

Université de Bordeaux

Outils de simulation - Marche aléatoire renforcée



Dorian Hervé, Marie-Mathilde Garcia, Wael Ben Hadj Yahia et
Christiano Theddy Nasa

Enseignant : Bernard BERCU

Projet réalisé dans le cadre de l'UE Outils de simulation
2019-2020

Avant-Propos

Dans le cadre de l'UE outils de simulation nous avons choisi de travailler sur le sujet de la marche aléatoire renforcée. L'objectif de ce projet est de vérifier, à l'aide de simulations informatique des résultats conjecturés sur les comportements asymptotiques de cette marche aléatoire.

Ce rapport présentera nos simulations qui nous ont permis de retrouver des résultats théoriques comme des convergences p.s. et des convergences en loi. Nous avons travaillé sur trois types de renforcements, et en ouverture nous proposerons d'autres types de renforcement pour lesquels il n'y a pas encore de résultats explicites. Pour obtenir les graphiques de nos simulations, nous avons utilisé Python avec son interface Anaconda.

Ce rapport a été réalisé par Wael Ben Hadj Yahia, Marie-Mathilde Garcia, Dorian Hervé, Christiano Theddy Nasa, dans le cadre de l'UE "Outils de Simulation".

Nous tenons à remercier M. Bernard BERCU pour nous avoir encadré lors de la réalisation de ce projet.

Table des matières

Introduction	1
Principe de l'expérience	1
Aspects Mathématiques	1
1 Marche aléatoire sans renforcement	3
1.1 Trajectoires	3
1.2 Limites p.s.	5
1.3 Convergences en loi	6
2 Marche aléatoire avec renforcement linéaire	8
2.1 Trajectoires	8
2.2 Limites p.s.	10
2.3 Convergences en loi	10
3 Marche aléatoire avec renforcement géométrique	13
3.1 Trajectoires	13
4 Compléments	16
4.1 Lien avec les urnes de Pòlya	16
4.2 Autres fonction de renforcement	17
Conclusion	17
Bibliographie	18

Introduction

Principe de l'expérience

Le phénomène de renforcement peut intervenir dans un cadre associé à une marche aléatoire. Le principe est le suivant : on considère qu'on a n individus qui empruntent (l'un après l'autre) l'un des deux chemins possibles (α et β), chacun possédant une certaine attractivité. Lorsque l'individu i emprunte un chemin, il va augmenter l'attractivité associée à ce chemin là. Celui-ci aura donc une attractivité plus élevée pour l'individu $i + 1$ qu'elle ne l'avait pour l'individu i .

Ce phénomène est un objet d'étude pertinent car il est susceptible de se manifester dans la nature. En effet, il est connu que les fourmis laissent derrière elles des phéromones an d'attirer les fourmis suivantes. Ainsi, le chemin le plus emprunté sera privilégié par les autres fourmis, qui - à leur tour - auront tendance à accentuer le phénomène. De même, si on considère des randonneurs perdus qui doivent choisir entre deux chemins, ils auront tendance à privilégier celui qui aura le moins d'herbe (car ils supposent que le manque d'herbe relatif est causé par le passage antérieur d'autres randonneurs), tout en contribuant à la raréfaction de l'herbe.

Aspects Mathématiques

Pour tout $n \leq 1$, on notera X_n la variable aléatoire dans $\{\alpha, \beta\}$ qui indique le chemin choisi par le n -ième individu. On pose également A_n et B_n les variables aléatoires strictement positives qui indiquent l'attractivité de chaque chaque chemin lors du $n + 1$ -ième passage, avec $A_0 = B_0 = 1$.

Soit φ une fonction positive appelée fonction de renforcement et soit (U_n) une suite de variables aléatoire indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On modélise (X_n) par

$$(X_{n+1}, A_{n+1}, B_{n+1}) = \begin{cases} (\alpha, \varphi(A_n), B_n) & \text{si } U_{n+1} \leq \frac{A_n}{A_n + B_n}, \\ (\beta, A_n, \varphi(B_n)) & \text{si } U_{n+1} > \frac{A_n}{A_n + B_n}. \end{cases}$$

Le nombre de passages par le chemin α à l'instant n est représenté par la variable aléatoire :

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_{\{X_k=\alpha\}}$$

De même, pour le chemin β :

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_{\{X_k=\beta\}}$$

La suite de ce rapport présentera donc les comportements asymptotiques de X_n , Y_n et Z_n pour trois fonctions de renforcements différentes.

Les 3 fonctions de renforcement à distinguer sont :

- $\varphi(x) = x$ (sans-renforcement)
- $\varphi(x) = x + 1$ avec $x > 0$ (renforcement linéaire)
- $\varphi(x) = \rho x$ avec $\rho > 1$ (renforcement géométrique)

