FONCTIONS HARMONIQUES
—
THÉORÈME DE RADÓ ET UNIFORMISATION

Dorian Boully

mardi 27 janvier 2026

Résumé

Ce document introduit la théorie élémentaire des fonctions harmoniques en dimension 2 et donne deux applications fondamentales en géométrie des surfaces de Riemann. Le Théorème de Radó, qui dit que toute surface de Riemann connexe est à base dénombrable d'ouverts, ainsi que le Théorème d'Uniformisation de Riemann, qui classifie les surfaces de Riemann simplement connexes en trois types d'isomorphisme : la sphère, le disque et le plan complexe.

Le texte est divisé en trois parties. La première introduit les fonctions harmoniques dans $\mathbb{C}$ et sur les surfaces de Riemann. Elle couvre les propriétés fondamentales telles que la propriété de la moyenne, le principe du maximum, et la formule de Poisson. La construction des fonctions de Green via les familles de Perron est détaillée. Cette section s'appuie principalement sur les ouvrages [1] pour le cas euclidien et, [2], [3], [4] pour l'extension aux surfaces de Riemann. La deuxième partie est consacrée à la démonstration du Théorème de Radó, qui repose sur la résolution du problème de Dirichlet et le théorème de Poincaré-Volterra. La preuve est essentiellement tirée de [2]. La troisième partie présente une démonstration du Théorème d'Uniformisation de Riemann, indépendante du théorème de Radó. On a suivi pour l'essentiel les indications de [5, Exercice 8 page 393]. Les points cruciaux de la preuve sont l'existence de fonctions de Green, la construction d'une exhaustion par des domaines compacts simplement connexes à bord lisse ainsi que les inégalités de distorsion de Koebe.

La compréhension de ce texte demande une certaine familiarité avec les notions suivantes.

Analyse complexe. Fonctions holomorphes élémentaires (séries entières, formule intégrale de Cauchy, principe du maximum), séries de fonctions holomorphes (convergence uniforme sur les compacts, théorème de Weierstrass, théorème de Hurwitz), théorème de l'application ouverte, formes normales pour les applications holomorphes, ordre d'un zéro. Le livre [1] est excellent.

Surfaces de Riemann. Cartes, atlas, applications holomorphes, revêtements ramifiés. Les livres [2], [3],[5] couvrent largement ces aspects.

Théorie des revêtements. Revêtements universels, relèvement, groupe fondamental. L'ouvrage [5] fournit un traitement détaillé.

Calcul différentiel et Géométrie différentielle. Théorème de Sard, variétés topologiques et différentielles, variétés à bord, champs de vecteurs, flots, intégration des formes différentielles, théorème de Stokes. On renvoie pour cela à [6], très détaillé.

Homologie. Excision, suites exactes de paires, revêtement d'orientation. Le livre [7] est une excellente référence.

Ces prérequis étant satisfaits, le texte qui suit est entièrement autonome.

Table des matières

1. Fonctions harmoniques et compléments d'analyse complexe

1.1. Fonctions harmoniques dans $\mathbb{C}$

Fixons dans cette section un ouvert D de $\mathbb{C}$.

1.1.1. Notations et fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$

On identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ via l'application

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x + iy \in \mathbb{C}.$$

Notons $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \mathrm{d}\overline{z} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ les applications $\mathbb{R}$-linéaires respectivement données par la partie réelle, la partie imaginaire, l'identité et la conjugaison complexe. Alors $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ et $(\mathrm{d}z, \mathrm{d}\overline{z})$ forment deux $\mathbb{C}$-bases de l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans lui-même. En effet, c'est clair pour la première, et l'on a

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z}), \quad \mathrm{d}y = \frac{1}{2i}(\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z}), \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y.$$

De là, si $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire, on a

$$\begin{aligned} u &= \alpha\,\mathrm{d}x + \beta\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\alpha(\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z}) + \frac{1}{2i}\beta(\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z}) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)\,\mathrm{d}\overline{z}. \end{aligned}$$

Si $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction différentiable en $a \in D$, on a par définition des dérivées partielles

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_a = \partial_x f(a)\,\mathrm{d}x + \partial_y f(a)\,\mathrm{d}y &= \left[\frac{1}{2}\big(\partial_x - i\partial_y\big)f\right](a)\,\mathrm{d}z + \left[\frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)f\right](a)\,\mathrm{d}\overline{z} \\ &= \partial_z f(a)\,\mathrm{d}z + \partial_{\overline{z}} f(a)\,\mathrm{d}\overline{z}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\partial_z := \frac{1}{2}\big(\partial_x - i\partial_y\big), \quad \partial_{\overline{z}} f := \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big). \tag{1}$$

On a donc en outre

$$\partial_x = \partial_z + \partial_{\overline{z}}, \quad \partial_y = i(\partial_z - \partial_{\overline{z}}).$$

Définition 1.1. *Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en $a \in D$ si elle est différentiable en a et $\mathrm{d}f_a$ est $\mathbb{C}$-linéaire.*

D'après (1), f est holomorphe en a si et seulement si

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_a(i) = i\,\mathrm{d}f_a(1) &\iff \partial_y f(a) = i\partial_x f(a) \\ &\iff i(\partial_z f(a) - \partial_{\overline{z}} f(a)) = i(\partial_z f(a) + \partial_{\overline{z}} f(a)) \\ &\iff \partial_{\overline{z}} f(a) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

On appelle équation de Cauchy-Riemann la condition (2). On admet ici la théorie élémentaire des fonctions holomorphes. En particulier, on sait que les fonctions holomorphes sont $\mathbb{C}$-analytiques et vérifient la formule intégrale de Cauchy.

1.1.2. Fonctions harmoniques dans $\mathbb{C}$

Définition 1.2 (Fonction Harmonique). *Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite harmonique si elle est de classe $\mathscr{C}^2$ en tant que fonction de deux variables réelles et satisfait*

$$\Delta f := \partial_x^2 f + \partial_y^2 f = 0. \tag{3}$$

Exprimons le laplacien en fonction des dérivées par rapport à z et $\overline{z}$. On a

$$\begin{aligned} \partial_x^2 &= (\partial_z + \partial_{\overline{z}}) \circ (\partial_z + \partial_{\overline{z}}) \\ &= \partial_z^2 + 2\partial_{z\overline{z}}^2 + \partial_{\overline{z}}^2 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \partial_y^2 &= i^2(\partial_z - \partial_{\overline{z}}) \circ (\partial_z - \partial_{\overline{z}}) \\ &= -(\partial_z^2 - 2\partial_{z\overline{z}}^2 + \partial_{\overline{z}}^2). \end{aligned}$$

De là, il vient

$$\Delta = 4\partial_{z\overline{z}}^2,$$

et par suite la condition (3) est équivalente à

$$\partial^2_{z\overline{z}} f = 0. \tag{4}$$

Remarque 1.1. Si $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction différentiable, c'est aussi le cas de sa conjuguée $\overline{f}$, et l'on a

$$\begin{aligned}\partial_z \overline{f} &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)\overline{f} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{\partial_x f} - i\overline{\partial_y f}\right) \\ &= \overline{\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) f} \\ &= \overline{\partial_{\overline{z}} f}.\end{aligned}$$

De même, $\partial_{\overline{z}} \overline{f} = \overline{\partial_z f}$. On en déduit que la conjuguée d'une fonction harmonique est harmonique, puis par linéarité que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction harmonique sont des fonctions harmoniques.

1.1.3. Fonctions harmoniques et fonctions holomorphes

Proposition 1.1. *Toute fonction holomorphe est harmonique.*

Démonstration. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. En particulier, f est $\mathscr{C}^2$. La condition (2) donne $\partial_{\overline{z}} f = 0$, et en dérivant par rapport à z, on obtient (4). □

La stabilité des fonctions harmoniques par passage à la partie réelle et imaginaire entraine :

Corollaire 1.2. *La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont des fonctions harmoniques.*

La réciproque est vraie localement.

Proposition 1.3. *Supposons que l'ouvert D soit simplement connexe. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique réelle. Alors f est la partie réelle d'une fonction holomorphe $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$. De plus, F est unique à l'addition d'une constante imaginaire pure près.*

Démonstration. Comme f est harmonique, on a $\partial^2_{z\overline{z}} f = 0$. En particulier, la fonction $\partial_z f$ est holomorphe sur D. Comme D est simplement connexe, on sait que la forme différentielle $\partial_z f \,\mathrm{d}z$ admet une primitive sur D. Autrement dit, il existe $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\mathrm{d}F = 2\partial_z f \,\mathrm{d}z. \tag{5}$$

Cela montre que $\mathrm{d}F$ est $\mathbb{C}$-linéaire en tout point de D, donc que F est holomorphe. En passant au conjugué dans (5), il vient

$$\mathrm{d}\overline{F} = \overline{\mathrm{d}F} = 2\overline{\partial_z f}\,\mathrm{d}\overline{z} = 2\partial_{\overline{z}}\overline{f}\,\mathrm{d}\overline{z} = 2\partial_{\overline{z}} f\,\mathrm{d}\overline{z},$$

car f est réelle. On a donc

$$\mathrm{d}(\mathrm{Re}(F)) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}F + \mathrm{d}\overline{F}\right) = \partial_z f\,\mathrm{d}z + \partial_{\overline{z}} f\,\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}f,$$

donc $f = \mathrm{Re}(F - c)$ pour une certaine constante réelle c. Supposons que $F_1, F_2 : D \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions holomorphes de même partie réelle. Notons $F = F_1 - F_2$. Alors

$$0 = \mathrm{d}\left(F + \overline{F}\right) = \partial_z F\,\mathrm{d}z + \partial_{\overline{z}} F\,\mathrm{d}\overline{z},$$

ce qui exige $\partial_z F = \partial_{\overline{z}} \overline{F} = 0$. Ainsi, F est constante de partie réelle nulle. □

En particulier, comme $\mathbb{C}$ est localement simplement connexe, toute fonction harmonique réelle est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe déterminée à l'addition près d'une constante imaginaire pure.

1.1.4. Propriété de la moyenne et principe du maximum

Lemme 1.4. *Soit $\overline{\mathbb{D}}(z,r)$ un disque fermé inclus dans D. Alors il existe $r' > r > 0$ tel que $\mathbb{D}(z,r') \subset D$. En particulier, tout disque fermé inclus dans D admet un voisinage ouvert simplement connexe inclus dans D.*

Démonstration. Si un tel r' n'existait pas, on trouverait une suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ de points de $\mathbb{C} \setminus D$ dont la distance à z est au plus $r + \frac{1}{n}$. Une telle suite est en particulier bornée, donc admet une sous-suite convergente vers un point de $\overline{\mathbb{D}}(z,r)$. Comme D est un voisinage ouvert de ce disque fermé, $z_n \in D$ pour n assez grand, ce qui est absurde. □

Proposition 1.5 (Propriété de la moyenne). *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction harmonique. Alors pour tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(z,r) \subset D$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(z) + re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta. \tag{6}$$

On dit qu'une fonction continue $D \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie (6) pour tout $\overline{\mathbb{D}}(z,r) \subset D$ vérifie la propriété de la moyenne. Il est clair que cette propriété est stable par combinaison linéaire, partie réelle et imaginaire. De plus, toute fonction holomorphe $g : D \longrightarrow C$ vérifie la propriété de la moyenne. En effet, la formule intégrale de Cauchy donne

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\mathbb{D}(0,r)} g(z+\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\big(z+re^{i\theta}\big)\frac{re^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\big(z+re^{i\theta}\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

Démonstration de la Proposition 1.5. Écrivons $f = P + iQ$ avec $P, Q : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On sait que P et Q sont harmoniques. Prenons un voisinage ouvert simplement connexe $U \subset D$ de $\overline{\mathbb{D}}(z,r)$. D'après la Proposition 1.3, les restrictions de P et Q à U sont des parties réelles de fonctions holomorphes, donc vérifient la propriété de la moyenne, donc $f|_U$ aussi. Comme c'est vrai pour tout $\overline{\mathbb{D}}(z,r) \subset D$, cela conclut. □

Proposition 1.6 (Principe du maximum). *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs réelles qui satisfait la propriété de la moyenne. Si f atteint un maximum local en un point $z \in D$, alors f est constante dans un voisinage de z.*

Démonstration. Soit $\mathbb{D}(z,r)$ un disque contenu dans D tel que pour tout $\zeta \in \mathbb{D}(z,r)$, on ait $f(\zeta) \leqslant f(z)$. L'égalité de la moyenne donne, pour tout $0 < r' < r$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(z) - f\big(z + r'e^{i\theta}\big)\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

L'intégrande étant continue et positive ou nulle, elle est identiquement nulle. Cela montre que $f \equiv f(z)$ sur $\mathbb{D}(z,r)$. □

Corollaire 1.7. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ fonction continue définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ qui satisfait la propriété de la moyenne. Si $|f|$ atteint un maximum local en un point $z \in D$, alors f est constante dans un voisinage de z.*

Démonstration. Soit $\mathbb{D}(z,r)$ un disque contenu dans D tel que pour tout $\zeta \in \mathbb{D}(z,r)$, on ait $|f(\zeta)| \leqslant |f(z)|$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(-it)f(z) \in \mathbb{R}_+$. Alors $\mathrm{Re}(\exp(-it)f)$ est une fonction continue à valeurs réelles satisfaisant la propriété de la moyenne, et pour tout $\zeta \in \mathbb{D}(z,r)$, on a

$$\mathrm{Re}(\exp(-it)f(\zeta)) \leqslant |\mathrm{Re}(\exp(-it)f(\zeta))| \leqslant |f(\zeta)| \leqslant |f(z)| = \mathrm{Re}(\exp(-it)f(z))$$

D'après la Proposition 1.6, $\mathrm{Re}(\exp(-it)f)$ est constante sur un voisinage de z, donc $\mathrm{Re}(f)$ également. Par le même raisonnement, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Re}(if)$ est constante au voisinage de z, d'où le résultat. □

Ces résultats étant établis, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1.8. *Une fonction harmonique dont le module admet un maximum local en un point z est constante au voisinage de z.*

1.1.5. Analyticité des fonctions harmoniques

Lemme 1.9. *Toute fonction $\mathbb{C}$-analytique est $\mathbb{R}$-analytique.*

Démonstration. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui admet un développement en série entière en un point $a \in D$. Il existe $r > 0$ et une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{D}(0,r), \quad f(a+z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Écrivons $a = \alpha + i\beta$ et $z = x + iy$ avec $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = (x+iy)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (iy)^{n-k}$$

Soient $s, t \in]0, \frac{r}{2}[$. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \left| a_n \binom{n}{k} s^k (it)^{n-k} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (s+t)^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty.$$

