שיטות נומריות- 064120

שגיאות

ערך מדויק- x

ערך מקורב- $\hat{x}$

שגיאה אבסולוטית- $E = |x - \hat{x}|$

שגיאה יחסית- $R = \frac{E}{|x|}$, $x \neq 0$

דוגמא:

$$\pi = 3.141592 \ , \ \hat{\pi} = 3.14$$

$$E = |3.141592 - 3.14| = 0.001592 \ , \qquad R = \frac{E}{|\pi|} = \frac{0.001592}{3.141592} = 0.00507$$

את השגיאה היחסית ניתן להציג באחוזים.

ספרות משמעותיות= ספרות מדויקות + ספרה מקורבת ראשונה

כך למשל, $\hat{\pi} = 3.14 = 3.140$ מכיל 3 ספרות מדויקות ואחת מקורבת.

סוגי שגיאות

שגיאת קיטוע – Truncation Error - הזנחה של איברים בביטוי מסובך.

דוגמא: טור טיילור- ביטוי של פונק' כטור אינסופי של פולינומים. בטור טיילור יש להחליט על איבר בו עוצרים (הערך המדויק מתקבל באינסוף איברים).

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf(x_0)}{dx^n}(x - x_0)^n$$

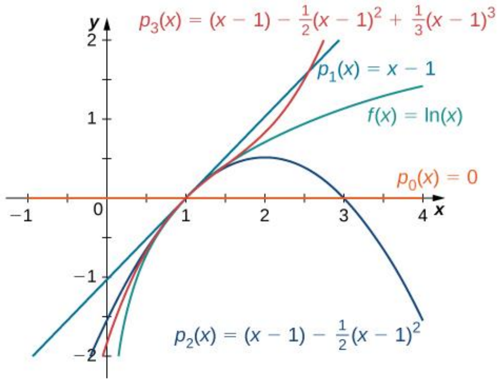
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^nf(x_0)}{dx^n}(x - x_0)^n$$

$$\widehat{f(x)} = f(x_0) + \frac{1}{1!}\frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) + O((x - x_0)^2)$$

$\boldsymbol{O} = \textbf{Order}$ - סדר גודל, השגיאה היא מסדר גודל של האיבר הגדול ביותר שהזנחנו. Order מתקשר גם לסיבוכיות, כמה פעולות דרושות להגעה לפתרון.

הצגה גרפית:

בכל ש- x קרוב יותר ל- x_0 , הערך המקורב יהיה יותר מדויק.



שגיאת עיגול – Round-off Error – שגיאות הנובעות מדיוק סופי של המחשב.

למשל, במס' π יש אינסוף ספרות. מס' הספרות שנשמרות אחרי הנקודה הוא מוגבל (זיכרון ואחסון) והמחשב יכול לחתוך את המספר או לעגל אותו. כך לדוגמא: $\pi = 3.141592\ ...$
מחשב עם דיוק של 4 ספרות אחרי הנקודה: חיתוך- $\hat{\pi} = 3.1415$, עיגול- $\hat{\pi} = 3.1416$.

אופן שמירת הזיכרון במחשב:

- מספר
- סימן +/- $\qquad 47{,}000{,}000 \ \rightarrow + \mathbf{47} \cdot 10^{6}$
- אקספוננט

שגיאת האלגוריתם- צבירת שגיאות כתוצאה מחישובים מרובים, מתקבלת מפיתוח האלגוריתם ותלויה במספר הפעולות.

אלגוריתם- מתכון לפתרון בעיה מתמטית ע"י מספר סופי של צעדים.
אלגוריתם אטרטיבי- יצירה של סדרה/רצף פעולות בדרך קבועה בה הפתרון משתפר כל הזמן.

מציאת שורשים למשוואות לא לינאריות

שורש- פתרון למשוואה $f(x) = 0$.
משוואה לינארית- משוואה חד ממדית, נעלם אחד.

- פתרון בעיות מהצורה $f(x) = 0$
- שימושי מאוד מכיוון שלבעיות רבות אין פתרון אנליטי פשוט.
- נניח ש-$f(x)$ רציפה בקטע הפתרון.

