

COLLÈGE DE FRANCE

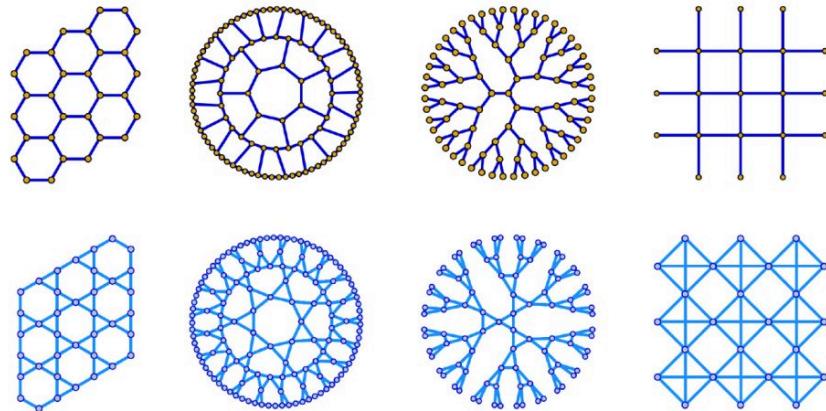
*Chaire Géométrie Spectrale*

---

# Convergences de spectres et notes fondamentales

---

Notes de cours



© Alicia J. Kollár, Mattias Fitzpatrick, Peter Sarnak & Andrew A. Houck

*Cours donné par*

**Pr. Nalini Anantharaman**

*Notes rédigées par*

**Dorian Bouilly**

# Table des matières

1. Notions de convergences géométriques et spectrales .....	2
1.1. Le rectangle .....	2
1.2. Le cône d'angle $\alpha$ .....	3
1.3. Notions de convergence de spectres (d'après [BB16]) .....	3
1.4. Graphes métriques épaisse (d'après [EP05]) .....	5
1.5. Convergence d'espaces métriques au sens de Gromov-Hausdorff. ....	6
1.6. Homogénéisation (d'après [BLP11], [Kes79]) .....	8
1.7. Tores discrets .....	8
2. Convergence au sens de Benjamini-Schramm .....	9
2.1. Convergence de Benjamini-Schramm pour des suites de graphes discrets .....	10
2.2. Exemples .....	11
2.3. Convergence de Benjamini-Schramm pour des espaces métriques .....	15
3. Convergence spectrale forte des graphes réguliers aléatoires .....	18
3.1. La preuve de Friedman (d'après [Fri08; Fri91]) .....	18
3.2. Méthode polynomiale .....	28
4. Convergence forte des matrices hermitiennes gaussiennes (d'après [HT05]) .....	33
4.1. Vocabulaire des probabilités libres .....	33
4.2. Convergence faible et forte en distribution .....	33
4.3. Théorème de Haagerup – Thorbjørnsen .....	34
4.4. Quelques étapes de la preuve de la convergence des normes (21) .....	34
Bibliographie .....	42

## 1. Notions de convergences géométriques et spectrales

Dans ces deux premières séances, nous posons la question générale de savoir comparer des objets géométriques et le spectre de leurs laplaciens. Cela demande d'introduire diverses topologies, permettant de dire quand et de quelle manière deux objets peuvent « se ressembler », ainsi que de mesurer la « distance » entre les spectres. On parcourra une liste non exhaustive d'exemples tirés de la littérature récente, dans divers domaines des mathématiques.

On parlera dans ce cours de spectres d'opérateurs auto-adjoints, donc réels. Le plus souvent, il s'agira du Laplacien  $\Delta$ .

### 1.1. Le rectangle

On considère  $R_\varepsilon$  le rectangle de dimensions  $1 \times \varepsilon$ , muni du laplacien usuel  $\Delta_\varepsilon$ .

- Avec conditions de Dirichlet (fonctions s'annulant sur le bord), les fonctions propres et le spectre sont

$$\sin(k\pi x) \sin\left(m\pi \frac{y}{\varepsilon}\right), \quad \text{Sp}(-\Delta_\varepsilon) = \left\{ (k\pi)^2 + \left(m\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^2 \mid k, m \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

en particulier, le premier, le spectre part à l'infini quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

- Avec les conditions de Neumann (dérivée normale nulle sur le bord), on obtient

$$\cos(k\pi x) \cos\left(m\pi \frac{y}{\varepsilon}\right), \quad \text{Sp}(-\Delta_\varepsilon) = \left\{ (k\pi)^2 + \left(m\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^2 \mid k, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Il y a donc une partie du spectre qui ne dépend pas de  $\varepsilon$  ( $m = 0$ ). C'est le spectre du laplacien  $\Delta$  sur le segment  $[0, 1]$  avec les conditions de Neumann aux extrémités. On a donc une convergence spectrale partielle au sens suivant : pour tout  $M > 0$  réel, on a pour  $\varepsilon$  assez petit

$$\mathrm{Sp}(-\Delta_\varepsilon) \cap [-M, M] = \mathrm{Sp}(-\Delta) \cap [-M, M]$$

- Avec des conditions périodiques (le rectangle est vu comme un tore  $S^1 \times \varepsilon S^1$ ), l'objet limite « est » le cercle  $S^1$ , et l'on voit que le spectre de  $-\Delta_\varepsilon$  converge vers celui de  $-\Delta$  sur  $S^1$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, toujours en prenant l'intersection avec  $[-M, M]$ .

**Exercice 1.1.** Calculer les fonctions propres et le spectre du laplacien sur le tore  $S^1 \times \varepsilon S^1$ , et vérifier la convergence spectrale partielle vers le spectre du cercle  $S^1$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

## 1.2. Le cône d'angle $\alpha$

On considère le cône  $C_\alpha$  défini comme le secteur d'angle  $2\pi\alpha$  et de rayon 1 dans le plan, avec les bords  $\theta \in \{0, 2\pi\alpha\}$  identifiés

$$C_\alpha := \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi\alpha]\} / ((r, 0) \sim (r \cos(2\pi\alpha), r \sin(2\pi\alpha))).$$

Le laplacien usuel  $\Delta$  défini sur les fonctions lisses à support compact de  $C_\alpha \setminus \{0\}$  n'est pas essentiellement auto-adjoint. On a besoin de choisir des conditions aux limites. On choisit ici les conditions de Neumann (dérivée normale nulle sur le bord  $r = 1$ ) et existence d'une limite finie en 0. On vérifie que ces conditions reviennent à la définition suivante du laplacien via l'énergie de Dirichlet

$$E(f, g) = \int_{C_\alpha} \langle \nabla f, \nabla g \rangle r \, dr \, d\theta, \quad \mathrm{Dom}(E) = \{f \mid \nabla f \in L^2(C_\alpha)\}.$$

L'opérateur associé  $\Delta$  est défini par la formule  $\langle \Delta f, g \rangle_{L^2} = E(f, g)$ . Son domaine est

$$\mathrm{Dom} \Delta = \{f \mid g \in \mathrm{Dom} E \mapsto E(f, g) \in \mathbb{R}\} \text{ est une forme linéaire bornée}$$

**Exercice 1.2.** Vérifier que cette définition a bien les propriétés annoncées. Montrer qu'on a des fonctions propres de la forme

$$J_{\frac{m}{\alpha}}(\sqrt{\lambda}r) \exp\left(im\frac{\theta}{\alpha}\right), \quad m \in \mathbb{Z},$$

où  $J_\nu$  est la fonction de Bessel d'ordre  $\nu$ . Pour  $m \neq 0$ , le spectre part à l'infini lorsque  $\alpha$  tend vers 0. Pour  $m = 0$ , on obtient des fonctions propres radiales dont le spectre converge vers le spectre associé à la forme quadratique (énergie de Dirichlet)

$$E^{(1)}(f, g) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial r} r \, dr,$$

ce qui correspond au laplacien 1-dimensionnel

$$\Delta^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

avec conditions de Neumann en  $r = 1$  et limite finie en 0.

Ainsi, l'objet géométrique limite est, comme attendu, l'intervalle  $[0, 1]$ , mais pas l'opérateur limite. Il y a une subtilité liée à la convergence des mesures.

## 1.3. Notions de convergence de spectres (d'après [BB16])

On s'intéresse aux spectres en tant que sous ensembles fermés de  $\mathbb{R}$ . On oublie donc les fonctions propres, mesures spectrales et multiplicités.

Soit  $(\mathcal{H}_t)_{t \in T}$  une famille d'espaces de Hilbert indexée par un espace topologique  $T$  (par exemple  $T = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  pour des suites). Soit  $(A_t)_{t \in T}$  une famille d'opérateurs auto-adjoints de spectres  $F_t$  qui sont

des sous-ensembles fermés de  $\mathbb{R}$ . On fixe  $t_0 \in T$  et on s'intéresse à la convergence de  $F_t$  vers  $F_{t_0}$  lorsque  $t$  tend vers  $t_0$ .

### 1.3.1. Convergence de Hausdorff

**Définition 1.1.** *On dit que  $F_t$  converge vers  $F_{t_0}$  au sens de Hausdorff si pour tout  $\varepsilon > 0$  réel, il existe un voisinage  $U$  de  $t_0$  tel que pour tout  $t \in U$ , on a les inclusions*

$$F_t \subset F_{t_0} + B(0, \varepsilon), \quad F_{t_0} \subset F_t + B(0, \varepsilon),$$

où  $B(0, \varepsilon)$  est la boule ouverte de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 1.3.2. Convergence de Vietoris

**Définition 1.2.** *On dit que  $F_t$  converge vers  $F_{t_0}$  au sens de la convergence de Vietoris si pour tout fermé  $K \subset \mathbb{R}$  tel que  $K \cap F_{t_0} = \emptyset$  et tout ouvert  $O \subset \mathbb{R}$  tel que  $O \cap F_{t_0} \neq \emptyset$ , il existe un voisinage  $U$  de  $t_0$  tel que pour tout  $t \in U$ , on a  $K \cap F_t = \emptyset$ , et  $O \cap F_t \neq \emptyset$ .*

### 1.3.3. Convergence de Fell

**Définition 1.3.** *On dit que  $F_t$  converge vers  $F_{t_0}$  au sens de la convergence de Fell si pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}$  tel que  $K \cap F_{t_0} = \emptyset$  et tout ouvert  $O \subset \mathbb{R}$  tel que  $O \cap F_{t_0} \neq \emptyset$ , il existe un voisinage  $U$  de  $t_0$  tel que pour tout  $t \in U$ , on a  $K \cap F_t = \emptyset$ , et  $O \cap F_t \neq \emptyset$ .*

La convergence au sens de Fell est donc plus faible que la convergence au sens de Vietoris. Dans les exemples précédents, il y avait convergence au sens de Fell, mais pas au sens de Vietoris, à cause de la divergence de certaines parties du spectre vers l'infini.

### 1.3.4. Convergence des trous spectraux

On rappelle qu'un ouvert de  $\mathbb{R}$  est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, qui sont ses composantes connexes.

**Définition 1.4 (Trou spectral).** *Un trou spectral d'un fermé  $F \subset \mathbb{R}$  est une composante connexe de  $\mathbb{R} \setminus F$ .*

Il existe une notion de convergence des trous spectraux [BB16, Definition 7]. Il est utile en physique de connaître les bandes interdites (trous spectraux) d'un spectre.

**Théorème 1.1 (Beckus-Bellissard).** *Supposons que les  $A_t$  sont tous des opérateurs auto-adjoints bornés (y compris  $A_{t_0}$ ). Les spectres sont donc des compacts de  $\mathbb{R}$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $F_t \rightarrow F_{t_0}$  au sens des trous spectraux ;
- (ii)  $F_t \rightarrow F_{t_0}$  au sens de Vietoris ;
- (iii) Il y a convergence des normes d'opérateurs :  $\|P(A_t)\| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \|P(A_{t_0})\|$  pour tout polynôme  $P$  de degré au plus 2.

**Théorème 1.2.** *Dans le cas général des opérateurs non nécessairement bornés, on a les équivalences suivantes.*

- (i)  $F_t \rightarrow F_{t_0}$  au sens des trous spectraux ;
- (ii)  $F_t \rightarrow F_{t_0}$  au sens de Fell ;
- (iii) Il y a convergence des normes des résolvantes :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad \|(z - A_t)^{-1}\| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \|(z - A_{t_0})^{-1}\|.$$

**Remarque 1.1.** Les différents opérateurs vivent sur des espaces de Hilbert différents. Il est donc difficile de comparer directement les opérateurs ou leurs vecteurs propres.

## 1.4. Graphes métriques épais (d'après [EP05])

On considère un graphe métrique fini  $G = (V, E)$ . Chaque arête  $e \in E$  est associée à un intervalle  $I_e = [0, L_e]$  de longueur  $L_e > 0$ . On met le laplacien usuel  $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2}$  sur chaque arête. Il y a plusieurs extensions auto-adjointes possibles. Il y a un choix de conditions aux limites aux sommets à effectuer. On s'intéresse ici aux conditions de Kirchhoff : une fonction  $f$  est dans le domaine de  $\Delta$  si

- $f$  est continue aux sommets ;
- la somme des dérivées sortantes de  $f$  en chaque sommet est nulle

$$\sum_{e \text{ incidente à } v} f'(v) = 0.$$

Cela revient à prendre l'énergie de Dirichlet

$$E(f, g) = \sum_{e \in E} \int_0^{L_e} f' g' \, dx_e,$$

avec  $f, g \in H^1(I_e)$  pour chaque arête  $e$ , et continues aux sommets. Supposons que  $G$  soit plongé de manière isométrique dans  $\mathbb{R}^n$ . On considère  $G_\varepsilon$  un voisinage de taille  $\varepsilon$  de  $G$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On munit  $G_\varepsilon$  du laplacien usuel  $\Delta_\varepsilon$  avec conditions de Neumann.

Comme  $G$  est fini, le spectre de  $-\Delta_\varepsilon$  est discret.

**Théorème 1.3.** *Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $\lambda_k^{(\varepsilon)} \rightarrow \lambda_k$ , où  $\lambda_k^{(\varepsilon)}$  est la  $k$ -ième valeur propre de  $-\Delta_\varepsilon$  et  $\lambda_k$  la  $k$ -ième valeur propre de  $-\Delta$  sur le graphe métrique  $G$ . Il y a de plus convergence en norme des résolvantes au sens de la définition suivante.*

**Définition 1.5.** *Soient  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$  une famille d'opérateurs auto-adjoints définis sur un même espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . On dit qu'il y a convergence en norme des résolvantes de  $A_\varepsilon$  vers celles de  $A_0$ , et on note  $A_\varepsilon \xrightarrow{\text{rés}} A_0$  si pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , on a*

$$\|(z - A_\varepsilon)^{-1} - (z - A_0)^{-1}\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

**Remarque 1.2.** Grâce à l'identité de la résolvante, il suffit de vérifier la convergence pour un seul  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Soit  $\Lambda \subset \text{Sp}(A_0)$  et  $\Gamma$  un lacet dans  $\mathbb{C}$  qui entoure  $\Lambda$ , c'est à dire que l'intersection de la composante connexe bornée de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  avec le spectre de  $A_0$  est exactement  $\Lambda$ . Le projecteur spectral sur  $\Lambda$  s'écrit alors

$$P_\varepsilon^\Lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (z - A_\varepsilon)^{-1} \, dz.$$

Le théorème de convergence en norme des résolvantes implique alors la convergence en norme des projecteurs spectraux

$$\|P_\varepsilon^\Lambda - P_0^\Lambda\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Pour le cas des graphes métriques épais, on a besoin de généraliser la notion de convergence en norme des résolvantes à des opérateurs définis sur des espaces de Hilbert différents.

**Définition 1.6 (Weidmann).** *On dit que  $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$  converge au sens des résolvantes généralisées vers  $A_0$ , et on note  $A_\varepsilon \xrightarrow{\text{rés-gen}} A_0$  s'il existe des plongements isométriques*

$$\iota_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{H}, \quad \varepsilon \geq 0, \quad \iota_\varepsilon^* \iota_\varepsilon = \text{Id}$$

tels que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , on ait

$$\left\| \iota_\varepsilon(z - A_\varepsilon)^{-1} \iota_\varepsilon^* - \iota_0(z - A_0)^{-1} \iota_0^* \right\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

où la norme est celle des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$ .

**Remarque 1.3.** Cette convergence des pseudo-résolvantes peut être vérifiée pour un seul  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

**Exemple 1.3.** Dans le cas du rectangle  $R_\varepsilon$  avec conditions de Neumann, on peut prendre  $\mathcal{H}_\varepsilon = L^2(R_\varepsilon)$  pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{H}_0 = L^2([0, 1]) = \mathcal{H}$  et les plongements isométriques

$$\iota_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{H}, \quad \iota_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(x, y) dy.$$

**Exercice 1.4.** Vérifier que les applications  $\iota_\varepsilon$  sont des plongements isométriques. Montrer que le laplacien  $\Delta_\varepsilon$  sur  $R_\varepsilon$  avec conditions de Neumann converge au sens des résolvantes généralisées vers le laplacien  $\Delta$  sur  $[0, 1]$  avec conditions de Neumann. Il semble qu'il y ait un problème d'injectivité d'après la question d'un auditeur. On peut avoir une fonction non identiquement nulle mais de moyenne nulle sur chaque segment vertical  $\{x\} \times [0, \varepsilon]$ .

## 1.5. Convergence d'espaces métriques au sens de Gromov-Hausdorff.

Références : [Fuk87], [CC00], [LV09], [Stu06; Stu06], [Gig23]

On considère dans cette section des espaces métriques pointés mesurés, c'est à dire des quadruplets  $(X, x, d, m)$  tels que  $(X, d)$  est complet séparable, et  $m$  une mesure de Radon sur  $X$  dont le support contient  $x$ .

**Définition 1.7.** On note  $(X_n, x_n, d_n, m_n) \xrightarrow{\text{GH}} (X_\infty, x_\infty, d_\infty, m_\infty)$  et on dit que les espaces métriques pointés mesurés convergent au sens de Gromov-Hausdorff s'il existe des injections isométriques

$$\iota_n : (X_n, d_n) \hookrightarrow (Z, d), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

avec  $(Z, d)$  un espace métrique complet séparable telles qu'on ait la convergence faible

$$(\iota_n)_\sharp m_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\iota_\infty)_\sharp m_\infty,$$

définie par

$$\int_{X_n} \varphi \circ \iota_n dm_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{X_\infty} \varphi \circ \iota_\infty dm_\infty$$

pour toute fonction test  $\varphi$  continue à support borné sur  $Z$ .

**Remarque 1.4.** Ceci implique  $\iota_{n(x_n)} \rightarrow \iota_\infty(x_\infty)$  puisqu'on demande aux points de base de faire partie du support des mesures. De plus on a convergence pour la topologie de Hausdorff pointée sur les bornés

$$\iota_n(\text{supp } m_n, x_n) \rightarrow \iota_\infty(\text{supp } m_\infty, x_\infty).$$

Intéressons-nous au cas où les espaces métriques  $(X_n, x_n, d_n, m_n)$  sont des variétés riemanniennes de dimension fixée  $N$ , de courbures de Ricci uniformément minorées par  $K \in \mathbb{R}$ , où les distances  $d_n$  sont les distances riemanniennes, et les mesures  $m_n$  les mesures de Riemann renormalisées de sorte que  $m_n(B(x_n, 1)) = 1$  pour tout  $n$ .