Chapitre 1

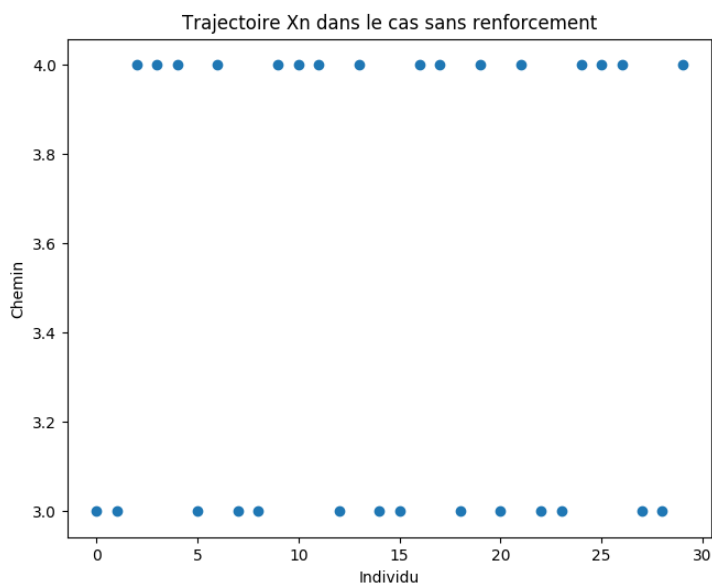
Marche aléatoire sans renforcement

Tout d'abord, nous nous plaçons dans un cas avec absence de renforcement c'est-à-dire que pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = x$. Dans ce cas, le choix d'un chemin est indépendant des chemins choisis précédemment. Nous avons simulé les trajectoires de X_n , Y_n et Z_n .

1.1 Trajectoires

Pour illustrer les choix des deux chemins, nous avons choisi de placer en ordonnée égale à 4 le chemin α et en ordonnée égale à 3 le chemin β . Ainsi, le point de coordonnées $(i, 4)$ indiquerait que l'individu i a choisi le chemin α .

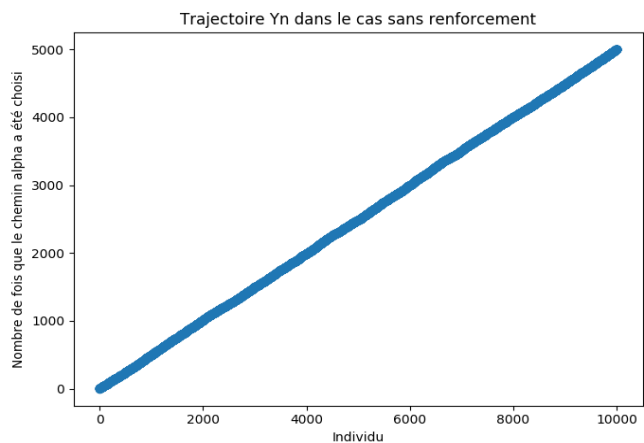
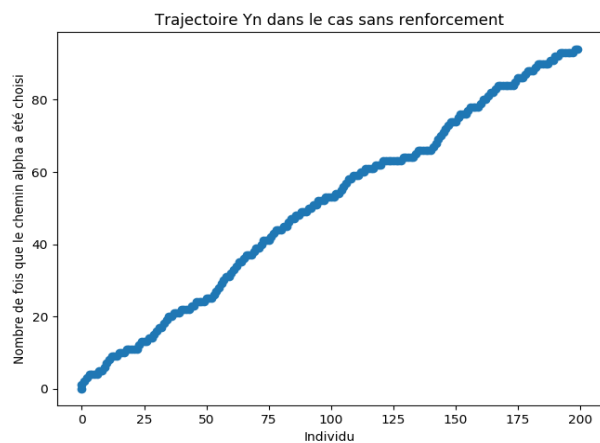
Ci-dessous se trouve la simulation de la trajectoire de X_n avec $n = 30$ individus, car pour un n trop grand, le graphique n'est pas exploitable.



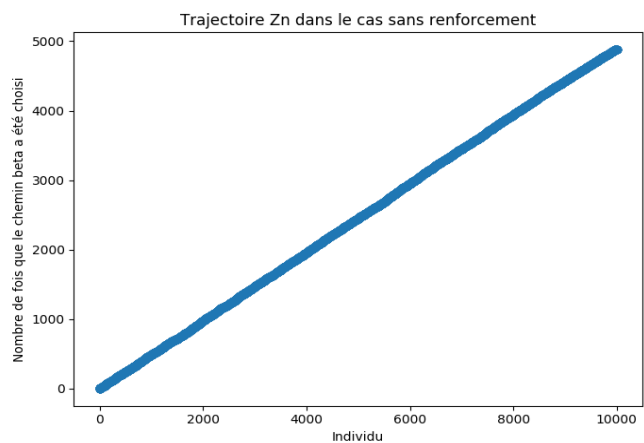
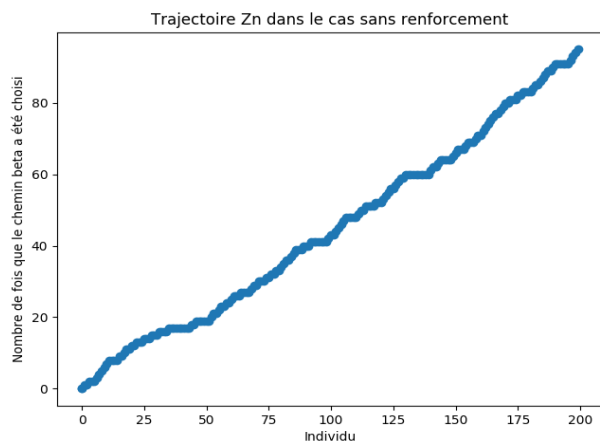
Nous observons 14 fois le choix du chemin α et 16 fois le chemin β . Le choix des chemins semble être équitablement réparti.

Nous nous intéressons à présent au nombre de fois que le chemin α a été choisi. Nous réalisons ceci en traçant l'évolution de Y_n au fur et à mesure des étapes.

Les deux graphiques ci-dessous montrent l'évolution de la variable aléatoire Y_n pour un $n = 200$ et pour un $n = 10000$.