שיטות תחום- Bracketing Methods

שיטת חציית התחום – *bisection method*

הפתרון שלנו תחום באינטרול מסוים, בכל איטרציה קיימים 2 פתרונות/קירובים x_1 ו-x_2, כך שמתקיים:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

כלומר הפונקציה עבור אחד הפתרונות שלילית ועבור השני חיובית. באמצע, ע"פ משפט ערך הביניים יש נקודה בה: $f(x) = 0$
הסימנים של הפונקציה הפוכים ולכן יש פתרון/ שורש בקטע $[x_1, x_2]$.

בכל איטרציה נקטין את התחום בחצי: $x_{new} = \frac{x_1+x_2}{2}$ ונחליף את אחד מהקירובים על פי הסימן של $f(x_{new})$.
אם $f(x_1) \cdot f(x_{new}) < 0$ נחליף את x_2 ב-x_{new} ואם $f(x_{new}) \cdot f(x_2) < 0$ נחליף את x_1 ב-x_{new}.

מתי עוצרים את התהליך? תלוי בדיוק הנדרש ε, כאשר מתקיים $|x_1 - x_2| < \varepsilon$**,** כיוון שהפתרון נמצא בתווך זה ניתן לומר שהשגיאה קטנה מ-ε .

#קצב ההתכנסות- אופן השוואה בין אלגוריתמים שונים, כמה מתקרבים בכל אטרציה.

השגיאה באטרציה ה-n: $\varepsilon^{(n)}$

$$\varepsilon^{(n)} = \left|x_1{}^{(n)} - x_2{}^{(n)}\right| \to \frac{\varepsilon^{(n+1)}}{\varepsilon^{(n)}} \approx \frac{1}{2} \to \varepsilon^{(n)} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}} \cdot \left|x_1{}^{(0)} - x_2{}^{(0)}\right|$$

$$n = \frac{log\left|x_1{}^{(0)} - x_2{}^{(0)}\right| - \log(\delta)}{\log(2)}$$

אם רוצים $\varepsilon < \delta$ ניתן על פי החישוב הנ"ל לדעת את מספר האיטרציות הנדרשות.

קצב ההתכנסות הוא לינארי (בהתאמה למס' האיטרציות).

<u>לסיכום:</u>

יתרונות:
- איטרציות פשוטות
- התכנסות מובטחת
- מס' האיטרציות ידוע מראש

חסרונות:
- דרושים ניחושים התחלתיים
- התכנסות לינארית
- אין שימוש בצורת הפונק'

שיטות פתוחות- Open Methods

שיטת ניוטון- רפסון (NR)

הרעיון הוא להשתמש בנגזרת של הפונק' (הנגזרת נותנת מידע על תחומי עליה וירידה וקצב השינוי).

חישוב נק' חיתוך של המשיק לפונק' בנקודה.

$$\widehat{f(x)} = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) = 0$$

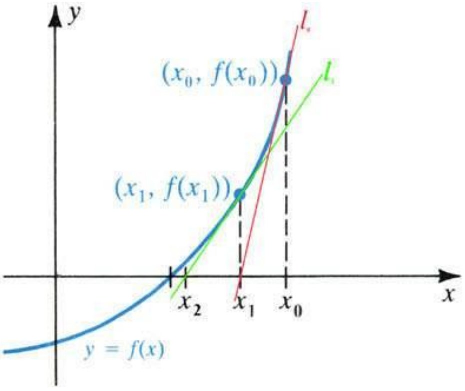
$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

לכן, האלגוריתם ניתן ע"י קירוב באטרציה ה-n:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$$

מתבצע קירוב טיילור מסדר ראשון, כאשר הקו הישר מתקרב לפונקציה בכל אטרציה.

בכל פעם נעזרים במשיק לפונק' בנקודה, נקודת החיתוך עם ציר ה-X של משיק זה תשמש כנקודת ההשקה הבאה.



אנליזה של שגיאות וקצב התכנסות: (α- השורש המדויק)