**Remarque 1.5.**

- La renormalisation des mesures est par exemple nécessaire pour que l'exemple du tore de rayon  $\varepsilon$  converge vers le cercle. Sans renormalisation, la mesure limite serait nulle.
- L'objet géométrique limite peut ne pas être une variété. Par exemple, on peut obtenir un cône comme limite de variétés lisses. En revanche, on peut montrer qu'il existe un ensemble  $R$ , appelé ensemble régulier tel que
  - $R$  est de mesure pleine :  $m_\infty(X_\infty \setminus R) = 0$ .
  - Tout point de  $R$  admet un voisinage bi-lipschitzien à un ouvert de  $\mathbb{R}^k$  pour un certain  $k \leq N$  (la dimension peut diminuer dans la limite).
  - La mesure  $m_\infty$  est absolument continue par rapport à la mesure de Hausdorff de dimension  $k$ .
  - L'espace,  $X_\infty$  satisfait une condition  $CD(K, N)$  portant sur la courbure synthétique, qui ne nécessite pas de structure lisse. Voir Lott-Villani, Sturm.
  - Il reste un laplacien à la limite. On note  $RCD(K, N)$  ces deux conditions réunies (Riemannian Curvature Dimension).
- L'idée pour définir le laplacien sur l'espace limite est d'utiliser les cartes locales bi-lipschitziennes et la comparabilité des mesures pour obtenir la différentiabilité presque partout des fonctions lipschitziennes sur  $X_\infty$ , ce qui permet de définir une énergie de Dirichlet

$$E(f, g) = \int_{X_\infty} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dm_\infty,$$

de domaine l'ensemble des fonctions lipschitziennes de différentielle  $L^2$ . On montre que cette forme quadratique est fermable. On obtient ainsi un opérateur auto-adjoint  $\Delta$  associé.

**Théorème 1.4 ([CC00]).** *On suppose que les variétés  $(X_n)$  sont compactes pour  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Alors le spectre des laplaciens est discret, et s'il*

$$(X_n, x_n, d_n, m_n) \xrightarrow{\text{GH}} (X_\infty, x_\infty, d_\infty, m_\infty),$$

alors

$$\lambda_k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_k^\infty$$

**Théorème 1.5 ([Gig23]).** *La convergence de Gromov-Hausdorff implique la convergence des énergies de Dirichlet  $E_n \rightarrow E_\infty$  « au sens de Mosco » ( $\Gamma$ -convergence faible et forte). Si on a une convergence faible*

$$f_n \in L^2(m_n) \xrightarrow{L^2} f \in L^2(m_\infty),$$

alors

$$E_\infty(f, f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n(f_n, f_n),$$

et pour toute fonction  $g \in L^2(m_\infty)$ , il existe une suite  $(g_n)$  de fonctions  $L^2$  qui converge fortement vers  $g$ , telle que

$$E_\infty(g, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(g_n, g_n).$$

**Remarque 1.6.** Les convergences forte et faible dans le Théorème 1.5 sont définies via les plongements isométriques donnés par la convergence de Gromov-Hausdorff. Plus précisément, on utilise les définitions

$$f_n \in L^2(m_n) \xrightarrow{L^2} f \in L^2(m_\infty)$$

$$\iff$$

$$\forall \varphi : Z \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue bornée}, \quad \int_Z \varphi f \circ \iota_n^{-1} d(\iota_n)_\sharp m_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_Z \varphi f \circ \iota_\infty^{-1} d(\iota_\infty)_\sharp m_\infty$$

et  $f_n \xrightarrow{L^2} f_\infty$  signifie que  $f_n \xrightarrow{L^2} f_\infty$  et  $\|f_n\|_{L^2(m_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f_\infty\|_{L^2(m_\infty)}$ . Le résultat implique la convergence des valeurs propres dans le cas compact (Théorème 1.4), et la convergence des fonctions propres et projecteurs spectraux. L'exemple des graphes métriques ne rentre pas dans ce cadre car ils ne vérifient pas de condition de borne inférieure sur la courbure de Ricci. La courbure tend vers  $-\infty$  lorsque l'épaisseur  $\varepsilon$  tend vers 0, proche des sommets du graphe.

**Explication du vocabulaire :** Retour sur les conditions  $CD(K, N)$  et  $RCD$ . La première signifie « Courbure  $\geq K$ , Dimension  $\leq N$  » et a été introduite par Sturm et Lott-Villani. Gigli-Mondino-Savaré ont introduit la condition  $RCD(K, N)$  qui ajoute une condition permettant l'existence d'un laplacien. Cette condition est stable par passage aux limites de Gromov-Hausdorff mesurées.

## 1.6. Homogénéisation (d'après [BLP11], [Kes79])

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . On note

$$L^\varepsilon = - \sum_{1 \leq i, j \leq d} \partial_i \left( a_{i,j} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_j \cdot \right) + a_0 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$$

où les coefficients  $a_{i,j}, a_0$  sont  $\mathbb{Z}^d$ -périodiques bornés et vérifient les hypothèses d'uniforme ellipticité et de positivité:

$$a_0 \geq 0 \text{ et } \sum_{i,j} a_{i,j}(y) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d, \text{ avec } \alpha > 0.$$

**Théorème 1.6.** *L'opérateur  $L^\varepsilon$  converge vers  $L^0$  au sens de la résolvante, où*

$$L^0 = - \sum_{1 \leq i, j \leq d} \partial_i (q_{i,j} \partial_j \cdot) + b,$$

où  $b = \mu(a_0)$  est la moyenne de  $a_0$ . Voir références pour l'expression de  $q_{i,j} \neq \mu(a_{i,j})$ .

**Exercice 1.5.** En dimension 1, on a  $L^\varepsilon : f \mapsto (a^\varepsilon f')'$ , avec  $a^\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$  et  $L^0 = qf''$  avec

$$q = \frac{1}{\mu(\frac{1}{a})}.$$

Indication. Résoudre  $(a^\varepsilon f')' = g$  avec les conditions de dirichlet. La convergence au sens de la résolvante dit que si  $f^\varepsilon$  est solution de  $L^\varepsilon f^\varepsilon = g$ , alors  $f^\varepsilon \rightarrow f^0$  dans  $L^2(\Omega)$ , où  $f^0$  est solution de  $L^0 f^0 = g$ .

## 1.7. Tores discrets

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On note  $G_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$  vu comme la grille dans le tore  $T^2$ , ce qui en fait un graphe  $G_N = (V_N, E_N)$ . On considère le laplacien discret  $\Delta_N : L^2(V_N) \longrightarrow L^2(V_N)$  défini par

$$(\Delta_N f)(x) = N^2 \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)) = \sum_{y \sim x} f(y) - 4f(x),$$

autrement dit,  $\Delta_N = A_N - 4 \text{Id}$ , où  $A_N$  est l'opérateur d'adjacence. Les fonctions propres de  $\Delta_N$  sont données par

$$e_k(x) = \exp\left(2i\pi\frac{k \cdot x}{N}\right), \quad x, k \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2,$$

et

$$\Delta_N e_k = 4\left(\sin^2\left(\pi\frac{k_1}{N}\right) + \sin^2\left(\pi\frac{k_2}{N}\right)\right)e_k.$$

### 1.7.1. Première limite

On étudie la convergence de  $N^2\Delta_N$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Cela revient à diviser les longueurs de la grille par  $N$ , donc à faire tendre le pas de la grille vers 0. L'objet géométrique limite devrait donc être le tore continu  $T^2$ . On a comme attendu convergence spectrale :

$$N^2 4\left(\sin^2\left(\pi\frac{k_1}{N}\right) + \sin^2\left(\pi\frac{k_2}{N}\right)\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 4\pi^2(k_1^2 + k_2^2),$$

qui sont les valeurs propres du laplacien continu  $\Delta = -(\partial_1^2 + \partial_2^2)$  sur  $T^2$ . Il y a convergence au sens de la résolvante généralisée. Si  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,

$$\left\| \iota_N(N^2\Delta_N - z\text{Id})^{-1}\iota_N^* - (\Delta_{T^2} - z\text{Id})^{-1} \right\|_{L^2(T^2)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0,$$

où

$$\iota_N : \mathcal{H}_N := \ell^2(V_N) \hookrightarrow \mathcal{H}_\infty := L^2(T^2)$$

sont les plongements qui à une fonction  $f$  sur la grille associent la fonction constante par morceaux valant  $f(i, j)$  sur le carré  $\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right) \times \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right)$

### 1.7.2. Seconde limite

On ne renormalise pas le laplacien discret, donc les tores discrets  $G_N$  sont de plus en plus grands lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Il y a convergence des mesures spectrales empiriques. Par un argument de sommes de Riemann, pour un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , on a

$$\mu_N(I) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \iint_{[0,1]^2} \mathbb{1}_I(4[\sin^2(\pi x_1) + \sin^2(\pi x_2)]) dx_1 dx_2, \quad (1)$$

où  $\mu_N$  est la mesure spectrale empirique de  $\Delta_N$

$$\mu_N(I) = \frac{1}{N^2} \# \left\{ k \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \mid 4\left(\sin^2\left(\pi\frac{k_1}{N}\right) + \sin^2\left(\pi\frac{k_2}{N}\right)\right) \in I \right\}.$$

Cette limite est un cas particulier de convergence de Benjamini-Schramm

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{B-S}} \mathbb{Z}^2.$$

L'équation (1) s'interprète comme

$$\mu_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \langle \delta_0 \mid P_I(\Delta_{\mathbb{Z}^2})\delta_0 \rangle,$$

où  $P_I(\Delta_{\mathbb{Z}^2})$  est le projecteur spectral sur  $I$  du laplacien sur le graphe infini  $\mathbb{Z}^2$ .

## 2. Convergence au sens de Benjamini-Schramm

Références :

- [BS01] pour les graphes avec laplaciens discrets. [AL07] traite la généralisation à des graphes avec poids sur les arêtes ;
- [Abe+17] pour les suites d'espaces métriques mesurés (article des sept samouraïs) ;
- [Bow15] pour des suites d'espaces localement symétriques ;
- [Ana+21] pour des graphes métriques avec conditions de dispersion.

## 2.1. Convergence de Benjamini-Schramm pour des suites de graphes discrets

Soit  $\mathbb{G}_*^d$  l'ensemble des graphes enracinés de degré au plus  $d$  modulo isomorphismes préservant la racine. On munit  $\mathbb{G}_*^d$  de la distance définie par

$$\text{dist}((G, x), (G', x')) \leq \varepsilon \iff B_G\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) \simeq B_{G'}\left(x', \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

où l'isomorphisme entre les boules est un isomorphisme de graphes préservant la racine. Alors  $(\mathbb{G}_*^d, \text{dist})$  est un espace métrique compact. Notons maintenant  $\mathcal{P}^1(\mathbb{G}_*^d)$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\mathbb{G}_*^d$ , muni de la topologie faible. Étant donné un graphe fini  $G = (V, E)$  de degré au plus  $d$ , on peut définir une mesure de probabilité  $\nu_G \in \mathcal{P}^1(\mathbb{G}_*^d)$  en choisissant une racine de manière uniforme dans  $V$ . Autrement dit,

$$\nu_G = \frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} \delta_{(G, x)}.$$

**Définition 2.1.** Soit  $(G_N)_{N \geq 1}$  une suite de graphes finis de degré au plus  $d$ . On dit que la suite  $(G_N)$  converge au sens de Benjamini-Schramm (ou converge localement faiblement) si la suite de mesures  $(\nu_{G_N})$  possède une limite faible  $\mathbb{P}_\infty \in \mathcal{P}^1(\mathbb{G}_*^d)$ .

La mesure limite  $\mathbb{P}_\infty$ , si elle existe, est la statistique limite de la proportion de sommets  $x \in V_N$  tels que la boule de centre  $x$  et de rayon  $R$  dans  $G_N$  est isomorphe à la boule de centre  $y$  et de rayon  $R$  dans  $H$ , pour chaque graphe  $(H, y) \in \mathbb{G}_*^d$  et chaque  $R \geq 0$ .

### Remarque 2.1.

- On a en tête essentiellement des suites de graphes dont le nombre de sommets tend vers l'infini.
- $\mathbb{P}_\infty$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{G}_*^d$ , donc on peut voir l'objet limite comme un graphe enraciné aléatoire de loi  $\mathbb{P}_\infty$ .

**Théorème 2.1.** Soit  $(G_N)_{N \geq 1}$  une suite de graphes finis de degré au plus  $d$  qui converge au sens de Benjamini-Schramm vers une mesure  $\mathbb{P}_\infty \in \mathcal{P}^1(\mathbb{G}_*^d)$ . Notons  $(\lambda_k^{(N)})_{1 \leq k \leq N}$  les valeurs propres de la matrice d'adjacence de  $G_N$ . Alors celles-ci sont contenues dans  $[-d, d]$ , et pour toute fonction test  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ,

$$\frac{1}{|V_N|} \sum_{k=1}^{|V_N|} f(\lambda_k^{(N)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}_\infty[\langle \delta_o \mid f(A_\mathcal{G}) \delta_o \rangle],$$

où  $\mathcal{G}$  dénote un graphe aléatoire de loi  $\mathbb{P}_\infty$ ,  $o$  sa racine,  $A_\mathcal{G}$  sa matrice d'adjacence,  $\mathbb{E}_\infty$  l'espérance par rapport à  $\mathbb{P}_\infty$  et  $\delta_o$  la masse de Dirac en l'origine  $o$ .

### Remarque 2.2.

- L'opérateur  $A_\mathcal{G}$  est auto-adjoint, donc on peut lui appliquer le calcul fonctionnel, ce qui assure que  $f(A_\mathcal{G})$  est correctement défini.
- On a un énoncé analogue pour le laplacien discret  $\Delta = A - d \text{Id}$  au lieu de la matrice d'adjacence.

### Exemple 2.1 (Tores discrets).

- 1) La suite des tores discrets  $(G_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2)_{N \geq 1}$  converge au sens de Benjamini-Schramm vers le graphe infini  $\mathbb{Z}^2$  muni de la mesure de Dirac en l'origine. En effet, pour tout  $R \geq 0$ , pour  $N$  suffisamment grand, les boules de rayon  $R$  dans  $G_N$  sont isomorphes à la boule de rayon  $R$  et centrée en l'origine dans  $\mathbb{Z}^2$ . Comme la taille de  $G_N$  est  $N^2$ , on en déduit que

$$\nu_{G_N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{B-S}} \delta_{(\mathbb{Z}^2, 0)}.$$

Ainsi,  $G_N$  converge au sens de Benjamini-Schramm vers le graphe déterministe  $\mathbb{Z}^2$ . Le théorème Théorème 2.1 s'applique, et on retrouve la convergence des mesures spectrales empiriques  $\mu_N$  vers la mesure spectrale de  $\Delta_{\mathbb{Z}^2}$  en 0.

- 2) Si l'on remplace le tore discret par un carré discret  $C_N = \{0, \dots, N-1\}^2$ , avec conditions de Dirichlet ou Neumann sur le bord, il y a également convergence au sens de Benjamini-Schramm vers le même graphe déterministe  $\mathbb{Z}^2$ . En effet, le nombre de sommets pour lesquels la boule de rayon  $R$  dans le carré n'est isomorphe à la boule de rayon  $R$  dans  $\mathbb{Z}^2$  est majoré par  $4RN$ , négligeable devant le nombre total de sommets  $N^2$ .

*Démonstration du Théorème 2.1.* Comme les valeurs propres de la matrice d'adjacence de  $G_N$  sont dans  $[-d, d]$ , il suffit de montrer la convergence pour des fonctions tests  $f$  polynomiales par densité. Soit  $f$  le monôme de degré  $R \geq 0$ . On a

$$\frac{1}{|V_N|} \sum_{k=1}^{|V_N|} f(\lambda_k^{(N)}) = \frac{1}{|V_N|} \text{Tr}(A_{G_N}^R) = \frac{1}{|V_N|} \sum_{x \in V_N} A_{G_N}^R(x, x). \quad (2)$$

Prenons

$$\varphi : \mathbb{G}_*^d \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (G, x) \mapsto A_G^R(x, x),$$

où  $A_G$  est la matrice d'adjacence de  $G$ . La fonction  $\varphi$  compte le nombre de lacets en  $x$  de longueur  $R$  dans  $G$ , donc  $\varphi(G, x)$  ne dépend que de la boule  $B_G(x, \frac{R}{2})$ , ce qui montre que  $\varphi$  est continue. Par définition de la convergence de Benjamini-Schramm, on a

$$\frac{1}{|V_N|} \sum_{x \in V_N} \varphi(G_N, x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{B-S}} \int_{\mathbb{G}_*^d} \varphi \, d\mathbb{P}_\infty = \mathbb{E}_\infty[\varphi(\mathcal{G}, o)] = \mathbb{E}_\infty[\langle \delta_o \mid A_\mathcal{G}^R \delta_o \rangle].$$

Comme  $f(A_\mathcal{G}) = A_\mathcal{G}^R$ , l'équation (2) conclut. □

La prochaine fois. Exemples pour des graphes discrets.

- Graphes réguliers (aléatoires ou déterministes).
- Graphes d'Erdős-Rényi, pour lesquels la limite n'est pas déterministe.
- Espaces métriques plus généraux (article des 7 samouraïs).

## 2.2. Exemples

### 2.2.1. Grille rectangulaire

De même que pour le tore discret et la grille carrée, on a

$$[\![0, M]\!] \times [\![0, N]\!] \xrightarrow[\min(M, N) \rightarrow \infty]{\text{B-S}} \delta_{(\mathbb{Z}^2, 0)}.$$

### 2.2.2. Graphes réguliers de grande systole

Soit  $d \geq 2$ . On considère une suite de graphes  $G_N$   $d$ -réguliers. Si la systole (longueur du plus petit chemin fermé non trivial) de  $G_N$  tend vers l'infini lorsque  $N \rightarrow \infty$ , alors pour  $R > 0$  fixé, les boules de rayon  $R$  dans  $G_N$  pour  $N$  suffisamment grand sont isomorphes à l'arbre enraciné  $d$ -régulier. Ainsi,

il y a convergence au sens de Benjamini-Schramm vers l'arbre infini  $d$ -régulier vu comme graphe déterministe. Ce graphe étant homogène, le choix de la racine n'a pas d'importance. On l'écrit

$$G_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{B-S}} \delta_{(T_d, o)}.$$

On peut affaiblir l'hypothèse sur la systole en demandant que pour tout  $R > 0$ , le nombre de géodésiques fermées de longueur au plus  $R$  (chemins fermés sans retour arrière dans le graphe) soit négligeable devant la taille de  $G_N$ . **Ne suffit-il pas de prendre comme définition de géodésique un chemin fermé sans auto-intersection (implique sans retour arrière) ?**

### 2.2.3. Graphes ayant un revêtement universel commun

Soit  $\tilde{G}$  un arbre, et  $\Gamma < \text{Aut}(\tilde{G})$  un sous-groupe agissant librement sur  $\tilde{G}$ , tel que le quotient  $\tilde{G}/\Gamma$  soit fini. Autrement dit,  $\tilde{G}$  est le revêtement universel d'un graphe fini. On note  $D$  un domaine fondamental de l'action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{G}$  (i.e. un sous ensemble fini de sommets de  $\tilde{G}$  dont l'orbite sous  $\Gamma$  forme un pavage de  $\tilde{G}$ ). Soit  $(\Gamma_N)_{N \geq 1}$  une suite de sous-groupes de  $\Gamma$ . On note  $G_N = \tilde{G}/\Gamma_N$  le graphe quotient.