De là, pour tous $x, y \in]-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}[$, on a

$$f(\alpha + x, \beta + y) = \sum_{m,n \geqslant 0} a_{m+n} \binom{m+n}{m} i^n x^m y^n$$

ce qui montre que f est $\mathbb{R}$-analytique en a. □

Proposition 1.10. *Toute fonction harmonique est $\mathbb{R}$-analytique.*

Démonstration. D'après la Proposition 1.3, cela résulte du fait que la $\mathbb{R}$-analyticité est une propriété locale stable par combinaison linéaire et par passage à la partie réelle et imaginaire. □

1.1.6. Formule de Poisson

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{C}$-analytique. Établissons l'analogue de la formule intégrale de Cauchy pour la partie réelle g de f. Soit $z_0 \in D$ et $\rho > 0$ tels que pour tout $z \in \mathbb{D}(0,\rho)$,

$$f(z_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

On a donc, pour $0 < r < \rho$ fixé et pour tout $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$,

$$2g(z_0 + re^{i\theta}) = f(z_0 + re^{i\theta}) + \overline{f(z_0 + re^{i\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(a_n e^{in\theta} + \overline{a_n} e^{-in\theta}\right).$$

Pour tout $m \geqslant 1$, on a par convergence normale du membre de droite

$$2\int_0^{2\pi} g\big(z_0 + re^{i\theta}\big)e^{-im\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} \big(a_n e^{i(n-m)\theta} + \overline{a_n} e^{-i(n+m)\theta}\big)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi r^m a_m$$

On en déduit, pour $|z| < r$

$$\begin{aligned} f(z_0 + z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ &= a_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} g\big(z_0 + re^{i\theta}\big)\Big(\frac{z}{re^{i\theta}}\Big)^n\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Par convergence normale en θ, on peut inverser les symboles somme et intégrale, d'où

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g\big(z_0 + re^{i\theta}\big)\frac{z}{re^{i\theta} - z}\,\mathrm{d}\theta.$$

En passant à la partie réelle et en utilisant la propriété de la moyenne, on obtient la formule de Poisson

$$\begin{aligned} g(z_0 + z) &= g(z_0) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g\big(z_0 + re^{i\theta}\big)\,\mathrm{Re}\Big(\frac{z}{re^{i\theta} - z}\Big)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\big(z_0 + re^{i\theta}\big)\Big(1 + 2\,\mathrm{Re}\Big(\frac{z}{re^{i\theta} - z}\Big)\Big)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\big(z_0 + re^{i\theta}\big)\,\mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z}\right)\mathrm{d}\theta \qquad (7) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\big(z_0 + re^{i\theta}\big)\frac{\mathrm{Re}\big(\big(re^{i\theta} + z\big)\big(re^{-i\theta} - \overline{z}\big)\big)}{\big|re^{i\theta} - z\big|^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\big(z_0 + re^{i\theta}\big)\frac{r^2 - |z|^2}{\big|re^{i\theta} - z\big|^2}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

En particulier, si $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction harmonique réelle et $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset D$, g est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur un voisinage $\mathbb{D}(z_0, \rho) \subset D$ avec $\rho > r$, qui est donc analytique en z_0 avec rayon $\geqslant \rho$. La fonction g vérifie donc la formule de Poisson (7) pour tout $z \in \mathbb{D}(0, r)$. En fait, la formule de Poisson reste vraie pour une fonction harmonique à valeurs dans $\mathbb{C}$, comme on le voit en séparant partie réelle et imaginaire. À $r > 0$ et θ fixés, la fonction

$$z \longmapsto \frac{r^2 - |z|^2}{\big|re^{i\theta} - z\big|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z}\right)$$

qui figure sous le signe d'intégration dans (7) est appelée noyau de Poisson. C'est une fonction harmonique de z sur $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta}\}$ comme partie réelle d'une fonction holomorphe. Elle s'annule sur le cercle $|z| = r$ privé de $re^{i\theta}$. Elle est strictement positive dans le disque $|z| < r$. À $|z| < r$ fixés, c'est une fonction continue périodique de θ, et en appliquant la formule de Poisson à la fonction harmonique constante égale à 1, on trouve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{\big|re^{i\theta} - z\big|^2}\,\mathrm{d}\theta = 1. \qquad (8)$$

1.1.7. Problème de Dirichlet sur le disque

Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction harmonique sur un domaine D dont la restriction à la frontière ∂D coïncide avec une fonction continue donnée $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{C}$.

Théorème 1.11. *Le problème de Dirichlet sur un disque admet une unique solution. De plus, la valeur de cette solution au centre du disque est la moyenne des valeurs de la fonction f sur le bord du disque.*

L'idée de la démonstration est de construire une solution sous forme intégrale à l'aide de la formule de Poisson. L'unicité est une conséquence du principe du maximum. Soient $\mathbb{D} := \mathbb{D}(z_0, r)$ un disque de $\mathbb{C}$, et $f : \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On considère la paramétrisation de $\partial\mathbb{D}$ usuelle

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \partial\mathbb{D}, \quad \theta \longmapsto z_0 + re^{i\theta}.$$

Étant donnés $\eta > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on note

$$A_{\alpha,\eta} := \gamma^{-1}(\gamma(]\alpha - \eta, \alpha + \eta[))$$

l'ensemble des points dont l'image sur le cercle est à distance angulaire inférieure à η de $\gamma(\alpha)$.

Lemme 1.12. *Soit $G : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, dont la restriction à $\mathbb{D}$ satisfait au principe du maximum, et nulle sur $\partial\mathbb{D}$. Alors G est identiquement nulle. C'est en particulier le cas si G est harmonique dans $\mathbb{D}$*

Démonstration. Comme G est nulle sur $\partial\mathbb{D}$, il existe un point $z \in \mathbb{D}$ où $|G|$ atteint son maximum. D'après le principe du maximum, $G^{-1}(G(z))$ est un ouvert de $\mathbb{D}$. Il est aussi fermé par continuité. Comme $\mathbb{D}$ est connexe, on en déduit que G est constante sur $\mathbb{D}$, donc nulle par continuité. □

Lemme 1.13. *Soient η, α deux réels avec $0 < \eta < \pi$, de sorte que $[0, 2\pi] \setminus A_{\alpha,\eta}$ soit d'intérieur non vide. Alors,*

$$\int_{[0,2\pi]\setminus A_{\alpha,\eta}} \frac{r^2 - |z|^2}{\left|re^{i\theta} - z\right|^2}\, \mathrm{d}\theta \xrightarrow[\substack{z \to re^{i\alpha} \\ |z|<r}]{} 0.$$

Démonstration. Notons $A := A_{\alpha,\eta}$ pour alléger les notations. Soit $0 < \rho < \frac{1}{2}\left|1 - re^{i\eta}\right| =: \mu$. Pour tous $\theta \in [0, 2\pi] \setminus A$ et $z \in \mathbb{D}(0, r) \cap \mathbb{D}(re^{i\alpha}, \rho)$, on a

$$\left|re^{i\theta} - z\right| > \mu > 0.$$

Il suit

$$0 \leqslant \int_{[0,2\pi]\setminus A} \frac{r^2 - |z|^2}{\left|re^{i\theta} - z\right|^2}\, \mathrm{d}\theta \leqslant \frac{4\pi r\rho}{\mu^2}.$$

En prenant ρ arbitrairement petit, on obtient le résultat. □

Démonstration du Théorème 1.11.

Montrons l'unicité. Soient $F_1, F_2 : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}$ deux solutions au problème de Dirichlet sur $\mathbb{D}$ associé à f. Alors la différence $G = F_1 - F_2$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ et nulle sur $\partial\mathbb{D}$. D'après le Lemme 1.12, G est identiquement nulle, donc $F_1 = F_2$.

Montrons l'existence. Le problème de Dirichlet étant linéaire, il suffit de le résoudre pour f à valeurs réelles, ce que l'on suppose désormais. Notons respectivement z_0 et r le centre et le rayon de $\mathbb{D}$. On pose, pour $|z| < r$

$$F(z_0+z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\,\mathrm{d}\theta\right).$$

Dans le membre de droite, l'intégrande est une fonction continue de (θ, z) et holomorphe en z. Par différentiation sous le signe d'intégration, on en déduit que F est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, donc harmonique. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$F(z_0+z) \xrightarrow[z\to re^{i\alpha}]{} f(z_0+re^{i\alpha}).$$

D'après (8), on a

$$F(z_0+z) - f(z_0+re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(z_0+re^{i\theta}) - f(z_0+re^{i\alpha})\right)\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en $z_0+re^{i\alpha}$, il existe $0<\eta<\pi$ tel que pour tout $\theta \in A_{\alpha,\eta}$, on ait

$$\left|f(z_0+re^{i\theta}) - f(z_0+re^{i\alpha})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encore par continuité de f et compacité de $\partial\mathbb{D}$, il existe $M>0$ tel que $|f(\zeta)| \leqslant M$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. On en déduit

$$\left|F(z_0+z) - f(z_0+re^{i\alpha})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{A_{\alpha,\eta}}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\mathrm{d}\theta + \frac{2M}{2\pi}\int_{[0,2\pi]\setminus A_{\alpha,\eta}}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Or, d'après le Lemme 1.13 et (8), on a

$$\int_{[0,2\pi]\setminus A_{\alpha,\eta}}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[z\to re^{i\alpha}]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{A_{\alpha,\eta}}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[z\to re^{i\alpha}]{} 1.$$

Ainsi, pour $z \in \mathbb{D}(0,r)$ suffisamment proche de $re^{i\alpha}$, on obtient

$$\left|F(z_0+z) - f(z_0+re^{i\alpha})\right| < \varepsilon.$$

Cela montre que F se prolonge en une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ dont la restriction à $\partial\mathbb{D}$ coïncide avec f. Enfin, on a

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\frac{r^2-|0|^2}{|re^{i\theta}-0|^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

Cela conclut la preuve. □

1.1.8. Caractérisation des fonctions harmoniques par la propriété de la moyenne

Théorème 1.14. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors f est harmonique si et seulement si elle satisfait la propriété de la moyenne.*

Démonstration. On a déjà vu que toute fonction harmonique satisfait la propriété de la moyenne à la Proposition 1.5. Réciproquement, supposons que f satisfasse la propriété de la moyenne. L'harmonicité étant une propriété locale, prenons un disque fermé $K \subset D$ et montrons que f est harmonique à l'intérieur de K. Cela suffit car on peut recouvrir D par une famille de tels disques. D'après le Théorème 1.11, il existe une fonction continue $g : K \longrightarrow \mathbb{C}$ harmonique à l'intérieur de K et coïncidant avec f sur la frontière de K. Alors $g - f$ satisfait la propriété de la moyenne, donc le principe du maximum à l'intérieur de K et est nulle sur la frontière de K. D'après le Lemme 1.12, on en déduit que $g - f$ est identiquement nulle sur K. En particulier, f est harmonique à l'intérieur de K. $\square$

1.1.9. Singularité effaçable pour les fonctions harmoniques

Le théorème de la singularité effaçable, connu pour les fonctions holomorphes, admet un énoncé analogue valable plus généralement pour les fonctions harmoniques. On note

$$\psi : \mathbb{D}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z \longmapsto -\ln|z|$$

Théorème 1.15 (Singularité effaçable). *Soit $f : \mathbb{D}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction harmonique telle que $f = o(\psi)$ en 0. Alors f se prolonge en une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$.*

Démonstration. En séparant partie réelle et imaginaire, on voit qu'il suffit de prouver le théorème dans le cas où f est à valeurs réelles. Notons $B = \mathbb{D}\left(\frac{1}{2}\right)$, et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction harmonique qui coïncide avec f sur ∂B. Comme g est bornée, on a $f - g = o(\psi)$ en 0. Soient $z \in B \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $0 < \delta < |z|$ tel que $|f - g| \leqslant \varepsilon\psi$ sur $\mathbb{D}(\delta)$. Comme $f - g - \varepsilon\psi$ est harmonique sur $B \setminus \{0\}$ et négative sur $\partial\mathbb{D}(\delta) \cup \partial B$, le principe du maximum donne

$$\forall \delta \leqslant |w| \leqslant \frac{1}{2}, \quad f(w) - g(w) - \varepsilon\psi(w) \leqslant 0.$$

En particulier, on a $f(z) - g(z) \leqslant \varepsilon\psi(z)$. Le même raisonnement appliqué à $g - f - \varepsilon\psi$ montre que $g(z) - f(z) \leqslant \varepsilon\psi(z)$. On a obtenu

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |f(z) - g(z)| \leqslant \varepsilon\psi(z),$$

donc $f = g$ sur $B \setminus \{0\}$. Ainsi, g fournit le prolongement recherché. $\square$

1.1.10. Suites de fonctions harmoniques et principe de Harnack

Proposition 1.16. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions harmoniques sur D qui converge uniformément sur les compacts. Alors la limite est harmonique sur D.*

Démonstration. Le domaine D est localement compact, donc la suite (f_n) converge simplement vers $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et vérifiant la propriété de la moyenne, donc harmonique par le Théorème 1.14. $\square$

Théorème 1.17 (Harnack). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}(R)$. On note $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Alors, ou bien $f \equiv +\infty$, ou bien f est harmonique et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}(R)$ vers f.*

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{D}(R)$. Posons $\rho := \max_{z\in K}|z| < R$, de sorte que $K \subset \overline{\mathbb{D}}(\rho) \subset \mathbb{D}(R)$. On se donne également r tel que $\rho < r < R$. Appliquons la formule de Poisson à $f_n - f_m$ pour $m \leqslant n \in \mathbb{N}$ sur le disque $\overline{\mathbb{D}}(r)$. Pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}(\rho)$, on a

$$0 \leqslant \frac{r^2 - |z|^2}{\left|re^{i\theta} - z\right|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z}\right) \leqslant \frac{\left|re^{i\theta} + z\right|}{\left|re^{i\theta} - z\right|} \leqslant \frac{r + |z|}{r - |z|} \leqslant \frac{r + \rho}{r - \rho},$$

d'où pour $z \in K$,

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant (f_n - f_m)(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_n - f_m)\big(re^{i\theta}\big) \frac{r^2 - |z|^2}{\left|re^{i\theta} - z\right|^2} \, \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant \frac{r+\rho}{r-\rho} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_n - f_m)\big(re^{i\theta}\big) \, \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant \frac{r+\rho}{r-\rho} (f_n - f_m)(0).
\end{aligned}
$$

Si $f(0) < +\infty$, le critère de Cauchy uniforme montre que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur K. La limite est harmonique sur $\mathbb{D}(R)$ par la Proposition 1.16. Plus généralement, si f n'est pas identiquement égale à $+\infty$, il existe $a \in \mathbb{D}$ tel que $f(a) < +\infty$. On applique le raisonnement précédent à la suite $(g_n = f_n \circ \psi)_{n \in \mathbb{N}}$ où

$$
\psi : \mathbb{D}(R) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(R), \quad z \longmapsto \frac{R^2(z+a)}{R^2 + \overline{a}z} = R\psi_{-a}\left(\frac{z}{R}\right).
$$

□

1.2. Fonctions (sous)harmoniques sur une surface de Riemann

Dans cette section, on fixe X une surface de Riemann.