$$\varepsilon^{(n)} = x^{(n)} - \alpha$$

$$\varepsilon^{(n+1)} = x^{(n+1)} - \alpha = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)} - \alpha = \varepsilon^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$$
$$= \varepsilon^{(n)} - \frac{f\left(\varepsilon^{(n)} + \alpha\right)}{f'\left(\varepsilon^{(n)} + \alpha\right)} = \frac{\varepsilon^{(n)} \cdot f'\left(\varepsilon^{(n)} + \alpha\right) - f\left(\varepsilon^{(n)} + \alpha\right)}{f'\left(\varepsilon^{(n)} + \alpha\right)}$$
$$= \frac{\varepsilon^{(n)}\left[f'(\alpha) + \varepsilon^{(n)} f''(\alpha) + \cdots\right] - \left[f(\alpha) + \varepsilon^{(n)} f'(\alpha) + \varepsilon^{(n)^2} \frac{f''(\alpha)}{2} + \cdots\right]}{\left[f'(\alpha) + \varepsilon^{(n)} f''(\alpha) + \cdots\right]}$$
$$= \frac{\left[\varepsilon^{(n)^2} \frac{f''(\alpha)}{2} + \cdots\right]}{\left[f'(\alpha) + \varepsilon^{(n)} f''(\alpha) + \cdots\right]} \approx \varepsilon^{(n)^2} \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

$$\varepsilon^{(n+1)} \approx k \cdot \varepsilon^{(n)^2}$$

היחס בין השגיאות מוביל לקצב התכנסות.

פתרון של מערכת משוואות ליניאריות

- נלמד מספר שיטות
- השיטות כוללות שיטות ישירות ושיטות איטרטיביות

שיטות ישירות- פתרון אנליטי עד רמת שגיאת החישוב.

שיטות איטרטיביות- פתרון מקורב, רמת הדיוק נקבעת ע"י קצב ההתכנסות ומספר האיטרציות.

- נדון בבעיות מהצורה: $\mathrm{A}x = b$

A- מטריצת המקדמים, x- וקטור הנעלמים ו-b הינו וקטור הפתרונות.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^t$- מטריצת *transpose* $\mathbf{A}^{-1}$- *inverse matrix* (מטריצה הופכית)   I- מטריצת היחידה

$$[\mathrm{A}^t]^t = \mathrm{A} \;\;,\;\; \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{I} \;\;,\;\; \mathrm{A}^t_{i,j} = \mathrm{A}_{j,i}$$

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

נתמקד במצב שבו $A_{n\times n}$, מטריצה ריבועית רגולרית

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1$

$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2$

$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3$

זו בעיה קנונית בתחומים רבים של מדע והנדסה, בהרבה מקרים בעיה זו תופיע תחת בעיה של אלגוריתם אחר.

שיטת גאוס- Gaussian Elimination

ע"י פעילות אלמנטרית על השורות נאפס מקדמים במטריצה עד שנגיע למטריצה משולשת עליונה.

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] \to [\widehat{\boldsymbol{A}}|\widehat{\boldsymbol{b}}]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \widehat{a_{1,1}} & \cdots & \widehat{a_{1,n}} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \widehat{a_{n,n}} \end{bmatrix} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} \widehat{b_1} \\ \vdots \\ \widehat{b_n} \end{bmatrix}$$

לאחר שנגיע למצב שבו $\hat{A}$ משולשת עליונה, נתחיל לחשוף את הנעלמים שורה אחרי שורה.

$$x_n = \frac{\widehat{b_n}}{\widehat{a_{n,n}}} \;, x_{n-1} \;....$$

דוגמא:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

שלב 1 : מעבר למטריצה משולשת

$$R_2^{new} = R_2 a_{1,1} - R_1 a_{2,1} \to [2\cdot 1 - 1\cdot 2, 2\cdot 1 - 2\cdot 2, 3\cdot 1 - 1\cdot 2 \mid 3\cdot 1 - 0\cdot 2]$$

$$R_3^{new} = R_3 a_{1,1} - R_1 a_{3,1} \to [-1\cdot 1 - 1\cdot(-1), -3\cdot 1 - 2\cdot(-1), 0\cdot 1 - 1\cdot(-1) \mid 2\cdot 1 - 0]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3^{new} = R_3 a_{2'2} - R_2 a_{3,2} \to [0, -1\cdot(-2) + 2\cdot(-1), 1\cdot(-2) - 1\cdot(-1) \mid 2\cdot(-2) - 3\cdot(-1)]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

שלב 2 : חשיפת הנעלמים

$$\boldsymbol{x_3} = \frac{-1}{-1} = \boldsymbol{1}$$

$$-2\cdot x_2 + x_3 = 3 \;\to\; \boldsymbol{x_2} = \frac{3 - x_3}{-2} = \frac{3-1}{-2} = \boldsymbol{-1}$$

$$x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 = 0 \;\to\; \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{1} \to x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

#כעת באופן אלגוריתמי:

שלב 1: איפוס באיבר ה-k בשורה ה-n ע"י שורה n-1.

$$R_n^{new} = R_n a_{n-1,k} - R_{n-1} a_{n,k}$$

שלב 2: הצבה בנסיגה

$$x_n = \frac{b_n - \sum_{n+1}^{N} a_{n,j} \cdot x_j}{a_{n,n}}$$

סיבוכיות השיטה היא N בשלישית.