**Proposition 2.2.** *Si la systole de  $G_N$  tend vers l'infini lorsque  $N \rightarrow \infty$ , alors*

$$G_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{B-S}} \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \delta_{(\tilde{G}, x)}.$$

**Exercice 2.2.** Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes.

- (i) La systole de  $G_N$  ne tend pas vers l'infini lorsque  $N \rightarrow \infty$ .
- (ii) Il existe  $x \in D$  et une suite d'entiers  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui tend vers l'infini, des suites

$$(\gamma_i) \in (\Gamma_{n_i} \setminus \{e\})^{\mathbb{N}}, \quad (g_i) \in \Gamma^{\mathbb{N}}$$

et  $R > 0$  tels que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$d(x, g_i^{-1} \gamma_i g_i x) \leq R.$$

**Remarque 2.3.** Le cas que l'on rencontre le plus souvent dans la littérature est celui où les  $\Gamma_N$  forment une suite décroissante de sous-groupes normaux de  $\Gamma$ , de sorte que  $G_{N+1}$  est un revêtement fini de  $G_N$ . Dans ce cas, la divergence de la systole est équivalente à la condition

$$\bigcap_{N \geq 1} \Gamma_N = \{e\}.$$

**Exercice 2.3.** Prouver la Proposition 2.2 précédente dans le cas particulier de la Remarque 2.3.

**Définition 2.2.** *On dit qu'une mesure de probabilité  $\nu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{G}_*^d)$  est unimodulaire si pour toute fonction  $f : \mathbb{G}_{**}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable positive sur les graphes de valence au plus  $d$  avec deux points marqués modulo isomorphisme, on a*

$$\int_{\mathbb{G}_*^d} \sum_{y \in V(G)} f(G, x, y) d\nu(G, x) = \int_{\mathbb{G}_*^d} \sum_{x \in V(G)} f(G, x, y) d\nu(G, y).$$

Si  $G = (V, E) \in \mathbb{G}_*^d$  est un graphe fini, alors la mesure définie à la séance 2 par

$$\nu_G = \frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} \delta_{(G, x)}$$

est clairement unimodulaire. De plus, la propriété d'unimodularité est stable par limite faible. Les limites de suites de graphes finis au sens de Benjamini-Schramm sont donc toujours unimodulaires.

*Esquisse de démonstration de la Proposition 2.2 (cas général).* On reprend un argument de [Bow15], qui fonctionne pour des espaces métriques plus généraux que des graphes. Si  $\tilde{G}$  est le revêtement universel d'un graphe fini, alors il existe une unique mesure de probabilité  $\mu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{G}_*^d)$  unimodulaire et telle que

$$\mu\{(\mathcal{G}, o) \mid \mathcal{G} = \tilde{G}\} = 1,$$

et elle est donnée par

$$\mu = \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \delta_{(\tilde{G}, x)}.$$

Or, comme la systole de  $G_N$  tend vers l'infini, le graphe limite (géométrique) d'une valeur d'adhérence de Benjamini-Schramm est nécessairement isomorphe à  $\tilde{G}$ . Par unicité de la mesure unimodulaire supportée sur  $\tilde{G}$ , il existe une unique telle valeur d'adhérence, ce qui conclut.  $\square$

#### 2.2.4. Graphes aléatoires

On étudie la convergence presque sûre au sens de Benjamini-Schramm

##### Graphes $d$ -réguliers aléatoires.

**Modèle de configuration.** Fixons  $d \geq 3$  et  $N \geq 1$  tel que  $dN$  soit pair. On considère une collection de  $N$  sommets, chacun ayant  $d$  demi-arêtes, et on réalise un appariement entre ces  $dN$  demi-arêtes, choisi uniformément. On obtient ainsi un graphe aléatoire  $G_N$ , dans lequel il peut y avoir des boucles et des multi-arêtes. Étant donné un entier  $R$ , on note  $Y_R$  le nombre de géodésiques fermées de longueur  $R$ . Alors, pour tout  $k \geq 1$ , on peut montrer que (cf. cours de l'année dernière)

$$\mathbb{E}_N[Y_R(Y_R - 1)\dots(Y_R - k + 1)] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \lambda_R^k, \quad \text{avec } \lambda_R = \frac{(d-1)^R}{2R}. \quad (3)$$

En particulier, les moments  $(\mathbb{E}_N[Y_R^k])_{N \in \mathbb{N}}$  forment une suite bornée. Pour  $k = 2$ , l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}_N[Y_R \geq \alpha N] \leq \frac{\mathbb{E}_N[Y_R^2]}{(\alpha N)^2}, \quad \text{donc } \frac{Y_R}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0$$

par le lemme de Borel-Cantelli. En appliquant le résultat de la Section 2.2.2, on en déduit que  $G_N$  converge presque sûrement au sens de Benjamini-Schramm vers l'arbre infini  $d$ -régulier

$$G_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s. B-S}} \delta_{(T_d, o)}.$$

La convergence est donc presque-sûrement déterministe.

**Modèle de permutations.** Soit  $d = 2m$  un entier pair. On se donne  $m$  permutations  $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \mathcal{S}_N$  indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme, et on considère le graphe aléatoire  $G_N$   $d$ -régulier à  $N$  sommets dans lequel les voisins d'un sommet  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  sont les  $\sigma_j(i)$  et  $\sigma_j^{-1}(i)$  pour  $1 \leq j \leq m$ . On peut montrer de la même manière que pour tout  $R \geq 1$ , le moment factoriel d'ordre  $k$  du nombre de géodésiques fermées de longueur  $R$  converge quand  $N \rightarrow \infty$  vers  $\lambda_R^k$  (cf. équation (3)), où cette fois

$$\lambda_R = \frac{(d-1)^R + M + (-1)^R(M-1)}{2R}.$$

On en déduit de la même manière la convergence presque-sûre de  $G_N$  au sens de Benjamini-Schramm vers l'arbre infini  $d$ -régulier.

**Modèle de revêtement aléatoire.** Soit  $G$  un graphe fini fixé, et  $N \geq 1$  un entier. Fixons également un ordre sur  $V$ , de sorte que chaque arête de  $G$  puisse s'écrire de manière unique sous la forme  $(x, y)$  avec  $x \leq y$ . On se donne une famille  $(\sigma_{x,y})_{(x,y) \in E}$  de permutations indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur  $\mathcal{S}_N$ . On considère ainsi le graphe  $G_N$  dont l'ensemble des sommets est  $V \times \llbracket 1, N \rrbracket$ , et dans lequel  $(x, i)$  est relié à  $(y, j)$  si et seulement si  $(x, y) \in E$  et  $\sigma_{x,y}(i) = j$ . La projection canonique

$$G_N \longrightarrow G, \quad \begin{cases} (x, i) & \mapsto x \\ ((x, i), (y, j)) & \mapsto (x, y) \end{cases}$$

fournit une structure de revêtement aléatoire de degré  $N$  de  $G$ . Étant donnée une géodésique fermée  $\gamma = (e_1, \dots, e_R)$  dans  $G$ , le relevé de  $\gamma$  dans  $G_N$  à partir du sommet  $(x, i)$  est à pour point d'arrivée le sommet  $(x, \sigma_\gamma(i))$ , où

$$\sigma_\gamma = \sigma_{e_R} \circ \dots \circ \sigma_{e_1}.$$

En particulier, le relevé de  $\gamma$  à partir de  $(x, i)$  est fermé si et seulement si  $i$  est un point fixe de  $\sigma_\gamma$ . Si l'on suppose de plus que la géodésique  $\gamma$  est simple alors  $\sigma_\gamma$  suit une loi uniforme sur  $\mathcal{S}_N$ . Si  $Y_\gamma$  désigne le nombre de relevés fermés de  $\gamma$  dans  $G_N$ , on a donc

$$\mathbb{E}_N[Y_\gamma] = \mathbb{E}_N[\#\{i \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid \sigma_\gamma(i) = i\}] = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}_N(\sigma(i) = i) = 1.$$

Cela entraîne (exercice) que pour tout  $R \geq 1$ , le nombre  $Y_R$  de géodésiques fermées de longueur  $R$  dans  $G_N$  est borné indépendamment de  $N$ . Il en est de même pour tous les moments de  $Y_R$ . On en déduit comme précédemment

$$G_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s. B-S}} \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \delta_{(\tilde{G}, x)},$$

où  $\tilde{G}$  est le revêtement universel de  $G$  et  $D$  un domaine fondamental associé au revêtement  $\tilde{G} \longrightarrow G$ .

### 2.2.5. Graphes d'Erdős-Rényi

On construit dans cette section un exemple où la limite au sens de Benjamini-Schramm d'une suite de graphes finis est une mesure de probabilité non déterministe dans laquelle plusieurs graphes distincts apparaissent (pas seulement des racines différentes d'un même graphe).

Soient  $N \geq 1$  un entier, et  $c \in [0, N]$ . On considère le graphe aléatoire  $G_N$  dont l'ensemble des sommets est  $\llbracket 1, N \rrbracket$ , et dans lequel chaque paire de sommets est reliée par une arête avec probabilité  $p = \frac{c}{N}$ , de manière indépendante. On remarque que  $c$  est le nombre moyen de voisins d'un sommet dans  $G_N$ . On a

$$P_N(1 \text{ possède } m \text{ voisins}) = \binom{N-1}{m} \left(\frac{c}{N}\right)^m \left(1 - \frac{c}{N}\right)^{N-1-m} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} e^{-c} \frac{c^m}{m!}.$$

Ainsi, la loi des boules de rayon 1 dans  $G_N$  converge un loi de Poisson de paramètre  $c$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . En poursuivant ce raisonnement, on peut montrer que le graphe  $G_N$  converge presque sûrement au sens de Benjamini-Schramm vers un arbre aléatoire de Galton-Watson  $T_c$  où le nombre de descendants de chaque sommet suit une loi de Poisson de paramètre  $c$ . Le théorème Théorème 2.1 s'applique et donne

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\lambda_k^{(N)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}_\infty [\langle \delta_o \mid f(A_{T_c}) \delta_o \rangle_{\ell^2}],$$

pour toute fonction test  $f \in \mathbb{R}[X]$ . On a également la convergence spectrale faible analogue pour le laplacien discret.

**Remarque 2.4.** On peut écrire

$$\mathbb{E}_\infty [\langle \delta_o \mid f(A_{T_c}) \delta_o \rangle_{\ell^2}] = \int f(\lambda) dm_c(\lambda).$$

La mesure  $m_c$  n'est pas encore bien comprise pour les arbres de Galton-Watson. A partir de quelles valeurs de  $c$  possède-t-elle des parties absolument continues ? Atomes ?

**Définition 2.3.** Avec les notations précédentes, on dit qu'il y a convergence spectrale forte si on a convergence spectrale faible et l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) Pour tout  $f \in \mathbb{R}[X]$ , on a

$$\|f(A_N)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \sup\{|f(\lambda)| ; \lambda \in \text{supp}(m_c)\};$$

(ii) Il y a convergence presque-sûre des trous spectraux (voir séance 1) ;

(iii) Il y a convergence presque-sûre de  $\text{Sp}(A_N)$  vers  $\text{supp}(m_c)$  au sens de la distance de Hausdorff.

**Remarque 2.5.** Dans la littérature, la convergence spectrale faible ne fait pas toujours partie de la définition de la convergence spectrale forte. Il faut prendre garde au fait que les trois conditions de la Définition 2.3 n'impliquent pas la convergence spectrale faible. Dans la plupart des exemples précédents, la convergence spectrale faible découle de la convergence au sens de Benjamini-Schramm.

### 2.3. Convergence de Benjamini-Schramm pour des espaces métriques

On s'intéresse dans cette section à la convergence de suites d'espaces métriques pointés mesurés. Tous les espaces métriques considérés seront supposés complets, séparables et propres (i.e. leurs boules fermées sont compactes).

**Définition 2.4 (EMMP).** Un espace métrique pointé mesuré (EMMP) est un quadruplet

$$(X, d, x, m),$$

où  $(X, d)$  est un espace métrique (complet, séparable et propre),  $x$  est un point de  $X$  et  $m$  est une mesure de Radon positive non nulle sur  $X$ . On demande aux isomorphismes entre EMMP de préserver la métrique, l'origine et la mesure. On note  $\mathbb{M}_*$  l'ensemble des classes d'isomorphisme d'EMMP.

**Définition 2.5.** Soit  $(X_n, d_n, x_n, m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'EMMP. On dit que cette suite converge pour la topologie de Gromov-Hausdorff pointée mesurée vers un EMMP  $(X, d, x, m)$ , et l'on note

$$(X_n, d_n, x_n, m_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{pmGH}} (X_\infty, d_\infty, x_\infty, m_\infty),$$

s'il existe un espace métrique  $(Z, d)$  complet séparable et des injections isométriques

$$\iota_n : (X_n, d_n) \hookrightarrow (Z, d), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

telles que

- (i)  $\iota_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} i_\infty(x_\infty)$  dans  $(Z, d)$  ;
- (ii)  $(\iota_n)_\sharp m_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\iota_\infty)_\sharp m_\infty$ , les fonctions test étant prises continues à support borné ;

(iii) Pour  $R, \varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  entier, on ait

$$\iota_n(B_{X_n}(x_n, R)) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(i_\infty(X_\infty)) \quad \text{et} \quad \iota_\infty(B_{X_\infty}(x_\infty, R)) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(i_n(X_n)),$$

où  $\mathcal{V}_\varepsilon(Y)$  désigne le  $\varepsilon$ -voisinage de  $Y$  dans  $(Z, d)$ .

**Définition 2.5.** Soit  $(X_n, d_n, m_n)$  une suite d'espaces métriques mesurés (sans origine). On suppose que  $m_n(X_n) < \infty$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit une mesure de probabilité  $\nu_n \in \mathcal{P}^1(\mathbb{M}_*)$  en choisissant une origine  $x_n \in X_n$  aléatoirement selon la mesure normalisée  $m_n^{(1)}$ . Autrement dit,

$$\nu_n = \int_{X_n} \delta_{(X_n, d_n, x, m_n)} \frac{dm_n(x)}{m_n(X_n)}.$$

On dit que la suite  $(X_n, d_n, m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge au sens de Benjamini-Schramm vers un EMMP  $(X, d, x, m)$  si la suite de mesures  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite faible  $\nu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{M}_*)$

**Remarque 2.6.** Dans la définition précédente, on s'intéresse principalement au cas où  $m_n(X_n) \rightarrow \infty$ . Gromov a détaillé des conditions sous lesquelles l'image de  $X_n$  dans  $Z$  reste relativement compacte. En pratique ce sera le cas dans la plupart des exemples que l'on considérera.

**Exemple 2.4.**

1) On considère un tore  $\mathbb{T}_{\varepsilon, L} := \mathbb{R}/\varepsilon\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$  dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $L \rightarrow \infty$ . On munit  $\mathbb{T}_{\varepsilon, L}$  de la mesure euclidienne  $m_{\varepsilon, L}$  normalisée de masse totale  $L$ . On a alors

$$\mathbb{T}_{\varepsilon, L} \xrightarrow[\substack{L \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}]{}^{\text{B-S}} \delta_{(\mathbb{R}, o)}.$$

2) On considère une suite de surfaces hyperboliques compactes  $(X_n)$ . On suppose que le volume de  $X_n$  tend vers l'infini et que la systole de  $X_n$  tend vers l'infini (ou plus généralement que le nombre de géodésiques fermées de longueur  $\leq R$  est négligeable devant le volume de  $X_n$  pour tout  $R > 0$  fixé). On munit  $X_n$  de la mesure volume  $m_n$ . Alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{}^{\text{B-S}} \delta_{(\mathbb{H}^2, o)},$$

où  $\mathbb{H}^2$  est le plan hyperbolique et  $o \in \mathbb{H}^2$  un point quelconque.

3) **L'exemple des 7 samouraïs.** Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple, connexe, de centre trivial et sans facteur compact. Soit  $K < G$  un sous-groupe compact maximal, et on note  $X = G/K$  l'espace symétrique associé. (Par exemple,  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  et  $X \simeq \mathbb{H}^2$ ). Soit  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  une suite de réseaux sans torsion dans  $G$ . On note  $X_n = \Gamma_n/X$ , et  $X_{n,R}$  l'ensemble des points de  $X_n$  dont le rayon d'injectivité est au plus  $R > 0$ . On suppose que pour tout  $R > 0$ , le volume de  $X_{n,R}$  est négligeable devant le volume de  $X_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{}^{\text{B-S}} \delta_{(X, o)}, \tag{4}$$

où  $o \in X$  est un point quelconque.

**Théorème 2.3 (ABBGNRS 7 samouraïs).** On garde les notations du dernier exemple. Si  $G$  est de rang  $\geq 2$ , vérifie la propriété (T) de Kazhdan et les  $\Gamma_n$  ne sont pas conjugués deux à deux, alors (4) est vérifiée sans l'hypothèse sur les parties à petit rayon d'injectivité.

### 2.3.1. Quelques conséquences de la convergence au sens de Benjamini-Schramm

**Théorème 2.4.** Soit  $(X_n, d_n, m_n)$  une suite d'espaces métriques mesurés, satisfaisant  $\text{RCD}(K, N)$ , qui converge au sens de Benjamini-Schramm vers  $(X_\infty, d_\infty, x_\infty m_\infty)$  aléatoire de loi  $\mathbb{P}_\infty$ . On suppose qu'il existe un réel  $v_0 > 0$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X_n, \quad m_n(B(x, 1)) \geq v_0 > 0.$$

Alors il y a «convergence du noyau de la chaleur»

$$\forall t > 0, \quad \frac{1}{m_n(X_n)} \text{Tr}(\exp(t\Delta_{X_n})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}_\infty[\exp(t\Delta_{X_\infty})(x_\infty, x_\infty)]. \quad (5)$$

**Remarque 2.7.**

- On rappelle que la condition  $\text{RCD}(K, N)$ , vue sans détails à la première séance, implique en particulier l'existence d'un laplacien auto-adjoint sur les  $X_n$
- La membre de gauche de (5) s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_n(X_n)} \text{Tr}(\exp(t\Delta_{X_n})) &= \frac{1}{m_n(X_n)} \int_{X_n} p_t^{X_n}(z, z) dm_n(z) \\ &= \frac{1}{m_n(X_n)} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\Delta_{X_n})} \exp[-t\lambda \text{mult}(\lambda)], \quad (\text{cas compact}) \end{aligned}$$

La preuve du Théorème 2.4 utilise des résultats de Gigli-Mondino-Savaré sur la stabilité de  $p_t^{X_n}$ , ainsi que des bornes a priori sur  $p_t$ , qui demandent la condition de minoration de la mesure des boules unitées.

**Exemple 2.5.**

- 1) Le Théorème 2.4 s'applique en particulier à l'exemple  $X_n = (G/K)/\Gamma_n$  avec  $G$  groupe de Lie semi-simple, sous l'hypothèse que  $X_n$  converge au sens de Benjamini-Schramm vers  $G/K$  (c'est un espace homogène donc le choix du point de base n'a pas d'importance), et que le rayon d'injectivité est minoré. La condition de convergence est automatiquement satisfaite si  $G$  est de rang  $\geq 2$  et possède la propriété (T)
- 2) Soit  $\tilde{M} \rightarrow M$  le revêtement universel d'une variété riemannienne compacte  $M = \tilde{M}/\Gamma$ . Soit  $(\Gamma_n)$  une suite de sous-groupes du groupe d'automorphismes de  $\tilde{M}$ , tels que  $X_n = \frac{\tilde{M}}{\Gamma_n}$  soit compact. Si le rayon d'injectivité de  $X_n$  tend vers l'infini, alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{B-S}} \frac{1}{\text{vol}(D)} \int_D \delta_{\tilde{M}, x} \text{d vol}(x),$$

où  $D$  est un domaine fondamental de l'action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{M}$ .