1.2.1. Définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.3 (Fonction harmonique). *Une fonction continue $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite harmonique si, pour toute carte $\varphi : U \longrightarrow X$ avec U un ouvert de $\mathbb{C}$, la fonction $f \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est harmonique.*

On observe que l'harmonicité dans $\mathbb{C}$ est conservée par changement de variable holomorphe. Il suffit pour le voir d'appliquer la règle de la chaîne. Ainsi, pour montrer qu'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est harmonique, il suffit de vérifier l'harmonicité de $f \circ \varphi$ pour une famille de cartes recouvrant X.

Définition 1.4 (Fonction sous-harmonique, surharmonique). *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs réelles. On dit que f est* sous-harmonique *si, pour toute carte $\varphi : U \longrightarrow X$ avec U un ouvert de $\mathbb{C}$, et tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(z, r) \subset U$, on a*

$$
f \circ \varphi(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \circ \varphi\big(z + re^{i\theta}\big) \, \mathrm{d}\theta. \tag{9}
$$

On dit que f est surharmonique *si $-f$ est sous-harmonique.*

Remarque 1.2. D'après le Théorème 1.14, une fonction sous-harmonique $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si (9) est une égalité pour toute carte $\varphi : U \longrightarrow X$ et tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(z, r) \subset U$.

On vérifie immédiatement la stabilité des fonctions sous-harmoniques par combinaisons linéaires à coefficients positifs. En outre, elles sont stables par passage au supremum de deux fonctions.

Proposition 1.18. *Un supremum de deux fonctions sous-harmoniques est une fonction sous-harmonique.*

Démonstration. Soient $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions sous-harmoniques. Alors $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ est continue. De plus, pour toute carte $\varphi : U \longrightarrow X$ et tout disque $\overline{\mathbb{D}}(z, r) \subset U$, on a

$$
f \circ \varphi(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \circ \varphi\big(z + re^{i\theta}\big) \, \mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \sup(f, g) \circ \varphi\big(z + re^{i\theta}\big) \, \mathrm{d}\theta.
$$

L'inégalité analogue est vraie pour g, donc elle l'est aussi pour $\sup(f, g)$. □

1.2.2. Principe du maximum et caractérisation locale des fonctions sous-harmoniques

Proposition 1.19 (Principe du maximum). *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue localement sous-harmonique. Si f atteint un maximum local en un point $x \in X$, alors f est constante dans un voisinage de x.*

Démonstration. Il existe une carte locale $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ centrée en x telle que f soit sous-harmonique sur U et $f(x) \geqslant f(y)$ pour tout $y \in U$. On se donne $\mathbb{D}(0, R)$ un disque contenu dans $\varphi(U)$. Alors, pour tout $0 < r < R$, on a par définition de la sous-harmonicité

$$0 \geqslant f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \circ \varphi^{-1}\big(re^{i\theta}\big) \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(f \circ \varphi^{-1}(0) - f \circ \varphi^{-1}\big(re^{i\theta}\big)\big) \, \mathrm{d}\theta \geqslant 0.$$

On en déduit par continuité que $f \circ \varphi^{-1}$ est constante égale à $f(x)$ sur $\partial\mathbb{D}(0, r)$. C'est valable pour tout $0 < r < R$, et φ est un homéomorphisme, donc f est constante égale à $f(x)$ sur le voisinage $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(0, R))$ de x. □

Définition 1.5. *On dit qu'un ouvert connexe $D \subset X$ est* un domaine régulier *si $\overline{D}$ est compact et si le problème de Dirichlet sur D admet une unique solution pour toute fonction continue $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Étant donnés une fonction continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et un ouvert régulier $D \subset X$, on note $f_D : X \longrightarrow \mathbb{R}$ l'unique fonction continue, harmonique sur D et qui coïncide avec f sur $X \setminus D$.

Proposition 1.20 (Caractérisation des fonctions sous-harmoniques). *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) La fonction f est localement sous-harmonique ;

(ii) Pour tout ouvert régulier $D \subset X$, on a

$$f \leqslant f_D \, ; \tag{10}$$

(iii) La fonction f est sous-harmonique.

En particulier, la sous-harmonicité est une propriété locale.

Démonstration. L'implication *(iii)* $\Longrightarrow$ *(i)* est évidente.

(i) $\Longrightarrow$ *(ii).* Supposons que f soit localement sous-harmonique. Soit $D \subset X$ un domaine régulier. Puisque f et f_D coïncident en dehors de D, il suffit de montrer (10) sur D. On observe que $f_D - f$ est localement sous-harmonique sur D par combinaison linéaire. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in D$ tel que $f(x) - f_D(x) > 0$. Le domaine D étant relativement compact, la fonction $f - f_D$ atteint son maximum en un point $y \in \overline{D}$; en outre, $y \in D$ car $f - f_D$ est nulle sur ∂D. D'après la Proposition 1.19, appliquée à $g := (f - f_D)|_D$, l'ensemble $g^{-1}(g(y))$ est un ouvert de D. C'est également un fermé par continuité, et D est connexe, donc g est constante sur D. La continuité de $f - f_D$ sur $\overline{D}$ entraine $g(y) = 0$, ce qui fournit une contradiction et achève de montrer *(ii).*

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii).* Supposons que (10) soit satisfaite pour tout domaine régulier. Soit $\varphi : U \longrightarrow X$ une carte, et $\overline{\mathbb{D}}(z, r) \subset U$ un disque fermé. Le Théorème 1.11 assure que le disque $D := \varphi(\mathbb{D}(z, r))$ est un domaine régulier et permet de calculer la valeur de f_D en $\varphi(z)$.

$$f \circ \varphi(z) \leqslant f_D \circ \varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_D \circ \varphi\big(z + re^{i\theta}\big) \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \circ \varphi\big(z + re^{i\theta}\big) \, \mathrm{d}\theta.$$

Cela montre que f est sous-harmonique et conclut la preuve. □

Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et D un domaine régulier. Alors, par le principe du maximum, on a sur D

$$\inf_{\partial D} f \leqslant f_D \leqslant \sup_{\partial D} f.$$

En particulier, si f est positive, alors f_D l'est aussi. Par linéarité du problème de Dirichlet, il suit que si $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une autre fonction continue telle que $f \leqslant g$, alors $f_D \leqslant g_D$.

Corollaire 1.21. *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction sous-harmonique et D un domaine régulier. Alors f_D est sous-harmonique.*

Démonstration. Soit D' un domaine régulier de X. Notons $g := f_D$; d'après la Proposition 1.20 il suffit de montrer que

$$g \leqslant g_{D'}.$$

Soit $x \in X$. Si $x \in X \setminus D'$, alors $g_{D'}(x) = g(x)$. La sous-harmonicité de f entraine $f \leqslant g$, puis $f \leqslant f_{D'} \leqslant g_{D'}$. Ainsi, si $x \in X \setminus D$, il vient

$$g(x) = f_D(x) = f(x) \leqslant g_{D'}(x).$$

On en déduit que $g - g_{D'} \leqslant 0$ sur $X \setminus (D \cap D')$. Comme cette fonction est de plus harmonique sur $D \cap D'$, le principe du maximum entraine que $g - g_{D'} \leqslant 0$ sur $D \cap D'$. □

1.2.3. Familles de Perron

Définition 1.6 (Famille de Perron). *On dit qu'un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions $X \longrightarrow \mathbb{R}$ sous-harmoniques est une famille de Perron sur X si*

(i) Pour tout $f, g \in \mathcal{F}$, on a $\sup(f, g) \in \mathcal{F}$;

(ii) Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, tout ouvert D de X tel que $\overline{D}$ soit l'image d'un disque fermé de $\mathbb{C}$ par une carte, et toute fonction continue $g : X \longrightarrow R$ telle que

$$g|_{X\setminus D} = f|_{X\setminus D}$$

et g est harmonique sur D, on a $g \in \mathcal{F}$.

On dit qu'une famille de Perron $\mathcal{F}$ est majorée (resp. bornée) s'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in X, \quad f(x) \leqslant M \quad (\text{resp. } |f(x)| \leqslant M).$$

Théorème 1.22 (Perron). *Si $\mathcal{F}$ est une famille de Perron non vide sur X, et $F := \sup \mathcal{F}$. Si F ne vaut pas identiquement $+\infty$, alors elle est harmonique sur X.*

Démonstration. Supposons pour commencer que $X = \mathbb{D}$. On suppose que $F \not\equiv +\infty$ Soit $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $F(z_0) < \infty$. On complète z_0 par une énumération $\left(z_j\right)_{j\geqslant 1}$ de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \cap \mathbb{D}$ (qui est dense dans $\mathbb{D}$). Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on se donne une suite $\left(v_{j,k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que

$$v_{j,k}\left(z_j\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} F\left(z_j\right).$$

Soit r un réel tel que $|z_0| < r < 1$. On définit une suite $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ par récurrence de la manière suivante

$$w_0 = \left(v_{0,0}\right)_{\mathbb{D}(r)} \geqslant v_{0,0} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \left[\sup\{w_n\} \cup \left\{v_{j,k} \mid 0 \leqslant j, k \leqslant n+1\right\}\right]_{\mathbb{D}(r)}.$$

Ainsi, la suite (w_n) est croissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $j, k \leqslant n$, la fonction $w_n \in \mathcal{F}$ est harmonique sur $\mathbb{D}(r)$ et vérifie

$$w_{n(z_j)} \geqslant v_{j,k}\left(z_j\right).$$

On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$w_{n(z_j)} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(z_j).$$

Notons W la limite simple de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $W(z_0) = F(z_0) < +\infty$, donc W est harmonique sur $\mathbb{D}(r)$ par le Théorème 1.17. On a $W \leqslant F$ sur $\mathbb{D}$ car les w_n sont dans $\mathcal{F}$. Soit $v \in \mathcal{F}$. On a, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$W(z_j) = F(z_j) \geqslant v(z_j).$$

Comme $W - v$ est continue sur $\mathbb{D}(r)$, la densité des z_j entraine $W \geqslant v$ sur $\mathbb{D}(r)$. Par passage au supremum sur $\mathcal{F}$, on en déduit $W \geqslant F$ sur $\mathbb{D}(r)$. Ainsi, $W = F$ sur $\mathbb{D}(r)$. Comme on peut prendre r arbitrairement proche de 1, on en déduit que F est harmonique sur $\mathbb{D}$.

On traite maintenant le cas général. D'après ce qui précède, on sait que pour tout disque $\Delta \subset X$, F est soit harmonique, soit identiquement égale à $+\infty$ sur Δ. Comme tout point de X possède un voisinage biholomorphe à un disque, on en déduit que $F^{-1}(+\infty)$ et $F^{-1}(\mathbb{R})$ sont ouverts dans X. Le résultat découle alors de la connexité de X. $\square$

1.2.4. Problème de Dirichlet dans une surface de Riemann

On donne une condition suffisante pour l'existence de solutions au problème de Dirichlet dans une surface de Riemann.

Théorème 1.23 (Existence de fonctions harmoniques). *Soit Y un ouvert de X tel que $\overline{Y}$ soit une sous-variété à bord lisse non vide de X. Alors, pour toute fonction continue bornée $f : \partial Y \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une fonction continue $u : \overline{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonique sur Y et dont la restriction à ∂Y est f.*

Démonstration. Soient m, M des réels tels que $m < \inf f$ et $\sup f < M$. Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des restrictions à Y de fonctions continues $v : \overline{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$, sous-harmoniques sur Y et telles que $v|_{\partial Y} \leqslant f$. La fonction constante égale à m appartient à $\mathcal{F}$, qui est donc non vide. Comme un supremum de deux fonctions sous-harmoniques est sous-harmonique, $\mathcal{F}$ vérifie le *(i)* de la Définition 1.6. Le *(ii)* découle quant à lui du Corollaire 1.21. Ainsi, $\mathcal{F}$ est une famille de Perron sur Y, majorée par M. D'après le Théorème 1.22, $u := \sup \mathcal{F}$ est harmonique sur Y ; bien-sûr, u est à valeurs dans $[m, M]$. Il reste à montrer que u se prolonge en une fonction continue sur $\overline{Y}$ coïncidant avec f sur ∂Y.

Soient $x \in \partial Y$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une carte holomorphe de X centrée en x, de sorte que $\varphi(U \cap \partial Y)$ soit une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1. On peut donc, quitte à réduire U, se donner une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $U \setminus \overline{Y}$ convergeant vers x et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi(x_n)| = \inf_{z\in\varphi(U\cap Y)} |\varphi(x_n) - z|. \tag{11}$$

Pour tous $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions

$$h_{n,\varepsilon} : \overline{Y} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \begin{cases} \max\left(m, \ln\left|\frac{\varphi(x_n)}{\varphi(y)-\varphi(x_n)}\right| + f(x) - \varepsilon\right) & \text{si } y \in U \\ m & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$k_{n,\varepsilon} : \overline{Y} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \begin{cases} \min\left(M, \ln\left|\frac{\varphi(y)-\varphi(x_n)}{\varphi(x_n)}\right| + f(x) + \varepsilon\right) & \text{si } y \in U \\ M & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 1.24. *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,*

(i) $h_{n,\varepsilon}$ est continue, sous-harmonique sur Y et $h_{n,\varepsilon} < f$ sur ∂Y.

(ii) $k_{n,\varepsilon}$ est continue, surharmonique sur Y et $k_{n,\varepsilon} > f$ sur ∂Y.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On se donne $\Delta \subset U$ tel que $\varphi(\Delta)$ soit un disque fermé. Alors, pour n assez grand, et $y \in U \setminus \Delta$, on a $h_{n,\varepsilon}(y) = m$. Donc $h_{n,\varepsilon}$ est continue et harmonique sur $\overline{Y} \setminus \Delta$. La fonction

$$\overline{Y} \cap U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \ln\left|\frac{\varphi(x_n)}{\varphi(y) - \varphi(x_n)}\right|$$

est continue et harmonique sur $Y \cap U$ comme composée d'une fonction holomorphe par une fonction harmonique. Par passage au sup, $h_{n,\varepsilon}$ est sous-harmonique sur $Y \cap U$. Cela montre que $h_{n,\varepsilon}$ est continue et sous-harmonique sur Y. La condition (11) assure que $h_{n,\varepsilon} < f$ sur ∂Y. Cela montre *(i)*. La preuve de *(ii)* est similaire. □

Soit $\varepsilon > 0$. On se donne $N \in \mathbb{N}$ vérifiant les propriétés du Lemme 1.24. Alors $h_{n,\varepsilon}|_Y \in \mathcal{F}$. Or, $h_{n,\varepsilon}(x) \geqslant f(x) - \varepsilon$, donc il existe un voisinage V de x dans $\overline{Y}$ tel que pour tout $y \in V$,

$$u(y) \geqslant h_{n,\varepsilon}(y) \geqslant f(x) - 2\varepsilon.$$

De même, $k_{n,\varepsilon}(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$, donc il existe un voisinage W de x dans $\overline{Y}$ tel que pour tout $y \in W$, $k_{n,\varepsilon}(y) \leqslant f(x) + 2\varepsilon$. Or, pour tout $v \in \mathcal{F}$, la fonction $v - k_{n,\varepsilon}$ est sous-harmonique sur Y et se prolonge en une fonction continue sur $\overline{Y}$, négative sur ∂Y. Par le principe du maximum, on en déduit que $v \leqslant k_{n,\varepsilon}$ sur $\overline{Y}$. En particulier,

$$u(y) \leqslant k_{n,\varepsilon}(y) \leqslant f(x) + 2\varepsilon$$

sur W. Ainsi pour tout $y \in V \cap W$,

$$|u(y) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Cela montre que $u(y) \underset{y \to x}{\longrightarrow} f(x)$, et conclut la preuve. □

1.2.5. Fonctions de Green

On garde la notation X pour une surface de Riemann connexe non compacte. On appelle *pièce* de X une sous-variété à bord lisse compacte connexe de X de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Cette notion sera étudiée plus en détail dans la Section 3.2.