החלפת שורות- pivoting

עוזר בהקטנת שגיאות חישוב נומריות

נחליף את סדר השורות כך שהשורה הראשונה בהעלמת כל איבר תתחיל במספר בעל הערך המוחלט הגדול ביותר.

חסרונות השיטה כוללים את כמות פעולות החישוב, מטריצה A קרובה לסינגולריות ושגיאות חישוב.

היתרון המרכזי של השיטה הינו ההובלה לפתרון מדויק.

סיבוכיות (כמות הפעולות):
- איפוס כל איבר i דורש $O(n^2)$ פעולות.
- יש n איברים, סה"כ $O(n^3)$

שיטת L U הפרדה עליונה תחתונה

הרעיון הוא לפרק את המטריצה A לשתי מטריצות: U משולשת עליונה ו-L משולשת תחתונה. פתרון מטריצות אלו פשוט בהשוואה לפתרון הבעיה המקורית.

$$A = L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \rightarrow \; L \cdot U\, x = b \rightarrow U\, x = y \rightarrow L \cdot y = b$$

נגדיר $U\, x = y$

בגלל ש-L משולשית קל למצוא את y, בגלל ש-U משולשית קל למצוא את x.

דוגמא:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ l_{2,1}u_{1,1} & l_{2,1}u_{1,2} + u_{2,2} & l_{2,1}u_{1,3} + u_{2,3} \\ l_{3,1}u_{1,1} & l_{3,1}u_{1,2} + l_{3,2}u_{2,2} & l_{3,1}u_{3,3} + l_{3,2}u_{2,3} + u_{3,3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

בשלב הבא משווים בין המטריצות, בקלות ניתן למצוא את השורה הראשונה של מטריצת U.

$$u_{1,1}=a_{1,1} \quad u_{1,2}=a_{1,2} \quad u_{1,3}=a_{1,3}$$

בעזרת מערכת משוואות ניתן לפתור את שאר איברי המטריצה.

דוגמא מספרית:

$$A=\begin{bmatrix}50 & 107 & 36\\ 25 & 54 & 20\\ 31 & 66 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3}\\ l_{2,1}u_{1,1} & l_{2,1}u_{1,2}+u_{2,2} & l_{2,1}u_{1,3}+u_{2,3}\\ l_{3,1}u_{1,1} & l_{3,1}u_{1,2}+l_{3,2}u_{2,2} & l_{3,1}u_{3,3}+l_{3,2}u_{2,3}+u_{3,3}\end{bmatrix}$$

$u_{1,1}=50\,,\ u_{1,2}=107\,,\ u_{1,3}=36\,,\ l_{2,1}=\frac{25}{50}=0.5\,,\ u_{2,2}=54-0.5\cdot 107=0.5\ \,,u_{2,3}=20-0.5\cdot 36=2\,,l_{3,1}=\frac{31}{50}=0.62\,,l_{3,2}=\frac{66-0.62\cdot 107}{0.5}=0.68\,,u_{3,3}=21-0.62\cdot 36-(-0.68)\cdot 2=0.04$

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.5 & 1 & 0\\ 0.62 & -0.68 & 1\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}50 & 107 & 36\\ 0 & 0.5 & 2\\ 0 & 0 & 0.04\end{bmatrix}$$

ניתן להשתמש בשיטה זו למציאת המטריצה ההופכית:

$$A^{-1}=L^{-1}\cdot U^{-1}$$

שיטת תומאס למטריצות תלת אלכסוניות:

$$\begin{bmatrix}b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0\\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0\\ 0 & a_3 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & c_n\\ 0 & 0 & 0 & a_n & b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ L_2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & L_3 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & L_n & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}U_1 & c_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & U_2 & c_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & c_n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_n\end{bmatrix}$$

$$U_1=\mathrm{b}_1\ , \qquad L_n=\frac{a_n}{U_{n-1}}\ , \qquad U_n=b_n-L_n\cdot c_{n-1} \quad n=2,3,\ldots$$

כלומר אפשר בצורה פשוטה לפרק ל-L ו-U ולפתור מערכת של $Ax=b$. פותרים קודם כל $Ly=b$ ולאחר מכן $Ux=y$ וכך מוצאים את X.