### 3) Modèles de surfaces hyperboliques aléatoires.

- **Modèle de Weil-Peterson et des revêtements aléatoires.** Dans les deux cas, il y a convergence presque sûre (on utilise plutôt la convergence en probabilité dans la littérature) quand le volume (ou de manière équivalente le genre) tend vers l'infini, vers l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ .
- **Modèle de Budzinski-Curien-Petri (2019).** On part d'un graphe 3-régulier aléatoire à  $N$  sommets, qui encode le recollement de  $N$  pantalons hyperboliques de longueur de bord fixée sans twist. Dans ce cas, il y a convergence presque sûre au sens de Benjamini-Schramm vers une surface hyperbolique non compacte correspondant au recollement de pantalons selon l'arbre infini 3-régulier, avec point base choisi uniformément dans un des pantalons.

**Théorème 2.5 (7 samourais).** *Dans le cadre du 1) de l'exemple 2.5, il y a convergence du noyau de la chaleur sur les  $k$ -formes pour tout  $k \in \{0, \dots, \dim(G/K)\}$ . Plus précisément, si  $\Delta_{(k)}^n$  désigne le laplacien sur les  $k$ -formes  $L^2$  de  $X_n$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ), alors*

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{1}{\text{vol}(X_n)} \text{Tr}\left(\exp(t\Delta_{(k)}^n)\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}_\infty\left[\exp(t\Delta_{(k)}^\infty)(o, o)\right].$$

En prenant la limite  $t \rightarrow \infty$ , on obtient la convergence des nombres de Betti normalisés

$$\frac{b_k(X_n)}{\text{vol}(X_n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\infty\left[\exp(t\Delta_{(k)}^\infty)(o, o)\right] =: \beta_k.$$

On appelle  $\beta_k$  le  $k$ -ième nombre de Betti  $L^2$  de l'espace symétrique  $G/K$ .

**Théorème 2.6 (Elek, Bowen (2012) – Abert-Bergeron-Biringer-Gelander (2016)).** Si

$$(X_n, d_n, m_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{B-S}} (X_\infty, d_\infty, m_\infty)$$

avec des espaces satisfaisant « de bonnes conditions » alors pour tout  $k$ , les nombres de Betti normalisés possèdent une limite quand  $n \rightarrow \infty$ .

Dans ce cadre, les nombres de Betti sont définis par homologie simpliciale.

### 3. Convergence spectrale forte des graphes réguliers aléatoires

#### 3.1. La preuve de Friedman (d'après [Fri08; Fri91])

Soit  $d = q + 1$  un entier fixé. On s'intéresse aux graphes  $d$ -réguliers. On expose dans cette section la preuve de la convergence spectrale forte en probabilité de Jöel Friedman dans le cas du modèle de configuration de graphes aléatoires  $d$ -réguliers. La preuve se généralise à une classe plus large de modèles de graphes aléatoires  $d$ -réguliers, que Friedman appelle « modèles algébriques ».

##### 3.1.1. Modèle de configuration

On rappelle la construction de graphes aléatoires à  $N \in \mathbb{N}$  sommets. On suppose que  $Nd$  est pair, on se donne  $d$  demi-arêtes par sommet, et on effectue un appariement aléatoire uniforme des  $Nd$  demi-arêtes. Le cardinal de l'ensemble des appariements est le produit des nombres impairs jusqu'à  $Nd - 1$ , noté  $(Nd - 1)!!$ . On a montré que  $G_N$  converge presque sûrement au sens de Benjamini-Schramm vers l'arbre  $d$ -régulier  $T_d$ , d'où la convergence des mesures spectrales empiriques

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\lambda_i(G_N)) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \langle \delta_o \mid f(A_{T_d}) \delta_o \rangle_{\ell^2} = \int f(\lambda) dm_d(\lambda), \quad (6)$$

où  $\lambda_0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{N-1}$  sont les valeurs propres de l'opérateur d'adjacence de  $G_N$  (la probabilité d'être connexe tend vers 1 quand  $N \rightarrow \infty$ , et où  $m_d$  est la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par

$$dm_d(\lambda) = \mathbb{1}_{[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]} \frac{d}{2\pi} \frac{\sqrt{4q - \lambda^2}}{d^2 - \lambda^2} d\lambda,$$

Le trou spectral de la spectrale de l'arbre  $d$ -régulier est l'intervalle  $]2\sqrt{q}, d[$  (l'existence de ce trou exprime la non-moyennabilité de  $T_d$ ). La convergence des mesures spectrales empiriques implique que le nombre de valeurs propres de  $G_N$  dans  $]2\sqrt{q}, d[ \cup ]-d, -2\sqrt{q}[$  est négligeable devant  $N$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

On cherche à montrer la convergence spectrale forte en probabilité. Pour le modèle de configuration, l'énoncé s'écrit

$$\mathbb{P}_N \left( \text{Sp}(A_{G_N}) \setminus \{\lambda_0\} \subset [-2\sqrt{q} - \varepsilon, 2\sqrt{q} + \varepsilon] \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 1.$$

Il s'agit de la conjecture d'Alon, démontrée pour la première fois par Friedman en 2008 [Fri08].

Si  $G = (V, E)$  est un graphe régulier, on définit la matrice de Hashimoto  $B$ , indexée par les arêtes orientées de  $G$  (donc de taille  $Nd \times Nd$ ), par

$$B(x \rightarrow y, z \rightarrow w) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = y \text{ et } w \neq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Autrement dit,  $B$  est la matrice qui engendre les chemins sans retour arrière dans  $G$ . Sur chaque ligne et chaque colonne de  $B$ , il y a exactement  $d - 1 = q$  entrées égales à 1 et le reste des entrées est nul. Si  $A$  désigne la matrice d'adjacence de  $G$ , de spectre

$$\text{Sp}(A) = \{\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{N-1}\},$$

Alors

$$\text{Sp}(B) = \left\{ q^{\frac{1}{2} \pm is_j} ; 0 \leq j < N - 1 \right\} \cup \{1, -1\},$$

où  $s_j \in \mathbb{C}$  vérifie

$$\lambda_j = q^{\frac{1}{2} + is_j} + q^{\frac{1}{2} - is_j}.$$

Les valeurs propres  $q^{\frac{1}{2} \pm is_j}$  apparaissent avec la même multiplicité que  $\lambda_j$ , ce qui donne  $2N$  valeurs propres. Les  $s_j$  réels correspondent aux valeurs propres  $\lambda_j$  dans l'intervalle  $[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$ , tandis que les  $s_j$  imaginaires purs correspondent aux  $\lambda_j$  en dehors de cet intervalle (trou spectral de la limite faible). Les valeurs propres 1 et  $-1$  apparaissent chacune avec multiplicité

$$\frac{N(d-2)}{2} = |E| - |V| = b(G) - 1,$$

Où  $b(G)$  est appelé rang cyclique de  $G$ , et est égal au nombre minimal d'arêtes à supprimer pour obtenir un arbre couvrant de  $G$ . Les valeurs propres 1 et  $-1$  sont appelées les valeurs propres topologiques de  $B$ . On peut donc reformuler la conjecture d'Alon en termes de valeurs propres de  $B$ .

On rappelle que dans ce cours, on appelle géodésique sur un graphe un chemin sans retour arrière. On a donc

$$\text{Tr}(B^k) = \sum_{\gamma} T(\gamma),$$

où  $\gamma$  parcourt l'ensemble des géodésiques fermées périodiques de longueur  $k$ , et  $T(\gamma)$  est la plus petite période de  $\gamma$ . Par ailleurs, en calculant la trace de  $B^k$  grâce à ses valeurs propres, on obtient

$$\frac{\text{Tr}(B^k)}{q^{\frac{k}{2}}} = \sum_{j=0}^{N-1} (q^{iks_j} + q^{-iks_j}) + \frac{b(G)-1}{q^{\frac{k}{2}}} (1 + (-1)^k).$$

Soit  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction paire à support fini. On a

$$\text{Tr} \left( \sum_{k>0} \varphi(k) \frac{B^k}{q^{\frac{k}{2}}} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\varphi}(s_j) - N\varphi(0) + (b(G)-1) \sum_{k>0} \frac{\varphi(k)}{q^{\frac{k}{2}}} (1 + (-1)^k),$$

où

$$\hat{\varphi}(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) q^{iks}$$

est périodique de période  $\frac{2\pi}{\log(q)}$ . C'est un polynôme trigonométrique en  $s$ . Comme  $q^{iks} + q^{-iks}$  est un polynôme de degré  $k$  en  $\lambda = q^{\frac{1}{2}+is} + q^{\frac{1}{2}-is}$ , on en déduit que  $\hat{\varphi}$  est un polynôme en  $\lambda$  de degré au plus  $\max(|\text{supp}(\varphi)|)$ . On obtient la formule des traces

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\varphi}(s_j) = \int_{\mathbb{R}/\frac{2\pi}{\log(q)}\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(s) dm_d(s) + \frac{1}{N} \sum_{\gamma} \frac{T(\gamma)}{q^{\frac{\ell(\gamma)}{2}}} \varphi(\ell(\gamma)), \quad (7)$$

où  $\gamma$  parcourt l'ensemble des géodésiques fermées périodiques de  $G$ ,  $\ell(\gamma)$  est la période de  $\gamma$  (et  $T(\gamma)$  sa période primitive), et la mesure  $m_d$  est définie par ses coefficients de Fourier

$$\int_{\mathbb{R}/\frac{2\pi}{\log(q)}\mathbb{Z}} q^{iks} dm_d(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ -\frac{d-2}{2} \frac{1+(-1)^k}{q^{\frac{k}{2}}} & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

La mesure  $m_d$  est la même que celle qui apparaît dans (6), au changement de variable près  $\lambda = q^{\frac{1}{2}+is} + q^{\frac{1}{2}-is}$ . Elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Par convergence au sens de Benjamini-Schramm, le terme de (7) venant des géodésiques orientées tend vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$ . La mesure spectrale limite vient donc de la partie topologique de (7).

Lorsque  $G$  est un graphe aléatoire  $G_N$ , on cherche à étudier l'espérance de la partie géodésique de (7). Soit  $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$  un graphe à  $v$  sommets et  $a$  arêtes, de valence  $\leq d$ . Soient

$$x : V_\Gamma \hookrightarrow \{1, \dots, N\} \quad \text{et} \quad t : D_\Gamma \hookrightarrow \{1, \dots, d\}$$

des étiquettes respectives des sommets et demi-arêtes de  $\Gamma$ . On a

$$\mathbb{P}_N((\Gamma, x, t) \subset G_N) = \frac{(Nd - 2a - 1)!!}{(Nd - 1)!!},$$

en dénombrant les appariements des demi-arêtes qui ne sont pas contraintes par la présence de  $(\Gamma, x, t)$  dans  $G_N$ . De là, il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N \left[ \begin{array}{l} \text{nombre de réalisations} \\ \text{étiquetées de } \Gamma \text{ dans } G_N \end{array} \right] &= \mathbb{P}_N((\Gamma, x, t) \subset G_N) \cdot \#\{\text{étiquetages } (x, t)\} \\ &= \frac{(Nd - 2a - 1)!!}{(Nd - 1)!!} \cdot \#\{\text{étiquetages } (x, t)\}. \end{aligned}$$

Pour obtenir le nombre d'étiquetages  $(x, t)$ , on suppose que  $\Gamma$  n'a pas de feuille (sommet de valence 1), et on introduit la forme de  $\Gamma$ , notée  $F(\Gamma)$ , définie comme le graphe obtenu en retirant tous les sommets de valence 2 de  $\Gamma$ , et dont chaque arête  $e$  est étiquetée par le nombre  $\ell_e$  de sommets qui ont été retirés de  $\Gamma$  sur le chemin correspondant à  $e$ . Maintenant, il y a  $N(N-1)\dots(N-v+1)$  étiquetages possibles de  $V_\Gamma$  dans  $\{1, \dots, N\}$ , et pour chaque étiquetage des sommets, il y a

$$C(F(\Gamma)) \times \prod_{e \in E(F(\Gamma))} (d(d-1))^{\ell_e-1},$$

où  $C(F(\Gamma))$  est le nombre d'étiquetages des arêtes qui partent des sommets de  $F(\Gamma)$ . On obtient finalement l'expression

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_N \left[ \begin{array}{l} \text{nombre de réalisations} \\ \text{étiquetées de } \Gamma \text{ dans } G_N \end{array} \right] &= C(F(\Gamma)) \frac{N^{v-a}}{d^a} \frac{(1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{2}{N}) \cdots (1 - \frac{v-1}{N})}{(1 - \frac{1}{dN})(1 - \frac{3}{dN}) \cdots (1 - \frac{2a-1}{dN})} (d(d-1))^a \\ &= C(F(\Gamma)) N^{v-a} \frac{(1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{2}{N}) \cdots (1 - \frac{v-1}{N})}{(1 - \frac{1}{dN})(1 - \frac{3}{dN}) \cdots (1 - \frac{2a-1}{dN})} (d-1)^a.\end{aligned}$$

On obtient une fraction rationnelle en  $\frac{1}{N}$ . C'est sûrement la justification de l'appellation « méthode polynomiale » (l'autre preuve que l'on comparera à la preuve de Friedman). On remarque encore une fois la présence de l'exposant  $v-a = 1-b(\Gamma)$ . De plus  $v-a = 0$  si et seulement si  $\Gamma$  est un cycle.

On utilisera le résultat suivant pour étudier le comportement asymptotique de cette fraction rationnelle en  $\frac{1}{N}$ .

**Proposition 3.1.** *Posons, pour  $p \in \mathbb{N}$*

$$f_p(x) = (1-x)(1-2x)\cdots(1-px), \quad \text{et} \quad g_p(x) = \frac{1}{f_p}(x).$$

*Alors, il existe deux familles de polynômes  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout  $p$ , les développements de Taylor formels de  $f_p$  et  $g_p$  en 0 soient donnés par*

$$f_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k Q_k(p) \quad \text{et} \quad g_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k R_k(p).$$

*De plus, pour tous  $k, p$ , on a les estimations des coefficients de Taylor*

$$\deg(Q_k) = \deg(R_k) = 2k, \quad |Q_k(p)|, |R_k(p)| \leq k!p^{2k}$$

*et du reste tant que  $xp^2$  est borné*

$$|x^{n+1} \tilde{R}_{n+1}(p)| = O(p^{2(n+1)} x^{n+1} (n+1)!), \quad \text{avec} \quad \tilde{R}_{n+1}(p) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-n-1} R_k(p).$$

Notons  $\gamma_k(G)$  le nombre de géodésiques périodiques primitives de longueur  $k$  dans un graphe  $G$ . Étant donné un graphe  $\Gamma$ , on note  $X_N(\Gamma)$  le nombre de réalisations étiquetées de  $\Gamma$  dans  $G_N$ . On cherche à étudier le comportement asymptotique de  $\mathbb{E}_N(\gamma_k(G_N))$  lorsque  $N$  tend vers l'infini et  $k$  est fixé. En partitionnant l'ensemble des géodésiques périodiques primitives selon leur graphe rempli puis la forme de celui-ci, on obtient les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_N(\gamma_k(G_N)) &= \sum_{\Gamma} \text{Comb}(\Gamma) \mathbb{E}_N(X_N(\Gamma)) \gamma_k(\Gamma) \\ &= \sum_F \text{Comb}(F) \sum_{\vec{\ell} \cdot \vec{m} = k} \mathbb{E}_N(X_N(F(\vec{\ell}))) g(\vec{m}),\end{aligned}$$

où, dans la première ligne,  $\Gamma$  parcourt l'ensemble des graphes de valence au plus  $d$  et avec au plus  $k$  arêtes et  $\text{Comb}(\Gamma)$  est un facteur combinatoire lié au fait que l'on compte plusieurs fois chaque géodésique à cause des symétries du graphe  $\Gamma$ . Dans la deuxième ligne,  $F$  parcourt l'ensemble des formes de graphes, c'est à dire les graphes sans arêtes de valence  $\leq 2$ ,  $\vec{\ell}$  et  $\vec{m}$  sont des vecteurs d'entiers positifs indexés par les arêtes de  $F$  contenant respectivement les longueurs et les multiplicités des arêtes de  $F$  dans la géodésique considérée,  $F(\vec{\ell})$  est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête  $e$  de  $F$  par une chaîne d'arêtes de longueur  $\vec{\ell}(e)$  (autrement dit le graphe rempli par la géodésique),  $g(\vec{m})$  est le nombre de géodésiques primitives de  $F$  de vecteur de multiplicité  $\vec{m}$  (les différents cycles peuvent être parcourus dans des ordres différents) et  $\text{Comb}(F)$  est un facteur combinatoire lié aux

symétries de la forme  $F$ . On observe que la longueur d'une géodésique primitive sur  $F$  est  $\vec{\ell} \cdot \vec{m}$ , d'où le domaine de sommation dans la deuxième ligne. En utilisant la Proposition 3.1, on obtient

$$\mathbb{E}_N(\gamma_k(G_N)) = \sum_F \frac{\text{Comb}(F)}{N^{b(F)-1}} \sum_{\vec{\ell} \cdot \vec{m}=k} g(\vec{m}) \sum_{r=1}^R \left[ \frac{P_r(\ell)}{N^r} (d-1)^\ell + O\left(\frac{\ell^{2(R+1)}}{N^{R+1}} (d-1)^\ell\right) \right]$$

avec  $P_r$  un polynôme de degré  $2r$  et  $\ell = |\vec{\ell}|$ . On a une borne grossière obtenue en remarquant que  $g(\vec{m})$  est au plus le nombre de géodésiques de longueur  $m := |\vec{m}|$  sur  $F$ , donc  $g(\vec{m}) \leq \lambda_F^m$ , où  $\lambda_F$  est la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice de Hashimoto de  $F$ . En utilisant le fait que  $\lambda_F \leq q = d-1$ , et que  $\ell, m \leq k$ , on obtient

$$g(\vec{m}) \leq (d-1)^m \leq (d-1)^k \quad \text{et} \quad (d-1)^\ell \leq (d-1)^k.$$

On peut faire beaucoup mieux en utilisant la relation  $\vec{\ell} \cdot \vec{m} = k$ .

**Définition 3.1 (Dot Convolution).** Soient  $n \in \mathbb{N}$  un entier et  $\vec{\xi} \in \mathbb{N}^n$  fixés. Étant données deux fonctions  $f, g : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , on définit leur dot convolution par

$$f *_{\vec{\xi}} g(k) := \sum_{\substack{\vec{\ell} \cdot \vec{m}=k \\ \vec{\ell} \geq \vec{\xi}}} f(\vec{\ell}) g(\vec{m}),$$

Où l'inégalité  $\vec{\ell} \geq \vec{\xi}$  est définie composante par composante.

**Définition 3.2 (Fonction polyexponentielle).** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  un ensemble fini. On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est polyexponentielle de base  $\Lambda$  s'il existe une famille de polynômes en  $n$  indéterminées  $(p_\beta)_{\beta \in \Lambda^n}$ , telle que pour tout  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n$ , on ait

$$f(\ell) = \sum_{\beta \in \Lambda^n} p_\beta(\ell) \beta_1^{\ell_1} \cdots \beta_n^{\ell_n}.$$

Dans le cas du modèle de configuration, nos fonctions polyexponentielles auront pour base le singleton  $\Lambda = \{q\}$ . Dans le cas du modèle de permutation, la base convenable est  $\Lambda = \{q, -1, 1\}$ .