Définition 1.7 (Fonction de Green). *Soit P une pièce de X et $a \in \mathring{P}$. Une* fonction de Green relative *au couple (P, a) est une fonction continue $G : P \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$, nulle sur ∂P, harmonique sur $\mathring{P} \setminus \{a\}$ pour laquelle il existe une carte locale $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ centrée en a avec $U \subset \mathring{P}$ et une fonction harmonique $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $G + \ln|\varphi| = h$ sur $U \setminus \{a\}$.*

Remarque 1.3. Avec les notations de la Définition 1.7, si $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une autre carte locale centrée en a avec $V \subset \mathring{P}$, on a sur $U \cap V \setminus \{a\}$,

$$G + \ln|\psi| = h + \ln\left|\frac{\psi}{\varphi}\right|.$$

Or $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ est un biholomorphisme nul en 0, donc il s'écrit sous la forme $z \longmapsto zg(z)$ avec g holomorphe non nulle en 0. De là, il vient

$$\ln\left|\frac{\psi}{\varphi}\right| = \ln|g \circ \varphi|,$$

qui se prolonge donc en une fonction harmonique sur $U \cap V$. Ainsi, pour toute carte ψ, $G + \ln|\psi|$ se prolonge en une fonction harmonique sur un voisinage non épointé de a, ce qui montre que la Définition 1.7 est indépendante du choix de la carte.

Lemme 1.25. *Soit P une pièce de X, $a \in \mathring{P}$ et $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(R)$ une carte centrée en a avec $U \subset \mathring{P}$. Alors, il existe une fonction continue $k : P \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$, nulle sur ∂P, surharmonique sur $\mathring{P} \setminus \{a\}$ et telle que $k + \ln|\varphi|$ soit constante au voisinage de a.*

Démonstration. Soit r un réel tel que $0 < r < R$. Notons $W := \varphi^{-1}(\mathbb{D}(r)) \subset U$. On considère la fonction continue $h : P \setminus W \longrightarrow \mathbb{R}$ valant 0 sur ∂P, 1 sur ∂W et harmonique dans $\mathring{P} \setminus \overline{W}$. On définit également, pour tout $\alpha > 0$, les fonctions

$$u_\alpha = -\ln|\varphi| + \ln r + \alpha : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

et

$$v_\alpha : P \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} v_\alpha = u_\alpha & \text{sur } W \setminus \{a\} \\ v_\alpha = \alpha h & \text{sur } P \setminus W. \end{cases}$$

Alors v_α est continue, harmonique sur $\mathring{P} \setminus \overline{W}$ et sur $W \setminus \{a\}$ et vérifie

$$v_\alpha|_{\partial P} = 0 \quad \text{et} \quad v_\alpha|_{\partial W} = \alpha.$$

Par construction, $v_\alpha + \ln|\varphi|$ est constante sur $W \setminus \{a\}$. Il ne reste qu'à montrer que pour α bien choisi, v_α est surharmonique sur $\mathring{P} \setminus \{a\}$. On a vu que la surharmonicité est une propriété locale, donc il suffit de vérifier l'inégalité de la moyenne (9) sur ∂W. Soit ρ un réel tel que $r < \rho < R$. Comme h est harmonique non constante sur $\mathring{P} \setminus \overline{W}$, le principe du maximum assure que

$$0 < m := \sup_{\partial \mathbb{D}(\rho)} h \circ \varphi^{-1} < 1.$$

La solution au problème de Dirichlet sur la couronne $A_\rho := \{z \in \mathbb{C} \mid r \leqslant |z| \leqslant \rho\}$ avec valeur m sur $\partial\mathbb{D}(\rho)$ et α sur $\partial\mathbb{D}(r)$ est donnée par

$$w_\alpha(z) = \frac{\alpha - m}{\ln \frac{r}{\rho}} \ln \frac{|z|}{\rho} + m.$$

Le principe du maximum assure que pour tout $\alpha > 0$, $\alpha h \leqslant w_\alpha$ sur A_ρ. Par concavité de la fonction ln, on a également

$$w_\alpha(z) \leqslant \frac{\alpha - m}{r - \rho}(|z| - \rho) + m. \tag{12}$$

De plus, pour α assez grand, puisque $r < \rho$,

$$\frac{\alpha - m}{r - \rho} < -\frac{1}{r},$$

qui n'est autre que la dérivée radiale de u_α sur $\partial\mathbb{D}(r)$. Fixons un tel α. Encore par concavité de la fonction ln et par (12), on a, pour $z \in A_\rho$,

$$u_{\alpha(z)} \geqslant -\frac{1}{r}(|z| - r) + \alpha \geqslant w_\alpha(z) \geqslant \alpha h(z).$$

Ceci étant valable pour un choix arbitraire de ρ, on en déduit $u_\alpha \geqslant \alpha h$ sur $U \setminus W$, d'où $v_\alpha \leqslant u_\alpha$ sur $U \setminus \{a\}$. Ainsi, si $z \in \partial\mathbb{D}(r)$ et $\overline{\mathbb{D}}(z, \delta) \subset U \setminus \{a\}$, on obtient par harmonicité de u_α

$$\begin{aligned}
v_\alpha \circ \varphi^{-1}(z) = \alpha = u_\alpha \circ \varphi^{-1}(z) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\alpha \circ \varphi^{-1}\big(z + \delta e^{i\theta}\big) \, \mathrm{d}\theta \\
&\geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_\alpha \circ \varphi^{-1}\big(z + \delta e^{i\theta}\big) \, \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Cela montre que v_α est surharmonique sur $\mathring{P} \setminus \{a\}$, et achève la preuve. □

Théorème 1.26. *Soit P une pièce de X et $a \in \mathring{P}$. Alors, il existe une unique fonction de Green relative au couple (P, a).*

Démonstration. Montrons l'unicité. Soient G_1, G_2 deux fonctions de Green relatives à (P, a). Alors, $G := G_1 - G_2$ s'étend par définition en une fonction continue encore notée $G : P \longrightarrow \mathbb{R}$ et harmonique sur $\mathring{P}$. Comme $G|_{\partial P} = 0$, le principe du maximum assure que $G = 0$ sur P.

Montrons l'existence. Soit $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une carte locale centrée en a, avec $U \subset \mathring{P}$, et dont l'image contient un disque $\mathbb{D}(r)$ avec $r > 1$. On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des restrictions à $\mathring{P} \setminus \{a\}$ de fonctions continues $f : P \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$, nulles sur ∂P, sous-harmoniques sur $\mathring{P} \setminus \{a\}$ et telles que $f + \ln|\varphi|$ soit majorée au voisinage de a. On vérifie aussitôt que $\mathcal{F}$ est une famille de Perron sur $\mathring{P} \setminus \{a\}$. Elle est non vide car la fonction $\lambda = \sup(0, -\ln|\varphi|) : \mathring{P} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{F}$. Soit $k : P \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, nulle sur ∂P, surharmonique sur $\mathring{P} \setminus \{a\}$ et telle que $k + \ln|\varphi|$ soit constante au voisinage de a donnée par le Lemme 1.25. Alors, pour toute fonction $f : P \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathring{P} \setminus \{a\}$ appartient à $\mathcal{F}$, la fonction $f - k$ se prolonge en une fonction sous-harmonique sur $\mathring{P}$. Le principe du maximum assure qu'elle est négative. En particulier, $f \leqslant k$ sur $P \setminus \{a\}$. D'après le Théorème 1.22, la fonction $G := \sup \mathcal{F} : \mathring{P} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est harmonique. De plus, $\lambda \leqslant G \leqslant k$ donc u se prolonge en une fonction continue sur $P \setminus \{a\}$, nulle sur ∂P. Enfin, $G + \ln|\varphi|$ est harmonique sur $U \setminus \{a\}$ et bornée au voisinage de a. Elle se prolonge donc en une fonction harmonique sur U par le Théorème de la singularité effaçable 1.15. Ainsi, G est une fonction de Green relative au couple (P, a). □

1.3. Inégalités d'Erdös et Koebe

1.3.1. Théorème de Schwarz-Pick

Théorème 1.27 (Lemme de Schwarz). *Soit $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}$,*

$$|f(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad |f'(0)| \leqslant 1.$$

De plus, si $|f(z)| = |z|$ pour un certain $z \in \mathbb{D}^*$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors f est une rotation de rapport $f'(0)$.

Démonstration. Comme f est analytique en 0, il existe une fonction holomorphe $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(z) = zg(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $g(0) = f'(0)$. Pour tous r tel que $0 < r < 1$ et $z \in \partial\mathbb{D}(r)$, on a

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

D'après le principe du maximum appliqué à g, on en déduit que $|g| \leqslant \frac{1}{r}$ sur $\overline{\mathbb{D}}(r)$. Ceci étant valable pour r arbitraire, il suit que $|g| \leqslant 1$ sur $\mathbb{D}$. Si $|g|$ atteint 1 en un point de $\mathbb{D}$, alors g est constante de module 1, autrement dit $f(z) = f'(0)z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ avec $|f'(0)| = 1$. □

Corollaire 1.28 (Théorème de Schwarz-Pick). *Soit $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une application holomorphe. Alors, pour tous $z, w \in \mathbb{D}$,*

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|.$$

Pour préparer la preuve, considérons, $w \in \mathbb{D}$ étant donné, l'application méromorphe

$$\varphi_w : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{z-w}{1-\overline{w}z}.$$

Si $w = 0$, ce n'est autre que l'identité. Sinon, elle induit un biholomorphisme de $\mathbb{C} \setminus \{\overline{w}^{-1}\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{-\overline{w}^{-1}\}$, d'inverse

$$\varphi_w^{-1} = \varphi_{-w} : \mathbb{C} \setminus \{-\overline{w}^{-1}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\overline{w}^{-1}\}, \quad z \longmapsto \frac{z+w}{1+\overline{w}z}.$$

Elle est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$ et pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$,

$$|\varphi_w(z)| = \frac{|z-w|}{|1-\overline{w}z|} = \frac{|z-w|}{|\overline{z-w}|} = 1.$$

Par le principe du maximum, $\psi_w := \varphi_w|_{\mathbb{D}}$ étant non constante, elle est à valeurs dans $\mathbb{D}$, et est donc un automorphisme de $\mathbb{D}$.

Démonstration du Corollaire 1.28. Fixons $w \in \mathbb{D}$ et considérons l'application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans lui-même $g := \psi_{f(w)} \circ f \circ \psi_{-w}$. Par construction, on a $g(0) = 0$. Le Théorème 1.27 assure que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\left|\psi_{f(w)} \circ f\right| = |g \circ \psi_w| \leqslant |\psi_w|$, ce qui s'écrit explicitement, pour $z \in \mathbb{D}$

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|.$$

□

Corollaire 1.29. *Soient R, R' des réels tels que $0 < R < R'$, et $f : \mathbb{D}(R) \longrightarrow \mathbb{D}(R')$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}(R)$,*

$$|f(z) - z| \leqslant \frac{|z|^2}{R^2}\frac{R'^2 - R^2}{R' - |z|}.$$

Démonstration. Soit $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ la fonction holomorphe définie par

$$g(z) = \frac{f(Rz)}{R'}.$$

On a $g(0) = 0$ et $g'(0) = \frac{R}{R'} < 1$. Le Théorème 1.27 assure que la fonction h définie sur $\mathbb{D}$ par

$$h(z) = \frac{g(z)}{z} \text{ si } z \neq 0 \quad \text{et} \quad h(0) = g'(0)$$

est holomorphe à valeurs dans $\mathbb{D}$. Appliquons alors le Corollaire 1.28 à h, $\frac{z}{R}$ et $w = 0$ avec $z \in \mathbb{D}(R)$ fixé ; on obtient

$$|u| \leqslant \left|\psi_0\left(\frac{z}{R}\right)\right| = \frac{|z|}{R}. \tag{13}$$

Où $u := \psi_{h(0)} \circ h\left(\frac{z}{R}\right)$. De plus, on a

$$\frac{f(z)R}{zR'} = h\left(\frac{z}{R}\right) = \psi_{-h(0)}(u) = \frac{u + h(0)}{1 + \overline{h(0)}u} = \frac{u + \frac{R}{R'}}{1 + \frac{R}{R'}u}.$$

En réarrangeant, il vient

$$f(z) - z = z\left(\frac{R'}{R}\frac{u + \frac{R}{R'}}{1 + \frac{R}{R'}u} - 1\right) = zu\frac{\frac{R'}{R} - \frac{R}{R'}}{1 + \frac{R}{R'}u} = \frac{z}{R}u\frac{R'^2 - R^2}{R' + Ru}.$$

En passant au module et en majorant en utilisant (13), on obtient finalement

$$|f(z) - z| \leqslant \frac{|z|}{R}|u|\frac{R'^2 - R^2}{R' - R|u|} \leqslant \frac{|z|^2}{R^2}\frac{R'^2 - R^2}{R' - |z|},$$

d'où le résultat. □

1.3.2. Théorème de l'aire de Gronwall, conjecture de Bieberbach pour $n = 2$

Définition 1.8 (Fonctions schlight). *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0. Une application holomorphe $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite* schlight *si elle est injective et vérifie*

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1.$$

On note $\mathcal{S}(U)$ l'ensemble des fonctions schlight définies sur U. Si $U = \mathbb{D}(r)$ on écrit simplement $\mathcal{S}(r)$. On écrit également $\mathcal{S}$ au lieu de $\mathcal{S}(1)$.

