
Übungsaufgaben zur Potenzialtheorie

WiSe 2012/2013

Janina Kammann
Marius kriegerowski
Moritz Nieschlag
Doreen Kasper

5. November 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabe 1	1
1.1	Teil 1	1
1.2	Teil 2	2
2	Aufgabenteil 3	5
A	Quellcode	9
A.1	Aufgabe 1	9
A.2	Aufgabe 2	10
A.3	Aufgabe 3	12
A.3.1	Hauptprogramm	12
A.3.2	Subprogramm: Berechnen der Kreispunkte	14
A.3.3	Subprogramm: Berechnen der Kugel	14

Abbildungsverzeichnis

1	Legendre-Polynom P_9^0 - zonal	1
2	Legendre-Polynom P_6^6 - sektoral	1
3	Legendre-Polynom P_9^3 - tesseral	2
4	Das Schwerepotential für $n_{\max}=5$ - sehr geringe Auflösung	3
5	Das Schwerepotential für $n_{\max}=200$ - geringe Anomalien sichtbar	4
6	Auszug des Schwerepotentials der Erde - Indien	4
7	Auszug des Schwerepotentials der Erde - Südostasien	4
8	Auszug des Schwerepotentials der Erde - Subduktionszone vor der südameri- kanischen Küste	4
9	Approximierte Kugel aus 100 Schichten und 100-eckigen Polygonen	5
10	analytische Lösung für das Schwerefeld einer Kugel	7
11	Schwerefeld einer durch 100 Schichten 100-eckeniger Polygonen approximier- ten Kugel	8
12	Differenz zwischen analytischer Lösung und Näherung bei $x=0$ und $y=-15:15$	8

1 Aufgabe 1

1.1 Teil 1

Im Rahmen der Masterveranstaltung *GP-M-POTTHEO* wurden uns die mathematisch-physikalischen Grundlagen der Potentialtheorie vermittelt, welche nun in den folgenden Übungen an ausgewählten geophysikalischen Beispielen veranschaulicht werden. Die hierfür verwendeten Programme sowie graphischen Darstellungen wurden mittels der Software Matlab erstellt und sind dem anschließenden Anhang dieser Arbeit zu entnehmen. Die von uns verwendeten Gleichungen zur Aufgabenbearbeitung basieren auf dem Vorlesungsskript oder in der Vorlesung bereitgestellter Literatur.

Im ersten Aufgabenteil des Übungsblattes sollen drei Sätze Legendre Polynome als Funktion der geographischen Länge und Breite berechnet und programmiert werden. Die jeweiligen Polynome unterscheiden sich durch verschiedene Ordnungen n und Grade m , wobei für diese folgende Bedingung gilt: $m \leq n$.

Die in den anschließenden Darstellungen berechneten Polynome definieren sich aus folgender Beziehung:

$$(A_{n,m} \cos m\Phi + B_{n,m} \sin m\Phi) * P_n^m(\theta) \quad (1)$$

Laut Aufgabenstellung gilt für die Koeffizienten der Zusammenhang: $A_{n,m} = B_{n,m} = 1$. Da die Legendre-Polynome auf der Verwendung beliebig orthogonaler Funktionen basieren, haben wir für die Normalisierung der zonalen Kugelfunktionen eine Schmidt-Normalisierung mittels der Matlabfunktion *'sch'* durchgeführt, sodass aus der Basis des aufgespannten Vektorraums eine Orthonormalbasis konstruiert wird. Durch die Normalisierung wird des Weiteren eine Wichtung der Koeffizienten in einem Intervall von $[-1, 1]$ vorgenommen. Die nachfolgenden Darstellungen zeigen die Ergebnisse der programmierten Legendre-Polynome. Der entsprechend dokumentierte Programmcode ist dem Anhang A zu entnehmen.

Die erste Graphik veranschaulicht eine zonale Darstellung der Legendre-Polynome. In diesem Fall ist die Ordnung des Polynoms stets durch $m=0$ definiert und der Grad des Polynoms variierbar (hier $n=9$). Da Polynom P_9^0 definiert sich über 9 Nullstellen und ist unabhängig von den Längengraden (θ) (da $m=0$). Verschiedene Beispiele zeigen, dass durch Erhöhung der Koeffizienten m und n die beschriebenen Gebiete der Funktion kleiner „gefächert“ sind. Die zweite Abbildung für P_6^6 ist sektoriell, das heißt der Grad des Polynoms entspricht seiner Ordnung, sodass gilt: $m=n=6$. In diesem Fall ist das Polynom unabhängig von dem Breitengrad und durch 12 Nullstellen definiert. Die dritte Graphik veranschaulicht die allgemeine Kugelflächenfunktion P_9^3 ; eine tesserale Darstellung der unterschiedlichen Koeffizienten.