**Théorème 3.2.** Supposons que  $f$  est une fonction polyexponentielle et qu'il existe  $\rho > 0$  tel que  $g$  satisfait la borne

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sup_{\vec{m} \cdot \vec{\xi} = M} |g(\vec{m})| = O((\rho + \varepsilon)^M).$$

Alors  $f *_{\vec{\xi}} g$  est la somme d'une fonction polyexponentielle et d'un reste dominé par  $(\rho' + \varepsilon)^k$ , avec

$$\rho' = \max(\sqrt{|\Lambda|} \cup \{\rho\}).$$

On va appliquer ce théorème avec les constantes  $\beta_j = q$  et  $\rho = \lambda_F$ . Le reste l'emporte sur le terme polyexponentiel si  $\lambda_F > \sqrt{d-1}$ . Si on veut un développement de  $\mathbb{E}_N(\gamma_k(G_N))$  jusqu'à l'ordre  $R$ , on peut se restreindre aux formes  $F$  dont le rang cyclique  $b(F)$  est au plus  $R+1$  (à cause du facteur  $N^{1-b(F)}$ ). Pour forme de rang cyclique fixé, la plus grande valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice de Hashimoto est obtenue pour le bouquet de  $b(F)$  cercles. En effet, la valeur propre de Perron-Frobenius croît lorsque l'on contracte des arêtes, opération qui permet de ramener n'importe quelle forme à un bouquet de cercles. La matrice de Hashimoto du bouquet de  $b$  cercles est de taille  $2b \times 2b$ , et chaque ligne comporte exactement une entrée nulle et  $2b-1$  entrées égales à 1. On en la majoration  $\lambda_F \leq 2b(F) - 1$ . Ainsi, tant que  $2b(F) - 1 \leq \sqrt{d-1}$ , il est intéressant d'appliquer le théorème Théorème 3.2. Comme  $b(F) \leq R+1$ , il n'y a pas de problème tant que l'on prend

$$R \leq \frac{1}{2}(\sqrt{q} - 1) =: R_c$$

**Corollaire 3.3.** *On a le développement asymptotique suivant à tout ordre  $R$*

$$\mathbb{E}_N(\gamma_k(G_N)) = \sum_{r=0}^R \frac{F_r(k)}{N^r} + O\left(\frac{k^{2(R+1)}}{N^{R+1}}(d-1)^k\right).$$

*De plus, si  $R \leq R_c$ , alors  $F_r$  est une «fonction de Ramanujan»*

$$F_r(k) = p_{2r}(k)(d-1)^k + O\left((d-1+\varepsilon)^{\frac{k}{2}}\right),$$

*avec  $p_{2r}$  un polynôme.*

Écrivons la formule des traces pour obtenir un lien avec le trou spectral. Soit  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction paire à support borné. On pose

$$\hat{\varphi}(s) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi(\ell) e^{i\ell s},$$

On note  $d = \lambda_0^{(N)} \geq \lambda_1^{(N)} \geq \dots \geq \lambda_{N-1}^{(N)}$  les valeurs propres de la matrice d'adjacence de  $G_N$ . On effectue le changement de variable

$$\forall 0 \leq j \leq N-1, \quad \lambda_j = q^{\frac{1}{2}+is_j} + q^{\frac{1}{2}-is_j}.$$

On a la formule

$$\sum_{j=0}^{N-1} \hat{\varphi}(s_j) = N \int \hat{\varphi}(s) dm(s) + \sum_{\gamma} \sum_{n \geq 1} T(\gamma) \frac{\varphi(nT(\gamma))}{q^{n\frac{T(\gamma)}{2}}}, \quad (8)$$

où  $\gamma$  parcourt l'ensemble des géodésiques périodiques primitives de  $G_N$ , valable pour tout graphe  $d$ -régulier. On sait que le nombre de géodésiques périodiques primitives de longueur au plus  $\ell$  dans un graphe à  $N$  sommets est au plus  $N(d-1)^\ell$ . Ainsi, dans la formule (8), la partie de la somme où  $n \geq 2$  est dominée par  $N$ , comme le terme integral, qui est d'ailleurs déterministe. On s'intéresse donc à la partie de la somme où  $n = 1$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N\left(\sum_{j=0}^{N-1} \hat{\varphi}(s_j)\right) &= \mathbb{E}_N\left(\sum_{\gamma} T(\gamma) \frac{\varphi(T(\gamma))}{q^{\frac{T(\gamma)}{2}}}\right) + O(N) \\ &= \sum_{\ell \geq 0} \frac{\ell \varphi(\ell)}{q^{\frac{\ell}{2}}} \left( \sum_{r=0}^R \frac{F_r(\ell)}{N^r} + O\left(\frac{q^\ell \ell^{2(R+1)}}{N^{R+1}}\right) \right) + O(N) \\ &= \sum_{\ell \geq 0} \ell \varphi(\ell) \left[ \sum_{r=0}^R \frac{p_{2r}(\ell) q^{\frac{\ell}{2}}}{N^r} + O(\ell^c) \right] + O(N), \end{aligned} \quad (9)$$

la dernière égalité étant valable si  $R \leq R_c$ . De plus, on a

$$\hat{\varphi}(s_j) = \sum_{\ell} \varphi(\ell) q^{is_j \ell} \geq \varphi(L) q^{|\text{Im}(s_j)|L},$$

où  $L$  est tel que le support de  $\varphi$  est inclus dans  $[-L, L]$ . On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_N\left(\sum_{j=0}^{N-1} \hat{\varphi}(s_j)\right) &\geq \varphi(L) \mathbb{E}_N(q^{| \text{Im}(s_1)| L}) \\ &\geq \varphi(L) q^{L \varepsilon_0} \mathbb{P}(| \text{Im}(s_1)| \geq \varepsilon_0).\end{aligned}$$

On cherche à montrer que pour tout  $\varepsilon_0$ , on a  $\mathbb{P}(| \text{Im}(s_1)| \geq \varepsilon_0) \rightarrow 0$  lorsque  $N$  tend vers l'infini. Pour cela, il suffit de montrer que (9) est sous-exponentiel en  $L$ . Choisissons une fonction test  $\varphi$  judicieuse [Fri08, Chapter 11, A Sidestepping Lemma]. On considère l'opérateur

$$\mathcal{D} := a + a^* - \left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right) \text{Id} \quad (10)$$

agissant sur les fonctions test  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $a$  est l'opérateur de translation  $\varphi \mapsto \varphi(1 + \cdot)$ , et  $a^*$  son adjoint, qui translate dans l'autre sens. On applique la formule des traces à  $\mathcal{D}^m \varphi$  au lieu de  $\varphi$ , de sorte que

$$\widehat{\mathcal{D}^m \varphi}(s) = \left(q^{is} + q^{-is} - \left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^m \hat{\varphi}(s).$$

Prenons  $m$  pair fixé. En utilisant un procédé de sommation d'Abel, on obtient

$$\sum_{\ell \geq 0} \ell \mathcal{D}^m \varphi(\ell) \sum_{r=0}^R \frac{p_{2r}(\ell) q^{\frac{\ell}{2}}}{N^r} = \sum_{\ell \geq 0} \varphi(\ell) \sum_{r=0}^R \mathcal{D}^m \left( \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_+} \frac{\ell p_{2r}(\ell) q^{\frac{\ell}{2}}}{N^r} \right) + O(N + L)$$

Finalement, en prenant  $m$  assez grand, comme les  $p_{2r}$  sont des polynômes, on obtient le résultat suivant

$$\mathbb{E}_N\left(\sum_{j=0}^{N-1} \widehat{\mathcal{D}^m \varphi}(s_j)\right) = O\left(N + L + \frac{L^c q^{\frac{L}{2}}}{N^{R+1}} \|\varphi\|\right), \quad \|\varphi\| := \sum_{\ell \geq 0} \ell |\varphi(\ell)| q^{\frac{\ell}{2}}. \quad (11)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_N\left(\sum_{j=0}^{N-1} \widehat{\mathcal{D}^m \varphi}(s_j)\right) &= \mathbb{E}_N\left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(q^{is_1} + q^{-is_1} - \left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^m \hat{\varphi}(s_j)\right) \\ &\geq q^{\varepsilon_0 L} \mathbb{P}(| \text{Im}(s_1)| \geq \varepsilon_0).\end{aligned} \quad (12)$$

En combinant (11) et (12) et en choisissant  $L = 2(R + 2) \log(N)$ , de sorte que  $q^{\frac{L}{2}} = N^{R+2}$ , on obtient

$$\mathbb{P}(| \text{Im}(s_1)| \geq \varepsilon_0) = O\left(L^c q^{-2\varepsilon_0(R+2)\log(N)} N\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{si } \varepsilon_0 > \frac{1}{2(R + 2)}.$$

Si le développement asymptotique de  $\mathbb{E}_N(\gamma_k(G_N))$  était valable pour tout ordre  $R$ , on pourrait prendre  $R$  arbitrairement grand et conclure que  $\mathbb{P}(| \text{Im}(s_1)| \geq \varepsilon_0)$  tend vers 0 plus rapidement que n'importe quelle puissance de  $N$ , pour tout  $\varepsilon_0 > 0$ . On se rend compte que ce n'est pas le cas, par exemple en évaluant la probabilité qu'une configuration apparie complètement toutes les demi-arêtes de deux sommets donnés. Le graphe obtenu n'est alors pas connexe, donc il n'y a pas de trou spectral. La probabilité de cette configuration n'est pas dominée par toutes les puissances de  $N$ . Friedman a même montré le résultat suivant.

**Corollaire 3.4.** *Il existe un entier  $r \leq C\sqrt{d} \log d$  tel que  $F_r$  n'est pas une fonction de Ramanujan.*

On peut néanmoins toujours obtenir une information intéressante pour  $R_c \leq r < \frac{q-1}{2}$ . En effet, on a le développement asymptotique

$$F_r(\ell) = p_{2r}(\ell) q^\ell + O(\ell^c (2r + 1)^\ell),$$

la borne  $2r + 1$  étant atteinte pour le bouquet de  $r$  cercles.

En écrivant

$$\hat{\varphi}(s) = \varphi(0) + \sum_{\ell=1}^L \varphi(\ell) T_\ell \left( \frac{\lambda}{q^{1/2}} \right) = P \left( \frac{\lambda}{q^{1/2}} \right),$$

avec  $T_\ell$  le polynôme de Tchebychev défini par  $T_\ell(2 \cos x) = 2 \cos(\ell x)$  et  $P$  un polynôme de degré  $L$ , la formule des traces s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N \left( \sum_j \hat{\varphi}(s_j) \right) &= \mathbb{E}_N \left( \operatorname{Tr} P \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right) \\ &= N \int \hat{\varphi}(s) dm(s) + \sum_{r=0}^R \frac{1}{N^r} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \ell F_r(\ell) \varphi(\ell) q^{-\frac{\ell}{2}} + \frac{1}{N^{R+1}} \tilde{R}_{R+1}(\varphi), \end{aligned} \tag{13}$$

où la mesure  $m$  est la mesure de Kesten-McKay et le reste  $\tilde{R}_{R+1}$  est une forme linéaire en  $\varphi$ . On note, pour  $0 \leq r \leq R$ ,

$$\Phi_r : \varphi \mapsto \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \ell F_r(\ell) \varphi(\ell) q^{-\frac{\ell}{2}}$$

la forme linéaire associée au terme d'ordre  $\frac{1}{N^r}$  de la formule des traces (13). On a alors une décomposition  $\Phi_r = \delta_r + \nu_r$ , avec

$$\delta_r(\varphi) = \sum_{\ell} \ell p_{2r}(\ell) \varphi(\ell) q^{\frac{\ell}{2}} \quad \text{et} \quad \nu_r(\varphi) = \begin{cases} \sum_{\ell} \varphi(\ell) O(\ell^c) & \text{si } r \leq R_c \\ \sum_{\ell} \varphi(\ell) O\left(\ell^c \left(\frac{2r+1}{q^{1/2}}\right)^{\ell}\right) & \text{si } R_c \leq r < \frac{q-1}{2}. \end{cases}$$

Enfin, le reste  $\tilde{R}_{R+1}$  est de la forme

$$\tilde{R}_{R+1}(\varphi) = \sum_{\ell} \ell^{2(R+1)} \varphi(\ell) O(q^{\ell/2}). \tag{14}$$

On peut aussi voir  $\delta_r, \nu_r$  et  $\tilde{R}_{R+1}$  comme des formes linéaires du polynôme  $P$ .

**Proposition 3.5.** *La forme linéaire  $\delta_r$  est la somme d'une combinaison linéaire des dérivées de  $P$  en  $\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}$  jusqu'à l'ordre  $2r$ , et d'une distribution  $\mu_r(P)$  (au sens de Laurent Schwartz) supportée dans  $[-2, 2]$  et d'ordre au plus  $2(r+1)$ .*

**Exercice 3.1.** Démontrer la Proposition 3.5 (analyse de Fourier). Ainsi,  $\delta_r$  est une distribution qui s'écrit comme la somme d'une masse de Dirac en  $\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $2r$ , et d'une distribution supportée dans  $[-2, 2]$ .

**Proposition 3.6.** *Tant que  $r < R_c$ ,  $\nu_r$  est une distribution supportée dans  $[-2, 2]$ .*

Encore une fois, on peut démontrer cette proposition par analyse de Fourier. Ces résultats sont déjà démontrés par Friedman. La différence avec la méthode polynomiale réside dans la manière de traiter le reste. Dans la méthode de Friedman, on se contente de la borne à croissance exponentielle (14), alors que dans la méthode polynomiale, on utilise le résultat plus fort suivant.

**Théorème 3.7 ([Che+25]).** *On a la majoration suivante pour le reste.*

$$\tilde{R}_{R+1}(\varphi) \leq \|P\|_{C^{4R+9}([-q+1, q+1])}.$$

*En particulier,  $\tilde{R}_{R+1}$  est une distribution d'ordre  $4R+9$ . De plus, pour  $r \geq R_c$ ,  $\nu_r$  est une distribution d'ordre  $4R+5$*

**Remarque 3.1.** Dans la méthode polynomiale,  $R = 0$  donne déjà la convergence forte. Au contraire, dans la méthode de Friedman, l'idée est de prendre  $R$  le plus grand possible pour obtenir la convergence forte. Dans [Fri91], la méthode s'arrête à  $R = R_c$ . Dans [Fri08], on se débarrasse de mauvais graphes « tangles », ce qui permet de prendre  $R$  arbitrairement grand.

### 3.1.2. Conclusion de Friedman

Considérons l'opérateur

$$\mathcal{D} := \sqrt{q}(a + a^*) - (q + 1) \text{Id},$$

égal à  $\sqrt{q}$  fois celui défini par (10). Notons  $\psi = \mathcal{D}^{2R+1}\varphi$ . On a

$$\hat{\psi}(s) = (\lambda(s) - (q + 1))^{2R+1}\hat{\varphi}(s),$$

de sorte que toutes les dérivées de  $\hat{\psi}$  en  $q + 1$  s'annulent jusqu'à l'ordre  $2R + 1$ . On a donc  $\delta_r(\psi) = 0$ . La formule des traces appliquée à  $\psi$  donne donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N\left(\sum_j \hat{\psi}(s_j)\right) &= N \int \hat{\psi}(s) dm(s) + \sum_{r=0}^R \frac{1}{N^r} \nu_r(\psi) + \frac{1}{N^{R+1}} \tilde{R}_{R+1}(\psi) \\ &= O(N) + O(1) + O\left(\frac{1}{N^{R+1}} (L^{2R+1} \|\varphi\|_\infty q^{L/2})\right), \end{aligned}$$

où  $L$  désigne toujours une borne du support de  $\varphi$ . De plus, par positivité de  $\hat{\varphi}$ , tous ses coefficients sont positifs, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N\left(\sum_j \hat{\psi}(s_j)\right) &= \mathbb{E}_N\left(\sum_j (\lambda_j - (q + 1))^{2R+1} \hat{\varphi}(s_j)\right) \\ &\geq \mathbb{E}_N((\lambda_1 - (q + 1))^{2R+1} \hat{\varphi}(s_1)) \\ &\geq \eta^{2R+1} q^{L/2} \mathbb{P}\left(\alpha \leq \text{Im } s_1 \leq \frac{1}{2} - \eta\right), \end{aligned}$$

avec  $\eta > 0$  fixé. En imposant  $|\varphi| \leq 1$ , on obtient donc la majoration

$$\mathbb{P}\left(\alpha \leq \text{Im } s_1 \leq \frac{1}{2} - \eta\right) \lesssim \left(N + \frac{L^{2R+1}}{N^{R+1} q^{L/2}}\right) \frac{q^{-\alpha L}}{\eta^{2R+1}}.$$

En choisissant  $L = 2(R + 2) \log_q(N)$ , et  $\alpha > \frac{1}{2(R+2)}$ , il vient

$$\mathbb{P}\left(\alpha \leq \text{Im } s_1 \leq \frac{1}{2} - \eta\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0.$$

La condition supplémentaire  $\text{Im } s_1 \leq \frac{1}{2} - \eta$  n'est pas gênante, car il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\mathbb{P}(\lambda_1 \geq (q + 1) - \eta) = O\left(\frac{1}{N^{d/2-1}}\right).$$

Pour  $\eta = 0$ , on peut montrer par une méthode de dénombrement (cf. cours de l'année dernière) que

$$\mathbb{P}(\lambda_1 = q + 1) = \mathbb{P}(G_N \text{ non connexe}) = O\left(\frac{1}{N^{d/2-1}}\right).$$

### 3.1.3. Conclusion par la méthode polynomiale

On prend  $R = 0$ . On exprime tout en fonction du polynôme  $P$ . On a,

$$\mathbb{E}_N \left( \text{Tr } P \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right) = N \int_{-2}^2 P(x) d\tilde{m}(x) + \delta_0(P) + \nu_0(P) + \frac{1}{N} \tilde{R}_1(P). \quad (15)$$

où  $A_N$  désigne toujours la matrice d'adjacence de  $G_N$  et  $\tilde{m}$  la mesure de Kesten-McKay. Par densité des polynômes dans l'espace  $C_c^r$ , on peut remplacer  $P$  dans (15) par toute fonction  $h \in C_c^r([-q+1, q+1])$ , où  $r$  est l'ordre maximal des distributions apparaissant dans cette équation. On veut montrer que la probabilité que toutes les valeurs propres de  $A_N$  (sauf la valeur propre triviale  $\lambda_0 = d$ ) soient dans l'intervalle  $[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$  tend vers 1 lorsque  $N$  tend vers l'infini. Le changement de variable  $x = \frac{\lambda}{\sqrt{q}}$  envoie  $[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$  sur  $[-2, 2]$  et  $d$  sur  $b := q^{1/2} + q^{-1/2}$ . On fixe  $\varepsilon, \eta > 0$  petits, et on prend une fonction test  $h$  à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 2 + \frac{\varepsilon}{2} \text{ ou } x = b \\ 1 & \text{si } x \in [2 + \varepsilon, b - \eta] \cup [-b, -2 - \varepsilon]. \end{cases}$$

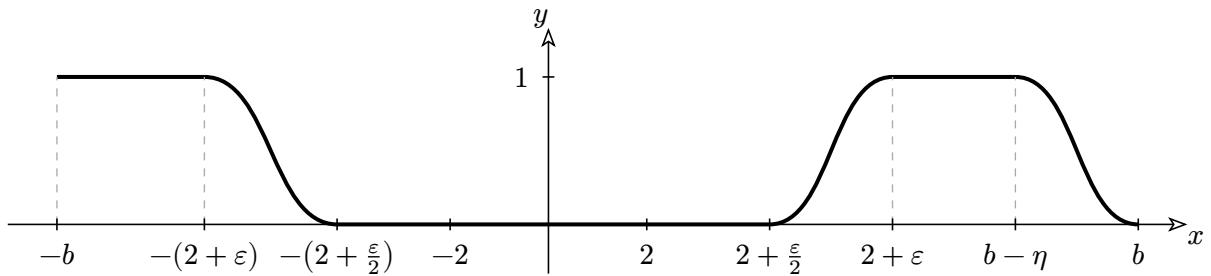


Fig. 1. – Graphe de la fonction test  $h$

Par construction,  $\nu_0(h) = 0$  car  $h$  est nulle sur  $[-2, 2]$  et  $\nu_0$  est supportée dans cet intervalle d'après la Proposition 3.6. De même, la Proposition 3.5 montre que  $\delta_0(h) = 0$ . Enfin, on a

$$\int_{-2}^2 h(x) d\tilde{m}(x) = 0.$$

L'équation (15) appliquée à  $h$  s'écrit donc

$$\mathbb{E}_N \left( \text{Tr } h \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right) = \frac{1}{N} \tilde{R}_1(h) \leq \frac{\|h\|_{C^9}}{N} \leq \frac{1}{\min(\varepsilon, \eta)^9 N},$$

puisque  $\tilde{R}_1$  est une distribution d'ordre 9 d'après le Théorème 3.7. D'autre part, par définition de  $h$ , on a

$$\mathbb{E}_N \left( \text{Tr } h \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right) \geq \mathbb{P}(\lambda_1 \in [-b, -(2 + \varepsilon)] \cup [2 + \varepsilon, b - \eta]).$$

On conclut que

$$\mathbb{P}(\lambda_1 \in [-b, -(2 + \varepsilon)] \cup [2 + \varepsilon, b - \eta]) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0.$$

Comme précédemment, la contrainte faisant intervenir  $\eta > 0$  n'est pas gênante, et on obtient encore une fois la convergence forte souhaitée.

