Tópicos em probabilidade

Doriedson R. N. Jr.

3 de agosto de 2024

Resumo

Este trabalho teve como objeto de estudo o passeio aleatório (Pa) simples. Foram simuladas algumas variações como o Pa com barreiras refletoras e o Pa com barreiras absorventes, a fim de determinar medidas como o tempo médio de retorno e o tempo médio de absorção, respectivamente. Por último, houve a simulação de Pa's que possuem *loops* em seus estados para determinar se esse componente altera as simulações feitas anteriormente.

Introdução

São necessárias algumas definições/teoremas estocásticos iniciais. Para ordená-los foi considerado que o primeiro algarismo da numeração indica em qual tópico eles foram mais necessários.

Definição 1 Sejam $X_1, X_2, ...$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $\mathbb{E}[X_i] < \infty$. Seja $S_0 = C$ e

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1$$

*O processo $\{S_n, n > 0\}$ é chamado **passeio aleatório**. Tal processo é, também, uma cadeia de Markov.*

*Definição 1.1 Dado um passeio aleatório, caso o módulo do incremento a cada dois estados consecutivos $(X_i, X_{i+1}), \forall\, i \in \mathbb{Z}$, seja sempre igual a 1 tal passeio será classificado como **simples**.*

Teorema 1 Se $X_i, i \geq 1$ são v.a.i.i.d. tal que $\mathbb{E}[X_i] < \infty$ e se N é um tempo de parada para $X_1, X_2, ...$ com $\mathbb{E}[N] < \infty$, então

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i\Big] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X_1]$$

Definição 2.1 Considere $p_{i,i+1}$ *:='probabilidade de transição do estado i para o estado i+1'. Seja* $\{S_n, n > 0\}$ *um passeio aleatório simples, com espaço de estados* $E = \{1, 2, ..., k\}$*, que possui as seguintes probabilidades de transição:*

$$p_{1,2} = p_{k,k-1} = 1$$

$$p_{i,i+1} = p, 2 \leq i \leq k-1$$

$$p_{i,i-1} = 1 - p, 2 \leq i \leq k-1$$

O processo $\{S_n, n > 0\}$ *é um tipo de* ***passeio aleatório com barreiras refletoras***

Definição 2.2 A equação,

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i \, p_{i,j} \quad \forall \; j \in E$$

é chamada ***distribuição invariante*** *do citado passeio aleatório. Onde* $\pi_i = \mathbb{P}(X_n = i)$*.*

Definição 2.3 Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ *uma cadeia de Markov com espaço de estados* E *e matriz de transição* P*. Se a citada cadeia for irredutível e aperiódica então*

$$m_i = \frac{1}{\pi_i}, \forall \, i \in E$$

Sendo m_i *:=tempo médio de retorno*

Definição 3.1 Seja uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{e_0, ..., e_n\}$ *e matriz de transição* P*. Se, ao observar o estado* e_i*,*

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \tag{1}$$

então e_i *será um* ***estado absorvente.*** *Os demais estados são chamados* ***transientes.***

Definição 3.2 Uma cadeia de Markov com espaço matriz de transição P *pode ser reordenada na forma*

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

em que Q *é a matriz reduzida com os estados transientes,* R *a matriz que contém os estados absorventes e* I *a matriz identidade.*

Teorema 3.1 O ***tempo médio de absorção*** *do processo, iniciado no estado* e_i*, é dado pela soma dos elementos da linha* i *da matriz* N*,*

$$N = (I - Q)^{-1}.$$

Em outras palavras, é o i-ésimo elemento do vetor

$$\overrightarrow{t} = N\overrightarrow{1}$$

A metodologia aplicada consistiu em criar funções, as quais simulariam um tipo específico de Pa para cada tópico, a partir das simulações o resultado estimado foi comparado com o resultado analítico.