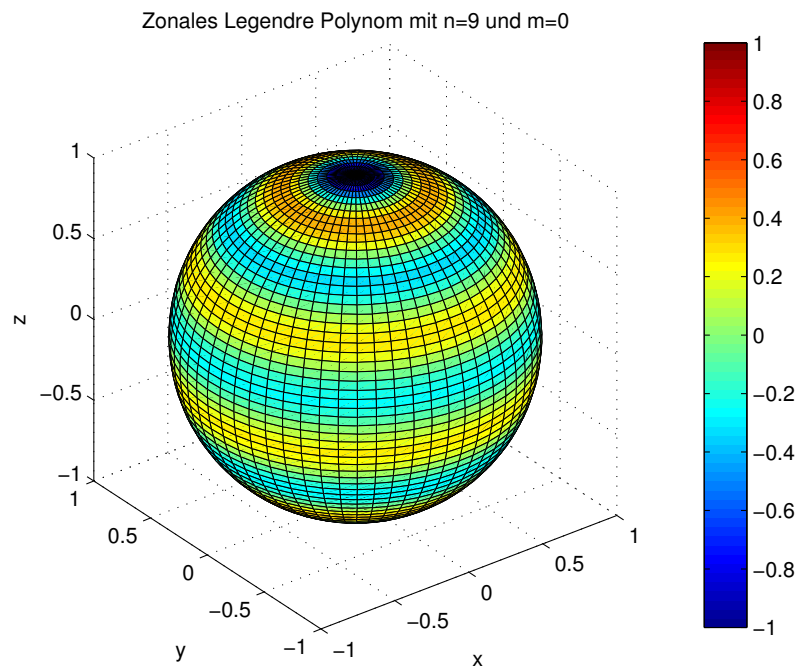


Abbildung 1: Legendre-Polynom P_9^0 - zonal

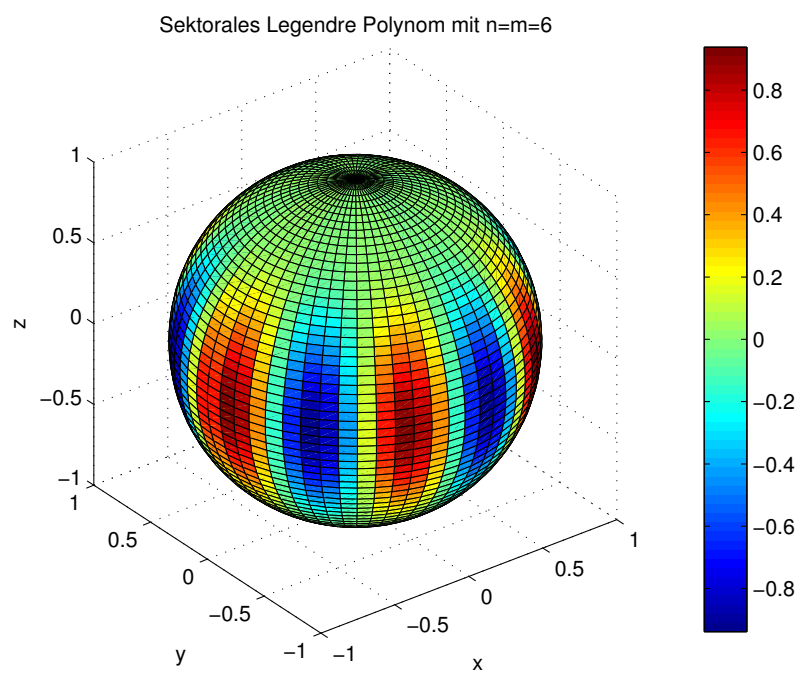


Abbildung 2: Legendre-Polynom P_6^6 - sektoral

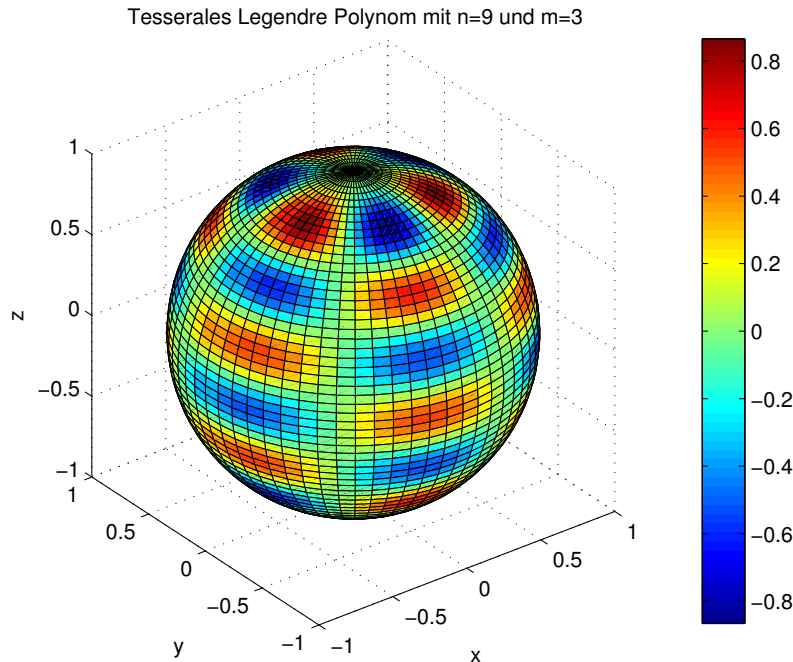


Abbildung 3: Legendre-Polynom P_9^3 - tesseral

1.2 Teil 2

In dieser Aufgabe soll das Schwerefeld der Erde, welches beispielsweise aus Satellitenmessungen bekannt ist mittels der in Aufgabe 1 berechneten Legendre Polynome dargestellt werden. Die dazugehörigen Datensätze zur Berechnung notwendiger Parameter haben wir der Institution des Helmholtz Centre Potsdam (GFZ German Research Centre For Geosciences) aus folgender Internetseite entnommen: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>. Für die Aufgabenbearbeitung wurde das Datenfile *osu89a.gfc* verwendet, welches die Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung bis zu verschiedenen Graden und Ordnungen mit dazugehörigen Standardabweichungen enthält. Das Einlesen des Files erfolgte via `load('osu.txt')`. Für die Berechnung des Potentials ist zu beachten, dass die Koeffizienten der Polynome bis zum 10. Grad korrigiert werden (siehe Aufgabenblatt). Aufgrund der linearen Approximation des Potentials wird durch die Korrektur der Koeffizienten erreicht, dass die ersten Terme aus der Reihenentwicklung eine stärkere Wichtung erhalten, sodass ellipsoide Anteile (bzgl. des Referenzellipsoids) im Potentialfeld nicht überwiegen und auch sehr geringe Anomalien zu erkennen sind. Das Programm zur Berechnung des Schwerepotentials ist folgend strukturiert:

- Einlesen des Datenfiles
- Deklaration der Variablen
- Anordnung der Koeffizienteneinträge in neue Matrizen C_{nm} und S_{nm} mit dazugehörigem Grad und Ordnung
- Korrektur der Koeffizienten
- Schleife über θ und Φ
- Berechnung der Legendre Polynome (+ Schmidt-Normalisierung)

- Berechnung des Potentials über Schleife (m,n) und Summenbildung
- graphische Darstellung des Schwerepotentials

Eine detaillierte Beschreibung ist dem Programmcode im Anhang zu entnehmen. Die Berechnung des Potentials der Erde basiert auf folgendem Zusammenhang:

$$U_g = \frac{\gamma M}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{mn}(\theta) [C_{nm} \cos m\Phi + S_{nm} \sin m\Phi] \quad (2)$$

Die zwei folgenden Abbildungen zeigen, dass variierende Ordnungen (n) der Legendre Polynome unterschiedliche Ergebnisse für das Schwerepotential liefern. Demnach bestimmt die Höhe der Ordnungen n und damit die Anzahl berechneter Koeffizienten das Auflösungsvermögen der zu ermittelnden Größe. Bei der Berechnung des Potentials mit $n=200$ werden auch kleinste Anomalien sichtbar, während für $n=5$ kleinskalige Undulationen nicht berücksichtigt werden. Dies ist auf die kurzwelligen Anteile der Koeffizienten zurückzuführen, welche durch eine hohe Ordnung der Kugelflächenfunktionen sichtbar beziehungsweise für Koeffizienten $n \leq 5$ unterdrückt werden.

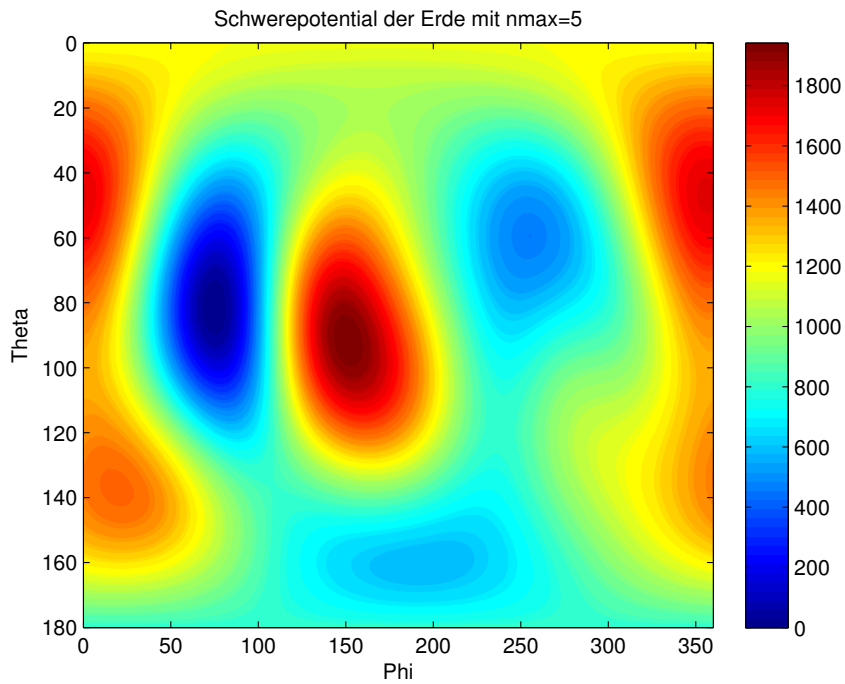


Abbildung 4: Das Schwerepotential für $n_{\max}=5$ - sehr geringe Auflösung

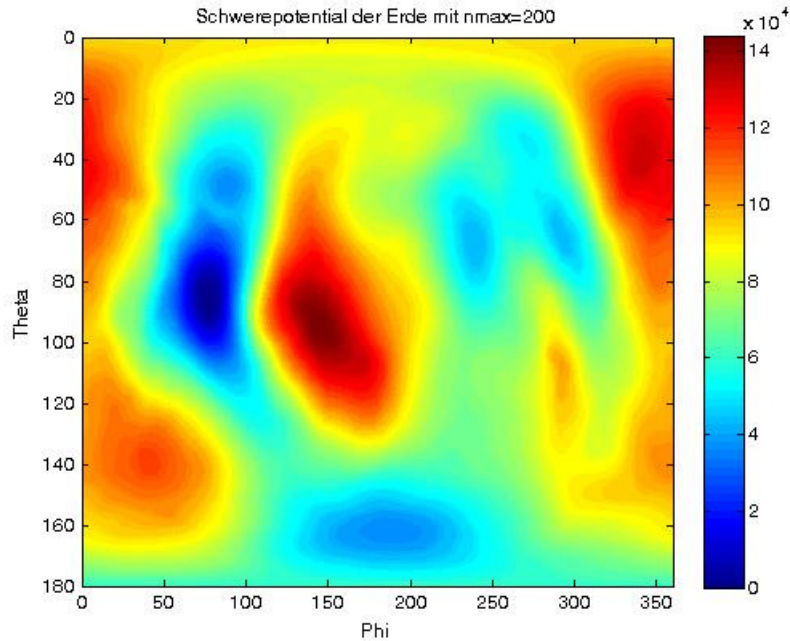


Abbildung 5: Das Schwerepotential für $n_{\max}=200$ - geringe Anomalien sichtbar

In den anschließenden Abbildungen sind drei Ausschnitte dargestellt die besonders starke Schwereanomalien aufweisen. Die Ursache für die langwelligigen Anomalien sind auf großräumige Dichteveränderungen im Erdmantel beziehungsweise in der Erdkruste zurückzuführen. Eine höhere Gesteinsdichte erzeugt demnach eine zusätzliche Gravitationsbeschleunigung, wodurch der Massenüberschuss eine positive Schwereanomalie bewirkt und das Geoid „ausbeult“. Andererseits werden durch geringere Dichten negative Schwereanomalien verursacht die „Eindellungen“ des Geoids hervorrufen. Die Ursache für die Dichteveränderungen im Erdmantel werden durch die Geodynamik der Mantelkonvektion begründet. Demnach weist extrem heißes Mantelmaterial eine geringe Dichte auf und steigt nach oben, wogegen sich kalte Regionen durch eine hohe Dichte ausweisen und absinken. Folglich sind absinkende Konvektionsströme ursächlich für positive Schwereanomalien (Beulen) und aufsteigende Konvektionsströme verantwortlich für negative Anomalien (Dellen).