Lemme 1.30 (Théorème de l'aire de Gronwall). *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors, la fonction*

$$g : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$$

admet un développement en série de Laurent convergeant sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ de la forme

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1. \tag{14}$$

L'idée de la preuve est assez simple. On calcule l'aire du complémentaire de l'image de g dans $\mathbb{C}$ en fonction des coefficients b_n grâce à la formule de Stokes. La positivité de cette aire fournit l'inégalité (14). Cependant, on prend ici garde à justifier soigneusement chaque étape sans utiliser le théorème de la courbe fermée de Jordan, ce qui rend la démonstration un peu fastidieuse.

Démonstration. La fonction $z \longmapsto \frac{f(z)}{z}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ qui ne s'annule pas et vaut 1 en 0. Son inverse $h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est donc également holomorphe. La fonction h admet donc un développement en série entière en 0 convergeant sur $\mathbb{D}$, de la forme

$$h(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+1}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{D}^*$, $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z}h(z)$. De là, on obtient pour $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$,

$$g(z) = zh\left(\frac{1}{z}\right) = z\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n-1}\right) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$$

Montrons maintenant l'inégalité (14). Pour cela, l'idée est de calculer l'aire du complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'image de g. Voici ce que l'on fait précisément. Soit $r > 1$ un réel. On considère l'ensemble

$$K_r := \mathbb{C} \setminus g\left(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(r)\right).$$

C'est un sous ensemble fermé car g est une application ouverte. Il est également borné. En effet, f induit un biholomorphisme entre deux voisinages de 0, ce qui implique que l'image de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(r)$ contient un voisinage de l'infini. Ainsi, K_r est compact. Calculons son aire

$$A_r := \int_{K_r} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Montrons que K_r est une sous-variété à bord lisse de $\mathbb{C}$ de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Premièrement, l'ouvert $g\Big(\mathbb{D}(r) \setminus \overline{\mathbb{D}}\Big)$ est contenu dans K_r par injectivité de g, donc K_r a un intérieur non vide. Deuxièmement, mettons en évidence un redressement au voisinage de chaque point de la frontière de K_r, que l'on commence par déterminer. On a

$$\partial K_r = \partial g\Big(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(r)\Big).$$

La continuité de g implique

$$g(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(r)) \subset \overline{g\Big(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(r)\Big)}.$$

L'inclusion réciproque vient du fait que g est propre (car $g \sim \mathrm{Id}$ au voisinage de ∞). En effet, si $g(p_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q$, avec $|p_n| > r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc admet une valeur d'adhérence $p \in \mathbb{C}$ telle que $|p| \geqslant r$. Par continuité de g, on a $g(p) = q$, donc $q \in g\Big(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(r)\Big)$. On en déduit l'égalité

$$\partial K_r = g(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(r)) \setminus g\Big(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(r)\Big) = g(\partial\mathbb{D}(r)).$$

Comme g est holomorphe, elle s'écrit localement comme un monôme, à composition à droite près par un biholomorphisme. Par injectivité de g, un tel monôme est nécessairement de degré 1, ce qui montre que g' ne s'annule pas. Pour tout $z = g(\xi) \in \partial K_r$, avec $\xi \in \partial\mathbb{D}(r)$, il existe donc, par inversion locale, des ouverts $U, V \subset \mathbb{C}$ contenant respectivement ξ et z tels que $g|_U : U \longrightarrow V$ soit un biholomorphisme. De plus,

$$V \cap \partial K_r = g(U \cap \partial\mathbb{D}(r)) \quad \text{et} \quad V \cap \mathring{K}_r = g(U \cap \mathbb{D}(r)).$$

Cela fournit un redressement convenable de K_r au voisinage de z. De plus, on remarque que le lacet

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \theta \longmapsto g\big(re^{i\theta}\big)$$

est une paramétrisation régulière de ∂K_r, compatible avec l'orientation de K_r. On peut donc appliquer la formule de Stokes pour calculer A_r. Rappelons que

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{1}{4i}(\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z - \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}) = \frac{i}{2}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = \frac{1}{2i}\,\mathrm{d}(\overline{z}\,\mathrm{d}z).$$

Il suit

$$A_r = \frac{1}{2i}\int_{K_r} \mathrm{d}(\overline{z}\,\mathrm{d}z) = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_r} \overline{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2i}\int_{\partial\mathbb{D}(r)} \overline{g(z)}g'(z)\,\mathrm{d}z.$$

On utilise maintenant le développement en série de Laurent de g pour calculer explicitement le membre de droite. Sur le cercle $\partial\mathbb{D}(r)$, on a $\overline{z} = \frac{r^2}{z}$, donc

$$\overline{g(z)} = \frac{r^2}{z} + \overline{b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n}\frac{z^n}{r^{2n}}. \quad \text{et} \quad g'(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{-n-1}.$$

Les deux séries convergent normalement sur le cercle $\partial\mathbb{D}(r)$, donc on peut réarranger le produit selon les degrés des monômes en z, et inverser les symboles somme et intégrale. Le seul terme qui contribue à l'intégrale est celui en z^{-1}. Or, pour $z \in \partial\mathbb{D}(r)$, le terme $\overline{g(z)}g'(z)$ s'écrit sous la forme

$$\overline{g(z)}g'(z) = \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} b_n \overline{b_n}\right) z^{-1} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} c_n z^n,$$

d'où

$$A_r = \pi\left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} |b_n|^2\right).$$

Comme A_r est positive, on a pour tout $r > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n}} |b_n|^2 \leqslant r^2.$$

On en déduit que la série de terme général $n|b_n|^2$ (qui domine le terme général du membre de gauche) converge. On applique alors la convergence dominée en faisant tendre r vers 1, ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1,$$

et achève la preuve. □

Théorème 1.31 (Bieberbach). *Soit $f \in \mathcal{S}$. Notons*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

le développement en série entière de f au voisinage de 0. *Alors $|a_2| \leqslant 2$.*

Démonstration. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{D}$ par $g(z) = f(z^2)$. Il existe une fonction holomorphe $h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $g(z) = z^2 h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $h(0) = 1$. Comme g ne s'annule pas sur $\mathbb{D}^*$, h ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Considérons le revêtement

$$\pi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \longmapsto z^2.$$

Le domaine $\mathbb{D}$ est simplement connexe, donc il existe un unique relèvement $\tilde{h} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ de h le long de π tel que $\tilde{h}(0) = 1$. Soit $\tilde{g} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction holomorphe donnée par $\tilde{g}(z) = z\tilde{h}(z)$. On a par construction $\tilde{g}^2 = g$ sur $\mathbb{D}$. De plus, $\tilde{g}(0) = 0$ et le choix $\tilde{h}(0) = 1$ assure que $\tilde{g}'(0) = 1$. On remarque également que g est injective sur $\mathbb{D}^*$, et n'atteint 0 qu'en 0, donc elle est injective sur $\mathbb{D}$. Par conséquent, $\tilde{g}$ est également injective sur $\mathbb{D}$. Le Lemme 1.30 s'applique donc à $\tilde{g}$ et donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1, \tag{15}$$

où les b_n sont tels que

$$\frac{1}{\tilde{g}\left(\frac{1}{z}\right)} = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}.$$

On termine en exprimant a_2 en fonction des b_n. D'une part, on a, au voisinage de 0,

$$g(z) = z^2 + a_2 z^4 + o(z^4).$$

D'autre part, toujours au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{\left(\frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + o(z)\right)^2} \\ &= \frac{z^2}{\left(1 + b_0 z + b_1 z^2 + o(z^2)\right)^2} \\ &= z^2\left(1 - 2b_0 z + (b_0^2 - 2b_1) z^2 + o(z^2)\right) \\ &= z^2 - 2b_0 z^3 + (b_0^2 - 2b_1) z^4 + o(z^4). \end{aligned}$$

On en déduit que $b_0 = 0$ et $a_2 = 2b_1$. Or, d'après (15), on a

$$|b_2|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1,$$

donc on obtient comme attendu $|a_2| = 2|b_1| \leqslant 2$. □

1.3.3. Théorème du quart et inégalités de distorsion de Koebe

Théorème 1.32 (Théorème du quart de Koebe). *Soit $f \in \mathcal{S}(R)$. Alors,*

$$\mathbb{D}(R/4) \subset f(\mathbb{D}(R)).$$

Démonstration. Supposons pour commencer que $R = 1$. Soit $w \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}(r))$; montrons que $|w| \geqslant \frac{R}{4}$. Écrivons

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

au voisinage de 0. On considère également

$$\varphi : \mathbb{C} \setminus \{w\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{wz}{w - z}.$$

C'est une homographie, donc une application holomorphe injective. De plus, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$. De là, $g := \varphi \circ f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, injective, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. De plus, on a pour z voisin de 0,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{w(z + a_2 z^2 + o(z^2))}{w - (z + o(z))} \\ &= (z + a_2 z^2 + o(z^2))\left(1 + \frac{z}{w} + o(z)\right) \\ &= z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right) z^2 + o(z^2). \end{aligned}$$

On applique alors le Théorème 1.31 à f et à g, pour obtenir $|a_2| \leqslant 2$ et $\left|a_2 + \frac{1}{w}\right| \leqslant 2$. Finalement, il vient

$$\left|\frac{1}{w}\right| \leqslant \left|a_2 - a_2 + \frac{1}{w}\right| \leqslant |a_2| + \left|a_2 + \frac{1}{w}\right| \leqslant 4.$$

Cela achève la preuve dans le cas $R = 1$. Dans le cas général, on pose

$$h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{f(Rz)}{R}.$$

Daprès le premier cas, on a $\mathbb{D}(1/4) \subset h(\mathbb{D}) = \frac{1}{R} f(\mathbb{D}(R))$, ce qui conclut. $\square$

Théorème 1.33 (Inégalités de distorsion de Koebe). *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors les inégalités suivantes sont vérifiées pour tout $z \in \mathbb{D}$*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \; ; \tag{16}$$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \tag{17}$$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{D}$. On note ψ la fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ définie par

$$\psi(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}.$$

On a vu que c'est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ qui vérifie $\psi(0) = a$ et $\psi'(0) = 1 - |a|^2$. On considère alors

$$F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{f \circ \psi(z) - f(a)}{(1-|a|^2) f'(a)},$$

de sorte que $F \in \mathcal{S}$. D'après le Théorème 1.31, on a

$$|F''(0)| = \left| (1-|a|^2) \frac{f''(a)}{f'(a)} - 2\overline{a} \right| \leqslant 4.$$

Ceci étant valable pour tous $a, z \in \mathbb{D}$, il vient en multipliant par $\frac{|a|}{1-|a|^2}$, puis en choisissant $a = z$,

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leqslant \frac{4|z|}{1-|z|^2}. \tag{18}$$

Comme on l'a déjà vu, la dérivée d'une fonction holomorphe injective ne s'annule pas. On peut donc se donner un relèvement holomorphe $\ln f' : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ de $f' : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ le long de $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $\ln f'(0) = 0$. Maintenant, remarquons que pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} r\partial_r \ln\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right| &= r \operatorname{Re}\left(\partial_r \ln f'\left(re^{i\theta}\right)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left[re^{i\theta} \frac{f''\left(re^{i\theta}\right)}{f'\left(re^{i\theta}\right)} \right] \end{aligned}$$

L'équation (18) se réécrit donc

$$\left| r\partial_r \ln\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right| - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leqslant \frac{4r}{1-r^2},$$

et fournit l'encadrement

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leqslant \partial_r \ln\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant \frac{2r+4}{1-r^2}.$$

En intégrant entre 0 et $\rho > 0$, il vient

$$\ln\left(\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \right) \leqslant \ln\left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| \leqslant \ln\left(\frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} \right).$$

On passe alors à l'exponentielle et on obtient (16) pour $z = \rho e^{i\theta}$. Montrons maintenant (17). La majoration de $|f(z)|$ découle immédiatement de (16) par intégration le long du segment $[0, z]$. Montrons la minoration. Comme le membre de gauche de (17) est majoré par $\frac{1}{4}$, il suffit de montrer l'inégalité pour $z \in U := f^{-1}(\mathbb{D}(1/4))$. Or, d'après le Théorème 1.32, f induit un biholomorphisme

$$f|_U : U \longrightarrow \mathbb{D}(1/4).$$

On définit alors

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow U, \quad t \longmapsto f|_U^{-1}(tf(z)).$$

Le théorème fondamental de l'analyse donne

$$|f(z)| = \left|\int_\gamma f'(w)\,\mathrm{d}w\right| = \left|\int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Or, par construction, on a pour tout $t \in [0,1]$,

$$f'(\gamma(t))\gamma'(t) = \partial_t(tf(z)) = f(z).$$

On a donc

$$|f(z)| = \int_0^1 |f'(\gamma(t))\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant la minoration de (16), et le fait que $|\gamma|$ est dérivable sur $]0,1]$ et vérifie $|\gamma'| \geqslant |\gamma|'$ en vertu de l'inégalité triangulaire $|\gamma(t+h) - \gamma(t)| \geqslant ||\gamma(t+h)| - |\gamma(t)||$, on trouve

$$|f(z)| \geqslant \int_0^1 \frac{1 - |\gamma|(t)}{(1 + |\gamma|(t))^3}|\gamma|'(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{|z|} \frac{1-r}{(1+r)^3}\,\mathrm{d}r = \frac{|z|}{(1+|z|)^2},$$

d'où le résultat. □

1.3.4. Inégalité d'uniformisation d'Erdös

Lemme 1.34. *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors $f(\mathbb{D}(1/16)) \subset \mathbb{D}(1/4)$.*

Démonstration. Appliquons la majoration de (17), avec $z \in \mathbb{D}(1/16)$. Il vient

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \leqslant \frac{\frac{1}{16}}{\left(1 - \frac{1}{16}\right)^2} = \frac{16}{15^2}.$$

L'inégalité souhaitée est largement vérifiée. □

Théorème 1.35. *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}(1/16)$,*

$$|f(z) - z| \leqslant 80|z|^2.$$

Démonstration. On pose $R = \frac{1}{16}$ et $R' = \frac{1}{4}$. On applique le Corollaire 1.29 à la restriction de f à $\mathbb{D}(R)$. Il vient, pour tout $z \in \mathbb{D}(R)$,

$$|f(z) - z| \leqslant \frac{|z|^2}{R^2}\frac{R'^2 - R^2}{R' - |z|} \leqslant \frac{|z|^2}{R^2}\frac{R'^2 - R^2}{R' - R} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}{\frac{1}{16^2}}|z|^2 = (4^3 + 4^2)|z|^2 = 16 \times 5|z|^2 = 80|z|^2,$$

d'où le résultat. □

Corollaire 1.36. *Soit $f \in \mathcal{S}(R)$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}(R/16)$,*

$$|f(z) - z| \leqslant 80\frac{|z|^2}{R}.$$

Démonstration. On applique le Théorème 1.35 à la fonction

$$g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{f(Rz)}{R},$$

qui est dans $\mathcal{S}$. On obtient, pour tout $z \in \mathbb{D}(R/16)$,

$$|f(z) - z| = R\left|g\left(\frac{z}{R}\right) - \frac{z}{R}\right| \leqslant R \times 80\left|\frac{z}{R}\right|^2 = 80\frac{|z|^2}{R}.$$

□

2. Théorème de Radó

Comme première application de la théorie des fonctions harmoniques, on établit le théorème de Radó 2.7, qui affirme que la topologie de toute surface de Riemann est à base dénombrable.