לדוגמא:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 7 & 8\\ 0 & 3 & 10\end{bmatrix} \ \rightarrow U_1=1 \ \rightarrow L_2=\frac{4}{1}=4$$

$$\rightarrow U_2=7-4\cdot 2=-1 \ \rightarrow L_3=\frac{3}{-1}=4 \ \rightarrow U_3=10-(-3)\cdot 8=34$$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 8\\ 0 & 0 & 34\end{bmatrix}$$

סיבוכיות O(n).

#שיטת תומאס ושיטת L U הינן שיטות לפירוק המטריצה בלבד, השיטות עצמן אינן פותרות.

שיטות אטרטיביות לפתרון מערכת משוואות לינאריות:

- הפתרון המדוייק (שיטות ישירות) לפעמים בלתי ישים משיקולי זמן וסיבוביות וגם זיכרון.
- לכן גישה אלטרנטיבית פשוטה הינה שימוש בשיטות אטרטיביות להתכנסות לפתרון.

הבעיה :

$$Ax = b \quad \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1,2,3 \ldots N$$

$$\sum_{j=1,\neq i}^{N} a_{ij}x_j + a_{ii}x_i = b_i \;\rightarrow\; x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1,\neq i}^{N} a_{ij}x_j\right]$$

באופן כללי ניתן לרשום משוואות מהצורה:

$$x_1 = f_1(x_2, x_3, \ldots x_n)$$

$$x_2 = f_2(x_1, x_3, \ldots x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = f_n(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$$

<u>אלגוריתם לפתרון:</u>

1. בחירת ניחוש התחלתי x_0

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix}$$

2. הצבה לתוך הפתרון לקבלת ערכים חדשים
3. חזרה על שלב 2 עד להתכנסות הרצויה

במקרה של משוואות לינאריות:

$$f_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1,\neq i}^{N} a_{ij}x_j\right]$$

שיטת יעקובי Jacobi:

שימוש בערכים מאטרציה n לחישוב הקירוב באיטרציה n+1.

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1,\neq i}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}$$

כאשר x_i הינו הקירוב החדש, n מתייחס למס' האיטרציות ו-x_j הינו הקירוב הקודם.

שיטת גאוס זייצל G.S:

שימוש בערכים המעודכנים ביותר בכל חישוב.

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}$$

הסכום הראשון בביטוי כולל את הערכים המעודכנים והביטוי השני כולל את הערכים מהאיטרציה הקודמת.

<u>בדיקת התכנסות</u>

נגדיר שהסדרה מתכנסת טוב $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$

הפתרון האמיתי אינו ידוע ולכן נגדיר $\varepsilon_i^{(n+1)} = \left|x_i^{(n)} - x_i^{(n+1)}\right|$

נגדיר שגיאה בנורמה $\varepsilon = \sqrt{\sum\left(x_i^{(n)} - x_i^{(n+1)}\right)^2} < \delta$

ניתן להראות ששליטה אלכסונית הינה תנאי מספיק אך לא הכרחי להתכנסות $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1,\neq i}^{N} |a_{ij}|$

#שליטה אלכסונית- איבר האלכסון גדול בערכו המוחלט מסכום שאר האיברים באותה השורה.

<u>תרגול- פתרון מערכת משוואות ליניאריות</u>

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

-Jaccobi-

$$x_1^{(1)} = \frac{8}{8} - \left(\frac{1\cdot 0 + (-1)\cdot 0}{8}\right) = 1$$

$$x_2^{(1)} = \frac{-4}{-7} - \left(\frac{1\cdot 0 + 2\cdot 0}{-7}\right) = 0.57$$

$$x_3^{(1)} = \frac{12}{9} - \left(\frac{2\cdot 0 + 1\cdot 0}{9}\right) = 1.33$$

$$x_1^{(2)} = \frac{8}{8} - \left(\frac{1\cdot 0.57 + (-1)\cdot 1.33}{8}\right) = 1.095$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-4}{-7} - \left(\frac{1\cdot 1 + 2\cdot 1.33}{-7}\right) = 1.09$$

$$x_3^{(2)} = \frac{12}{9} - \left(\frac{2\cdot 1 + 1\cdot 0.57}{9}\right) = 1.04$$