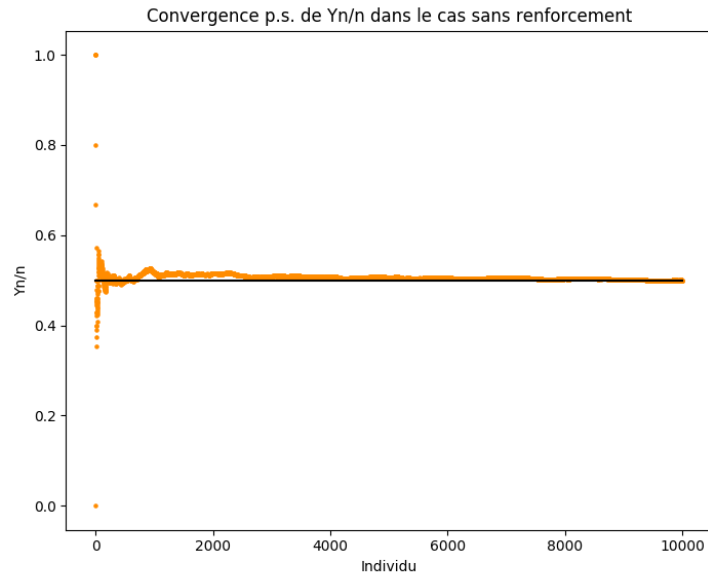


De meme, on s'intéresse au nombre de fois que le chemin β a été choisi. Nous illustrons l'évolution de la variable aléatoire Z_n avec les deux graphiques ci-dessous, toujours avec un $n = 200$ et un $n = 10000$.

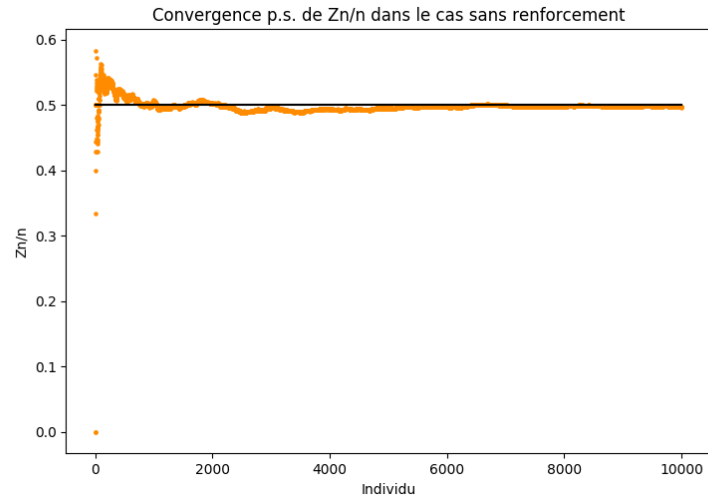


1.2 Limites p.s.

Dans cette partie, nous proposons de se focaliser sur les limites p.s existantes dans le cas sans renforcement. Nous avons une première convergence presque sûre : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{n} = \frac{1}{2}$. Pour vérifier cette convergence, nous avons simulé cette limite avec un $n = 10000$.



Nous avons simulé également la convergence presque sûre pour Z_n : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{n} = \frac{1}{2}$.



Nous constatons bien l'existence de cette convergence presque sûre illustrée par la figure ci-dessus. Le fait de retrouver 0.5 pour les deux limites est intuitif, car sans renforcement,

notre marche aléatoire se ramène à une expérience aléatoire de loi Binomiale $\mathcal{B}(n, 0.5)$. Comme chaque passage est indépendant du précédent et que nos deux chemins ont la même attractivité (constante à 1), nous nous attendons bien à ce qu'ils soient visités à peu près autant de fois lorsque n est grand.

1.3 Convergences en loi

Dans le cas sans-renforcement, nous avons les convergences en loi suivantes à visualiser à l'aide de nos simulations :

$$\sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{Z_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

D'après le théorème limite central nous obtenons :

$$\sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$\iff \sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{1}{4}} \mathcal{N}(0, 1)$$

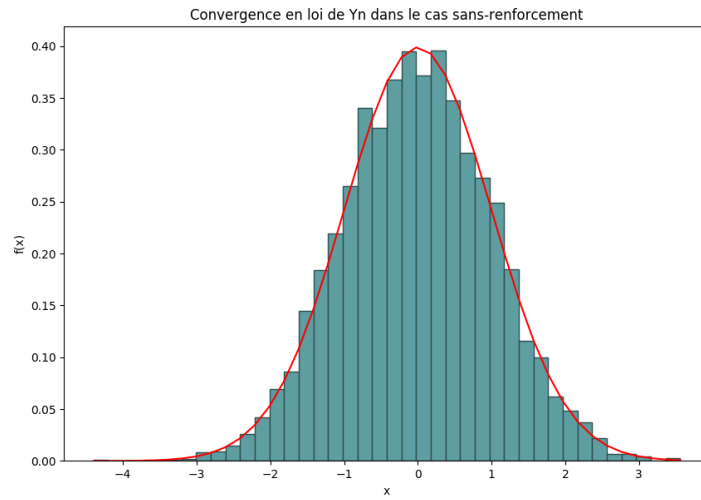
$$\iff \sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\iff 2\sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Avec le même calcul pour Z_n nous obtenons :