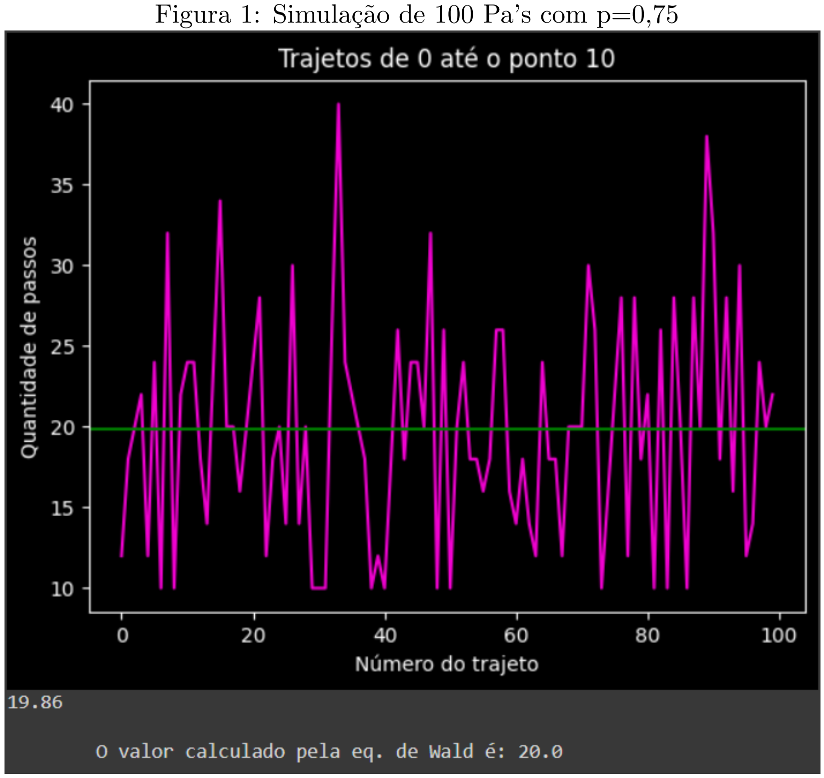
Resultados

Tópico 1.0

- O tempo médio de alcance de um ponto qualquer em um *passeio aleatório simétrico* é **infinito**;
- Para $p < \frac{1}{2}$, o passeio tem probabilidade positiva de não alcançar $k, se\ k \in \mathbb{N}^*$, portanto, afirma-se que o tempo médio de alcance tende ao **infinito**;
- Para o o passeio *assimétrico* com $p > \frac{1}{2}$ a equação de Wald é válida.

A figura 1 mostra os resultados da simulação do tempo médio de alcançar um estado. Note que o número de 100 repetições foi suficiente para uma aproximação com erro $< 1\%$.

Figura 1: Simulação de 100 Pa's com p=0,75



Tópico 2.0

Observando a figura 2, nota-se, na tabela da direita, que as simulações feitas pela função de estimação conseguiram encontrar uma proporção de visitas a estados próxima à real, isto é, a distribuição estacionária (invariante). Ademais, com 10^5 repetições no ensaio foi possível estimar valores com erros menores que um centésimo.

Já na figura 3 estão os resultados estimados para o tempo médio de retorno, novamente as aproximações foram satisfatórias.

Figura 2: Cálculo do invariante dada a matriz de transição

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0

	10^2	10^3	10^4	10^5	Real
0	0.04	0.061	0.0520	0.04902	0.05
1	0.07	0.119	0.1035	0.09799	0.10
2	0.06	0.122	0.1077	0.09799	0.10
3	0.08	0.117	0.1079	0.09912	0.10
4	0.14	0.091	0.1015	0.10155	0.10
5	0.18	0.081	0.1001	0.10238	0.10
6	0.14	0.088	0.0984	0.10147	0.10
7	0.09	0.099	0.0965	0.10109	0.10
8	0.08	0.095	0.0947	0.10097	0.10
9	0.08	0.084	0.0920	0.09942	0.10
10	0.04	0.043	0.0457	0.04900	0.05

Figura 3: Cálculo do tempo médio de retorno dada a matriz de transição

Matriz de transição:

	0	1	2	3
0	0.25	0.75	0.00	0.00
1	0.25	0.00	0.75	0.00
2	0.00	0.25	0.00	0.75
3	0.00	0.00	0.25	0.75

Simulação do experimento:

	10^2	10^3	10^4	10^5	Real
0	39.06	41.787	40.5743	40.03482	40.000000
1	15.33	12.990	13.2063	13.26005	13.333333
2	4.67	4.405	4.4575	4.44680	4.444444
3	1.46	1.528	1.4977	1.48434	1.481481

Tópico 3.0

Figura 4: Cálculo do tempo médio de absorção dada a matriz de transição

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0
13	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.5
14	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