Die anschließenden Abbildungen zeigen regionale Beispiele des Schwerepotenzials auf der Erde, welche sich durch unterschiedliche Extrema der Anomalien charakterisieren.

Das erste Beispiel (Abbildung 6) umfasst das Gebiet im Süden Indiens. Hier deutet sich ein lokales Minimum des Schwerepotentials an. Dies ist auf einen Chondriteneinschlag zurückzuführen, bei dem Gesteinsfragmente aus der Erdkruste und Materie des Erdmantels abgespalten und in den Erdbereich transportiert wurde. Aus diesem Ereignis resultierte schließlich die gravitative Akkretion (Formation) des Erdmondes. Des Weiteren zeigt sich auch an der Anomalie im Bereich des Himalaya-Gebirges, dass die Topographie zu lateralen Massenvariationen führt. Direkt neben der stark negativen Anomalie über Indien zeichnet sich dagegen das Gebiet über Indonesien und dem südöstlichen Indischen Ozean durch eine maximal positive Schwereanomalie aus (Abbildung 7). Das letzte Beispiel zeigt einen Ausschnitt einer Subduktionszone die im Westen vor der südamerikanischen Küste liegt und bei der sich die ozeanische Kruste der Nazca-Platte unter die Kontinentalplatte Südamerikas schiebt (Abbildung ??). Im Gegenteil zu der Umgebungsregion definiert sich der Kontinentalrand durch ein lokales Maximum der Schwereanomalie. Dieses kann durch die Zugbelastung der ausgedünnten Platte hervorgerufen werden, da sich das darunter liegende Mantelmaterial nach oben aufwölbt. Eine weitere Ursache für die positive Schwereanomalie ist auf die schweren Basaltintrusionen in die leichtere Kruste zurückzuführen. Negative Schwereanomalien in diesen

Bereichen würden dagegen aufgrund der hohen Temperaturen und der Manteldynamik auf eine sehr hohe Aktivität deuten. Die folgenden Abbildungen zeigen die zuvor beschriebenen Beispiele:

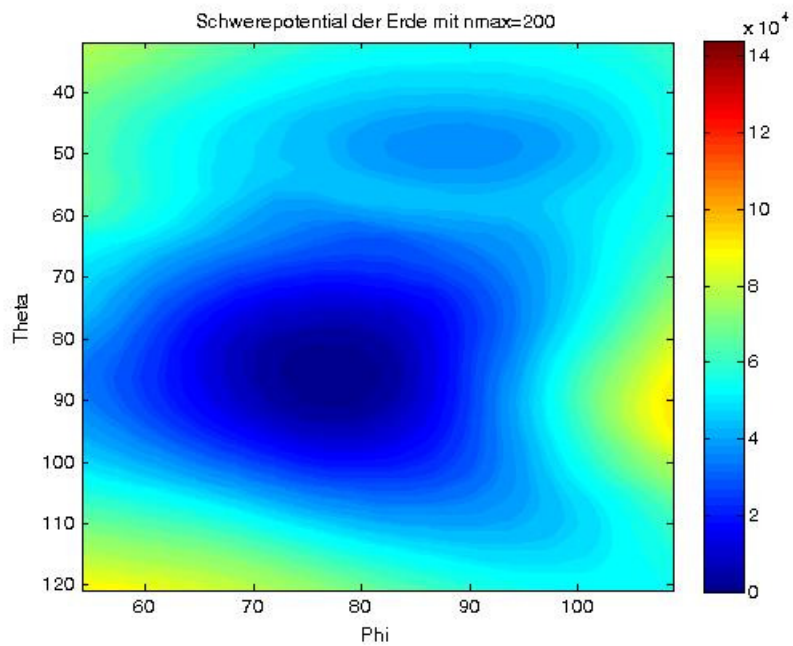


Abbildung 6: Auszug des Schwerepotentials der Erde - Indien

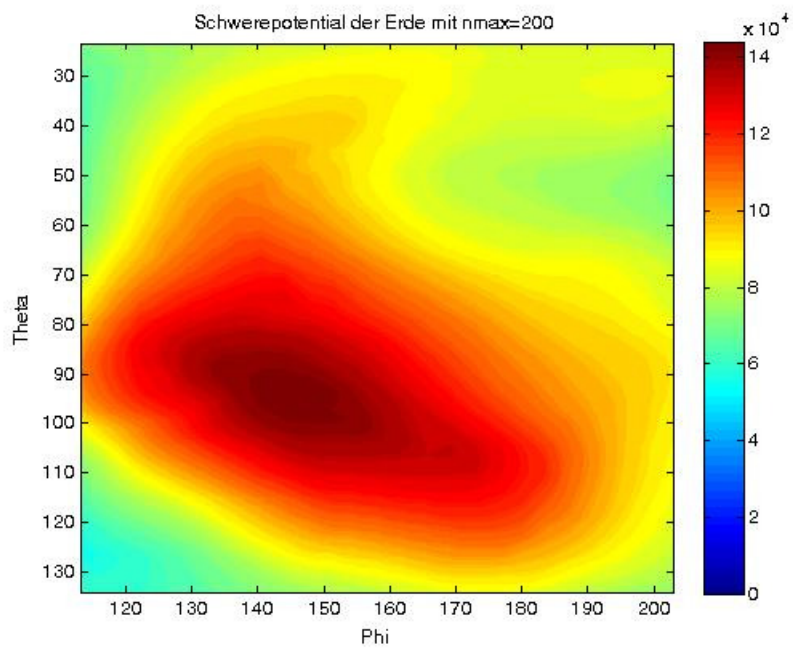


Abbildung 7: Auszug des Schwerepotentials der Erde - Südostasien

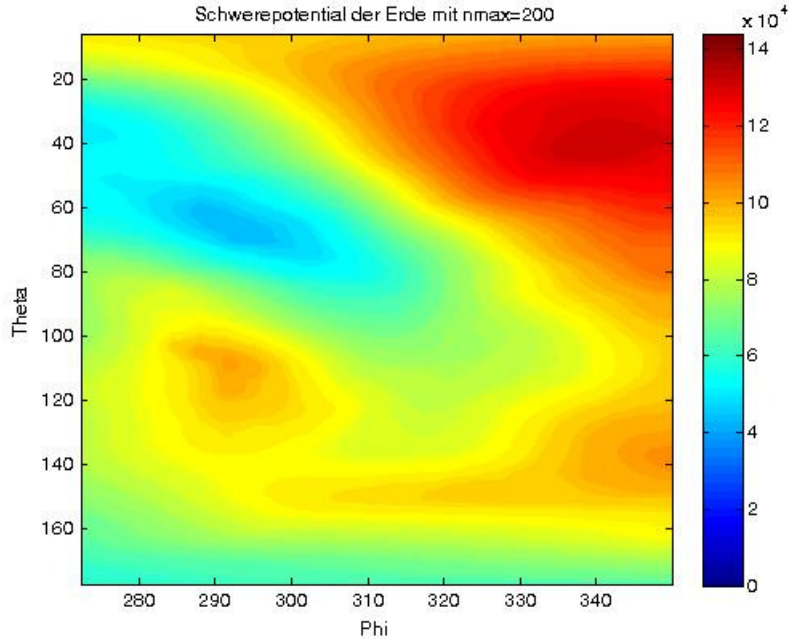


Abbildung 8: Auszug des Schwerepotentials der Erde - Subduktionszone vor der südamerikanischen Küste

2 Aufgabenteil 3

Im dritten Aufgabenteil der Übung geht es darum das berechnete Schwerfeld einer approximierten Kugel mit der analytischen Lösung zu vergleichen. Hierbei beziehen wir uns auf das Paper *gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections* von Plouff (1976), in dem die Schwerewirkung eines n-eckigen Polygons berechnet wird.

Die Kugel (mit $R = 2m$ bei $[0 \ 0 \ 4m]$) in unserem Modell soll durch k Schichten n-eckiger Polygone angenähert werden und den Dichteunterschied $\delta\rho = 200 \frac{kg}{m^3}$ zu der Umgebung aufweisen. In Abbildung 9 ist eine durch 100 Schichten von 100-eckigen Polygonen approximierten Kugel zu erkennen. Optisch ist bei einer Abtastung durch viele Polygonecken und Schichten kein Unterschied zu einer Kugel zu erkennen. Es gilt nun festzustellen, wie stark das Schwerfeld von der Anzahl der Schichten und Polygonecken abhängt.

Um die Schwere zu berechnen wird die Schwerebeschleunigung aller Kanten und aller Polygone aufsummiert. Dafür wird die von Plouff (1976) eingeführte Formel verwendet (3) verwendet.

$$g = \gamma \rho s_m \sum_{i=1}^n \left\{ s_p A(z_1 - z_2) + z_2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{z_2 d_1}{PR_{12}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{z_2 d_2}{PR_{22}} \right) \right) \right. \\ \left. - z_1 \left(\tan^{-1} \left(\frac{z_1 d_1}{PR_{11}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{z_1 d_2}{PR_{21}} \right) \right) - P \cdot \ln \left(\frac{R_{22} + d_2}{R_{12} + d_1} \frac{R_{11} + d_1}{R_{21} + d_2} \right) \right\} \quad (3)$$

Die analytische Lösung ergibt sich aus der Schwerebeschleunigung einer Punktmasse M

