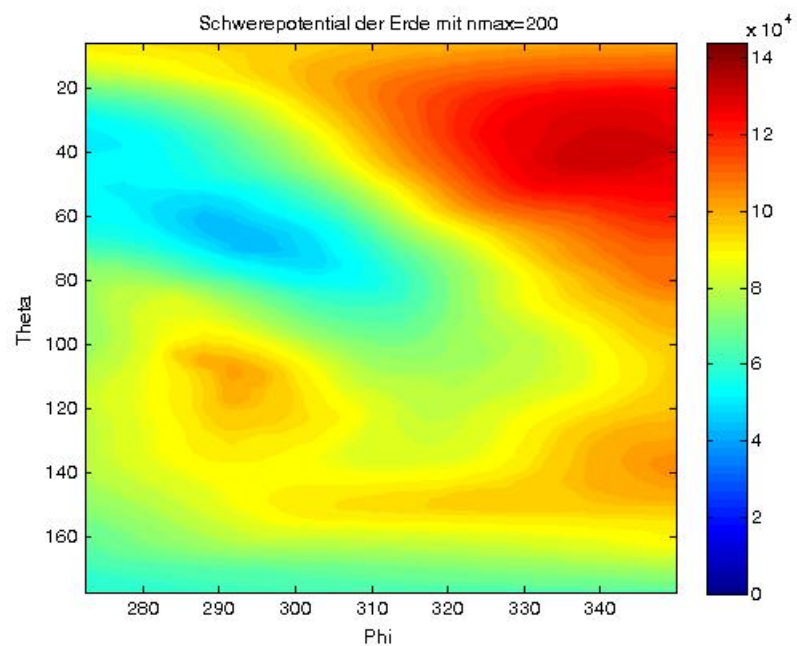


Abb. 2.5.: Auszug des Schwerepotentials der Erde - Subduktionszone vor der südamerikanischen Küste

3. Anhang

3.1. Dokumentierter Programmcode zu Aufgabe 1

```

clear all
close all
%% m<=n
n=9; %Grad
m=0; %Ordnung

delta = pi/60; %Berechnung des Breiten- Längengrads/Umrechnung
theta = 0 : delta : pi;
phi = 0 : 2*delta : 2*pi;
[phi, theta] = meshgrid(phi, theta);

Pmn = legendre(n, cos(theta(:,1)), 'sch');
Pmn = Pmn(m+1,:); %Berechnung der Legendre Polynome mittels
                  %Funktion 'sch' (Schmidtnormalisierung)

for i = 1: size(phi,1) %Schleife um Legendre Polynome über Phi
    Pmnphi(:,i) = Pmn(:);
end;

F = Pmnphi.*(cos(m*phi)+sin(m*phi)); %Berechnung nach
%gegebener Formel
%Graphische Darstellung
figure
[x,y,z]=sphere(length(F));
surf(x,y,z,F)
axis square
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title('Zonales Legendre Polynom mit n=9 und m=0')
colorbar;
%% m<=n
n=6; %Grad
m=6; %Ordnung

delta = pi/60;

```

```

theta = 0 : delta : pi;
phi = 0 : 2*delta : 2*pi;
[phi, theta] = meshgrid(phi, theta);

Pmn = legendre(n, cos(theta(:,1)), 'sch');
Pmn = Pmn(m+1,:);

for i = 1: size(phi,1)
    Pmnphi(:,i) = Pmn(:);
end;

F = Pmnphi.*(cos(m*phi)+sin(m*phi));

figure
[x,y,z]=sphere(length(F));
surf(x,y,z,F)
axis square
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title('Sektorales Legendre Polynom mit n=6')
colorbar;

%% m<=n
n=9; %Grad
m=3; %Ordnung

delta = pi/60;
theta = 0 : delta : pi;
phi = 0 : 2*delta : 2*pi;
[phi, theta] = meshgrid(phi, theta);

Pmn = legendre(n, cos(theta(:,1)), 'sch');
Pmn = Pmn(m+1,:);

for i = 1: size(phi,1)
    Pmnphi(:,i) = Pmn(:);
end;

F = Pmnphi.*(cos(m*phi)+sin(m*phi));

figure
[x,y,z]=sphere(length(F));
surf(x,y,z,F)

```

```
axis square  
xlabel( 'x' )  
ylabel( 'y' )  
zlabel( 'z' )  
title( 'Tesserales Legendre Polynom mit n=9 und m=3' )  
colorbar;
```