-GS-

$$x_2^{(1)} = \frac{-4}{-7} - \left(\frac{1\cdot 1 + 2\cdot 0}{-7}\right) = 0.71$$

$$x_3^{(1)} = \frac{12}{9} - \left(\frac{2\cdot 1 + 1\cdot 0.71}{9}\right) = 1.03$$

$$x_1^{(2)} = \frac{8}{8} - \left(\frac{1\cdot 0.71 + (-1)\cdot 1.03}{8}\right) = 1.04$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-4}{-7} - \left(\frac{1\cdot 1.04 + 2\cdot 1.03}{-7}\right) = 1.01$$

$$x_3^{(2)} = \frac{12}{9} - \left(\frac{2\cdot 1.04 + 1\cdot 1.01}{9}\right) = 0.99$$

$$\varepsilon^{(1)} = \left\|\overrightarrow{x^{(0)}} - \overrightarrow{x^{(1)}}\right\| = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0.57)^2 + (0-1.33)^2} = 1.76$$

$$\varepsilon^{(2)} = \left\|\overrightarrow{x^{(1)}} - \overrightarrow{x^{(2)}}\right\| = \sqrt{(1-1.095)^2 + (0.57-1.09)^2 + (1.33-1.04)^2} = 0.6$$

$$\varepsilon^{(2)} = \left\|\overrightarrow{x^{(1)}} - \overrightarrow{x^{(2)}}\right\| = \sqrt{(1-1.04)^2 + (0.71-1.01)^2 + (1.03-0.99)^2} = 0.3$$

הפתרון המדויק הוא: $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

שיטת Successive Over Relaxation -S.O.R.

שיטה דומה לשיטת GS אך עם תיקון (W):

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + w(x_{i,GS}^{(n+1)} - x_i^{(n)})$$

- הפרמטר w גורם לכך שהתיקון בכל איטרציה יהיה "לא מושלם", כלומר יכול להיות תיקון חסר (w<1) או תיקון יתר (w>1).
- עבור 1<w<2 נקבל האצה בפתרון.
- עבור 0<w<1 נקבל התכנסות מואטת אך לעיתים תהליך זה יתכנס למרות ש-GS לא.
- הערך האופטימלי של w תלוי במטריצה A.

<u>סיכום לשיטות אטרטיביות לפתרון מערכת משוואות לינארית</u>

כל השיטות שלמדנו מבוססות על עיקרון דומה:

1. יעקובי- שיטת הבסיס
2. גאוס-זייצל- יעקובי שמשתמש בערכים המעודכנים ביותר (התכנסות מהירה מזו של יעקובי).
3. S.O.R.- גאוס- זייצל עם הוספת פרמטר להאצה או האטה של הפתרון (קצב ההתכנסות תלוי בתנאים).

ניחוש התחלתי -> הצבה למשוואות (חילוץ של x_i) -> חזרה על השלב השני עד להתכנסות

מספר הפעולות הוא $O(n^2)$ כאשר n הינו מספר האטרציות.

קצב ההתכנסות תלוי מאוד במטריצה A.

<u>פתרון מערכת משוואות לא לינאריות</u>

#פונקציה לינארית מקיימת כי חזקת כל אחד מהמשתנים שלה בחזקת 0 או 1, כלומר:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_n) = z_1 x_1{}^1 + z_2 x_1{}^0 - z_3 x_3{}^1 \ldots z_n x_n{}^1$$

כאשר כל המשתנים בעלי חזקה 0 הם בעצם הקבועים של המשוואה.

הניסוח הכללי של הבעיה:

$$\vec{F}(\vec{z}) = 0$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_n) = 0$$

נשתמש בשיטות דומות לבעיה החד- ממדית (מציאת שורשים).

<u>שיטת ניטון רפסון:</u>

תזכורת:

$$\widehat{f(x)} = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) = 0$$

(הזנחה של כל האיברים, שגיאה מסדר שני).