2.1. Espaces topologiques à Base Dénombrable et Théorème de Poincaré-Volterra

Définition 2.1. *On dit qu'un espace topologique X est à base dénombrable s'il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{B}$ de parties ouvertes de X tel que tout ouvert de X s'écrive comme réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. On dit que X est localement à base dénombrable si tout point de X admet un voisinage dont la topologie induite par celle de X est à base dénombrable.*

On adopte la terminologie anglosaxonne pour la compacité ; un espace topologique est dit compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. On ne demande pas qu'il soit séparé.

Lemme 2.1. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue surjective et ouverte entre deux espaces topologiques. Si X est à base dénombrable d'ouverts, alors il en est de même de Y.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable d'ouverts de X. Alors

$$\mathcal{B}' = \{f(U) \mid U \in \mathcal{B}\}$$

est un ensemble dénombrable d'ouverts de Y car f est ouverte. Soit $y \in V \subset Y$ avec V ouvert. Comme f est surjective, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Il existe par continuité de f un ouvert $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U \subset f^{-1}(V)$. On a donc $y \in f(U) \subset V$ avec $f(U) \in \mathcal{B}'$. □

Lemme 2.2. *Soit K un espace compact dans lequel tout point admet un voisinage à base dénombrable. Alors X est à base dénombrable.*

Démonstration. On recouvre K par une famille finie d'ouverts U_i admettant chacun une base dénombrable $\mathcal{B}_i$. Alors la réunion des $\mathcal{B}_i$ est un ensemble dénombrable de parties ouvertes de K, et forme une base de la topologie de K. □

Lemme 2.3. *Soit X un espace topologique et $A \subset X$. Alors toute partie de X qui rencontre à la fois A et son complémentaire mais pas sa frontière ∂A est non connexe.*

Démonstration. Soit $B \subset X$ une telle partie. On a par hypothèse

$$B = \left(B \cap \mathring{A}\right) \sqcup B \cap \left(\overline{A} \setminus \mathring{A}\right) \sqcup \left(B \cap \left(X \setminus \overline{A}\right)\right) = \left(B \cap \mathring{A}\right) \sqcup \left(B \cap \left(X \setminus \overline{A}\right)\right)$$

ce qui montre que B est réunion disjointe de deux ouverts non vides. □

Théorème 2.4 (Poincaré-Volterra). *Soit X un espace topologique séparé, connexe, localement connexe, localement compact et localement à base dénombrable. Soit Y un espace topologique séparé à base dénombrable et soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue dont les fibres sont des sous-espaces discrets de X. Alors X est à base dénombrable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable d'ouverts de Y. On dit que $U \subset X$ est distingué s'il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que U est une composante connexe de $f^{-1}(V)$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des ouverts distingués de X dont la topologie est à base dénombrable.

Lemme 2.5. *L'ensemble $\mathcal{A}$ est une base de la topologie de X.*

Démonstration. Soit $x \in X$ et D un voisinage ouvert de x. La fibre $f^{-1}(f(x))$ étant discrète, il existe un ouvert U de X tel que $U \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Comme X est localement compact, il existe un voisinage compact K de x, tel que $K \subset U \cap D$. L'application f étant continue $f(\partial K)$ est compact. Comme Y est séparé, $f(\partial K)$ est fermé dans Y. On se donne donc $W \in \mathcal{B}$ tel que $f(x) \in W$ et $W \cap f(\partial K) = \emptyset$. Soit V la composante connexe de $f^{-1}(W)$ contenant x. Comme X est localement connexe, V est un ouvert de X. Par définition, V est connexe, rencontre l'intérieur de K car les deux contiennent x, et ne rencontre pas ∂K car $f(\partial K) \cap W = \emptyset$. Par le Lemme 2.3, on a $V \subset \mathring{K} \subset K$. Or K est compact, et localement à base dénombrable, donc à base dénombrable par le Lemme 2.2. Il en est donc de même de V. On a montré que $V \in \mathcal{A}$ et $x \in V \subset D$. □

Lemme 2.6. *Étant donné $U_0 \in \mathcal{A}$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ qui intersectent U est dénombrable.*

Démonstration. La base $\mathcal{B}$ étant dénombrable, il suffit de montrer que, pour un ouvert $V \in \mathcal{B}$, l'ensemble $\mathcal{C}$ des composantes connexes de $f^{-1}(V)$ qui intersectent U_0 est dénombrable. . Or U_0 est à base dénombrable $\mathcal{B}_0$, et l'application qui à $U \in \mathcal{B}_0$ tel que $U \cap U_0 \neq \emptyset$ associe la composante connexe de $f^{-1}(V)$ contenant $U \cap U_0$ est surjective. En effet, si $W \in \mathcal{C}$, alors W est ouvert car X est localement connexe, donc il existe $U \in \mathcal{B}_0$ tel que $U \subset W \cap U_0 \neq \emptyset$. □

Fin de la preuve du Théorème 2.4. Ces lemmes étant établis, considérons la relation R sur X définie par « xRy si et seulement si il existe $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{A}$ tels que $x \in U_0$, $y \in U_n$ et $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ ». La relation R est réflexive en vertu du Lemme 2.5, et on vérifie immédiatement qu'elle est symétrique et transitive. D'autre part, chaque classe d'équivalence est ouverte par définition de R ; comme X est connexe, deux points quelconques de X sont donc équivalents modulo R. Fixons $U^* \in \mathcal{A}$, et définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ comme l'ensemble des $U \in \mathcal{A}$ tels qu'il existe $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{A}$ avec $U_0 = U^*$, $U_n = U$ et $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Le fait que R n'ait qu'une seule classe d'équivalence implique que $\mathcal{A} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$. Or, $A_0 = \{U^*\}$ est dénombrable, et si A_n est dénombrable pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors

$$A_{n+1} = \bigcup_{U \in \mathcal{A}_n} \{V \in \mathcal{A} \mid V \cap U \neq \emptyset\}$$

est dénombrable par le Lemme 2.6. On conclut par récurrence que chaque $\mathcal{A}_n$, et donc $\mathcal{A}$, est dénombrable. Ainsi, $\mathcal{A}$ est une base dénombrable de la topologie de X. □

2.2. Démonstration du théorème de Rado

Théorème 2.7 (Radó). *Toute surface de Riemann connexe X a une topologie à base dénombrable.*

Démonstration. Soit $U \subset X$ un ouvert de carte. On se donne $K_0, K_1 \subset U$ deux disques compacts disjoints. On pose $Y := X \setminus (K_0 \cup K_1)$. Alors ∂Y est une union de deux cercles disjoints, donc $\overline{Y}$ est une sous-variété à bord lisse non vide de X. Le Théorème 1.23 assure l'existence d'une fonction continue $u : \overline{Y} \longrightarrow [0,1]$, harmonique sur Y, telle que $u|_{\partial K_0} = 0$ et $u|_{\partial K_1} = 1$. On se place dans la surface de Riemann Y, sur laquelle u est harmonique non constante. L'opérateur différentiel ∂ sur

Y n'est autre que ∂_z dans une carte locale z. D'après (4), la 1-forme différentielle $\omega := \partial u$ est donc holomorphe sur Y et non identiquement nulle. Maintenant, considérons le revêtement universel $\pi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ de Y. La tirée en arrière $\pi^*\omega$ est donc une 1-forme holomorphe sur $\tilde{Y}$, non identiquement nulle. Comme $\tilde{Y}$ est simplement connexe, il existe une fonction holomorphe non constante $f : \tilde{Y} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\mathrm{d}f = \pi^*\omega$. D'après le principe des zéros isolés, les fibres de f sont discrètes. $\mathbb{C}$ admet comme base dénombrable d'ouverts l'ensemble des disques dont les coordonnées du centre sont rationnelles et dont le rayon est rationnel. De plus, $\tilde{Y}$ vérifie les hypothèses du Théorème de Poincaré-Volterra 2.4 comme toute variété. On en déduit que $\tilde{Y}$ est à base dénombrable. On applique alors le Lemme 2.1 au revêtement π pour conclure que Y est à base dénombrable. Enfin, $X = Y \cup U$, où Y et U sont deux ouverts à base dénombrable (car U est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}$), donc X est également à base dénombrable. □

3. Uniformisation des surfaces de Riemann

3.1. Deux énoncés équivalents du théorème d'uniformisation

Définition 3.1. *Une surface de Riemann est un espace topologique non vide, séparé et tel que tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}$, de sorte que les changements de cartes sont des fonctions biholomorphes.*

Théorème 3.1 (Uniformisation). *Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe soit à la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$, soit au plan complexe $\mathbb{C}$, soit au disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.*

La première observation est que ces trois surfaces sont distinctes. En effet, la sphère de Riemann est compacte, donc topologiquement différente des deux autres. D'après le théorème de Liouville, toute fonction holomorphe bornée sur le plan complexe est constante, donc $\mathbb{C}$ n'est pas isomorphe au disque unité $\mathbb{D}$.

On va démontrer une version différente du théorème d'uniformisation.

Théorème 3.2. *Toute surface de Riemann connexe non compacte dont le premier groupe d'homologie est trivial est isomorphe soit au plan complexe $\mathbb{C}$, soit au disque unité $\mathbb{D}$.*

En fait, le cas compact se déduit du second énoncé, qui est donc plus fort puisqu'il suppose seulement que le premier groupe d'homologie est trivial et non la simple connexité.

Théorème 3.3. *Soit X une surface de Riemann connexe compacte de premier groupe d'homologie trivial. Alors X est isomorphe à $\mathbb{P}^1$.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Alors x admet un voisinage euclidien de dimension complexe 1, donc n'est pas isolé. On en déduit que $X \setminus \{x\}$ est une surface de Riemann connexe non compacte. Comme X est compacte et orientable (car c'est une variété complexe), la suite exacte longue associée à la paire $(X, X \setminus \{x\})$ contient la portion suivante

$$H_2(X) \xrightarrow{\sim} H_2(X, X \setminus \{x\}) \xrightarrow{0} H_1(X \setminus \{x\}) \longrightarrow H_1(X) = 0.$$

On en déduit que $H_1(X \setminus \{x\}) = 0$, donc le Théorème 3.2 s'applique. Supposons par l'absurde que l'on ait un biholomorphisme $f : X \setminus \{x\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$. Soit $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ une carte de X centrée en x. Alors

$$f \circ \varphi^{-1}|_{\mathbb{D}\setminus\{0\}} : \mathbb{D} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{D}$$

est holomorphe et bornée, donc s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. On a construit une application holomorphe $X \longrightarrow \mathbb{D}$ non constante, ce qui est absurde car X est compacte. On en déduit qu'il existe $g : X \setminus \{x\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact. Alors $g^{-1}(K) \subset X \setminus \{x\}$ est compact par continuité de g^{-1}, et g envoie son complémentaire dans $\mathbb{C} \setminus K$. Ainsi,

$$g(y) \underset{\substack{y \to x \\ y \neq x}}{\longrightarrow} \infty,$$

donc g se prolonge en un homéomorphisme, donc un biholomorphisme $\tilde{g} : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$. □

3.2. Remplissage et pièces

Soit X une surface de Riemann connexe non compacte.

Définition 3.2 (Remplissage). *Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble. On appelle* remplissage *de Y, et l'on note $\hbar(Y)$, la réunion de Y et de toutes les composantes connexes $X \setminus Y$ dont l'adhérence dans X est compacte.*

Proposition 3.4. *Le remplissage $\hbar$ vérifie les propriétés suivantes*

(i) Pour tout $Y \subset X$, on a $\hbar(\hbar(Y)) = \hbar(Y)$;
(ii) Pour tous $Y \subset Z \subset X$, on a $\hbar(Y) \subset \hbar(Z)$;
(iii) Le remplissage d'un fermé $Y \subset X$ est fermé ;

Démonstration.

(i) Par définition, $X \setminus \hbar(Y)$ est la réunion des composantes connexes non compactes de $X \setminus Y$, donc ne possède pas de composante connexe compacte.
(ii) Soit $x \in \hbar(Y) \setminus Z$. Alors la composante connexe de $X \setminus Z$ contenant x est incluse dans la composante connexe de $X \setminus Y$ contenant x. Par hypothèse, cette dernière est relativement compacte dans X, donc la première également.
(iii) Par définition, $X \setminus \hbar(Y)$ est une réunion de composantes connexes de $X \setminus Y$. Comme $X \setminus Y$ est localement connexe, celles-ci sont des ouverts de $X \setminus Y$, donc de X car Y est fermé, donc $X \setminus \hbar(Y)$ est ouvert.