$$2\sqrt{n}\left(\frac{Z_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

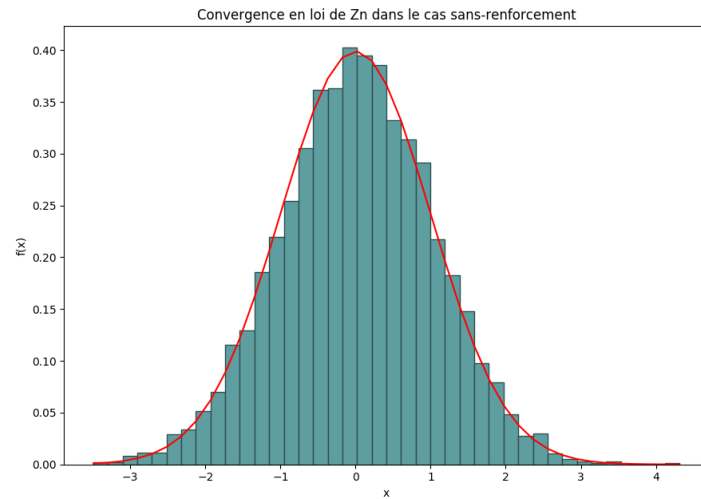
Pour faire nos simulations, nous avons donc utilisé ces formules qui convergent vers des lois normales centrées réduites. Pour Y_n nous avons simulé pour $n = 10^4$ avec 5000 répétitions. Nous obtenons le résultat suivant :



La courbe en rouge représente la fonction de densité de la loi normale centrée réduite. La forte approximation de l'histogramme par la courbe rouge indique bien que nous avons la convergence en loi :

$$2\sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Pour Z_n , nous avons cette fois simulé pour $n = 10^5$ et toujours pour 5000 répétitions. Nous obtenons ce graphique :



De manière analogue, la forte approximation de l'histogramme par la courbe rouge indique à nouveau que nous avons la convergence en loi :

$$2\sqrt{n}\left(\frac{Z_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Chapitre 2

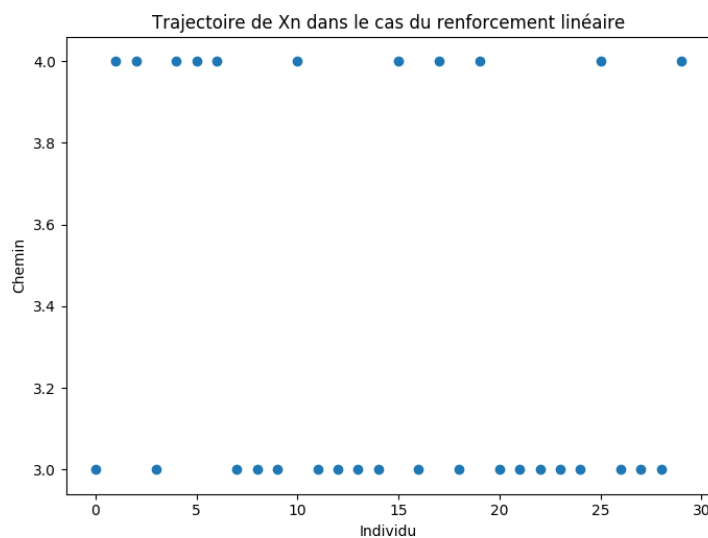
Marche aléatoire avec renforcement linéaire

Nous nous intéressons maintenant à la marche aléatoire avec renforcement linéaire. Pour ce faire, nous nous proposons de poser la fonction de renforcement $\varphi(x) = x + 1$ pour tout $x > 0$.

2.1 Trajectoires

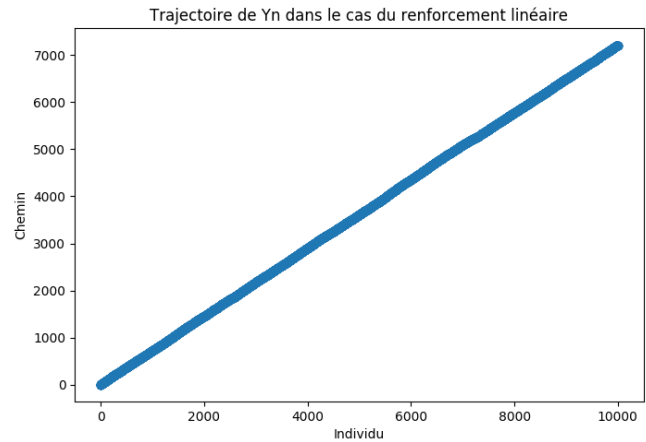
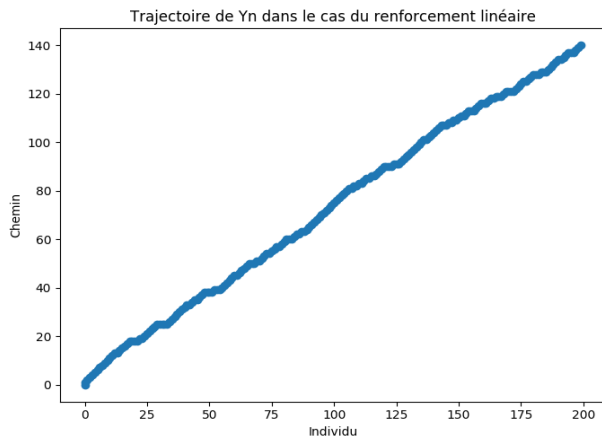
Pour illustrer la trajectoire de X_n , nous utilisons la même méthode que pour le cas sans renforcement. Lorsqu'un chemin α est choisi, nous le représentons avec une ordonnée égale à 4. Pour le chemin β , l'ordonnée sera égale à 3.

Ci-dessous se trouve la simulation de la trajectoire de X_n avec $n = 30$ individus.