$$g = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} \quad (4)$$

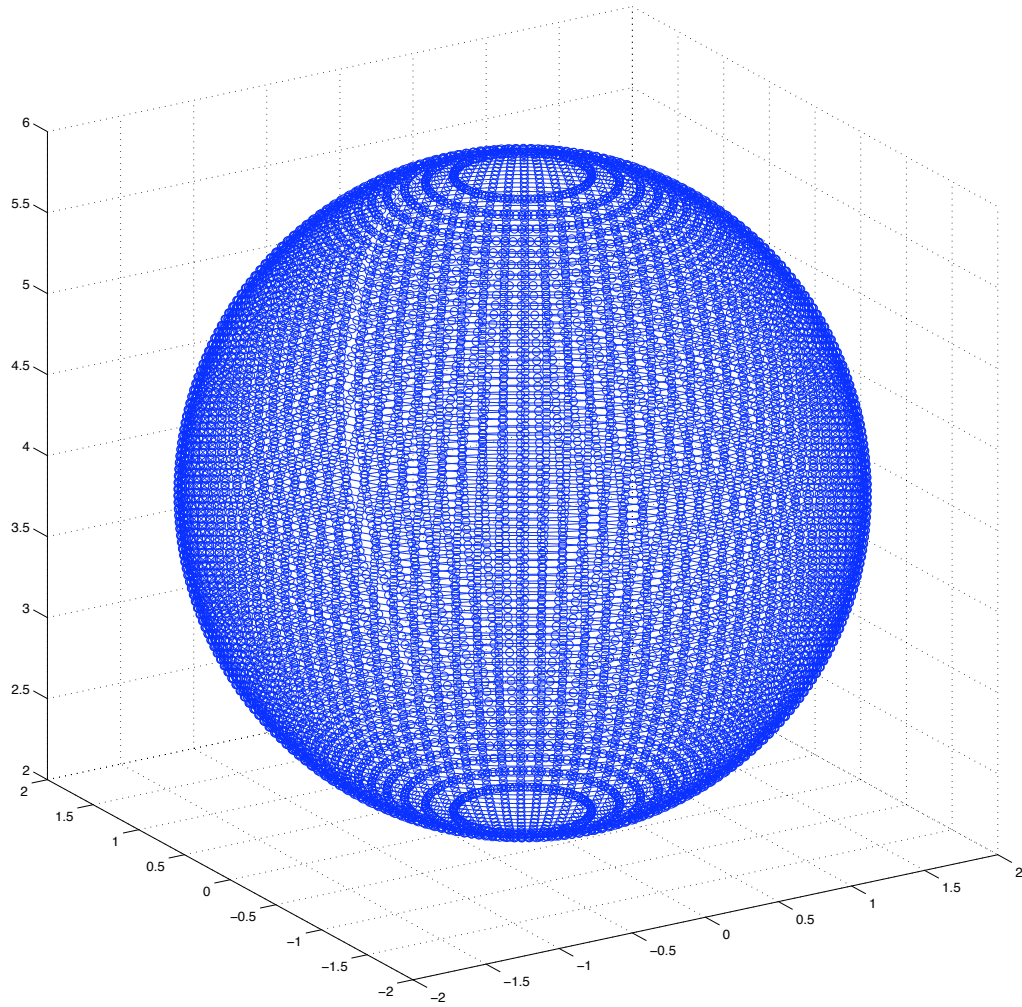


Abbildung 9: Approximierte Kugel aus 100 Schichten und 100-eckigen Polygonen

mit

$$M = -\frac{4}{3}\pi R^3 d\rho \quad (5)$$

Abbildung 10 zeigt die analytische Lösung für das Schwerefeld der Kugel. Die Form und Größenordnung stimmt weitestgehend mit der approximierten Lösung in Abbildung 11 überein. Bei genauerer Betrachtung fällt jedoch auf, dass die Schwerebeschleunigung bei zunehmendem Abstand zum Mittelpunkt bei der analytischen Lösung wesentlich schneller abflacht. Dieser Effekt rührt vermutlich daher, dass bei der analytischen Lösung von einer Punktmasse in der Mitte der Kugel ausgegangen wird. Der Abstand zur Kugel geht demnach als Abstand zum Mittelpunkt der Kugel ein.

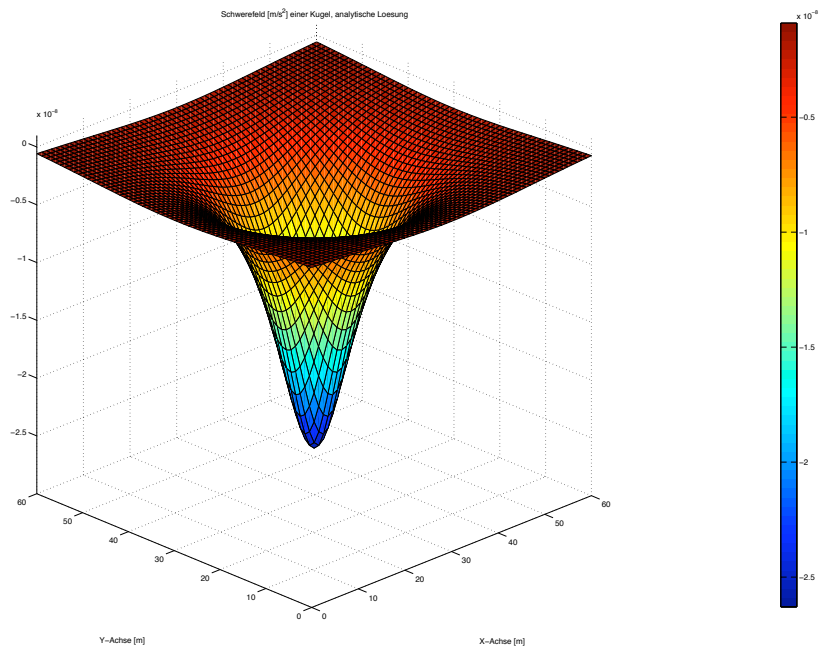


Abbildung 10: analytische Lösung für das Schwerefeld einer Kugel

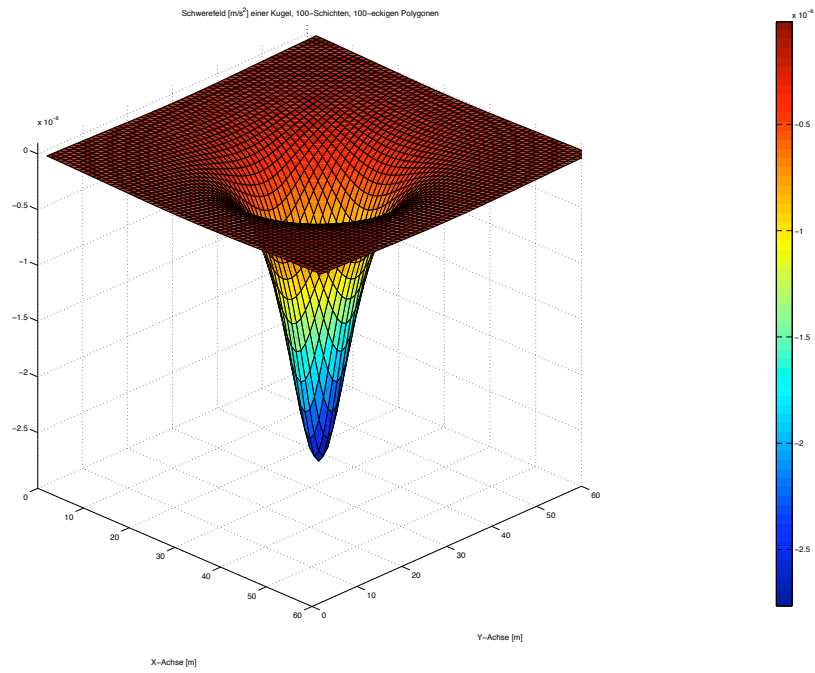


Abbildung 11: Schwerefeld einer durch 100 Schichten 100-eckiger Polygonen approximierten Kugel