	10^2	10^3	10^4	Real
0	0.00	0.000	0.0000	0.0
1	8.38	12.868	12.9636	13.0
2	26.68	24.684	24.1008	24.0
3	32.06	32.232	32.7378	33.0
4	41.16	40.594	39.5134	40.0
5	37.64	44.212	44.6942	45.0
6	45.08	50.022	48.0878	48.0
7	50.98	49.516	48.5410	49.0
8	51.90	48.302	47.7892	48.0
9	54.02	44.232	45.1742	45.0
10	36.68	38.954	40.3366	40.0
11	29.98	33.382	32.8526	33.0
12	22.02	21.176	24.4904	24.0
13	17.74	12.622	13.1480	13.0
14	0.00	0.000	0.0000	0.0

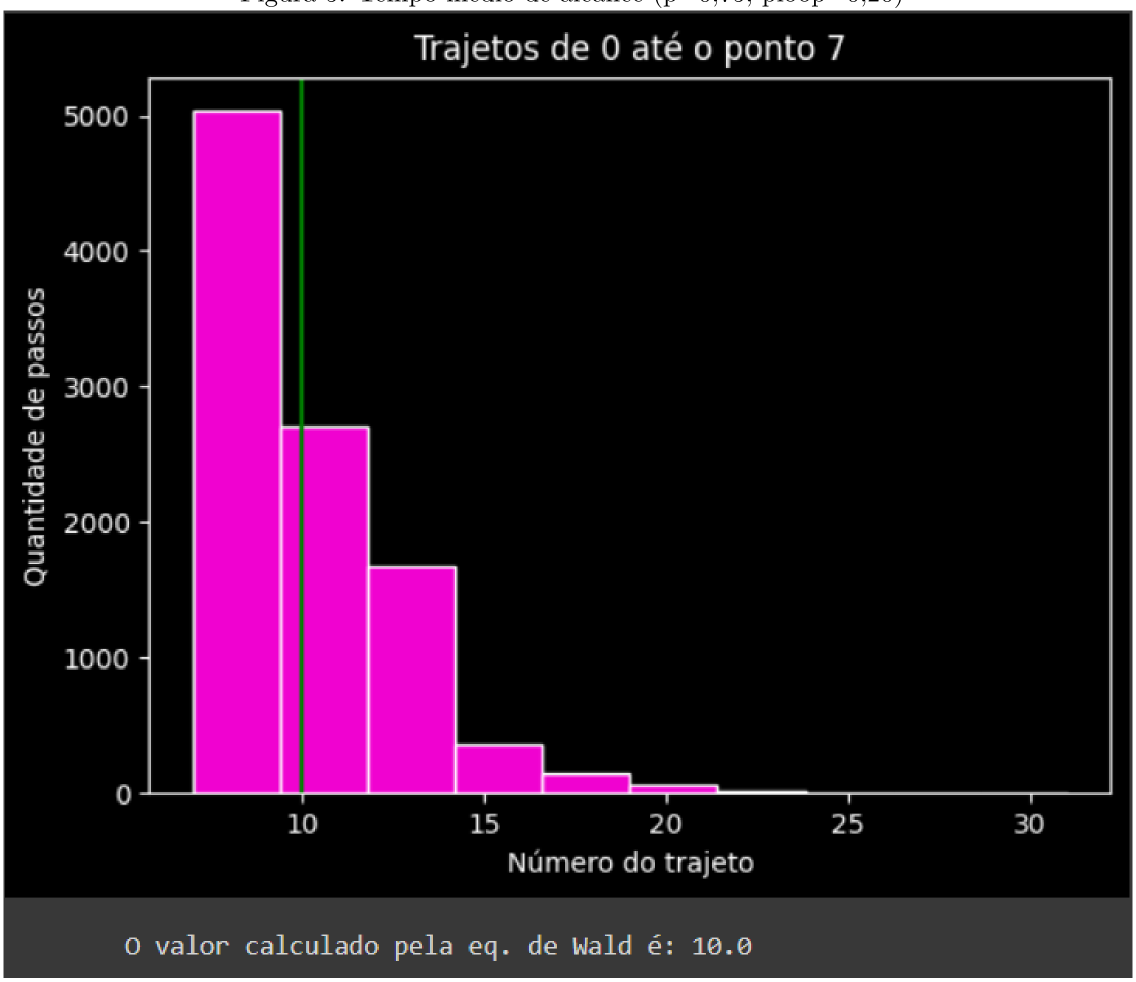
Tópico 4.0

Este tópico trata da releitura dos seus antecessores com uma mudança, cada estado passará a contar com uma probabilidade de *loop*. A ideia foi testar as funções utilizadas anteriormente a fim de verificar se as estimativas continuariam satisfatórias para esse outro tipo de passeio.