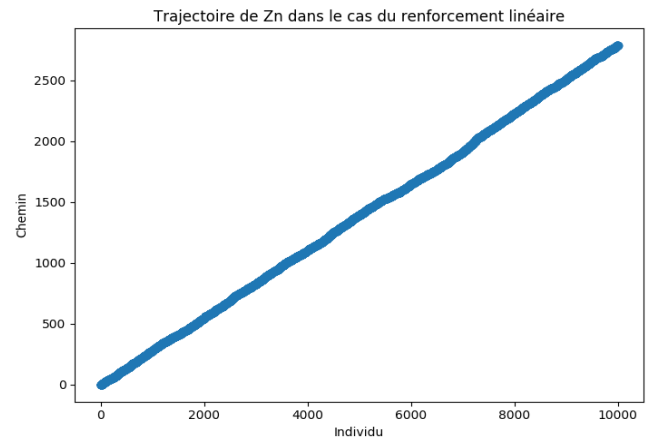
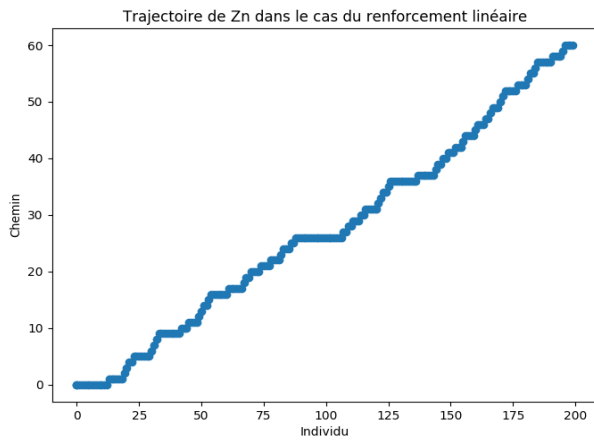


Nous observons 11 individus ayant choisi le chemin α et 19 le chemin β .

Les deux graphiques ci-dessous montrent l'évolution de la variable aléatoire Y_n (qui représente le nombre de choix du chemin α) pour un $n = 200$ et pour un $n = 10000$.



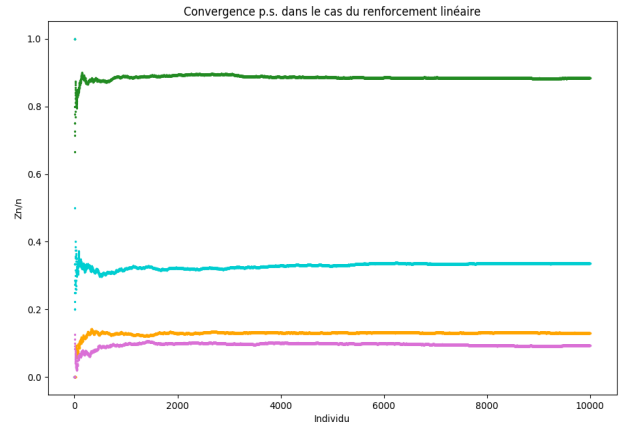
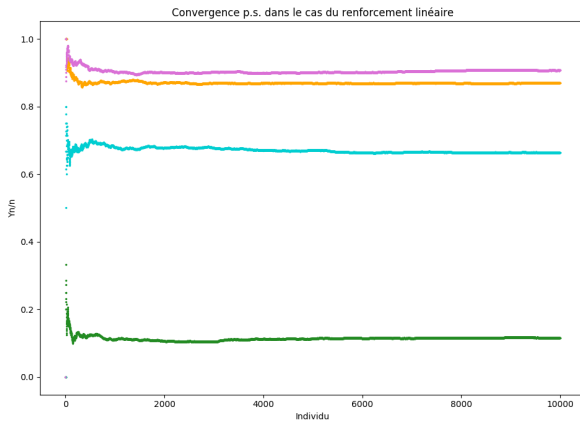
De même, nous illustrons la trajectoires de Z_n (représentant le nombre de choix du chemin β) pour un $n = 200$ et pour un $n = 10000$.



2.2 Limites p.s.

Nous nous intéressons maintenant aux limites p.s. dans le cas avec renforcement linéaire. Nous avons simulé l'existence de la variable aléatoire U de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que presque sûrement : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{n} = U$ et $\frac{Z_n}{n} = 1 - U$. Nous avons simulé cette limite à 4 reprises avec un $n = 10^4$.

Chaque couleur correspond à une expérience : la courbe orange dans le premier graphique correspond à la limite p.s. de $\frac{Y_n}{n}$ dans la première expérience, et la courbe orange dans le deuxième graphique correspond à la limite p.s. de $\frac{Z_n}{n}$ dans la première expérience, etc.



Nous observons bien que pour que chaque expérience $\frac{Y_n}{n}$ tend vers U p.s. et que $\frac{Z_n}{n}$ tend vers $1 - U$ p.s. De plus, d'une expérience à l'autre nous n'obtenons pas les mêmes valeurs pour U , ceci s'explique par le fait que U soit une variable aléatoire.

2.3 Convergences en loi

Nous proposons à présent d'étudier les convergences en loi éventuelles.