### 3.1.4. Raffinements obtenus par la méthode polynomiale (d'après [Che+25])

Pour  $r \geq R_c$ , la distribution  $\nu_r$  est supportée par

$$|x| \leq \frac{2r+1}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{2r+1} =: x_r.$$

En choisissant comme fonction test similaire à celle décrite par la Fig. 1, mais en remplaçant 2 par  $x_r$ , on obtient le raffinement suivant :

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\lambda_1|}{\sqrt{q}} \in [x_r - \varepsilon, x_r + \varepsilon]\right) \leq \frac{\|h\|_{C^{4r+9}}}{N^{r+1}} \lesssim \frac{1}{\varepsilon^{4r+9} N^{r+1}}.$$

On peut d'ailleurs montrer que cette estimation est optimale.

### 3.1.5. Comment Friedman a réussi à dépasser la valeur $R_c$

L'idée est de modifier légèrement le modèle de graphe aléatoire pour éliminer les « tangles » et ainsi faire en sorte que les  $F_r$  soient des fonctions de Ramanujan même pour  $r \geq R_c$ . On rappelle que ce n'est pas le cas pour le modèle de configuration (ni pour le modèle de permutations d'ailleurs). On veut montrer que les  $F_r$  sont des fonctions de Ramanujan en utilisant le Théorème 3.2. Quand nous avons applié ce théorème, la borne

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sup_{\vec{m} \cdot \vec{\xi} = M} |g(\vec{m})| = O((\rho + \varepsilon)^M)$$

donnait lieu à un reste dominant, empêchant la méthode de fonctionner, dès que  $R > R_c$ . Cette condition est équivalente à  $\rho > \sqrt{q}$ , où  $\rho$  désigne la valeur propre dominante de la matrice de Hashimoto du graphe rempli  $\Gamma$  de  $G_N$ . Dans la méthode de Friedman, le développement limité à l'ordre  $R$  de la formule des traces ne fait intervenir que des graphes remplis de rang cyclique au plus  $R + 1$ . On a vu que le fait de subdiviser une arête en deux ne change pas le rang cyclique, et fait diminuer la valeur propre dominante de la matrice de Hashimoto. Reprenons les notations de la Définition 3.1. On peut montrer que pour chaque forme  $F$  il existe  $\vec{\xi}$  tel que pour tout  $\vec{\ell} \geq \vec{\xi}$ , on ait  $\rho(F(\vec{\ell})) \leq \sqrt{q}$ . Comme il n'y a qu'un nombre fini de formes, on en déduit que l'ensemble des graphes remplis  $\Gamma$  de rang cyclique au plus  $R + 1$  et tels que  $\rho(\Gamma) > \sqrt{q}$  est fini. On appelle « tangles » ces graphes. Friedman a montré que la probabilité que  $G_N$  contienne un tangle tend vers 0 lorsque  $N$  tend vers l'infini. On peut donc appliquer la méthode de développement de la formule des traces au modèle de graphe aléatoire de configurations conditionné à ne pas contenir de tangle, et en déduire la convergence forte souhaitée.

## 3.2. Méthode polynomiale

Dans l'article, détails faits pour le modèle de permutation. Ici, on continue avec le modèle de configurations.

### 3.2.1. Notations et Rappels

$G_N = (V_N, E_N)$  désigne un graphe aléatoire avec  $N = |V_N|$  sommets. On considère une fonction test  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  paire à support dans  $[-L, L]$ . On note

$$\hat{\varphi}(s) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi(\ell) q^{i\ell s} = \varphi(0) + \sum_{\ell=1}^L \varphi(\ell) (q^{i\ell s} + q^{-i\ell s}) = \varphi(0) + \sum_{\ell=1}^L \varphi(\ell) T_\ell \left( \frac{\lambda(s)}{\sqrt{q}} \right)$$

sa transformée de Fourier, où  $T_\ell$  est le polynôme de Tchebychev de degré  $\ell$  défini par la relation

$$T_\ell(2 \cos \theta) = 2 \cos(\ell \theta) \iff T_\ell(t + t^{-1}) = t^\ell + t^{-\ell}. \quad (16)$$

et  $\lambda(s) = q^{is} + q^{-is}$ . On notera également  $X = \frac{\lambda(s)}{\sqrt{q}}$ . Ainsi,  $\hat{\varphi}(s)$  est un polynôme  $P$  en  $X$  de degré  $L$ , et les  $\varphi(\ell)$  sont les coefficients de  $\hat{\varphi}(s)$  dans la base des polynômes de Tchebychev ( $T_\ell$ ). On a vu l'existence des développements asymptotiques suivants.

**Théorème 3.8.** Notons  $A_N$  la matrice d'adjacence du graphe  $G_N$ . Alors, pour tout entier  $R \geq 0$ , il existe des formes linéaires  $\mu_0, \dots, \mu_n$  et  $\tilde{R}_{R+1,N} \in \mathbb{C}[X]^*$  telles que

$$\mathbb{E}_N \left[ \text{Tr } P \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right] = N \int_{-2}^2 P(x) dm(x) + \sum_{r=0}^R \frac{1}{N^r} \mu_r(P) + \frac{1}{N^{R+1}} \tilde{R}_{R+1,N}(P) \quad (17)$$

où  $m$  désigne la mesure de Kesten-McKay.

**Remarque 3.2.** Dans l'article [Che+25], ils utilisent la trace normalisée  $\text{Tr}_N = \frac{1}{N} \text{Tr}$ . Dans ce cas, le développement asymptotique (17) s'écrit

$$\mathbb{E}_N \left[ \text{Tr}_N P \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right] = \int_{-2}^2 P(x) dm(x) + \sum_{r=0}^R \frac{1}{N^{r+1}} \mu_r(P) + \frac{1}{N^{R+2}} \tilde{R}_{R+1,N}(P).$$

Il y a donc un décalage d'une puissance de  $N$  entre les deux formulations.

On a également vu (Proposition 3.5 et Proposition 3.6) que l'on peut écrire  $\mu_r = \delta_r + \nu_r$ , avec

$$\delta_r(P) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi(\ell) \left( q^{\frac{\ell}{2}} + q^{-\frac{\ell}{2}} \right) P_r(\ell) \quad \text{et} \quad \nu_r(P) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi(\ell) c_r(\ell).$$

Dans cette expression,  $P_r$  est un polynôme de degré au plus  $4r$ . Ainsi,  $\delta_r$  est une combinaison linéaire de la masse de Dirac en  $x_* = \frac{\lambda_0}{q} = \sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $4r$ . En particulier, on a  $\text{supp } \delta_r = \{x_*\}$ . De plus, pour  $0 \leq r \leq R_c = \frac{\sqrt{q}-1}{2}$ , on a  $|c_r(\ell)| = O(\ell^{4r})$ , donc  $\nu_r$  est une distribution d'ordre au plus  $4r+1$ . Pour  $R_c < r < \frac{q}{2}-1$ , on a seulement la majoration  $|c_r(\ell)| \leq \ell^{4r} (2r+1)^\ell q^{-\ell/2}$ . Enfin, pour  $r > \frac{q}{2}-1$ , on a  $|c_r| \leq \ell^{4r} q^{\ell/2}$ .

Pour ce qui concerne le reste  $\tilde{R}_{R+1,N}$ , on ne peut pour l'instant pas dire mieux que

$$\tilde{R}_{R+1,N}(P) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi(\ell) d_{R+1,N}(\ell), \quad \text{avec } |d_{R+1,N}(\ell)| \leq \ell^{4(R+1)} q^{\ell/2}. \quad (18)$$

### 3.2.2. Le reste est une distribution

Pour l'instant, la borne (18) ne permet pas d'affirmer que  $\tilde{R}_{R+1,N}$  est une distribution. Dans le cours précédent, on a admis le Théorème 3.7, qui garantit que c'est le cas, et nous avons vu que, combiné avec la Proposition 3.6, on pouvait en déduire la convergence forte. On se propose donc ici de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 3.9.** Pour tout  $R \geq 0$ ,

- (i)  $\tilde{R}_{R+1,N}(P)$  est une distribution d'ordre au plus  $4(R+2)+1 = 4R+9$  de support inclus dans  $[-x_*, x_*]$ .
- (ii)  $\mu_r$  est une distribution d'ordre au plus  $4(r+1)+1 = 4r+5$  de support inclus dans  $[-x_*, x_*]$ , pour tout  $0 \leq r \leq R$ .
- (iii) Pour  $r \leq R_c$ , le support de  $\nu_r$  est inclus dans  $[-2, 2]$ .
- (iv) Pour  $R_c < r \leq \frac{q}{2}-1$ , le support de  $\nu_r$  est inclus dans  $[-x_r, x_r]$ , où  $x_r = \frac{2r+1}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{2r+1}$

#### 3.2.2.1. Démonstration de (i) et (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iv).

On admet le résultat général suivant sur les distributions.

**Proposition 3.10.** Soit  $\nu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  une distribution à support compact. Alors,

$$\text{supp } \nu \subset [-\rho, \rho], \quad \text{où } \rho := \limsup_{L \rightarrow +\infty} |\nu(x^L)|^{1/L}.$$

Exprimons le monôme  $X^L$  dans la base des polynômes de Tchebychev.

$$X^L = \sum_{\ell=0}^L \varphi_L(\ell) T_\ell(X), \quad \text{avec } \varphi_L(\ell) \geq 0 \quad \forall 0 \leq \ell \leq L.$$

Si  $R_c < r \leq \frac{q}{2} - 1$ , on a donc la majoration

$$\begin{aligned} |\nu_r(X^L)| &\leq \sum_{\ell=0}^L \varphi_L(\ell) |\nu_r(T_\ell)| \leq \sum_{\ell=0}^L \varphi_L(\ell) (2r+1)^\ell q^{-\ell/2} \ell^{4r+1} \\ &\leq L^{4r+1} \sum_{\ell=0}^L \varphi_L(\ell) \left( \left( \frac{2r+1}{\sqrt{q}} \right)^\ell + \left( \frac{\sqrt{q}}{2r+1} \right)^\ell \right) \\ &\leq L^{4r+1} \sum_{\ell=0}^L \varphi_L(\ell) T_\ell(x_r) = L^{4r+1} x_r^L. \end{aligned}$$

En appliquant la Proposition 3.10, on en (iv). La même preuve montre (iii) dans le cas  $r \leq R_c$ .

### 3.2.2.2. Démonstration de (i) et (ii).

#### 3.2.2.2.1.

L'expression  $\mathbb{E}_N[\text{Tr } P(A_N)]$  est une fraction rationnelle en  $\frac{1}{N}$ . En effet, si  $B$  désigne la matrice de Hashimoto de  $G_N$ , on a vu que

$$\mathbb{E}_N[\text{Tr } P(B^L)] = \frac{P_L(\frac{1}{N})}{Q_L(\frac{1}{dN})},$$

avec  $\deg P_L \leq L$  et  $Q_L(X) = (1-X)(1-3X)\cdots(1-(2L-1)X)$ . D'après la relation

$$\text{Tr} \left( \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right)^L \right) = \sum_{j=1}^N (q^{is_j} + q^{-is_j})^L = \sum_{\substack{0 \leq \ell \leq L \\ \ell \equiv L \pmod{2}}} \binom{L}{\frac{L+\ell}{2}} \left( \text{Tr } B^L - \frac{N(d-2)}{2} \right),$$

on en déduit que

$$\mathbb{E}_N[\text{Tr}_N A_N^L] = \frac{\tilde{P}_L(\frac{1}{N})}{Q_L(\frac{1}{dN})}, \quad \text{avec } \deg \tilde{P}_L \leq L+1.$$

On rappelle que dans cette dernière expression,  $\text{Tr}_N = \frac{1}{N} \text{Tr}$  désigne la trace normalisée. Il suit que si  $h \in \mathbb{C}_L[X]$  est un polynôme de degré au plus  $L$ , il existe un polynôme  $\Phi_h$  de degré au plus  $L+1$  tel que

$$\mathbb{E}_N \left[ \text{Tr}_N h \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right] = \frac{\Phi_h(\frac{1}{N})}{Q_L(\frac{1}{dN})} =: \psi_h \left( \frac{1}{N} \right).$$

On remarque que le dénominateur  $Q_L$  est indépendant de  $h$ , et que  $\psi_h$  dépend linéairement de  $h$ . Comme  $\Psi_h$  est une fraction rationnelle, le développement asymptotique en puissances de  $\frac{1}{N}$  de  $\psi_h(\frac{1}{N})$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$  n'est autre que le développement en série de Taylor de  $\psi_h$  en 0.

$$\psi_h \left( \frac{1}{N} \right) = \sum_{r=0}^{R+1} \frac{\psi_h^{(r)}(0)}{N^r r!} + \frac{1}{N^{R+2}} \int_0^1 \frac{(1-t)^{R+1}}{(R+1)!} \psi_h^{(R+2)} \left( \frac{t}{N} \right) dt.$$

### 3.2.2.2.2.

Comme la matrice d'adjacence  $A_N$  est auto-adjointe et que son spectre est inclus dans  $[-\sqrt{q}x_*, \sqrt{q}x_*]$ , on a la borne suivante

$$\left| \Psi_h\left(\frac{1}{N}\right) \right| = \left| \mathbb{E}_N \left[ \text{Tr}_N h\left(\frac{A_N}{\sqrt{q}}\right) \right] \right| \leq \|h\left(\frac{A}{\sqrt{q}}\right)\| \leq \|h\|_{C^0([-x_*, x_*])},$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme d'opérateur.

### 3.2.2.3. Inégalité des frères Markov

**Théorème 3.11.** Soient  $h \in \mathbb{C}_L[X]$ , et  $a > 0$ . Alors, pour tout  $x \in [0, a]$  et tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a

$$|h^{(m)}(x)| \leq \frac{1}{(2m-1)!!} \left(\frac{L^2}{a}\right)^m \|h\|_{C^0([0, a])}.$$

**Corollaire 3.12.** Si  $f, g \in \mathbb{C}_L[X]$  et  $a > 0$  tel que  $g$  ne s'annule pas sur  $[0, a]$ , alors pour tout  $x \in [0, a]$  et  $m \in \mathbb{N}$ , la fraction rationnelle  $\Psi := \frac{f}{g}$  vérifie

$$|\Psi^{(m)}(x)| \leq m! \left(\frac{5cL^2}{a}\right)^m \|\Psi\|_{C^0([0, a])}, \quad \text{où } c = \sup_{x, y \in [0, a]} \left| \frac{g(x)}{g(y)} \right|.$$

**Définition 3.3.** Soient  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $I \subset J$  et  $\varepsilon > 0$ . On dit que  $I$  est  $\varepsilon$ -dense dans  $J$  si

$$J \subset I + [-\varepsilon, \varepsilon].$$

**Théorème 3.13.** Soient  $a > 0$ ,  $h \in \mathbb{C}_L[X]$ , et  $I \subset [0, a]$  un sous-ensemble  $\frac{a}{4L^2}$ -dense dans  $[0, a]$ . Alors,

$$\|h\|_{C^0([0, a])} \leq 2 \sup_{x \in I} |h(x)|.$$

**Proposition 3.14.** Soit  $L \in \mathbb{N}$ . Soit  $a \leq \frac{1}{2(L+1)^2}$  un réel. Alors, l'ensemble  $I := \{x \in [0, a] \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{N}\}$  est  $\frac{a}{4(L+1)^2}$ -dense dans  $[0, a]$ .

*Démonstration.* En effet, la plus grande distance entre deux éléments consécutifs de  $I$  est majorée par  $\frac{1}{(\frac{1}{a})(\frac{1}{a}+1)} = \frac{a^2}{a+1} \leq \frac{a}{2(L+1)^2}$ .  $\square$

### 3.2.2.4. Conclusion

En appliquant ces résultats à la fraction rationnelle  $\Psi_h$ , dont le numérateur et le dénominateur sont de degré au plus  $L+1$ , on obtient, en prenant  $a = \frac{1}{2(L+1)^2}$

$$\|\Psi_h^{(m)}\|_{C^0([0, a])} \leq m! (10c(L+1)^4)^m \sup_{N \geq 2(L+1)^2} \left| \Psi_h\left(\frac{1}{N}\right) \right|,$$

où

$$c = \sup_{x, y \in [0, a]} \left| \frac{Q_L(x)}{Q_L(y)} \right| \leq \sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}}.$$

En utilisant la borne de la Section 3.2.2.2, il vient

$$\|\Psi_h^{(m)}\|_{C^0\left([0, \frac{1}{2(L+1)^2}]\right)} \leq C_m (L+1)^{4m} \|h\|_{C^0([-x_*, x_*])},$$

où  $C_m$  est une constante qui ne dépend que de  $m$ . De là, la définition de  $\mu_r$  donne

$$|\mu_r(h)| \leq C'_r (L+1)^{4(r+1)} \|h\|_{C^0([-x_*, x_*])}.$$

Cela implique (exercice, développer  $h$  dans la base  $T_\ell(\frac{X}{x_*})$  + analyse de Fourier) que

$$|\mu_r(h)| \leq C''_r L^{4(r+1)+1} \|h\|_{C^{4(r+1)+1}([-x_*, x_*])},$$

ce qui prouve (ii). Le même raisonnement appliqué à  $\tilde{R}_{R+1,N}$  permet de montrer (i).