bla bla

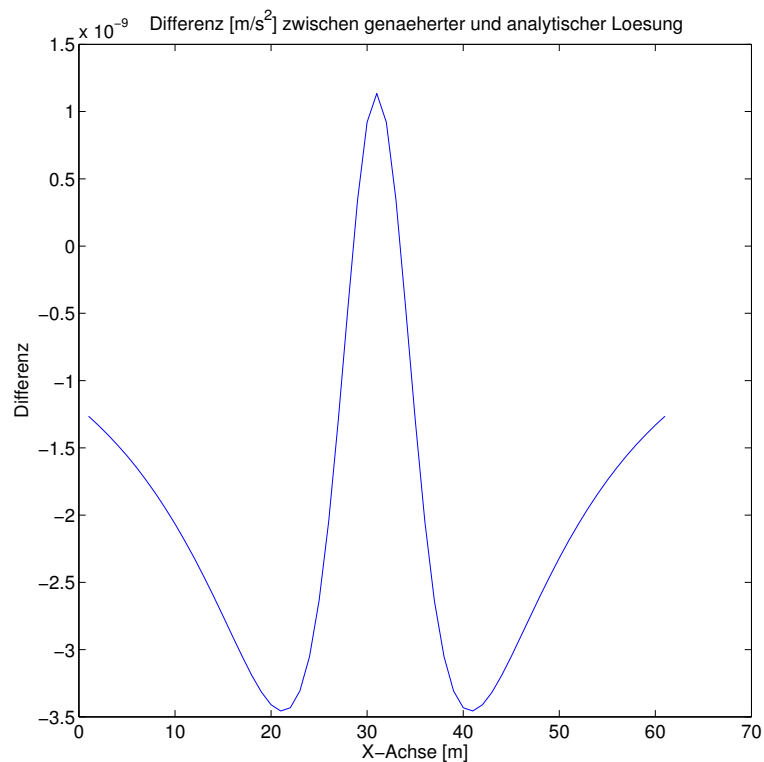


Abbildung 12: Differenz zwischen analytischer Lösung und Näherung bei $x=0$ und $y=-15:15$

A Quellcode

A.1 Aufgabe 1

```
%clear all
close all

Grad = 3;
Ordnung = 3;

delta = pi/200;
theta = 0 : delta : pi;
phi = 0 : 2*delta : 2*pi;
[phi,theta] = meshgrid(phi,theta);

% Legendre ausrechnen
Ymm = legendre(Grad,cos(theta(:,1)),'sch');

%Polynome gesuchter Ordnung extrahieren:
Ymm = Ymm(Ordnung+1,:);

%Grid erstellen:
yy = Ymm;
for kk = 2: size(theta,1)
```

```

        yy = [yy Ymm];
end;

%Werte  $f\tilde{A}_{\frac{1}{4}r}$  phi ausrechnen:
yy = yy.*cos(Ordnung*phi);
K=ones(length(yy));
[X,Y,Z]=sphere(length(yy))
surf(X,Y,Z,yy)

```


A.2 Aufgabe 2

```

clear all
close all

%% Einlesen des Datenfiles
filename = 'osu89a-mod.gfc';
[A,delimiterOut]=importdata(filename)

gamma = 6.67384E-11;% Gravitationskonstante
M = 5.974E24;        % Erdmasse
r = 6371000.;        % mittlerer Erdradius
%a = 149.6E6;        % grosse Halbachse
a = 0.6378136460E+07;
V = gamma*M/r;      % Vorfaktor

delta = pi/100;
theta = 0 : delta : pi;    % Breite
phi = 0 : 2*delta : 2*pi;  % Laenge

for line_i=1:length(A.data)
    Cnm(A.data(line_i,1)+1,A.data(line_i,2)+1)=A.data(line_i,3);
    Snm(A.data(line_i,1)+1,A.data(line_i,2)+1)=A.data(line_i,4);
end

%Korrekturen
Cnm(3,1) = Cnm(3,1) + 0.108262982131 * 10^(-2)/sqrt(5);
Cnm(5,1) = Cnm(5,1) - 0.237091120053 * 10^(-5)/sqrt(9);
Cnm(7,1) = Cnm(7,1) + 0.608346498882 * 10^(-8)/sqrt(13);
Cnm(9,1) = Cnm(9,1) - 0.142681087920 * 10^(-10)/sqrt(17);
Cnm(11,1) = Cnm(11,1) + 0.121439275882 * 10^(-13)/sqrt(21);

n=5;
yy=zeros(length(theta));
xy=zeros(length(theta));
asdf(1:length(phi),1:length(phi))=0;

for n_i=0:n
    test=n_i
    Pnm = legendre(n_i,cos(theta),'sch');
    for phi_i=1:length(phi)
        parfor m_i=0:n_i

            tmp(m_i+1,:) = Pnm(m_i+1,:).*(Cnm(n_i+1,m_i+1)*cos(m_i*phi(phi_i))+...
            Snm(n_i+1,m_i+1)*sin(m_i*phi(phi_i)));

        end
        asdf(phi_i,:)=sum(tmp);
        xy(phi_i,:)=xy(phi_i,:)+ asdf(phi_i,:);
    end
    qwer(:, :) = xy(:, :)*((a/r)^n_i);
    yy(:, :)=yy(:, :)+qwer(:, :);
end
yy(:, :)=yy(:, :)*V;
yy=yy';

