

Übungsaufgaben zur Potentialtheorie

WiSe 2012/2013

Janina Kammann
Marius kriegerowski
Moritz Nieschlag
Doreen Kasper

25. Oktober 2012

1. Aufgabenteil

Im Rahmen der Masterveranstaltung *GP-M-POTTHEO* wurden uns die mathematisch-physikalischen Grundlagen der Potentialtheorie vermittelt, welche nun in den folgenden Übungen an ausgewählten geophysikalischen Beispielen veranschaulicht werden. Die hierfür verwendeten Programme sowie graphischen Darstellungen wurden mittels der Software Matlab erstellt und sind dem anschließenden Anhang dieser Arbeit zu entnehmen. Die von uns verwendeten Gleichungen zur Aufgabenbearbeitung basieren auf dem Vorlesungsskript oder in der Vorlesung bereitgestellter Literatur.

Im ersten Aufgabenteil des Übungsblattes sollen drei Sätze Legendre Polynome als Funktion der geographischen Länge und Breite berechnet und programmiert werden. Die jeweiligen Polynome unterscheiden sich durch verschiedene Ordnungen n und Grade m , wobei für diese folgende Bedingung gilt: $m \leq n$.

Die in den anschließenden Darstellungen berechneten Polynome definieren sich aus folgender Beziehung:

$$(A_{n,m} \cos m\Phi + B_{n,m} \sin m\Phi) * P_n^m(\theta) \quad (1.1)$$

Laut Aufgabenstellung gilt für die Koeffizienten der Zusammenhang: $A_{n,m} = B_{n,m} = 1$. Da die Legendre-Polynome auf der Verwendung beliebig orthogonaler Funktionen basieren haben wir für die Normalisierung der zonalen Kugelfunktionen eine Schmidt-Normalisierung mittels der Matlabfunktion 'sch' durchgeführt, sodass aus der Basis des aufgespannten Vektorraums eine Orthonormalbasis konstruiert wird. Durch die Normalisierung wird des Weiteren eine Wichtung der Koeffizienten in einem Intervall von $[-1, 1]$ vorgenommen.

Die nachfolgenden Darstellungen zeigen die Ergebnisse der programmierten Legendre-Polynome. Der entsprechend dokumentierte Programmcode ist dem Anhang A zu entnehmen.

Die erste Graphik veranschaulicht eine zonale Darstellung der Legendre-Polynome. In diesem Fall ist die Ordnung des Polynoms stets durch $m=0$ definiert und der Grad des Polynoms variierbar (hier $n=9$). Da Polynom P_9^0 definiert sich über 9 Nullstellen und ist unabhängig von den Längengraden (θ) (da $m=0$). Verschiedene Beispiele zeigen, dass durch Erhöhung der Koeffizienten m und n die beschriebenen Gebiete der Funktion kleiner 'gefächert' sind. Die zweite Abbildung für P_6^6 ist sektoriell, das heißt der Grad des Polynoms entspricht seiner Ordnung sodass gilt: $m=n=6$. In diesem Fall ist das Polynom unabhängig von dem Breitengrad und durch 12 Nullstellen definiert. Die dritte Graphik veranschaulicht die allgemeine Kugelflächenfunktion P_9^3 ; eine tesserale Darstellung der unterschiedlichen Koeffizienten.