**Remarque 3.3.** Si l'on analyse la preuve précédente, on remarque que l'on a utilisé le fait que

$$\|h\|_{C^0[-x_*, x_*]} \geq \mathbb{E}_N \left[ \text{Tr}_N h \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right] = \Psi_h \left( \frac{1}{N} \right) = \sum_{r=0}^R \frac{1}{N^{r+1}} \mu_r(h) + \frac{1}{N^{R+2}} \tilde{R}_{R+1,N}(h),$$

où le membre de droite est le développement de Taylor de  $\Psi_h$  en 0. Dès que les  $\mu_r$  sont des distributions de support compact strictement inclus dans  $[-x_*, x_*]$ , et que  $\tilde{R}_{R+1,N} = O(\|h\|_{C^\alpha})$ , on peut appliquer la méthode polynomiale. On n'a donc pas vraiment besoin que  $\Psi_h$  soit une fraction rationnelle. Voir [MPH25] pour des revêtements aléatoires de surfaces hyperboliques. Par exemple, une condition suffisante pour appliquer la méthode polynomiale à  $R = 0$  (a posteriori) est de savoir que pour tous  $h \in \mathbb{C}_L[X]$  et  $R$  entier, on a

$$\left| \mathbb{E}_N \left[ \text{Tr}_N h \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right] - \mu_{-1}(h) - F_{R,h} \left( \frac{1}{N} \right) \right| \leq \frac{(cR)^{cR} (cL)^{c(L+R)}}{N^{R+2}} \|h\|_{C^0}, \quad (19)$$

où

$$\mu_{-1}(h) = \int_{-2}^2 h dm$$

est la mesure spectrale limite avec  $m$  la mesure de Kesten-McKay, et

$$F_{R,h} = \sum_{r=0}^R \mu_r(h) X^{r+1} \in \mathbb{C}_{R+1}[X].$$

On a donc besoing d'un développement limité à l'ordre  $R$  quelconque pour ensuite appliquer la méthode polynomiale à  $R = 0$ . Montrons que (19) est suffisante. En prenant  $R = L$  et  $N \geq (c'L)^{c'} =: M$ , on trouve

$$\left| \mathbb{E}_N \left[ \text{Tr}_N h \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right] - F_{L,h} \left( \frac{1}{N} \right) \right| \leq \left( \frac{(c'L)^{c'L}}{N^{L+2}} \right) \|h\|_{C^0} \leq \frac{\|h\|_{C^0}}{N^2}.$$

De là, on obtient  $|F_{L,h}(\frac{1}{N})| \leq 2\|h\|_{C^0}$ . Grâce à l'inégalité des frères Markov, on parvient à majorer  $F'$  et  $F''$  sur  $[0, \frac{1}{M}]$  par  $\|h\|_{C^\alpha}$ . Il suit

$$\left| \mathbb{E}_N \left[ \text{Tr}_N h \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right] - \mu_{-1}(h) - \frac{\mu_0(h)}{N} \right| \leq \frac{\|h\|_{C^\alpha}}{N^2}.$$

dès que  $N \geq M$ . Si  $N < M$ , on utilise le fait que  $\mu_0$  est une distribution de support connu pour obtenir

$$\left| \mathbb{E}_N \left[ \text{Tr}_N h \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) \right] - \mu_{-1}(h) - \frac{\mu_0(h)}{N} \right| \leq 2\|h\|_{C^0} + \frac{L^\beta}{N} \|h\|_{C^\alpha} \leq L^{\beta'} \frac{\|h\|_{C^\alpha}}{N^2} \leq \frac{\|h\|_{C^{\beta'+1}}}{N^2}.$$

pour un choix de  $\beta'$  convenable. On a obtenu une majoration de la forme du (i) du Théorème 3.9, pour  $R = 0$  comme attendu.

## 4. Convergence forte des matrices hermitiennes gaussiennes (d'après [HT05])

### 4.1. Vocabulaire des probabilités libres

Soit  $(\mathcal{A}, +, \times, I, *)$  une  $C^*$ -algèbre, c'est à dire une  $\mathbb{C}$ -algèbre associative unitaire de Banach munie d'une involution  $\mathbb{C}$ -antilinéaire  $* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  telle que, pour tous  $a, b \in \mathcal{A}$ , on a

$$(i) \quad (ab)^* = b^*a^*;$$

$$(ii) \quad \|aa^*\| = \|a\|^2.$$

En particulier, il résulte du (i) que  $I^* = I$ .

**Définition 4.1 (Espace de probabilité non commutatif).** *Un état sur  $\mathcal{A}$  est une forme linéaire  $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant les conditions suivantes.*

$$(i) \quad \tau(I) = 1 \text{ (normalisation);}$$

$$(ii) \quad \tau(a^*a) \geq 0 \text{ pour tout } a \in \mathcal{A} \text{ (positivité).}$$

Un espace de probabilité non commutatif est la donnée d'une  $C^*$ -algèbre munie d'un état. Un état  $\tau$  est dit tracial si, pour tous  $a, b \in \mathcal{A}$ , on a  $\tau(ab) = \tau(ba)$ . Il est dit fidèle si, pour tout  $a \in \mathcal{A}$  non nul,  $\tau(a^*a) > 0$ .

**Remarque 4.1.** Un état  $\tau$  est automatiquement continu et de norme  $\|\tau\| = \tau(I) = 1$ . Si  $\tau$  est fidèle, alors pour tout  $a \in \mathcal{A}$  non nul, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau((a^*a)^k)^{\frac{1}{2k}} = \|a\|.$$

**Définition 4.2.** *Un élément  $a \in \mathcal{A}$  est appelé variable aléatoire non commutative. Sa loi est la donnée des moments joints  $\tau(P(a, a^*))$ , où  $P$  décrit l'ensemble des polynômes en deux variables non commutatives. Dans le cas où  $a$  est auto-adjoint, sa loi est déterminée par la famille des moments  $\tau(a^k)$ ,  $k \geq 1$ .*

**Définition 4.3 (Loi semi-circulaire).** *On dit que  $a \in \mathcal{A}$  suit une loi semi-circulaire si  $a$  est auto-adjoint et si, pour tout  $k \geq 1$ , on a*

$$\tau(a^k) = \int_{-2}^2 t^k \frac{\sqrt{4 - t^2}}{2\pi} dt.$$

La notion de liberté est une analogie non commutative de l'indépendance en théorie des probabilités classique.

**Définition 4.4.** *Une famille finie  $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r)$  de sous-algèbres de  $\mathcal{A}$  est dite libre si, pour tout  $k \geq 1$ , pour toute suite d'indices  $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, r\}$  telle que  $j_i \neq j_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq k$  et  $j_k \neq j_1$ , et pour toute collection  $a_i \in \mathcal{A}_{j_i}$ ,  $(1 \leq i \leq k)$  de variables aléatoires centrées (ie.  $\tau(a_i) = 0$  pour  $1 \leq i \leq k$ ), on a*

$$\tau(a_1 a_2 \cdots a_k) = 0.$$

Une famille d'éléments  $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{A}$  est dite libre si les sous- $C^*$ -algèbres engendrées par chacun d'eux forment une famille libre.

### 4.2. Convergence faible et forte en distribution

**Définition 4.5 (Convergence faible et forte en distribution).** Soit  $r \geq 1$  fixé. Soient  $(\mathcal{A}, \tau)$  et  $(\mathcal{A}_N, \tau_N)$ ,  $(N \geq 1)$  des espaces de probabilité non commutatifs. On se donne également  $r$  variables aléatoires non commutatives  $a_1^{(N)}, \dots, a_r^{(N)} \in \mathcal{A}_N$  pour tout  $N \geq 1$ .

(i) On dit que la famille  $\left(a_1^{(N)}, \dots, a_r^{(N)}\right)_{N \geq 1}$  converge faiblement en distribution vers une famille  $(a_1, \dots, a_r) \in (\mathcal{A}, \tau)$  si pour tout polynôme  $P$  en  $2r$  variables non commutatives, on a

$$\tau_N \left( P \left( a_1^{(N)}, \dots, a_r^{(N)}, \left( a_1^{(N)} \right)^*, \dots, \left( a_r^{(N)} \right)^* \right) \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \tau(P(a_1, \dots, a_r, a_1^*, \dots, a_r^*)). \quad (20)$$

(ii) On dit que la famille  $\left( a_1^{(N)}, \dots, a_r^{(N)}, \left( a_1^{(N)} \right)^*, \dots, \left( a_r^{(N)} \right)^* \right)_{N \geq 1}$  converge fortement en distribution vers une famille  $(a_1, \dots, a_r) \in (\mathcal{A}, \tau)$  si elle converge faiblement en distribution vers  $(a_1, \dots, a_r)$  et si, de plus, pour tout polynôme  $P$  en  $2r$  variables non commutatives, on a

$$\left\| P \left( a_1^{(N)}, \dots, a_r^{(N)}, \left( a_1^{(N)} \right)^*, \dots, \left( a_r^{(N)} \right)^* \right) \right\|_{\mathcal{A}_N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \|P(a_1, \dots, a_r, a_1^*, \dots, a_r^*)\|_{\mathcal{A}}. \quad (21)$$

**Remarque 4.2.** Cette définition généralise la notion de convergence faible et forte des matrices aléatoires vue précédemment. En effet, si l'on prend  $r = 1$  et que l'on considère des variables aléatoires auto-adjointes, alors la condition (i) est équivalente à la convergence faible des mesures spectrales, et la condition (ii) est équivalente à la convergence du spectre en topologie de Fell.

### 4.3. Théorème de Haagerup – Thorbjørnsen

Dans la suite, on fixe une famille  $(x_1, \dots, x_r) \in (\mathcal{A}, \tau)$  de variables aléatoires non commutatives libres suivant chacune une loi semi-circulaire.

**Théorème 4.1 ([HT05, Theorem A]).** Soit  $\mathcal{A}_N$  la  $C^*$ -algèbre des matrices de taille  $N \times N$  à coefficients complexes, munie de l'état tracial  $\tau_N = \frac{1}{N} \text{Tr}$  donné par la trace normalisée. Pour tout  $N \geq 1$ , on se donne  $A_1^{(N)}, \dots, A_r^{(N)}$  des matrices hermitiennes aléatoires sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$ , indépendantes, et de même loi gaussienne

$$\exp \left( - \left( \frac{N}{2} \right) \text{Tr}(A^2) \right) dA, \quad \text{où} \quad dA = \prod_{i=1}^N dA_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq N} d\text{Re}(A_{ij}) d\text{Im}(A_{ij})$$

est la mesure de Lebesgue sur l'espace des matrices hermitiennes. Alors, presque sûrement, la famille  $\left( A_1^{(N)}, \dots, A_r^{(N)} \right)_{N \geq 1}$  converge fortement en distribution vers la famille semi-circulaire libre  $(x_1, \dots, x_r)$ .

Autrement dit, il existe un ensemble  $B \subset \Omega$  de mesure pleine (i.e.  $\mathbb{P}(B) = 1$ ) tel que, pour tout  $\omega \in B$ , et tout polynôme  $P$  en  $2r$  en  $2r$  variables non commutatives, (20) et (21) soient vérifiées.

**Remarque 4.3.**

- 1) Il n'est pas nécessaire de supposer que les matrices  $A_i^{(N)}$  et  $A_j^{(M)}$  sont indépendantes pour  $M \neq N$ .
- 2) Comme les matrices  $A_i^{(N)}$  sont hermitiennes, on peut se restreindre aux polynômes en  $r$  variables non commutatives dans (20) et (21). On note d'ailleurs  $\mathbb{C}\langle X_i \rangle_{i \in I}$  l'algèbre des polynômes non commutatifs en les variables  $X_i$ ,  $i \in I$ .
- 3) Pour  $r = 1$  le moment  $\mathbb{E} \left[ \tau_N \left( (A^{(N)})^k \right) \right]$  se calcule explicitement et converge vers le moment  $\tau(x^k)$  de la loi semi-circulaire (voir [Voi91]). Le passage de la convergence de l'espérance à la convergence presque-sûre peut se faire par une estimation des moments (voir [HP00]). La convergence spectrale forte

$$\|A^{(N)}\| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 2$$

peut se faire par un calcul explicite des moments exponentiels  $\mathbb{E} \left[ \tau_N \left( e^{tA^{(N)}} \right) \right]$

### 4.4. Quelques étapes de la preuve de la convergence des normes (21)

On veut montrer que, pour tout  $P \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_r \rangle$ ,

$$\left\| P \left( A_1^{(N)}(\omega), \dots, A_r^{(N)}(\omega) \right) \right\| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \|P(x_1, \dots, x_r)\|. \quad (22)$$

#### 4.4.1. Astuce de linéarisation de Pisier

On admet le résultat suivant (voir [Pis19])

**Théorème 4.2 (Astuce de linéarisation de Pisier).** *Pour montrer (22) pour tout  $P \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_r \rangle$ , il suffit de montrer que pour tout  $m \geq 1$  et pour toutes matrices symétriques hermitiennes  $b_0, \dots, b_r \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C})$ , il existe un ensemble  $B \subset \Omega$  de mesure pleine tel que pour tout  $\omega \in B$ , on ait*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \geq 1, \quad (N \geq N_0 \implies \text{Sp}(H^{(N)}(\omega)) \subset \text{Sp}(h(w)) + ] - \varepsilon, \varepsilon[), \quad (23)$$

où

$$H^{(N)} = b_0 \otimes I_N + \sum_{i=1}^r b_i \otimes A_i^{(N)} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}_N$$

et

$$h = b_0 \otimes I_{\mathcal{A}} + \sum_{i=1}^r b_i \otimes x_i \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}.$$

**Remarque 4.4.** Le Théorème 4.2 permet de prouver une convergence forte presque-sûre. On a un énoncé similaire pour une convergence forte en probabilité [Pis19, Remark 13].

On fixe donc  $m \geq 1$  et des matrices symétriques hermitiennes  $b_0, \dots, b_r \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C})$ , et on se propose de montrer (23) a lieu presque sûrement. La démonstration que l'on donne est basée sur une idée de [FHS06]. Sans perte de généralité, on peut supposer les  $b_i$  symétriques réelles. En effet, dans le cas général, on peut trouver des matrices symétriques réelles  $b'_i \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$  de même spectre que les  $b_i$ . On peut également supposer que les  $b_i$  sont inversibles par densité et continuité du spectre.

#### 4.4.2. Transformée de Stieltjes matricielle

**Définition 4.6.** *Soient  $(\mathcal{B}, \tau_{\mathcal{B}})$  un espace de probabilité non commutatif et  $m \geq 1$  un entier. Pour une variable aléatoire non commutative  $X \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{B}$ , on appelle transformée de Stieltjes matricielle (ou résolvante) de  $X$  l'application*

$$\mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{C}), \quad \lambda \mapsto (I_m \otimes \tau_{\mathcal{B}})((\lambda \otimes I_{\mathcal{B}} - X)^{-1}).$$

Dans la suite, on note  $G$  et  $G_N$  les transformées de Stieltjes matricielles respectives de  $h$  et  $H^{(N)}$ . On définit également  $\bar{G}_N = \mathbb{E}[G_N]$ . Ainsi, d'après la définition précédente, on a, pour tout  $\lambda \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ ,

$$G(\lambda) = (I_m \otimes \tau)((\lambda \otimes I_{\mathcal{A}} - h)^{-1}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$$

et

$$G_N(\lambda) = (I_m \otimes \tau_N)((\lambda \otimes I_N - H^{(N)})^{-1}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}).$$

#### 4.4.3. Demi-espace de Siegel

**Définition 4.7.** *On appelle demi-espace de Siegel, et l'on note  $\text{SH}_m$  l'ensemble des matrices de taille  $m \times m$  symétriques (pas au sens hermitien) et dont la partie imaginaire est définie positive. Pour  $m = 1$ , on retrouve le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}$ .*

**Proposition 4.3.** *Le demi-espace de Siegel  $\text{SH}_m$  est stable par les transformations suivantes :*

- (i)  $Z \mapsto -Z^{-1}$  ;
- (ii)  $Z \mapsto B^T Z B$  pour toute matrice  $B$  inversible réelle ;

(iii)  $Z \mapsto (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$  pour toutes matrices  $A, B, C, D$  réelles de taille  $m \times m$  telles que la matrice par bloc

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$$

soit symplectique, c'est à dire que  $C^\top A$  et  $D^\top B$  sont symétriques et  $D^\top A - B^\top C = I_m$ . On appelle homographie ces transformations.

**Exercice 4.1.** Prouver la Proposition 4.3.

Le demi-espace de Siegel est muni d'une famille de métriques finslériennes (analogue d'une métrique riemannienne, sans imposer aux normes des espaces tangents d'être issues d'un produit scalaire)  $d_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , définies par

$$d_p(Z_1, Z_2) = \inf_{\gamma} \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{p, \gamma(t)} dt,$$

où  $\gamma$  parcourt l'ensemble des chemins de classe  $C^1$  joignant  $Z_1$  à  $Z_2$  et, pour tout  $Z = X + iY \in \mathbb{SH}_m$ , et toute matrice  $W \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ , on a posé

$$\|W\|_{p, Z} = \text{Tr}\left((W_Y^* W_Y)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{avec} \quad W_Y = Y^{-\frac{1}{2}} W Y^{-\frac{1}{2}}.$$

**Exercice 4.2 (Pas facile).** Montrer que les métriques  $d_p$  sont préservées par les homographies du demi-espace de Siegel ((iii) de la Proposition 4.3).

Comme pour le demi-plan de Poincaré, on a une isométrie

$$\mathbb{SH}_m \longrightarrow \mathbb{SD}_m, \quad Z \mapsto (Z - iI_m)(Z + iI_m)^{-1},$$

où  $\mathbb{SD}_m$  est l'ensemble des matrices de taille  $m \times m$  symétriques de norme strictement inférieure à 1.

#### 4.4.4. Méthode de point fixe

On va utiliser une idée venant du lemme de Schwarz-Pick pour les fonctions holomorphes du disque.

**Lemme 4.4 (Schwarz-Pick).** Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe du disque de Poincaré dans lui-même. Alors  $f$  est contractante pour la métrique métrique hyperbolique

$$d_H(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

De plus, le seul cas où  $f$  n'est pas strictement contractante est celui où c'est une transformation de Möbius (donc en particulier une isométrie).

On admet (voir [MS17]) que  $G$  vérifie l'équation

$$\sum_{i=1}^r b_i G(\lambda) b_i G(\lambda) + (b_0 - \lambda) G(\lambda) + I_m = 0.$$

On en déduit que

$$\left( \sum_{i=1}^r b_i G(\lambda) b_i + (b_0 - \lambda) \right) G(\lambda) = -I_m,$$

puis, en posant  $Z(\lambda) = -G(\lambda)$ , il vient

$$Z(\lambda) = \Phi_\lambda(Z(\lambda)), \quad \text{où} \quad \Phi_\lambda(W) = -\left(\sum_{i=1}^r b_i W b_i + (\lambda - b_0)\right)^{-1}.$$

D'après la Proposition 4.3,  $\Phi_\lambda$  est une transformation du demi-espace de Siegel (car on a supposé les matrices  $b_i$  symétriques réelles inversibles).