□

Lemme 3.5. *Soit $K \subset X$ un compact non vide, et U un voisinage ouvert relativement compact de K dans X. Notons $\left(C_j\right)_{j \in J}$ les composantes connexes de $X \setminus K$. Alors tous les C_j rencontrent U, et seul un nombre fini de C_j rencontre ∂U.*

Démonstration. La surface X étant en particulier séparée, K est un fermé de X. On en déduit que les C_j sont des ouverts de X. Si C_j ne rencontre pas U, alors il est fermé dans X. Comme X est connexe, on en déduit $C_j = X$, donc $C_j \cap K \neq \emptyset$, absurde. La deuxième assertion vient du fait que ∂U est un compact recouvert par l'union disjointe des C_j. □

Théorème 3.6. *Soit $K \subset X$ un compact. Alors $\hbar(K)$ est un compact.*

Démonstration. Comme X est non compact, $h(\emptyset) = \emptyset$. On peut donc supposer que K est non vide. Par locale compacité de X, on trouve un voisinage ouvert relativement compact U de K. D'après le Lemme 3.5, toutes les composantes connexes de $X \setminus K$ rencontrent U. Donc celles qui ne rencontrent pas ∂U sont incluses dans U. De plus, celles qui rencontrent ∂U sont en nombre fini. Ainsi, $\hbar(K)$ est un fermé inclus dans la réunion de U et d'un nombre fini de composantes relativement compactes, donc compact. □

Définition 3.3 (Pièce). *On appelle* pièce *de X toute sous-surface compacte connexe à bord lisse de X. Une pièce P de X est dite* pleine *si $\hbar(P) = P$; autrement dit, si $X \setminus P$ ne possède pas de composante connexe relativement compacte dans X.*

Lemme 3.7. *Soit P une pièce de X. Alors $\partial\hbar(P)$ est un ouvert de ∂P. En particulier, $\hbar(P)$ est une sous-surface à bord lisse de X.*

Démonstration. Soit $x \in \partial\hbar(P)$. On sait que $\hbar(P)$ est un fermé de X, donc $x \in \hbar(P)$. Mais x n'est dans aucune composante connexe relativement compacte de $X \setminus P$ car celles-ci sont ouvertes. On en déduit que $x \in P \setminus \mathring{P} = \partial P$. Soit $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une carte *lisse* centrée en x d'image le disque unité $\mathbb{D}$, et telle que $\varphi(U \cap \partial P) = \mathbb{D} \cap \overline{\mathcal{H}^-}$, où $\mathcal{H}^-$ (resp. $\mathcal{H}^+$) désigne le demi plan inférieur (resp. supérieur). Une telle carte existe car P est une sous-surface lisse à bord. On voit alors que $\varphi^{-1}(\mathbb{D} \cap \mathbb{R}) = U \cap \partial P \subset \partial\hbar(P)$ □

Corollaire 3.8. *Le remplissage d'une pièce P de X est une pièce pleine.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.6, $\hbar(P)$ est un compact. Le Lemme 3.7 assure alors que celui-ci est une pièce, et la Proposition 3.4 qu'elle est pleine. □

Théorème 3.9. *Tout compact $K \subset X$ est contenu dans l'intérieur d'une pièce pleine $P \subset X$.*

Démonstration. Quitte à ajouter des chemins entre chaque composante de K, supposons qu'il est connexe. Pour tout $x \in K$, on se donne une carte (U, φ), où φ envoie U sur le disque $\mathbb{D}(0, 2)$. On extrait de cette collection de cartes une famille finie $(U_i, \varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, telle que

$$K \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} V_i \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} U_i =: U, \quad \text{avec } V_i := \varphi^{-1}(\mathbb{D}(0, 1)).$$

Soit $f : \mathbb{D}(0, 2) \longrightarrow [0, 1]$ une fonction lisse à support compact, valant identiquement 1 sur le disque unité. On considère la fonction $\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par

$$\chi = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - f \circ \varphi_i).$$

Alors χ est une fonction lisse, à support compact inclus dans U, et valant identiquement 1 sur la réunion V des V_i. D'après le théorème de Sard, l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle. On en déduit que l'ensemble des valeurs critiques de χ, qui est une réunion finie de sous-ensembles de $[0, 1]$ de mesure nulle, est également de mesure nulle. On se donne donc $0 < c < 1$ une valeur régulière de χ. Alors, $P := \chi^{-1}([c, +\infty[)$ est une pièce de X par inversion locale, contenant K dans son intérieur. Il suffit de remplir P et d'appliquer le Corollaire 3.8 pour conclure. □

Définition 3.4 (Collet). *Soit M une variété topologique à bord. Un* collet *de M est un voisinage V de ∂M muni d'un homéomorphisme*

$$\varphi : V \longrightarrow \partial M \times [0, 1[$$

dont la restriction à ∂M est l'application canonique $\partial M \longrightarrow \partial M \times \{0\}$.

Si M est lisse et ∂M est compact, on voit en intégrant un champ de vecteurs transversal au bord et pointant vers l'intérieur de M que celle-ci admet un collet lisse.

Théorème 3.10. *On suppose que $H_1(X) = 0$ et que P est une pièce pleine de X. Alors $H_1(P) = 0$*

Démonstration. Soit (V, φ) un collet de la variété $M := X \setminus \mathring{P}$. Notons $W := \varphi^{-1}(\partial M \times [0, \frac{1}{2}[)$. C'est un ouvert de M relativement compact. Soient A une composante connexe de $F := M \setminus W$, et B la composante connexe de $X \setminus P$ contenant A. Alors $B \subset A \cup \overline{W}$. En effet, on a une rétraction continue $r : X \setminus P \longrightarrow F$ qui fixe F, donc $B \cap F \subset r(B) = A$. La pièce P étant pleine, B n'est pas relativement compacte, donc A non plus. Ainsi, F n'a pas de composante connexe compacte. On en déduit que

$$H_2(M \setminus \partial M, W \setminus \partial M) = H_2(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus F) \cong \Gamma_c\left(F, \widetilde{M \setminus \partial M}\right) = 0$$

où $\Gamma_c\left(F, \widetilde{M \setminus \partial M}\right)$ désigne le groupe des sections à support compact définies sur F du revêtement d'orientation de $M \setminus \partial M$. L'homologie étant un invariant homotopique, on a

$$H_2(X, P) \cong H_2(X, P \cup W),$$

puis, par excision de P, on obtient

$$H_2(X, P) \cong H_2(X, P \cup W) \cong H_2(M \setminus \partial M, W \setminus \partial M) = 0.$$

Enfin, la paire (X, P) fournit la suite exacte

$$0 = H_2(X, P) \longrightarrow H_1(P) \longrightarrow H_1(X) = 0,$$

permettant de conclure que $H_1(P) = 0$. □

3.3. Uniformisation d'une pièce

Soient X une surface de Riemann connexe non compacte, P une pièce de X telle que $H_1(P) = 0$ et $a \in \mathring{P}$. On se donne une carte locale $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ centrée en a, avec $U \subset \mathring{P}$, et Δ un voisinage de a tel que $\varphi(\Delta) = \overline{\mathbb{D}}(r)$. Comme Δ et P ont tous les deux une composante connexe, l'inclusion $\Delta \hookrightarrow P$ induit un isomorphisme $H_0(\Delta) \xrightarrow{\sim} H_0(P)$. La paire (Δ, P) donne donc une suite exacte

$$0 = H_1(P) \longrightarrow H_1(P, \Delta) \longrightarrow H_0(\Delta) \xrightarrow{\sim} H_0(P),$$

de laquelle on tire $H_1(P, \Delta) = 0$. Comme Δ est un voisinage de a, on en déduit par excision que

$$H_1(P \setminus \{a\}, \Delta \setminus \{a\}) = H_1(P, \Delta) = 0. \tag{19}$$

Le cercle $\partial\Delta$ étant un rétract de $\Delta \setminus \{a\}$, l'inclusion $\partial\Delta \hookrightarrow \Delta \setminus \{a\}$ induit un isomorphisme

$$H_1(\Delta \setminus \{a\}) \cong H_1(\partial\Delta). \tag{20}$$

D'autre part, la paire $(P \setminus \{a\}, \Delta \setminus \{a\})$ donne lieu à la suite exacte

$$H_1(\Delta \setminus \{a\}) \longrightarrow H_1(P \setminus \{a\}) \longrightarrow H_1(P \setminus \{a\}, \Delta \setminus \{a\}) = 0. \tag{21}$$

On déduit de (20) et (21) que l'inclusion $\iota : \partial\Delta \hookrightarrow P \setminus \{a\}$ induit un morphisme surjectif

$$H_1(\partial\Delta) \longrightarrow H_1(P \setminus \{a\}).$$

Lemme 3.11. *Soit ω une 1-forme différentielle fermée sur $P \setminus \{a\}$. Alors, pour tout lacet γ dans $P \setminus \{a\}$, il existe un entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$\int_\gamma \omega = d \int_{\partial\Delta} \omega.$$

Démonstration. Soit

$$\delta : [0,1] \longrightarrow \partial\Delta, \quad t \longmapsto \varphi^{-1}(re^{2i\pi t})$$

la paramétrisation usuelle de $\partial\Delta$. Alors, $[\delta]$ engendre $H_1(\partial\Delta)$, donc son image $\iota_*[\delta] \in H_1(P \setminus \{a\})$ est également un générateur par la discussion précédente. Ainsi, pour tout lacet γ dans $P \setminus \{a\}$, il existe un entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que $[\gamma] = d\iota_*[\delta]$. On en déduit que $\gamma - d\delta$ est le bord d'une 2-chaîne singulière σ dans $P \setminus \{a\}$. Par la formule de Stokes, on a donc

$$\int_\gamma \omega - d \int_\delta \omega = \int_\sigma \mathrm{d}\omega = 0$$

puisque ω est fermée. $\square$

Théorème 3.12 (Uniformisation d'une pièce). *Il existe un biholomorphisme $\phi : \mathring{P} \longrightarrow \mathbb{D}$ tel que $\phi(a) = 0$.*

Démonstration. Appliquons ce qui précède à une carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ centrée en a de X telle que, $U \subset \mathring{P}$, et sur $U \setminus \{a\}$, la fonction de Green G associée à (P, a) vérifie

$$G = -\ln|\varphi| + h, \quad \text{avec } h : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ harmonique.}$$

On note encore $\Delta \subset U$ l'image par φ^{-1} d'un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(r)$. Notons également $Y := \mathring{P} \setminus \{a\}$. On considère la forme différentielle $\omega := 2\partial G$ sur Y. C'est une 1-forme holomorphe sur Y car G est harmonique sur ce domaine. Soit $p : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ le revêtement universel de Y. La tirée en arrière $p^*\omega$ est une 1-forme holomorphe sur $\tilde{Y}$. Comme $\tilde{Y}$ est simplement connexe, il existe une fonction holomorphe $F : \tilde{Y} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\mathrm{d}F = p^*\omega$ et $\mathrm{Re}(F) = G \circ p$. On pose alors

$$\tilde{\Theta} := q \circ \mathrm{Im}(F) : \tilde{Y} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

où $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est la projection canonique. Montrons que $\tilde{\Theta}$ passe au quotient en une fonction $\Theta : Y \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Soient $y \in Y$ et $y_1, y_2 \in \tilde{Y}|_y$. Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow \tilde{Y}$ un chemin de a à b. On a

$$F(y_2) - F(y_1) = \int_\gamma \mathrm{d}F = \int_\gamma p^*\omega = \int_{p\circ\gamma} \omega.$$

Or, $p \circ \gamma$ est un lacet en y dans Y. D'après le Lemme 3.11, il existe un entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\int_{p\circ\gamma} \omega = d \int_{\partial\Delta} \omega = d \int_{\partial\Delta} 2\partial G = 2d \int_{\partial\Delta} \partial(-\ln|\varphi| + h).$$

Or, ∂h est holomorphe sur un voisinage simplement connexe de Δ, donc elle ne contribue pas à l'intégrale. De plus, si l'on se donne une détermination $\ln : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{C}$ du logarithme complexe, on obtient, pour z dans ce domaine

$$2\partial \ln|z| = 2\partial\,\mathrm{Re}(\ln z) = \partial\big(\ln z + \overline{\ln z}\big) = \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

De là, il vient

$$F(y_2) - F(y_1) = -d \int_{\partial\Delta} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} = -d \int_{\partial\mathbb{D}(r)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -2i\pi d \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Cela montre comme attendu qu'il existe $\Theta : Y \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ telle que $\tilde{\Theta} = \Theta \circ p$. On définit alors

$$\phi = \exp(-(G + i\Theta)) : Y \longrightarrow \mathbb{C}.$$

On a $G \underset{a}{\sim} -\ln|\varphi| \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\phi \underset{a}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, ϕ se prolonge en une fonction continue sur $\mathring{P}$, encore notée ϕ, telle que $\phi(a) = 0$. Montrons que ϕ est holomorphe. D'après le théorème de la singularité effaçable, il suffit de vérifier que c'est le cas sur Y. Soit $y \in Y$, et $\psi : V \longrightarrow \mathbb{D}$ une carte centrée en y dans Y. Comme V est simplement connexe, on peut relever $\Theta|_V$ en une fonction $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $q \circ H = \Theta|_V$. On a donc $\phi = \exp(-(G + iH))$ sur V. Par construction, on a sur $\tilde{Y}|_V$

$$q \circ H \circ p = \tilde{\Theta} = q \circ \mathrm{Im}(F).$$

On en déduit par connexité de V qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que, sur V,

$$H \circ p = \mathrm{Im}(F) + 2k\pi.$$

Ainsi, la fonction

$$(G + iH) \circ p = F + 2ik\pi : \tilde{Y}|_V \longrightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe. Comme p est un biholomorphisme local, on en déduit que $G + iH$ est holomorphe au voisinage de y. Ainsi, ϕ est holomorphe sur $\mathring{P}$. Comme $G|_{\partial P} \equiv 0$, la fonction $|\phi|$ se prolonge en une fonction continue sur P, valant identiquement 1 sur ∂P. Cela entraîne d'une part, d'après le principe du maximum, que ϕ est donc à valeurs dans $\mathbb{D}$, et d'autre part que ϕ est propre. En effet, soit $K \subset D$ un compact de $\mathbb{D}$. Soit $\overline{\mathbb{D}}(R)$ un disque fermé de $\mathbb{D}$ contenant K dans son intérieur. Alors,

$$\phi^{-1}(K) \subset |\phi|^{-1}([0, R]).$$

L'ensemble $|\phi|^{-1}([0, R])$ est un fermé de P, donc compact, ce qui montre que $\phi^{-1}(K)$ est également compact. Ainsi, $\phi : \mathring{P} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un revêtement ramifié fini. Comme $G \underset{a}{\sim} \ln|\varphi|$, on en déduit que $|\phi| \underset{a}{\sim} |\varphi|$. Donc ϕ est d'ordre 1 en a. Comme ϕ ne s'annule pas ailleurs qu'en a, on en déduit que son degré est 1. C'est donc un biholomorphisme. □

3.4. Démonstration du théorème d'uniformisation

Soient X une surface de Riemann connexe non compacte telle que $H_1(X) = 0$ et $a \in X$. D'après le Théorème 3.9, l'ensemble $\mathcal{P}_a(X)$ des pièces pleines de X dont l'intérieur contient a, est non vide.

Lemme 3.13. *Soit $v \in T_a X$ un vecteur tangent non nul. Alors, pour tout $P \in \mathcal{P}_a(X)$, il existe un unique biholomorphisme $\Phi_P : \mathring{P} \longrightarrow \mathbb{D}(R_P)$ avec $R_P > 0$ tel que $\Phi_P(a) = 0$ et $\mathrm{d}_a\Phi_P(v) = 1$*

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{P}_a(X)$. D'après le Théorème 3.10, on a $H_1(P) = 0$. Le Théorème 3.12 s'applique et fournit un biholomorphisme $\phi : \mathring{P} \longrightarrow \mathbb{D}$ tel que $\phi(a) = 0$. Notons $w := \mathrm{d}_a\phi(v) \in \mathbb{C}^*$ et $R_P = |w|^{-1}$. Alors, l'application

$$\Phi_P : \mathring{P} \longrightarrow \mathbb{D}(R_P), \quad z \longmapsto w^{-1}\phi(z)$$

satisfait les conditions requises. Si $\Psi : \mathring{P} \longrightarrow \mathbb{D}(R)$ est un autre biholomorphisme convenable, alors l'application $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ définie par

$$f(z) = \frac{\Psi \circ \Phi_P^{-1}(R_P z)}{R}$$

est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ vérifiant $f(0) = 0$ et

$$f'(0) = \mathrm{d}_0 f(1) = \frac{R_P}{R} \quad \text{et} \quad (f^{-1})'(0) = \frac{R}{R_P}.$$

Le Théorème de Schwarz 1.27 montre que $f'(0) = |f'(0)| = 1$ et f est une rotation, donc $R = R_P$ et f est l'identité. □

Définition 3.5 (Rayon). *On appelle* rayon *de X en a le réel*

$$R_a(X) := \sup_{P \in \mathcal{P}_a(X)} R_P.$$

On note $R(X)$ à la place de $R_a(X)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque 3.1. Comme $\mathcal{P}_a(X) \neq \emptyset$, on a $R(X) \in]0, \infty[$.