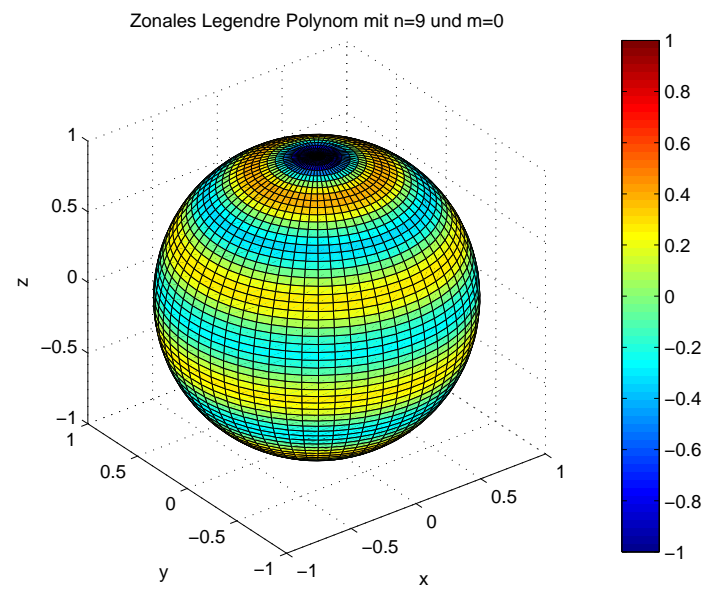


Abb. 1.1.: Legendre-Polynom P_9^0 - zonal

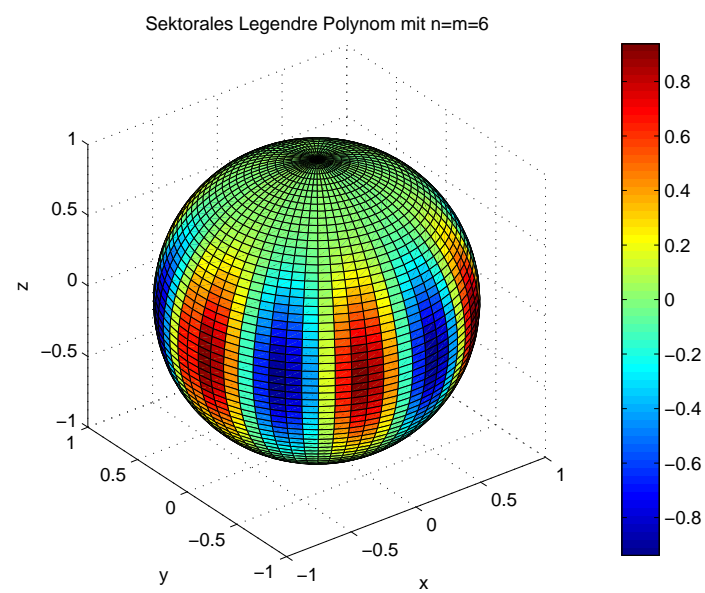


Abb. 1.2.: Legendre-Polynom P_6^6 - sektoral

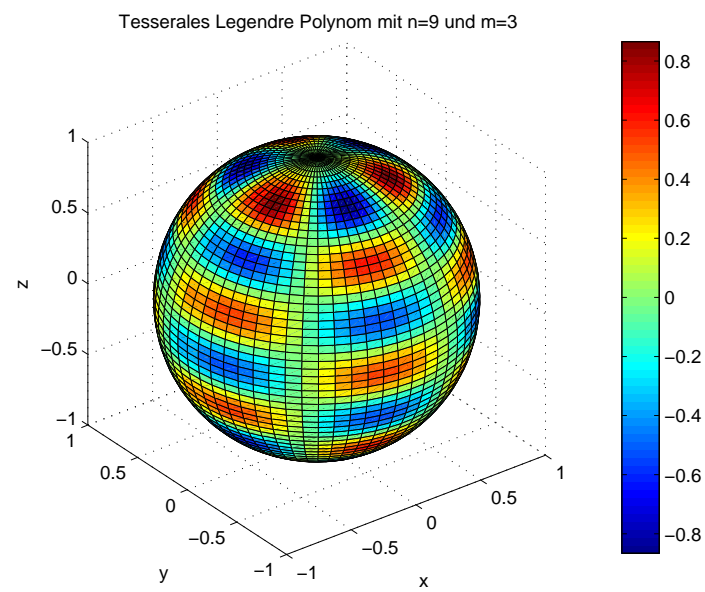


Abb. 1.3.: Legendre-Polynom P_9^3 - tesseral

2. Aufgabenteil 2

In dieser Aufgabe soll das Schwerfeld der Erde, welches beispielsweise aus Satellitenmessungen bekannt ist mittels der in Aufgabe 1 berechneten Legendre Polynome dargestellt werden. Die dazugehörigen Datensätze zur Berechnung notwendiger Parameter haben wir der Institution des Helmholtz Centre Potsdam (GFZ German Research Centre For Geosciences) aus folgender Internetseite entnommen: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>.

Für die Aufgabenbearbeitung wurde das Datenfile *osu89a.gfc* verwendet, welches die Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung bis zu verschiedenen Graden und Ordnungen mit dazugehörigen Standardabweichungen enthält. Das Einlesen des Files erfolgte via `load('osu.txt')`. Für die Berechnung des Potentials ist zu beachten, dass die Koeffizienten der Polynome bis zum 10. Grad korrigiert werden (siehe Aufgabenblatt). Aufgrund der linearen Approximation des Potentials wird durch die Korrektur der Koeffizienten erreicht, dass die ersten Terme aus der Reihenentwicklung eine stärkere Wichtung erhalten, sodass ellipsoide Anteile (bzgl. des Referenzellipsoids) im Potentialfeld nicht überwiegen und auch sehr geringe Anomalien zu erkennen sind. Das Programm zur Berechnung des Schwerpotentials ist folgend strukturiert:

- Einlesen des Datenfiles
- Deklaration der Variablen
- Anordnung der Koeffizienteneinträge in neue Matrizen C_{nm} und S_{nm} mit dazugehörigem Grad und Ordnung
- Korrektur der Koeffizienten
- Schleife über θ und Φ
- Berechnung der Legendre Polynome (+ Schmidt-Normalisierung)
- Berechnung des Potentials über Schleife (m,n) und Summenbildung
- graphische Darstellung des Schwerpotentials

Eine detaillierte Beschreibung ist dem Programmcode im Anhang zu entnehmen. Die Berechnung des Potentials der Erde basiert auf folgendem Zusammenhang:

$$U_g = \frac{\gamma M}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{mn}(\theta) [C_{nm} \cos m\Phi + S_{nm} \sin m\Phi] \quad (2.1)$$

Die zwei folgenden Abbildungen zeigen, dass variierende Ordnungen (n) der Legendre Polynome unterschiedliche Ergebnisse für das Schwerpotential liefern. Demnach bestimmt die Höhe der Ordnungen n und damit die Anzahl berechneter Koeffizienten das

Auflösungsvermögen der zu ermittelnden Größe. Bei der Berechnung des Potentials mit $n=200$ werden auch kleinste Anomalien sichtbar, während für $n=5$ kleinskalige Undulationen nicht berücksichtigt werden. Dies ist auf die kurzwelligen Anteile der Koeffizienten zurückzuführen, welche durch eine hohe Ordnung der Kugelflächenfunktionen sichtbar beziehungsweise für Koeffizienten $n \leq 5$ unterdrückt werden.