**Proposition 4.5 (Master equation).** *On a, pour tout  $N$ , l'identité suivante*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^r b_i G_N(\lambda) b_i G_N(\lambda) + (b_0 - \lambda) G_N(\lambda) + I_m\right] = 0. \quad (24)$$

*Idée de la démonstration.* C'est une conséquence de l'identité suivante. Pour toutes variables aléatoires  $X_1, \dots, X_M$  indépendantes suivant une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , on a

$$\forall j \in \{1, \dots, M\}, \quad \sigma^2 \mathbb{E}[\partial_{X_j} f(X_1, \dots, X_M)] = \mathbb{E}[X_j f(X_1, \dots, X_M)],$$

ce qui vient de l'intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

□

#### 4.4.4.1. Inégalité de Poincaré

L'équation (24) n'étant pas linéaire en  $G$ , on ne peut pas intervertir l'espérance et la fonction  $\Phi_\lambda$ . On va donc utiliser une inégalité de concentration pour montrer que  $G_N(\lambda)$  est proche de son espérance  $\bar{G}_N(\lambda)$ . L'inégalité de Poincaré par rapport à la mesure de Lebesgue dit que si  $\Omega \subset \mathbb{R}^M$  est un ouvert borné connexe à bord régulier, et  $u$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  alors

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

où  $\bar{u}$  désigne la moyenne de  $u$  sur  $\Omega$  et  $C > 0$  est une constante ne dépendant que de  $\Omega$ . On a l'inégalité analogue pour la mesure gaussienne  $\nu = \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_M)$  sur  $\mathbb{R}^M$ , et pour  $f : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .

$$\int_{\mathbb{R}^M} |f(x) - \bar{f}|^2 d\nu(x) \leq \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^M} |\nabla f(x)|^2 d\nu(x).$$

Autrement dit, si  $X$  est un vecteur gaussien de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 I_M)$ , alors

$$V(f(X)) \leq \sigma^2 \mathbb{E}[|\nabla f(X)|^2].$$

#### 4.4.4.2. Conséquence

Notons  $C_0 = \|\lambda\|$  et  $C_1 = \|(\text{Im } \lambda)\|^{-1}$ . L'inégalité de Poincaré permet d'obtenir l'estimée suivante

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^r b_i G_N(\lambda) b_i G_N(\lambda)\right] = \sum_{i=1}^r b_i \bar{G}_N(\lambda) b_i \bar{G}_N(\lambda) + O\left(\frac{C_1^4}{N^2}\right).$$

Il suit

$$\left\| \sum_{i=1}^r b_i \bar{G}_N(\lambda) b_i \bar{G}_N(\lambda) + (b_0 - \lambda) \bar{G}_N(\lambda) + I_m \right\| = O\left(\frac{C_1^4}{N^2}\right),$$

puis, en posant  $Z_N(\lambda) = -\bar{G}_N(\lambda)$  et en factorisant par  $Z_N(\lambda)$ ,

$$\|Z_N(\lambda) - \Phi_\lambda(Z_N(\lambda))\| = O\left(\frac{C_1^5}{N^2}\right). \quad (25)$$

#### 4.4.5. Quelques bornes a priori

Pour tous  $\lambda, W \in \mathbb{SH}_m$ , on a  $\|\Phi_\lambda(W)\| \leq C_1$ , donc  $\Phi_\lambda$  envoie le demi-espace de Siegel dans une boule de rayon  $C_1$  pour la norme opérateur. On a également  $\|Z(\lambda)\| \leq C_1$  et  $\|Z_N(\lambda)\| \leq C_1$  pour tout  $N$  et tout  $\lambda \in \mathbb{SH}_m$  d'après les définitions des résolvantes. On montre également que, pour la distance  $d_\infty$  sur  $\mathbb{SH}_m$ ,

$$\begin{aligned} W &\mapsto \sum_{i=1}^r b_i W b_i \quad \text{est contractante ;} \\ W &\mapsto -W^{-1} \quad \text{est une isométrie ;} \\ W &\mapsto W + b_0 \quad \text{est une isométrie } (b_0 \text{ réelle}). \end{aligned}$$

**Proposition 4.6.** *Soit  $Y$  une matrice réelle symétrique définie positive. Si  $\|Y\| \leq K$ , alors pour tout  $v \in \mathbb{R}^m$ , on a*

$$\langle v, (Y + \operatorname{Im} \lambda)v \rangle \geq (1 + c)\langle v, Yv \rangle,$$

$$\text{avec } c = \frac{1}{KC_1}.$$

On en déduit les inégalités suivantes pour  $M \in \mathbb{SH}_m$  et  $Y$  symétrique réelle définie positive.

$$\|(Y + \operatorname{Im} \lambda)^{-1}\| \leq \frac{\|Y^{-1}\|}{1 + c}$$

puis

$$\|(Y + \operatorname{Im} \lambda)^{-1/2} M (Y + \operatorname{Im} \lambda)^{-1/2}\| \leq \frac{\|Y^{-1/2} M Y^{-1/2}\|}{1 + c}. \quad (26)$$

On rappelle que par définition de la distance  $d_\infty$ , si  $\gamma$  est une courbe tracée dans  $\mathbb{SH}_m$ , sa longueur  $\ell_\infty(\gamma)$  pour la métrique  $d_\infty$  vérifie

$$\ell_\infty(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\infty, \gamma(t)} dt = \int_0^1 \|(\operatorname{Im} \gamma(t))^{-1/2} \gamma'(t) (\operatorname{Im} \gamma(t))^{-1/2}\| dt.$$

Supposons de plus que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\|\operatorname{Im} \gamma(t)\| \leq K$ . Alors, d'après (26), on a

$$\ell_\infty(\gamma + \operatorname{Im} \lambda) \leq \frac{\ell_\infty(\gamma)}{1 + c}.$$

#### 4.4.6. Passage de la norme d'opérateur $\|\cdot\|$ à la distance $d_\infty$

En utilisant l'estimée de « quasi point fixe » (25) en norme d'opérateur, on peut montrer le résultat suivant.

**Proposition 4.7.** *Lorsque  $N^2 > 2C_1^4(1 + C_0 + C_1)$ , on a également l'estimée de « quasi point fixe » pour  $Z_N(\lambda)$  en distance  $d_\infty$  suivante.*

$$d_\infty(Z_N(\lambda), \Phi_\lambda(Z_N(\lambda))) = O\left(\frac{C_1^6}{N^2}\right).$$

**Proposition 4.8.** Soit  $\alpha > 0$  petit. Si  $Z_1, Z_2 \in \mathbb{SH}_m$  sont dans la boule de centre 0 et de rayon  $C_1$ , et si  $d_\infty(Z_1, Z_2) < \alpha$ , alors toute géodésique joignant  $Z_1$  à  $Z_2$  est contenue dans la boule de centre 0 et de rayon  $\frac{C_1}{1-\alpha}$ , et  $\|Z_1 - Z_2\| \leq \frac{\alpha C_1}{1-\alpha}$

#### 4.4.7. Estimée de la distance entre les résolvantes.

En appliquant les Propositions 4.7 et 4.8, on obtient, pour  $N$  suffisamment grand et  $k$  entier,

$$d_\infty(\Phi_\lambda^k(Z_N(\lambda)), \Phi_\lambda^{k+1}(Z_N(\lambda))) = \left(\frac{1}{1+c}\right)^k O\left(\frac{C_1^6}{N^2}\right). \quad (27)$$

À  $N$  fixé, on en déduit que la suite  $\Phi_\lambda^k(Z_N(\lambda))$  est de Cauchy pour la distance  $d_\infty$ , et converge donc vers l'unique point fixe de  $Z(\lambda)$  de  $\Phi_\lambda$ . De plus, en sommant (27) pour  $k$  allant de 0 à  $\infty$ , on obtient

$$d_\infty(Z_N(\lambda), Z(\lambda)) \leq \frac{1+c}{c} O\left(\frac{C_1^6}{N^2}\right).$$

En repassant à la norme d'opérateur et en remplaçant  $c$  par son expression en fonction de  $C_1$ , on trouve l'estimée

$$\|\bar{G}_N(\lambda) - G(\lambda)\| \lesssim \frac{1}{N^2} (1 + C_0) C_1^\alpha, \quad \text{avec } \alpha = 8. \quad (28)$$

#### 4.4.8. Conclusion

Concluons la preuve de (23) à partir de cette estimée. On introduit les mesures

$$\mu_N(\varphi) = \mathbb{E}[(\tau_m \otimes \tau_N)(\varphi(H^{(N)}))] \quad \text{et} \quad \mu(\varphi) = (\tau_m \otimes \tau)(\varphi(h))$$

définies pour toute fonction test  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continue sur un voisinage du spectre de  $H^{(N)}$  (resp.  $h$ ) par calcul fonctionnel. On considère également les transformées de Stieltjes (usuelles) de ces mesures, données pour tout  $\lambda \in \mathbb{H}$  par

$$g_N(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_N(t)}{\lambda - t} = \tau_m(\bar{G}_N(\lambda I_m)) \quad \text{et} \quad g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{\lambda - t} = \tau_m(G(\lambda I_m)).$$

D'une part, l'estimée (28) donne en prenant la trace

$$\forall \lambda = x + iy \in \mathbb{H}, \quad |g_N(\lambda) - g(\lambda)| \lesssim \frac{1}{N^2} (1 + C_0) C_1^\alpha = \frac{1}{N^2} (1 + |\lambda|) |y|^{-\alpha}. \quad (29)$$

D'autre part, on a les identités usuelles

$$\begin{aligned} \mu(\varphi) &= -\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \operatorname{Im}[g(x + iy)] dx ; \\ \mu_N(\varphi) &= -\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \operatorname{Im}[g_N(x + iy)] dx. \end{aligned} \quad (30)$$

En effet, on a

$$-\operatorname{Im} g_N(x + iy) = -\operatorname{Im} \left[ \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_N(t)}{x + iy - t} \right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(t - x)^2 + y^2} d\mu_N(t).$$

En appliquant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \operatorname{Im}[g_N(x+iy)] dx &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left[ \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} d\mu_N(t) \right] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \Psi_y(t-x) dx \right] d\mu_N(t) \\
&= \mu_N(\varphi * \Psi_y),
\end{aligned}$$

avec

$$\Psi_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

On reconnaît que  $\Psi_y$  est une approximation de l'identité, ce qui donne (30) en faisant tendre  $y$  vers  $0^+$ . La justification pour  $\mu$  est analogue. Notons  $h_N(\lambda) = g_N(\lambda) - g(\lambda)$ . Il suit des définitions que  $h_N$  est holomorphe sur  $\mathbb{H}$ . D'après (30), on a pour toute fonction test  $\varphi$  à valeurs réelles

$$\mu_N(\varphi) - \mu(\varphi) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) h_N(x+iy) dx \right]. \quad (31)$$

On transforme l'intégrale du membre de droite grâce à des intégrations par parties successives. On trouve

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) h_N(x+iy) dx = \int_{\mathbb{R}} (1 + \partial_x)^p \varphi(x) I_p(x+iy) dx,$$

où la fonction  $I_p$  est définie par

$$I_p(\lambda) = \frac{1}{(p-1)!} \int_{\mathbb{R}_+} h_N(\lambda+t) t^{p-1} e^{-t} dt.$$

La fonction  $t \mapsto h_N(\lambda+t) t^{p-1} e^{-t}$  étant holomorphe au voisinage de l'adhérence du demi-plan de Poincaré, la formule intégrale de Cauchy montre la valeur de l'intégrale qui définit  $I_p(\lambda)$  ne change pas si l'on remplace le domaine d'intégration  $\mathbb{R}_+$  par la demi-droite  $(1+i)\mathbb{R}_+$ . Ainsi,

$$I_p(\lambda) = \frac{(1+i)^p}{(p-1)!} \int_{\mathbb{R}_+} h_N(\lambda + (1+i)t) t^{p-1} e^{-(1+i)t} dt.$$

Cela nous permet d'utiliser l'estimée (29), pour obtenir, en écrivant  $\lambda = x+iy$ ,

$$|I_p(\lambda)| \leq \frac{2^{p/2}}{(p-1)!} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1+|\lambda|+2t}{N^2(y+t)^\alpha} t^{p-1} e^{-t} dt.$$

On voit alors qu'en choisissant  $p$  suffisamment grand (par exemple  $p = \alpha + 1$ ), on obtient un constante  $C > 0$  telle que

$$I_p(\lambda) \leq \frac{C}{N^2} (1+|\lambda|).$$

En réinjectant cette dernière majoration dans (31), on trouve enfin

$$|\mu_N(\varphi) - \mu(\varphi)| = O\left(\frac{\|\varphi\|_{C^{\alpha+1}}}{N^2}\right).$$

On peut alors conclure en choisissant une fonction test  $\varphi$  qui est nulle sur  $\text{Sp}(h) + [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$  et égale à 1 sur le complémentaire de  $\text{Sp}(h) + ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . En effet, on obtient alors

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}[\Lambda_{N,\varepsilon}] = \mu_N(\varphi) = O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

où  $\Lambda_{N,\varepsilon}$  désigne le nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) de  $H^{(N)}$  appartenant au complémentaire de  $\text{Sp}(h) + ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . L'astuce de linéarisation de Pisier permet alors de conclure à la convergence forte (22) en probabilité. Pour obtenir la convergence forte presque-sûre, il faut travailler un peu plus pour contrôler la variance de  $\Lambda_{N,\varepsilon}$  et appliquer le lemme de Borel-Cantelli.

**Remarque 4.5 (Ouverture).** [HMY24] traite le cas des graphes réguliers aléatoires par des techniques de matrices aléatoires (utilisant notamment l'équation de Point fixe). Les auteurs ont montré que, avec les notations de la Section 3, que la suite

$$\left( \lambda_1 \left( \frac{A_N}{\sqrt{q}} \right) - 2 \right) N^{2/3}$$

converge en distribution vers la loi de Tracy-Widom.

On peut également mentionner les travaux [HMT25; HMT25; MPH25], dans lesquels la méthode polynomiale est appliquée à des modèles de surfaces hyperboliques aléatoires.

## Bibliographie

- [Abe+17] ABERT, MIKLOS ; BERGERON, NICOLAS ; BIRINGER, IAN ; GELANDER, TSACHIK ; NIKOLAV, NIKOLAY ; RAIMBAULT, JEAN ; SAMET, IDDO: On the growth of  $L^2$ -invariants for sequences of lattices in lie groups. In: *Annals of Mathematics* vol. 185 (2017), Nr. 3
- [AL07] ALDOUS, DAVID ; LYONS, RUSSELL: Processes on Unimodular Random Networks. In: *Electronic Journal of Probability* vol. 12, Institute of Mathematical Statistics and Bernoulli Society (2007), Nr. none, p. 1454-1508
- [Ana+21] ANANTHARAMAN, NALINI ; INGREMEAU, MAXIME ; SABRI, MOSTAFA ; WINN, BRIAN: Empirical spectral measures of quantum graphs in the Benjamini-Schramm limit. In: *Journal of Functional Analysis* vol. 280 (2021), Nr. 12, p. 108988
- [BB16] BECKUS, SIEGFRIED ; BELLISSARD, JEAN: Continuity of the Spectrum of a Field of Self-Adjoint Operators. In: *Annales Henri Poincaré* vol. 17 (2016), Nr. 12, p. 3425-3442
- [BLP11] BENOUSSAN, ALAIN ; LIONS, JACQUES-LOUIS ; PAPANICOLAOU, GEORGE: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures* : American Mathematical Soc., 2011 – ISBN 978-0-8218-5324-5
- [Bow15] BOWEN, LEWIS: Cheeger constants and  $L^2$ -Betti numbers. In: *Duke Mathematical Journal* vol. 164, Duke University Press (2015), Nr. 3, p. 569-615
- [BS01] BENJAMINI, ITAI ; SCHRAMM, ODED: Recurrence of Distributional Limits of Finite Planar Graphs. In: *Electronic Journal of Probability* vol. 6 (2001), Nr. none
- [CC00] CHEEGER, JEFF ; COLDING, TOBIAS H.: On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II. In: *Journal of Differential Geometry* vol. 54 (2000), Nr. 1
- [Che+25] CHEN, CHI-FANG ; GARZA-VARGAS, JORGE ; TROPP, JOEL A. ; HANDEL, RAMON VAN: *A new approach to strong convergence*. URL <http://arxiv.org/abs/2405.16026>
- [EP05] EXNER, PAVEL ; POST, OLAF: Convergence of spectra of graph-like thin manifolds. In: *Journal of Geometry and Physics* vol. 54 (2005), Nr. 1, p. 77-115
- [FHS06] FROESE, RICHARD ; HASLER, DAVID ; SPITZER, WOLFGANG: Transfer matrices, hyperbolic geometry and absolutely continuous spectrum for some discrete Schrödinger operators on graphs. In: *Journal of Functional Analysis* vol. 230 (2006), Nr. 1, p. 184-221
- [FK19] FRIEDMAN, JOEL ; KOHLER, DAVID: *On the Relativized Alon Eigenvalue Conjecture II: Asymptotic Expansion Theorems for Walks*. URL <http://arxiv.org/abs/1911.05705>
- [Fri08] FRIEDMAN, JOEL: *A Proof of Alon's Second Eigenvalue Conjecture and Related Problems* : American Mathematical Soc., 2008 – ISBN 978-0-8218-4280-5
- [Fri91] FRIEDMAN, JOEL: On the second eigenvalue and random walks in random regular graphs. In: *Combinatorica* vol. 11 (1991), Nr. 4, p. 331-362
- [Fuk87] FUKAYA, KENJI: Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator. In: *Inventiones mathematicae* vol. 87 (1987), Nr. 3, p. 517-547
- [Gig23] GIGLI, NICOLA: *De Giorgi and Gromov working together*. URL <http://arxiv.org/abs/2306.14604>
- [GMR19] GAMBURD, ALEXANDER ; MAGEE, MICHAEL ; RONAN, RYAN: An asymptotic formula for integer points on Markoff-Hurwitz varieties. In: *Annals of Mathematics* vol. 190 (2019), Nr. 3
- [HMT25] HIDE, WILL ; MACERA, DAVIDE ; THOMAS, JOE: *Spectral gap with polynomial rate for random covering surfaces*. URL <http://arxiv.org/abs/2505.08479>

- [HMT25] HIDE, WILL ; MACERA, DAVIDE ; THOMAS, JOE: *Spectral gap with polynomial rate for Weil-Petersson random surfaces*. URL <http://arxiv.org/abs/2508.14874>
- [HMY24] HUANG, JIAOYANG ; MCKENZIE, THEO ; YAU, HORNG-TZER: *Optimal Eigenvalue Rigidity of Random Regular Graphs*. URL <http://arxiv.org/abs/2405.12161>
- [HP00] HIAI, FUMIO ; PETZ, DÉNES: *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy* : American Mathematical Soc., 2000 — ISBN 978-0-8218-4135-8
- [HT05] HAAGERUP, UFFE ; THORBJØRNSEN, STEEN: A new application of random matrices:  $\text{Ext}(C_{\text{red}}^*(F_2))$  is not a group. In: *Annals of Mathematics* vol. 162 (2005), Nr. 2, p. 711-775
- [Kes79] KESAVAN, SRINIVASAN: Homogenization of elliptic eigenvalue problems: Part 1. In: *Applied Mathematics and Optimization* vol. 5 (1979), Nr. 1, p. 153-167
- [LV09] LOTT, JOHN ; VILLANI, CÉDRIC: Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. In: *Annals of Mathematics* vol. 169, Annals of Mathematics (2009), Nr. 3, p. 903-991
- [MPH25] MAGEE, MICHAEL ; PUDE, DORON ; HANDEL, RAMON VAN: *Strong convergence of uniformly random permutation representations of surface groups*. URL <http://arxiv.org/abs/2504.08988>
- [MS17] MINGO, JAMES A. ; SPEICHER, ROLAND: *Free Probability and Random Matrices, Fields Institute Monographs*. vol. 35. New York, NY : Springer, 2017 — ISBN 978-1-4939-6941-8 978-1-4939-6942-5
- [Pis19] PISIER, GILLES: On a linearization trick. In: *L'Enseignement Mathématique* vol. 64 (2019), Nr. 3, p. 315-326
- [PZ23] POST, OLAF ; ZIMMER, SEBASTIAN: Generalised norm resolvent convergence: comparison of different concepts. In: *Journal of Spectral Theory* vol. 12 (2023), Nr. 4, p. 1459-1506
- [Sch05] SCHULTZ, HANNE: Non-commutative polynomials of independent Gaussian random matrices. The real and symplectic cases.. In: *Probability Theory and Related Fields* vol. 131 (2005), Nr. 2, p. 261-309
- [Stu06] STURM, KARL-THEODOR: On the geometry of metric measure spaces. In: *Acta Mathematica* vol. 196, Institut Mittag-Leffler (2006a), Nr. 1, p. 65-131
- [Stu06] STURM, KARL-THEODOR: On the geometry of metric measure spaces. II. In: *Acta Mathematica* vol. 196, Institut Mittag-Leffler (2006b), Nr. 1, p. 133-177
- [Voi91] VOICULESCU, DAN: Limit laws for Random matrices and free products. In: *Inventiones mathematicae* vol. 104 (1991), Nr. 1, p. 201-220