Lemme 3.14. *Notons $\mathcal{V}_a(X)$ l'ensemble des voisinages ouverts de a dans X. Alors les applications*

$$\mathcal{P}_a(X) \longrightarrow]0, \infty[, \quad P \longmapsto R_P \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_a(X) \longrightarrow]0, \infty], \quad U \longmapsto R(U)$$

sont croissantes. La première est strictement croissante.

Démonstration. La deuxième assertion résulte du fait que si $U \subset V \in \mathcal{V}_a(X)$, alors $P_a(U) \subset P_a(V)$ et de la croissance de la borne supérieure. Soient $P \subsetneq Q \in P_a(X)$. Comme P, Q sont des fermés de X, on a $\mathring{P} \subsetneq \mathring{Q}$. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 1.27 à

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}, \quad z \longmapsto \frac{\Phi_Q \circ \Phi_P^{-1}(R_P z)}{R_Q},$$

qui n'est pas l'identité, sans quoi on aurait $\mathring{P} = \mathring{Q}$. $\square$

Remarque 3.2. Si $P \in \mathcal{P}_a(X)$, on note pour alléger $R(P) := R\left(\mathring{P}\right)$. Il résulte du Lemme 3.14 que $R(P) \leqslant R_P$. De plus, si $R < R_P$, le compact $K := \Phi_P^{-1}\left(\overline{\mathbb{D}}(R)\right)$ est un élément de $\mathcal{P}_a\left(\mathring{P}\right)$ tel que $R_K = R$. En utilisant le Théorème 3.9, on trouve $Q \in \mathcal{P}_a\left(\mathring{P}\right)$ telle que $K \subset \mathring{Q}$. Le Lemme 3.14 assure alors que $R = R_K < R_Q \leqslant R(P)$. Ainsi, $R_P = R(P)$.

Lemme 3.15. *Il existe une suite* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{P}_a(X)$ *telle que*
(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a* $P_n \subset \mathring{P}_{n+1}$;
(ii) La suite $R(P_n)$ *converge vers* $R(X)$.

Démonstration. On construit la suite par récurrence. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement croissante qui tend vers $R(X)$. Soit $P_0 \in \mathcal{P}_a(X)$ telle que $R_{P_0} > r_0$. Supposons les pièces $P_0, \dots, P_n$ construites, vérifiant la condition *(i)* de l'énoncé, et telles que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on ait $R_{P_k} > r_k$. Comme X est non compacte, on sait par le Théorème 3.9 qu'il existe $P \in \mathcal{P}_a(X)$ telle que $P_n \subset \mathring{P}$. D'après le Lemme 3.14, on a $R_{P_n} < R_P \leqslant R(X)$. On se donne également $Q \in \mathcal{P}_a(X)$ telle que $R_Q > r_{n+1}$. On applique une nouvelle fois le Théorème 3.9, cette fois au compact $P \cup Q$. On trouve ainsi une pièce pleine P_{n+1} de X contenant $P \cup Q$ dans son intérieur. A fortiori, on a $a \in P_n \subset \mathring{P}_{n+1}$ et $R_{P_{n+1}} > R_Q > r_{n+1}$. On a ainsi construit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie *(i)* et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $R_{P_n} > r_n$, ce qui montre que $R(P_n) = R_{P_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} R(X)$. $\square$

Lemme 3.16. *Soient* $R > 0$ *un réel et* $D \subsetneq \mathbb{D}(R)$ *un ouvert simplement connexe contenant* 0. *Alors il existe un réel* $r < R$ *et une application holomorphe* $g : D \longrightarrow \mathbb{D}(r)$ *telle que* $g(0) = 0$ *et* $g'(0) = 1$.

Démonstration. Supposons d'abord que $R = 1$. Soit $a \in \mathbb{D} \setminus D$. On considère le biholomorphisme

$$\varphi_a : \mathbb{C} \setminus \{\overline{a}^{-1}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-\overline{a}^{-1}\}, \quad z \longmapsto \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

introduit à la Section 1.3.1. Alors φ_a est bien définie sur D et $\varphi_a(D) \subset \mathbb{D}^*$. On peut donc relever φ_a en une application holomorphe $\psi : D \longrightarrow \mathbb{D}^*$ telle que $\psi^2 = \varphi_a|_D$. On considère alors la composée

$$g := \varphi_b \circ \psi : D \longrightarrow \mathbb{D}, \quad \text{avec } b := \psi(0) \in \mathbb{D}^*.$$

On a $g(0) = 0$. De plus, $2b\psi'(0) = \varphi_a'(0) = 1 - |a|^2$, donc

$$g'(0) = \varphi_b'(b)\psi'(0) = \frac{1}{1-|b|^2}\frac{1-|a|^2}{2b} = \frac{1+|b|^2}{2b}$$

car $b^2 = -a$. On a donc

$$|g'(0)| - 1 \geqslant \frac{1-2|b|+|b|^2}{2|b|} > 0$$

car $b \neq 0$. On pose alors $r = |g'(0)|^{-1}$ et la fonction

$$|g'(0)|^{-1} g : D \longrightarrow \mathbb{D}(r)$$

répond aux conditions requises. Pour $R > 0$ quelconque, on trouve par ce qui précède une application holomorphe $h : \frac{1}{R}D \longrightarrow \mathbb{D}(r)$ avec $r < 1$ telle que $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$. La fonction

$$D \longrightarrow \mathbb{D}(Rr), \quad z \longmapsto Rh\left(\frac{z}{R}\right)$$

convient. □

Lemme 3.17. *Soit Y un espace topologique qui est la réunion croissante d'une suite d'ouverts simplement connexes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors Y est simplement connexe.*

Démonstration. Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow Y$ un lacet. Comme $[0,1]$ est compact, il existe par croissance de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un entier N tel que $\gamma([0,1]) \subset U_N$. Comme U_N est simplement connexe, on en déduit que γ est homotope à l'application constante dans U_N, donc dans Y. □

Lemme 3.18. *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_a(X)^{\mathbb{N}}$ une suite de pièces pleines vérifiant les conditions (i) et (ii) du Lemme 3.15. Notons $\Phi_n := \Phi_{P_n} : \mathring{P}_n \longrightarrow \mathbb{D}(R_n)$ l'isomorphisme associé à P_n. On considère également l'ouvert*

$$Y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{P}_n.$$

Alors, pour tout compact $K \subset Y$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\Phi_n|_K)_{n\geqslant N}$ soit bien définie et de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme. De plus, l'application limite $\Phi : Y \longrightarrow \mathbb{D}(R)$ est un biholomorphisme, où l'on note $R := R(X)$ et $\mathbb{D}(\infty) := \mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $K \subset Y$ un compact. La collection des $\mathring{P}_n$ est un recouvrement ouvert de K, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$K \subset \bigcup_{0\leqslant n\leqslant N} \mathring{P}_n = \mathring{P}_N.$$

La suite $(\Phi_n|_K)_{n\geqslant N}$ est donc bien définie. Soient $n \geqslant m \geqslant N$ deux entiers. Considérons l'application

$$f := \Phi_n \circ \Phi_m^{-1} : \mathbb{D}(R_m) \longrightarrow \mathbb{D}(R_n),$$

qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ par construction. On note également $r := \max(|\Phi_m|(K)) < R_N$. Si $R < \infty$, on applique le Corollaire 1.29, qui donne, pour tout $z \in \Phi_m(K)$

$$|f(z) - z| \leqslant \frac{|z|^2}{R_m^2}\frac{R_n^2 - R_m^2}{R_n - |z|} \leqslant \frac{r^2}{R_m^2}\frac{R_n^2 - R_m^2}{R_n - r} \leqslant \frac{2Rr^2}{R_N^2(R_N - r)}(R_n - R_m).$$

Si $R = \infty$ et m est suffisamment grand, on a $r < \frac{R_m}{16}$. On applique alors l'inégalité d'uniformisation d'Erdős (Corollaire 1.36) à f. On obtient, pour tout $z \in \Phi_m(K)$,

$$|f(z) - z| \leqslant 80\frac{r^2}{R_m}.$$

Dans les deux cas, on conclut que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \geqslant N$ tel que pour tous $n \geqslant m \geqslant M$ et tout $x \in K$,

$$|\Phi_n(x) - \Phi_m(x)| = |f(\Phi_m(x)) - \Phi_m(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(\Phi_n|_K)_{n\geqslant N}$ est de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme. Comme $\mathbb{C}$ est complet, cela implique la convergence uniforme. On en déduit que la suite des Φ_n prolongées par 0 sur le complémentaire de $\mathring{P}_n$ dans Y, converge uniformément sur les compacts vers une application $\Phi : Y \longrightarrow \mathbb{C}$. Par locale compacité de Y, Φ est holomorphe. Elle est non constante car

$$\mathrm{d}_a\Phi(v) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}_a\Phi_n(v) = 1.$$

Son image est donc un ouvert de $\mathbb{C}$ inclus dans $\overline{\mathbb{D}}(R)$, donc dans $\mathbb{D}(R)$. Montrons que Φ est injective. Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors, la suite de fonctions injectives $\left(\Phi_n \circ \Phi_m^{-1} : \mathbb{D}(R_m) \longrightarrow \mathbb{C}\right)_{n\geqslant m}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}(R_m)$ vers la fonction holomorphe $\Phi \circ \Phi_m^{-1}$. On en déduit que celle-ci est injective ou constante (résultat sur la convergence de suites de fonctions holomorphes). Comme sa dérivée en 0 vaut 1, elle est injective. Donc $\Phi|_{\mathring{P}_m}$ l'est également. Comme Y est la réunion croissante des $\mathring{P}_m$, on en déduit que Φ est injective. Montrons que $\Phi : Y \longrightarrow \mathbb{D}(R)$ est surjective. Si $R = \infty$, il suffit d'appliquer le Théorème 1.32 à $\Phi \circ \Phi_n^{-1}$, dont l'image contient donc $\mathbb{D}(R_n/4)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, on en déduit que tout disque est contenu dans l'image de Φ, donc que Φ est surjective. Supposons maintenant que $R < \infty$ et que $Z \coloneqq \Phi(Y) \subsetneq \mathbb{D}(R)$. Comme les $\mathring{P}_n$ sont homéomorphes au disque, ils sont simplement connexes, donc Y également d'après le Lemme 3.17. L'application $\Phi : Y \longrightarrow Z$ est holomorphe et bijective, donc c'est un biholomorphisme. Par le Lemme 3.16, il existe un réel $r < R$ et une application holomorphe $g : Z \longrightarrow \mathbb{D}(r)$ telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R_n > r$. Alors, l'application

$$h \coloneqq g \circ \Phi \circ \Phi_n^{-1} : \mathbb{D}(R_n) \longrightarrow \mathbb{D}(r)$$

vérifie $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$. Le Théorème 1.27 entraine $R_n \leqslant r$, une contradiction. Ainsi, $\Phi : Y \longrightarrow \mathbb{D}(R)$ est une bijection holomorphe, donc un biholomorphisme. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la reformulation suivante du Théorème 3.2.

Théorème 3.19 (Uniformisation de X). *Si $R(X) = \infty$, alors X est isomorphe à $\mathbb{C}$; sinon, X est isomorphe à $\mathbb{D}(R(X))$.*

Démonstration. On se donne une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_a(X)^{\mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions du Lemme 3.15. On reprend les notations du Lemme 3.18, qui assure l'existence d'un biholomorphisme

$$\Phi : Y \longrightarrow \mathbb{D}(R) \quad \text{tel que} \quad \Phi(a) = 0 \text{ et } \mathrm{d}_a\Phi(v) = 1.$$

Supposons que $Y \subsetneq X$. Soit $b \in X \setminus Y$. On construit une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{P}_a(X) \cap \mathcal{P}_b(X))^{\mathbb{N}}$ par récurrence de la manière suivante. On se donne par le Théorème 3.9 une pièce pleine Q_0 de X contenant $P_0 \cup \{b\}$ dans son intérieur. Supposons $Q_0, \ldots, Q_n$ construites. On applique le Théorème 3.9 au compact $P_{n+1} \cup Q_n$ pour obtenir une pièce pleine Q_{n+1} de X contenant $P_{n+1} \cup Q_n$ dans son intérieur. La suite ainsi construite vérifie $P_n \subset \mathring{Q}_n, Q_n \subset \mathring{Q}_{n+1}$ et $P_0 \cup \{b\} \subset \mathring{Q}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, la suite $(R(Q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers R. Appliquons le Lemme 3.18 à la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient un biholomorphisme

$$\Psi : Z \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{Q}_n \longrightarrow \mathbb{D}(R) \quad \text{tel que} \quad \Psi(a) = 0 \text{ et } \mathrm{d}_a\Psi(v) = 1.$$

On a $Y \subsetneq Z$ puisque $\mathring{P}_n \subset P_n \subset \mathring{Q}_n$ et $b \in \mathring{Q}_0$. Alors, l'application

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \mathbb{D}(R) \longrightarrow \mathbb{D}(R)$$

est holomorphe, envoie 0 sur 0 et a pour dérivée 1 en 0, qui n'atteint pas $\Psi(b)$. Le Théorème 1.27 fournit une contradiction. On en déduit que $Y = X$, et que $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{D}(R)$ est un biholomorphisme. □

Bibliographie

[1] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, 6. ed., n° 1. in Enseignement des sciences. Paris: Hermann, 1985.

[2] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, vol. 81. in Graduate Texts in Mathematics, vol. 81. New York, NY: Springer, 1981. doi: 10.1007/978-1-4612-5961-9.

[3] H. M. Farkas et I. Kra, *Riemann Surfaces*, vol. 71. in Graduate Texts in Mathematics, vol. 71. New York, NY: Springer New York, 1980. doi: 10.1007/978-1-4684-9930-8.

[4] J. H. Hubbard, « Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. 1: Teichmüller theory ». Ithaca, Matrix editions, 2006.

[5] R. Douady et A. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes*, 2ème éd., compl. refondue et augm. d'un chapitre., n° 4. in Nouvelle bibliothèque mathématique. Paris: Cassini, 2005.

[6] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Second edition., n° 218. in Graduate texts in mathematics. New York Heidelberg Dordrecht London: Springer, 2013.

[7] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, vol. 139. in Graduate Texts in Mathematics, vol. 139. New York, NY: Springer, 1993. doi: 10.1007/978-1-4757-6848-0.