3.2. Dokumentierter Programmcode zu Aufgabe 2

```

clear all
close all

%% Einlesen des Datenfiles
filename = 'osu89a-mod.gfc';
[A,delimiterOut]=importdata(filename)

gamma = 6.67384E-11;% Gravitationskonstante
M = 5.974E24;      % Erdmasse
r = 6371000.;      % mittlerer Erdradius
%a = 149.6E6;      % grosse Halbachse
V = gamma*M/r;    % Vorfaktor
a = 0.6378136460E+07;

delta = pi/100;
theta = 0 : delta : pi;      % Breite
phi = 0 : 2*delta : 2*pi;    % Länge
%Anlegen der Koeffizientenmatrizen i denen jedem Grad7Ordnung Koeffizienten
%zugeordnet werden
for line_i=1:length(A.data)
    Cnm(A.data(line_i,1)+1,A.data(line_i,2)+1)=A.data(line_i,3);
    Snm(A.data(line_i,1)+1,A.data(line_i,2)+1)=A.data(line_i,4);
end

%Korrekturen
Cnm(3,1) = Cnm(3,1) + 0.108262982131 * 10^(-2)/sqrt(5);
Cnm(5,1) = Cnm(5,1) - 0.237091120053 * 10^(-5)/sqrt(9);
Cnm(7,1) = Cnm(7,1) + 0.608346498882 * 10^(-8)/sqrt(13);
Cnm(9,1) = Cnm(9,1) - 0.142681087920 * 10^(-10)/sqrt(17);
Cnm(11,1) = Cnm(11,1) + 0.121439275882 * 10^(-13)/sqrt(21);

n=200; %maximale Anzahl der Koeffizienten
yy=zeros(length(theta));
xy=zeros(length(theta));
asdf(1:length(phi),1:length(phi))=0;
for n_i=0:n %Schleife über n
    %Berechnung der Legendre Polynome (siehe Aufg.1)
    test=n_i
    Pnm = legendre(n_i,cos(theta),'sch');
    for phi_i=1:length(phi)
        for m_i=0:n_i

```

```

    %Berechnung des Potentials nach Formel 2.1
    tmp(m_i+1,:) = Pnm(m_i+1,:).*(Cnm(n_i+1,m_i+1)*...
        cos(m_i*phi(phi_i))+Snm(n_i+1,m_i+1)*sin(m_i*phi(phi_i)));
end
%Anlegen der Summen
asdf(phi_i,:)=sum(tmp);
xy(phi_i,:)=xy(phi_i,:)+asdf(phi_i,:);
end
qwer(:, :) = xy(:, :)*((a/r)^n_i);
yy(:, :)=yy(:, :)+qwer(:, :);
end
yy(:, :)=yy(:, :)*V;
yy=yy';

%Normierung der Colourbar
delta_value=min(min(yy));
%U=U./delta_value-1; Größenordnung der Abweichung
yy=yy-delta_value;
delta_value

%Graphische Darstellungen
[phiplot, thetaplot]=meshgrid(phi, theta);
figure(1)
%contourf(theta, phi, yy, 100, 'linestyle', 'None')
contourf(phiplot*180/pi, thetaplot*180/pi, yy, 100, 'linestyle', 'None')
set(gca, 'YDir', 'reverse')
colorbar
%axis square
title('Schwerepotential der Erde mit nmax=200')
xlabel('Phi');
ylabel('Theta');

```

A. Anhang

A.1. Dokumentierter Programmcode zu Aufgabe 1

```

clear all
close all
%% m<=n
n=9; %Grad
m=0; %Ordnung

delta = pi/60; %Berechnung des Breiten- Längengrads/Umrechnung
theta = 0 : delta : pi;
phi = 0 : 2*delta : 2*pi;
[phi, theta] = meshgrid(phi, theta);

Pmn = legendre(n, cos(theta(:,1)), 'sch');
Pmn = Pmn(m+1,:); %Berechnung der Legendre Polynome mittels
                  %Funktion 'sch' (Schmidtnormalisierung)

for i = 1: size(phi,1) %Schleife um Legendre Polynome über Phi
    Pmnphi(:, i) = Pmn(:);
end;

F = Pmnphi.*(cos(m*phi)+sin(m*phi)); %Berechnung nach
%gegebener Formel
%Graphische Darstellung
figure
[x,y,z]=sphere(length(F));
surf(x,y,z,F)
axis square
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title('Zonales Legendre Polynom mit n=9 und m=0')
colorbar;
%% m<=n
n=6; %Grad
m=6; %Ordnung

delta = pi/60;