Dans le cas du renforcement linéaire, nous avons les convergences en loi suivantes à visualiser à l'aide de nos simulations :

$$\sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - U\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{36}\right)$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{Z_n}{n} - 1 + U\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{36}\right)$$

D'après le théorème limite central nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - U\right) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{36}\right) \\ \iff \sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - U\right) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{1}{36}} \mathcal{N}(0, 1) \\ \iff \sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - U\right) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{6} \mathcal{N}(0, 1) \\ \iff 6\sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - U\right) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \end{aligned}$$

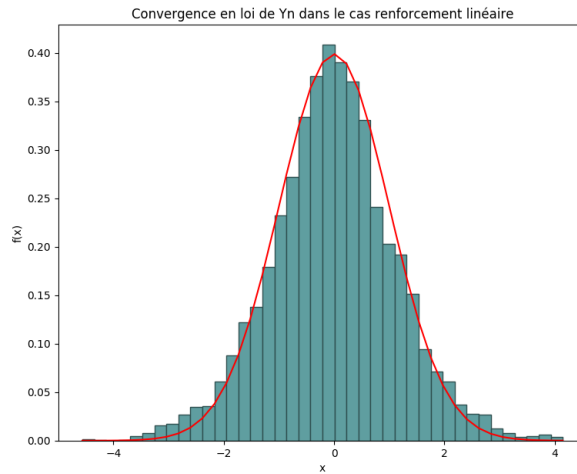
Avec le même calcul pour Z_n nous obtenons :

$$6\sqrt{n}\left(\frac{Z_n}{n} - 1 + U\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Afin d'observer ces convergences en loi, nous nous y prenons de la manière suivante :

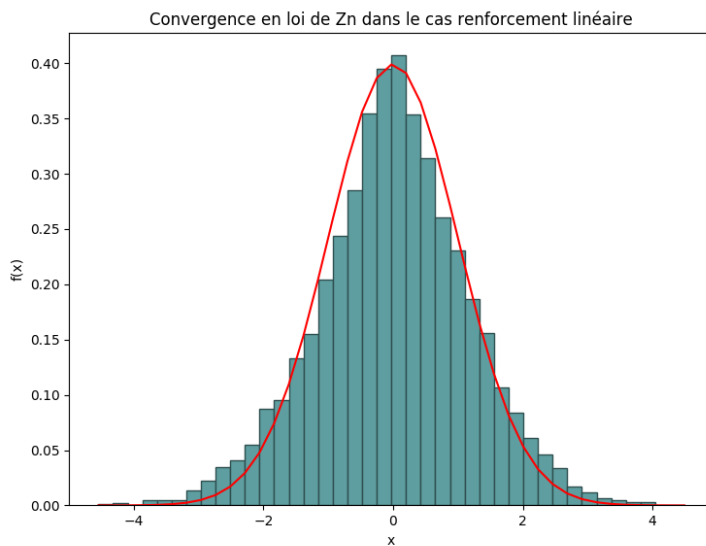
- Pour une simulation : nous simulons notre marche sur $n=5000$ pas, en gardant en mémoire la valeur de $\frac{Y_n}{n}$ au 4100ème pas.
- Nous réalisons 10 000 simulations de l'expérience précédente
- Nous mesurons l'écart entre la valeur de $\frac{Y_n}{n}$ à la fin de la marche et la valeur de $\frac{Y_n}{n}$ avec un nombre de pas inférieur. Nous traçons l'histogramme des écarts et nous tentons de l'approcher par la courbe gaussienne.

Pour Y_n , nous obtenons le résultat graphique suivant :



Sachant que la courbe rouge représente la densité de la loi Normale centrée réduite, sa forte approximation de l'histogramme nous permet de confirmer la convergence en loi

$$6\sqrt{n}\left(\frac{Y_n}{n} - U\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$



De manière analogue, cette sortie graphique nous permet de confirmer la convergence en loi

$$6\sqrt{n}\left(\frac{Z_n}{n} - 1 + U\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Chapitre 3

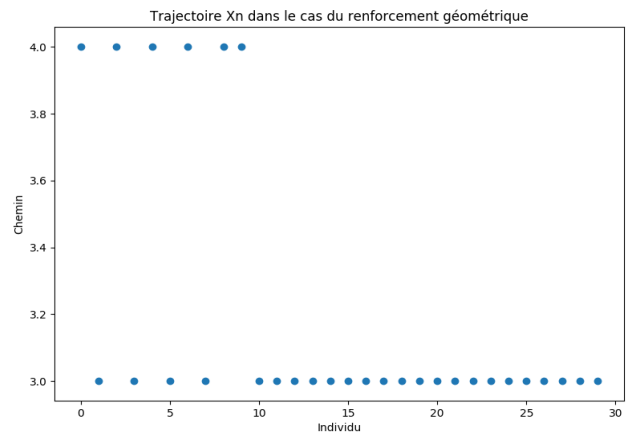
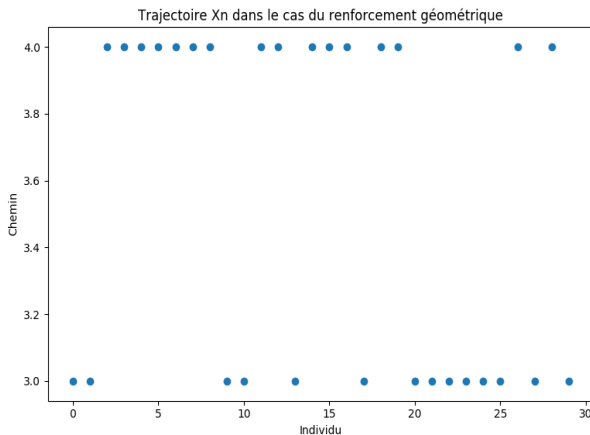
Marche aléatoire avec renforcement géométrique

Pour finir, le dernier type de renforcement que nous avons à étudier était le renforcement géométrique. Pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x) = \rho x$ avec $\rho > 1$.