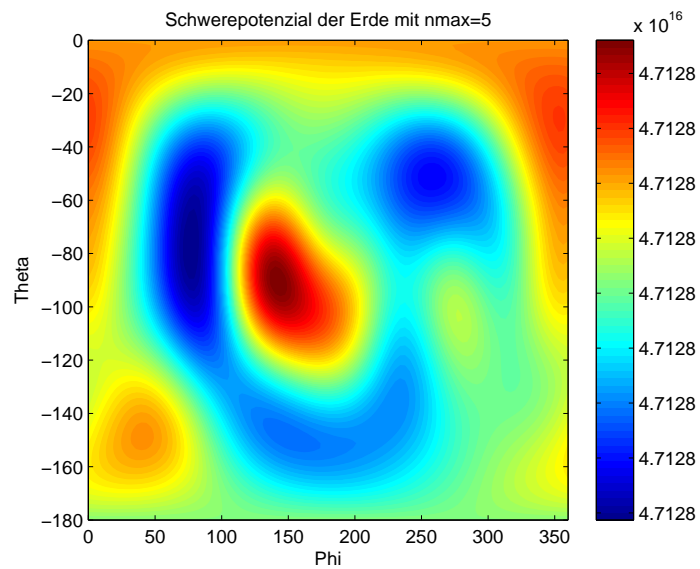


Abb. 2.1.: Das Schwerepotential für $n_{\max}=5$ - sehr geringe Auflösung

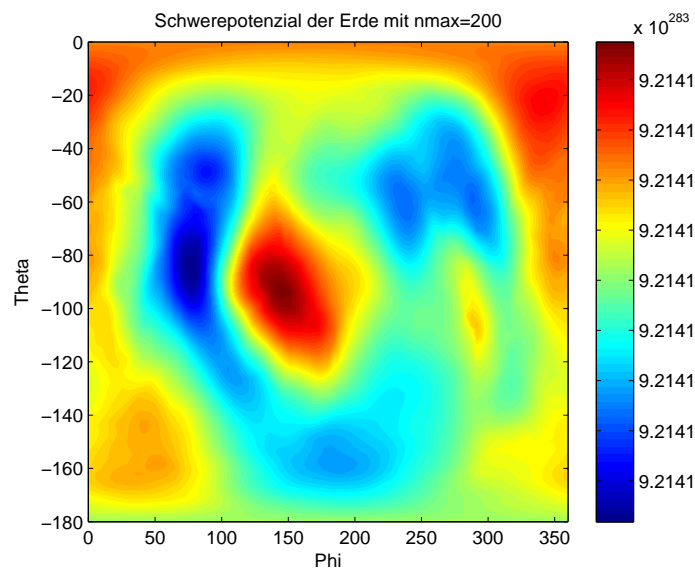


Abb. 2.2.: Das Schwerepotential für $n_{\max}=200$ - geringe Anomalien sichtbar

In den anschließenden Abbildungen sind drei Ausschnitte dargestellt die besonders starke Schwereanomalien aufweisen. Die Ursache für die langwelligen Anomalien sind auf großräumige Dichtevariationen im Erdmantel beziehungsweise in der Erdkruste zurückzuführen. Eine höhere Gesteinsdichte erzeugt demnach eine zusätzliche Gravitationsbeschleunigung, wodurch der Massenüberschuss eine positive Schwereanomalie bewirkt und das Geoid „ausbeult“. Andererseits werden durch geringere Dichten negative Schwereanomalien verursacht die „Eindellungen“ des Geoids hervorrufen. Die Ursache für die Dichtevariationen. Die Dichtevariationen im Erdmantel werden durch die Geodynamik der Mantelkonvektion begründet. Demnach weist extrem heißes Mantelmaterial eine geringe Dichte auf und steigt nach oben, wogegen sich kalte Regionen durch eine hohe Dichte ausweisen und absinken. Folglich sind abtauchende Konvektionsströme ursächlich für positive Schwereanomalien (Beulen) und aufsteigende Konvektionsströme verantwortlich für negative Anomalien (Dellen).

Auch die Topographie führt zu lateral variablen Massenvariationen und führt zu Schwereanomalien (siehe Abb.?? Himalaya) bla bla beispiele:

A. Anhang

Abb. A.1.: Programmcode zu Aufgabe 1: Legendre-Polynome