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$$

נעשה אותו דבר לפונקציה בעלת שני משתנים:

$$f(x,y)| = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) + O((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$$

ובאופן יותר כללי:

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(x_0) + \sum_{1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_j - x_{0j}\right) + O(\sum \left(x_j - x_{0j}\right)^2)$$

עבור פתרון מערכת משוואות לא לינאריות:

$$f_1\left(x^{(k)}\right) + \sum_{1}^{N} \frac{\partial f_1\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_j}({x_j}^{(k+1)} - {x_j}^{(k)}) = 0$$

$$f_2\left(x^{(k)}\right) + \sum_{1}^{N} \frac{\partial f_2\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_j}({x_j}^{(k+1)} - {x_j}^{(k)}) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n\left(x^{(k)}\right) + \sum_{1}^{N} \frac{\partial f_n\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_j}({x_j}^{(k+1)} - {x_j}^{(k)}) = 0$$

מסידור המשוואות נקבל:

$$\frac{\partial f_1\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1}\left({x_1}^{(k+1)} - {x_1}^{(k)}\right) + \cdots + \frac{\partial f_1\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_n}\left({x_n}^{(k+1)} - {x_n}^{(k)}\right) = -f_1\left(x^{(k)}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f_n\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1}\left({x_1}^{(k+1)} - {x_1}^{(k)}\right) + \cdots + \frac{\partial f_n\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_n}\left({x_n}^{(k+1)} - {x_n}^{(k)}\right) = -f_n\left(x^{(k)}\right)$$

בכתיב מטריציוני:

$$J\Delta X = -F \qquad \Delta X = -J^{-1}F$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\left(x^{(k)}\right) \qquad \Delta X = \begin{bmatrix} {x_1}^{(k+1)} - {x_1}^{(k)} \\ \vdots \\ {x_n}^{(k+1)} - {x_n}^{(k)} \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} f_1\left(x^{(k)}\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x^{(k)}\right) \end{bmatrix}$$

השימוש בטור טיילור מאפשר לנו לבצע לינאריזצייה לבעיה הלא לינארית.

דוגמא:

$$f_1 = 3x_1 - \cos(\,x_2 x_3) - 0.5 = 0$$

$$f_2 = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 = 0$$

$$f_3 = \mathrm{e}^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} 3 & x_3\sin(x_2x_3) & x_2\sin(x_2x_3) \\ 2x_1 & -162(x_2+0.1) & \cos(x_3) \\ -x_2\mathrm{e}^{-x_1x_2} & -x_1\mathrm{e}^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix} \qquad X_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$J(X_0) = \begin{bmatrix} 3 & 0.001 & 0.001 \\ 0.2 & -32.4 & 0.995 \\ -0.099 & -0.099 & 20 \end{bmatrix} \qquad F(X_0) = \begin{bmatrix} -1.20 \\ -2.27 \\ 12.46 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \Delta X = \begin{bmatrix} 0.4002 \\ 0.0866 \\ -0.6206 \end{bmatrix} \qquad X_1 = X_0 + \Delta X = \begin{bmatrix} 0.5002 \\ 0.1866 \\ -0.5206 \end{bmatrix}$$

<u>סיכום פתרון מערכת לא לינארית</u>

- קצב ההתכנסות כמו ניוטון-רפסון, ריבועי.
- דרוש ניחוש התחלתי טוב (מדובר בבעיה מסובכת ובחירת ניחוש רחוק מהפתרון יכול למנוע התכנסות ופעמים רבות יש יותר מפתרון אחד).
- צריך חישוב של המטריצה J (יעקוביאן) בכל אטרציה.
- צריך לפתור מערכת משוואות לינארית בכל אטרציה.

<u>סיבוכיות:</u>

- N^2+N לחישוב המטריצה בכל אטרציה
- $O(N^3)$ לפתרון של המערכת הלינארית

<u>דרך אלטרנטיבית:</u>

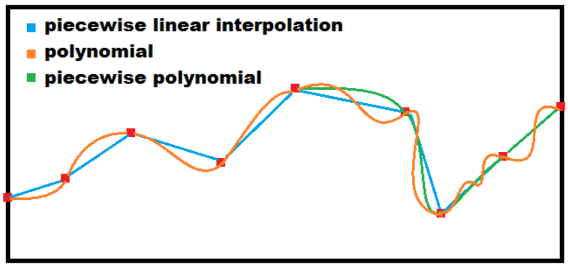
המרה של הבעיה $\vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{z}}) = 0$ לבעיית אופטימיזציה מהצורה:

$$min_{|x}\, g(x_1, x_2 \ldots x_n) \qquad g = \sum_{1}^{N} \left[f_j(x_1, x_2 \ldots x_n)\right]^2$$

ניסוח כזה נחשב פחות רגיש לתנאי התחלה.