3.1 Trajectoires

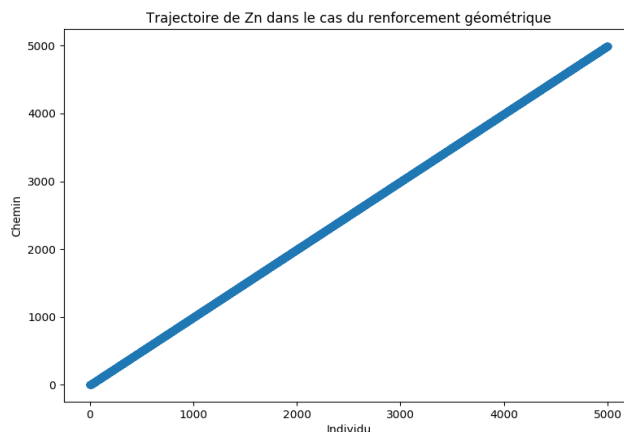
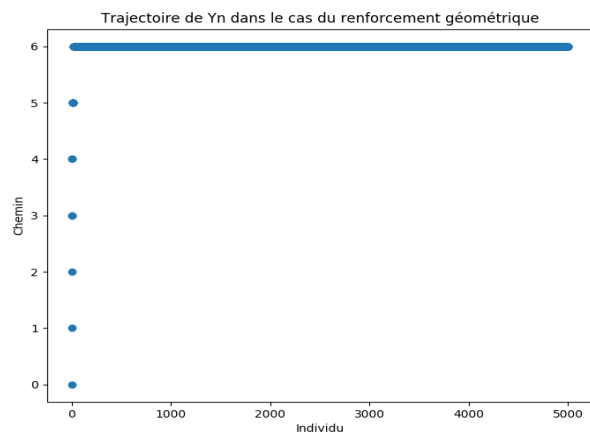
Pour représenter la trajectoire X_n nous utilisons la même méthode que précédemment. Dans ce cas, en plus d'un nombre d'individus à définir, il fallait aussi choisir un $\rho > 1$. Nous distinguerons donc à chaque fois deux cas de simulations : avec un ρ proche de 1 ($\rho = 1.01$) et avec un ρ plus éloigné de 1 ($\rho = 1.6$).

Pour la trajectoire de X_n avec $n = 30$ nous obtenons pour deux simulations différentes :



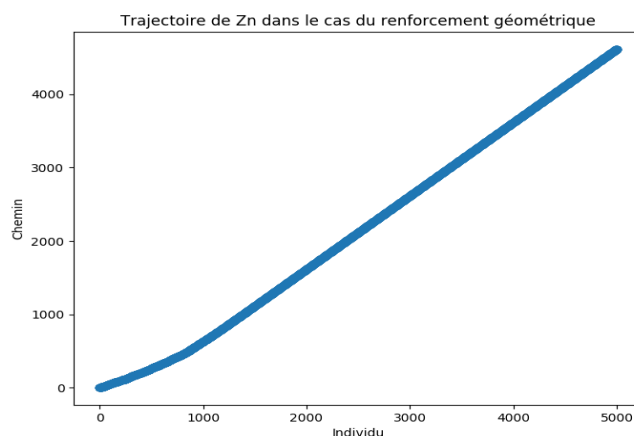
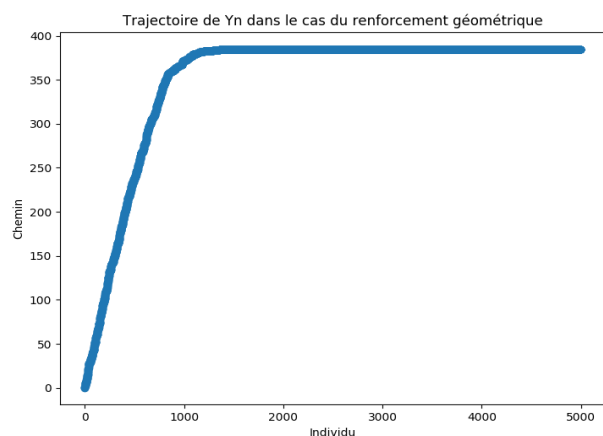
Le graphique de gauche représente la trajectoire de X_n avec un $\rho = 1,01$ et celui de droite avec un $\rho = 1,6$.

Observons les trajectoires de Y_n et Z_n pour un n suffisamment grand ($n = 5000$) et pour un $\rho = 1,6$.



Pour $\rho = 1,6$, les graphiques nous montrent qu'il y a un état prépondérant à l'issu de notre simulation. En effet, le chemin α n'a été choisi qu'à 6 reprises sur nos 5000 individus.

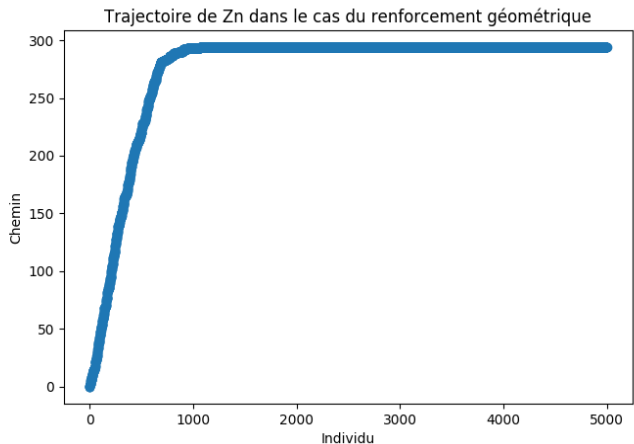
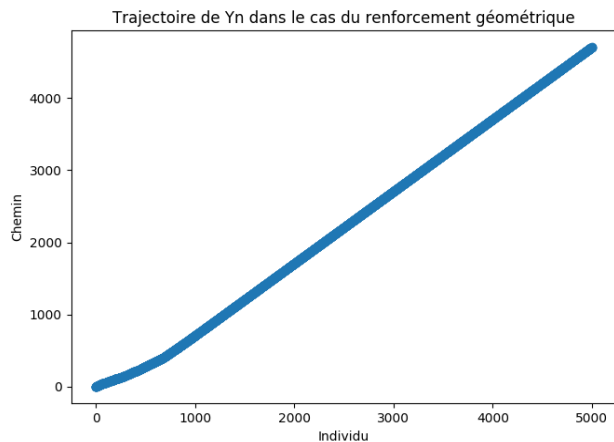
Observons les trajectoires de Y_n et Z_n pour un n suffisamment grand ($n = 5000$) et pour un $\rho = 1,01$.