Tópico 4.1

Como supracitado, mesmo com *loop*, o único caso possível de estimar o tempo médio de alcance será quando $p > \frac{1}{2}$. A média dos 10^4 passeios simulados aqui está representada na figura pela linha verde, bem próxima ao valor calculado de forma analítica.

Figura 5: Tempo médio de alcance (p=0,75, ploop=0,20)



Tópico 4.2

Vale ressaltar que a estimação do tempo médio de retorno (ver figura 7) pode se tornar muito custosa, em termos computacionais, pois caso o *loop* seja definido com probabilidade alta o passeio tenderá a demorar muito para voltar ao estado inicial. As simulações foram feitas com números de repetições menores que nos outros casos, consequentemente, aqui o erro absoluto foi maior.

Figura 6: Cálculo do invariante dada a matriz de transição

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.0
1	0.05	0.85	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.0
2	0.00	0.05	0.85	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.0
3	0.00	0.00	0.05	0.85	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.0
4	0.00	0.00	0.00	0.05	0.85	0.10	0.00	0.00	0.00	0.0
5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.85	0.10	0.00	0.00	0.0
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.85	0.10	0.00	0.0
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.85	0.10	0.0
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.85	0.1
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.0

	10^2	10^3	10^4	10^5	Real
0	0.02	0.006	0.0006	0.00017	0.000187
1	0.05	0.062	0.0132	0.00283	0.003733
2	0.03	0.067	0.0192	0.00689	0.007467
3	0.10	0.080	0.0150	0.01383	0.014934
4	0.28	0.078	0.0345	0.03010	0.029867
5	0.26	0.085	0.0694	0.05875	0.059735
6	0.21	0.124	0.1071	0.12174	0.119470
7	0.06	0.171	0.2290	0.24440	0.238940
8	0.00	0.299	0.4655	0.47369	0.477879
9	0.00	0.029	0.0466	0.04761	0.047788

Figura 7: Tempo médio de retorno dada a matriz de transição

Matriz de transição:

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.0
1	0.05	0.85	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.0
2	0.00	0.05	0.85	0.10	0.00	0.00	0.00	0.0
3	0.00	0.00	0.05	0.85	0.10	0.00	0.00	0.0
4	0.00	0.00	0.00	0.05	0.85	0.10	0.00	0.0
5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.85	0.10	0.0
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.85	0.1
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.0

	5*(10^1)	5*(10^2)	Real
0	1239.74	1337.402	1325.000000
1	1.18	60.976	66.250000
2	16.10	37.584	33.125000
3	4.20	14.978	16.562500
4	6.04	10.830	8.281250
5	2.72	3.618	4.140625
6	1.94	2.116	2.070313
7	27.78	21.182	20.703125

Tópico 4.3

Figura 8: Tempo médio de absorção dada a matriz de transição

Matriz de transição:

	0	1	2	3	4	5	6
0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.1	0.4	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.1	0.4	0.5	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.1	0.4	0.5	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	0.1	0.4	0.5	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.4	0.5
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

	10^2	10^3	10^4	Real
0	0.00	0.000	0.0000	0.000000
1	9.00	9.686	9.5240	9.500768
2	9.54	9.096	9.3614	9.400922
3	7.70	7.546	7.3418	7.380952
4	4.73	4.883	5.0384	4.976959
5	2.71	2.549	2.5171	2.496160
6	0.00	0.000	0.0000	0.000000

Conclusão

O passeio aleatório simples pode ser simulado satisfatoriamente. No entanto, nem todas suas variações apresentam a mesma rapidez de convergência aos resultados analíticos. À medida que se adicionam *loops*, barreiras refletoras parciais e, principalmente, quando uma dessas mudanças deixa a matriz de transição assimétrica, as estimativas computacionais podem apresentar erros significativos.