```

```

%Normierung der Colourbar
delta_value=min(min(yy));
%U=U./delta_value-1; Größtenordnung der Abweichung
yy=yy-delta_value;
delta_value

%Graphische Darstellungen
[phiplot,thetaplot]=meshgrid(phi,theta);
figure(1)
%contourf(theta,phi,yy,100,'linestyle','None')
contourf(phiplot*180/pi,thetaplot*180/pi,yy,100,'linestyle','None')
set(gca,'YDir','reverse')
colorbar
%axisquare
title('Schwerepotential der Erde mit nmax=5')
xlabel('Phi');
ylabel('Theta');

```

A.3 Aufgabe 3

A.3.1 Hauptprogramm

```
%% POTENZIALTHEORIE
% Marius Kriegerowski, Moritz Nieschlag, Doreen Kasper und Janina Kammann

clear all
close all

% Parallelisierung aktivieren:
matlabpool open
%% Deklarationen

drho = 200;
Sm = 1;
gamma = 6.67384E-11; % Gravitationskonstante
ne = 100; % Anzahl der Ecken
ns = 100; % Anzahl der Schichten
PU = [0 0 4]; % Mittelpunkt der Kugel
R = 2; % Radius

Xrange = -15:0.5:15;
Yrange = Xrange;

dz = 2*R/(ns-1); % Schichtdicke

[X,Y] = meshgrid(Xrange, Yrange);
V = gamma * drho * Sm;

XYZ = zeros(length(Xrange), length(Yrange));

% Erzeugung der Kugel:
B=kugel(R,ns,ne,PU);

for x_i=1:length(Xrange)

    % zum Debuggen:
    asd=x_i
    for y_i=1:length(Yrange)

        gout=0;
        g=0;

        % Parallelisierung
        parfor ns_i=1:ns-2

            for w_i=1:ne

                % Abgreifen zweier Punkte der Kugel
                x1=B(ns_i,1,w_i)-Xrange(x_i);
                y1=B(ns_i,2,w_i)-Yrange(y_i);
                z1=B(ns_i,3,w_i);
```

```

x2=B(ns_i,1,mod(w_i,ne)+1)-Xrange(x_i);
y2=B(ns_i,2,mod(w_i,ne)+1)-Yrange(y_i);

% loesen der Formel (3) aus Plouff
g=graviPunkt(x1,x2,y1,y2,z1,dz);

gout=gout+g;

end

end

% mit Vorfaktor multiplizieren
XYZ(x_i, y_i) = gout*V;
% Analytische Loesung berchnen
g_analyt(x_i, y_i)=-4/3*pi*gamma*drho*(R-dz)^3*1/...
((PU(1)-Xrange(x_i))^2+(PU(2)-Yrange(y_i))^2+PU(3)^2);
% Differenz anayltische und unsere Loesung
gdiff(x_i, y_i)=g_analyt(x_i, y_i)-XYZ(x_i, y_i);

end
end

% Differenz am Nullpunkt:
diff(k,1)=gdiff(30,30);
diff(k,2)=ns;

k=k+1

figure(1)
contourf(XYZ)
xlabel('X-Achse [m]')
ylabel('Y-Achse [m]')
title('Schwerefeld [m/s^2] einer Kugel, 100-Schichten, 100-eckigen Polygonen')
colorbar
axis('square')

figure(2)
contourf(g_analyt)
xlabel('X-Achse [m]')
ylabel('Y-Achse [m]')
title('Schwerefeld [m/s^2] einer Kugel, analytische Loesung')
colorbar
axis('square')

figure(3)
plot(gdiff(30,:))
xlabel('X-Achse [m]')
ylabel('Differenz')
%ylabel('Y-Achse [m]')
title('Differenz [m/s^2] zwischen genaehelter und analytischer Loesung')
colorbar
axis('square')

```

```

figure(4)
surf(XYZ)
xlabel('X-Achse [m]')
ylabel('Y-Achse [m]')
title('Schwerefeld [m/s^2] einer Kugel, 100-Schichten, 100-eckigen Polygonen')
colorbar
axis([-30 30 -30 30 -3E-8 0])

```

```

figure(5)
surf(g_analyt)
xlabel('X-Achse [m]')
ylabel('Y-Achse [m]')
title('Schwerefeld [m/s^2] einer Kugel, analytische Loesung')
colorbar
axis('square')

```

```

figure(6)
plot(diff(:,2), diff(:,1))
xlabel('Anzahl der Schichten/Ecken')
ylabel('Differenz Analytische und Gerechnete Loesung')
title('Fehlerentwicklung in Abhaengigkeit von der Anzahl der Ecken/Schichten')

```

A.3.2 Subprogramm: Berechnen der Kreispunkte

```

function [P] = kreis(n,PU,r)

P=zeros(3,n);
gamma=2*pi/n;

for n_i=1:n

    P(1,n_i) = r*sin(n_i*gamma)+PU(1);
    P(2,n_i) = r*cos(n_i*gamma)+PU(2);
    P(3,n_i) = PU(3);

end

```

A.3.3 Subprogramm: Berechnen der Kugel

```

function [A]=kugel(R, ns, ne, PM)

dz =2*R/(ns-1);

for ns_i=1:ns-1

```

```

PU(1)=PM(1);
PU(2)=PM(2);
PU(3)=PM(3)+R-ns_i*dz;

r=sqrt(R^2-(R-ns_i*dz)^2);

A(ns_i, :, :) = kreis(ne,PU,r);
end

```