Pour $\rho = 1,01$, les graphiques nous montrent aussi qu'il y a un état prépondérant à l'issu de notre simulation. Cependant, la vitesse de stagnation sur un état est bien moindre (elle ne se fait qu'à partir du 2000ème individu environ).

Remarque : on a autant de chances de stagner sur α que sur β , car leur attractivité est identique au début de l'expérience. Ici, on finit toujours par avoir des passages par α . La

simulation d'une autre marche peut tout à fait nous faire stagner sur β , comme le montrent les graphiques suivants :



Pour chaque simulation, l'une des suites (Y_n) ou (Z_n) est constante à partir d'un certain rang ce qui signifie que la suite (X_n) l'est aussi. La limite X de (X_n) suit alors la loi de Bernoulli symétrique sur $\{\alpha, \beta\}$ car les deux chemins ont initialement la même attractivité.

Chapitre 4

Compléments

4.1 Lien avec les urnes de Pòlya

L'urne de Pòlya est une modélisation d'une expérience aléatoire selon laquelle on dispose d'une urne contenant initialement a boules noires et b boules rouges (les couleurs sont arbitraires).

On réalise une suite de tirages successifs dans cette urne, et à chaque étape :

- si on tire une boule noire, on la remet et on rajoute dans l'urne une autre boule noire
- si on tire une boule rouge, on la remet et on rajoute dans l'urne une autre boule rouge

Nous pouvons immédiatement remarquer le parallèle existant entre ce modèle et la marche aléatoire renforcée, dans la mesure où :

- "tirer une boule noire et en remettre deux dans l'urne" est semblable à : choisir le chemin α et augmenter son attractivité et
- "tirer une boule rouge et en remettre deux dans l'urne" est semblable à : choisir le chemin β et augmenter son attractivité.

Par ailleurs, lorsqu'on augmente l'attractivité d'un chemin par exactement 1 lorsqu'il est choisi (c'est à dire dans le cas d'un renforcement linéaire), notre marche aléatoire renforcée coïncide avec le modèle de l'urne de Pòlya (car on augmente le nombre de boules de la couleur tirée par exactement 1 à chaque tirage).

Finalement, si on pose K_n la proportion de boules rouges tirées au n -ième tirage, les résultats sur l'urne de Pòlya nous donnent :

- La variable aléatoire K_n converge presque-sûrement vers une limite X , qui est une variable aléatoire.
- La loi de X est une $\beta(a, b)$.

En particulier, lorsque $a=b=1$ (ce qui est notre cas ici car les attractivités de nos chemins sont initialement identiques), alors X est une variable aléatoire de loi $U[0, 1]$. On retrouve donc les résultats théoriques que nous avons simulé précédemment.

4.2 Autres fonction de renforcement

Nous avons tenté d'étudier le comportement des suites (X_n) , (Y_n) et (Z_n) en utilisant d'autres fonctions de renforcement. Nous avons testé avec les fonctions de renforcement suivantes :

- $\varphi(x) = x^p$ avec $p > 1$
- $\varphi(x) = x^2 + 1$
- $\varphi(x) = p^x$ avec $p > 1$
- $\varphi(x) = e^x$

Étant donné que nous considérons qu'initialement les attractivités sont égales à 1, le cas $\varphi(x) = x^p$ revient à $\varphi(x) = x$ qui est le cas sans renforcement d'où le fait que nous retrouvons des proportions de choix de chemin égales à $\frac{1}{2}$. Les autres fonctions donnent rapidement des valeurs numériques trop grandes, ce qui les rend impossibles à calculer. En l'occurrence la marche aléatoire est toujours absorbée par un des deux états comme dans le cas du renforcement géométrique avec un p suffisamment grand.

Conclusion

En conclusion, nous avons réussi à simuler les résultats qui nous ont été proposés et nous les avons montrés numériquement. La réalisation de ce travail a été intéressante car elle nous a permis d'exploiter notre bagage informatique afin de montrer des résultats dont la démonstration formelle requiert une maîtrise des mathématiques et des probabilités que nous ne possédons pas encore. Cela avait d'autant plus d'intérêt car le phénomène de marche aléatoire renforcée est très fortement présent dans la nature, et les documentations que nous avons consultées au cours de nos recherches affirment qu'il s'agit d'un domaine auquel nous accordons de plus en plus d'attention.

Nous proposons à nos lecteurs -comme axe de recherche complémentaire- la démonstration d'existence de convergences en loi pour d'autres fonctions de renforcement (car après tout, il s'agissait des résultats les plus intéressants à observer).

Bibliographie

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01897577v3/document>

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/LES_URNES_DE_POLYA_6.pdf