```

```

theta = 0 : delta : pi;
phi = 0 : 2*delta : 2*pi;
[phi, theta] = meshgrid(phi, theta);

Pmn = legendre(n, cos(theta(:,1)), 'sch');
Pmn = Pmn(m+1,:);

for i = 1: size(phi,1)
    Pmnphi(:,i) = Pmn(:);
end;

F = Pmnphi.*(cos(m*phi)+sin(m*phi));

figure
[x,y,z]=sphere(length(F));
surf(x,y,z,F)
axis square
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title('Sektorales Legendre Polynom mit n=6')
colorbar;

%% m<=n
n=9; %Grad
m=3; %Ordnung

delta = pi/60;
theta = 0 : delta : pi;
phi = 0 : 2*delta : 2*pi;
[phi, theta] = meshgrid(phi, theta);

Pmn = legendre(n, cos(theta(:,1)), 'sch');
Pmn = Pmn(m+1,:);

for i = 1: size(phi,1)
    Pmnphi(:,i) = Pmn(:);
end;

F = Pmnphi.*(cos(m*phi)+sin(m*phi));

figure
[x,y,z]=sphere(length(F));
surf(x,y,z,F)

```

```
axis square
xlabel( 'x' )
ylabel( 'y' )
zlabel( 'z' )
title( 'Tesserales Legendre Polynom mit n=9 und m=3' )
colorbar;
```

A.2. Dokumentierter Programmcode zu Aufgabe 2

```

clear all
close all

%% Einlesen des Datenfiles
filename = 'osu89a-mod.gfc';
[A,delimiterOut]=importdata(filename)

gamma = 6.67384E-11;% Gravitationskonstante
M = 5.974E24;      % Erdmasse
r = 6371000.;      % mittlerer Erdradius
%a = 149.6E6;      % grosse Halbachse
V = gamma*M/r;    % Vorfaktor
a = 0.6378136460E+07;

delta = pi/100;
theta = 0 : delta : pi;      % Breite
phi = 0 : 2*delta : 2*pi;    % Länge
%Anlegen der Koeffizientenmatrizen i denen jedem Grad7Ordnung Koeffizienten
%zugeordnet werden
for line_i=1:length(A.data)
    Cnm(A.data(line_i,1)+1,A.data(line_i,2)+1)=A.data(line_i,3);
    Snm(A.data(line_i,1)+1,A.data(line_i,2)+1)=A.data(line_i,4);
end

%Korrekturen
Cnm(3,1) = Cnm(3,1) + 0.108262982131 * 10^(-2)/sqrt(5);
Cnm(5,1) = Cnm(5,1) - 0.237091120053 * 10^(-5)/sqrt(9);
Cnm(7,1) = Cnm(7,1) + 0.608346498882 * 10^(-8)/sqrt(13);
Cnm(9,1) = Cnm(9,1) - 0.142681087920 * 10^(-10)/sqrt(17);
Cnm(11,1) = Cnm(11,1) + 0.121439275882 * 10^(-13)/sqrt(21);

n=200; %maximale Anzahl der Koeffizienten
yy=zeros(length(theta));
xy=zeros(length(theta));
asdf(1:length(phi),1:length(phi))=0;
for n_i=0:n %Schleife über n
    %Berechnung der Legendre Polynome (siehe Aufg.1)
    test=n_i
    Pnm = legendre(n_i,cos(theta),'sch');
    for phi_i=1:length(phi)
        for m_i=0:n_i

```

```

    %Berechnung des Potentials nach Formel 2.1
    tmp(m_i+1,:) = Pnm(m_i+1,:).*(Cnm(n_i+1,m_i+1)*...
        cos(m_i*phi(phi_i))+Snm(n_i+1,m_i+1)*sin(m_i*phi(phi_i)));
end
%Anlegen der Summen
asdf(phi_i,:)=sum(tmp);
xy(phi_i,:)=xy(phi_i,:)+asdf(phi_i,:);
end
qwer(:, :) = xy(:, :)*((a/r)^n_i);
yy(:, :)=yy(:, :)+qwer(:, :);
end
yy(:, :)=yy(:, :)*V;
yy=yy';

%Normierung der Colourbar
delta_value=min(min(yy));
%U=U./delta_value-1; Größenordnung der Abweichung
yy=yy-delta_value;
delta_value

%Graphische Darstellungen
[phiplot, thetaplot]=meshgrid(phi, theta);
figure(1)
%contourf(theta, phi, yy, 100, 'linestyle', 'None')
contourf(phiplot*180/pi, thetaplot*180/pi, yy, 100, 'linestyle', 'None')
set(gca, 'YDir', 'reverse')
colorbar
%axis square
title('Schwerepotential der Erde mit nmax=200')
xlabel('Phi');
ylabel('Theta');

```