אינטרפולציה-מציאת ערכי ביניים של פונקציה נתונה בנקודות בדידות.

- שימושי מאוד לדוגמא כאשר ישנן תוצאות ניסוי בנקודות מסוימות ורוצים לדעת מה קורה ביניהן. לדוגמא: בשימוש בטבלאות קיטור או טבלאות נתונים ונרצה ערך המצוי בין ערכי הטבלה.
- ההנחה הבסיסית (שאינה תמיד נכונה) היא שהפונקציה עוברת דרך הנקודות.
- ברגע שיש ערכי ביניים ניתן גם לחשב נגזרות ואינטגרלים.
- נחשב עקומים פשוטים שעוברים בנקודות.
- הפונקציות בהן נשתמש יכולות להיות ממשפחות שונות (פולינומים, טריגונומטרי וכו').



קירוב פולינומי

נעביר פולינום מהסדר הגבוה ביותר דרך הנקודות, עבור n נק' נעביר פולינום מדרגה n-1, בצורה שתבטיח יחידות.

לפולינום מסדר n יש n+1 מקדמים.

$$P_n(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

עבור n נקודות נתונות נתאים פולינום מדרגה n-1, יש לכך שתי שיטות עיקריות:

פולינום לגרנג':

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} L_j f(x_j)$$

$$L_j(x) = \frac{\prod_{i=0,\neq j}^{n}(x - x_i)}{\prod_{i=0,\neq j}^{n}(x_j - x_i)}$$

עבור שתי נקודות:

$$P_1(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

כדי לבדוק שמה שקיבלנו נכון נציב x_1 ו-x_0 ונרצה לקבל את הפונקציה של כל אחד מהם בהתאמה.

בדיקה שניה אפשרית היא הגעה למשוואת קו ישר (משוואה מחזקה 1):

$$\begin{aligned}\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) &= x\left[\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}\right] - \frac{x_1 f(x_0)}{x_0 - x_1} - \frac{x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0} \\ &= x\left[\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\right] + \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{x_0 - x_1}\end{aligned}$$

עבור 3 נקודות f_1, f_2, f_3

$$P_2(x) = L_0 f_0 + L_1 f_1 + L_2 f_2$$
$$= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

<u>פולינום ניוטון</u>

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots = \sum_{j=0}^{n} a_j L_j$$

$$L_j = \prod_{j=0}^{j-1}(x-x_j)$$

כאשר נתונה נקודה אחת:

$$P_0(x) = f(x_0) = a_0$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0)$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) = P_1(x) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$P_3(x) = P_2(x) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

מציאת הקבועים:

כמו שראינו קודם:

$$P_0(x_0) = \boldsymbol{a_0} = \boldsymbol{f_0}$$

$$P_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) = f_1 \ \rightarrow \boldsymbol{a_1} = \frac{\boldsymbol{f_1 - f_0}}{\boldsymbol{(x_1 - x_0)}}$$

$$P_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = f_2$$

$$\rightarrow \boldsymbol{a_2} = \frac{f_2 - a_0 - a_1(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{f_2 - f_0 - \frac{f_1-f_0}{(x_1-x_0)}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$
$$= \frac{f_2-f_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{(f_1-f_0)(x_2-x_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$
$$= \frac{\frac{f_2-f_0+f_1-f_1}{(x_2-x_1)} - \frac{(f_1-f_0)(x_2-x_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}}{(x_2-x_0)}$$
$$= \frac{1}{(x_2-x_0)}\left[\frac{f_1-f_0+f_2-f_1}{(x_2-x_1)} - \frac{(f_1-f_0)(x_2-x_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}\right]$$
$$= \frac{1}{(x_2-x_0)}\left[\frac{f_1-f_0}{x_2-x_1}\left[1 - \frac{(x_2-x_0)}{(x_1-x_0)}\right] + \frac{f_2-f_1}{(x_2-x_1)}\right]$$
$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{(x_2-x_0)}}\left[\frac{\boldsymbol{f_2-f_1}}{\boldsymbol{x_2-x_1}} - \frac{\boldsymbol{f_1-f_0}}{\boldsymbol{x_1-x_0}}\right]$$

- רואים שדרגת הפולינום בניסוח ניוטון אינה מוגדרת מראש ולכן ניתן להוסיף נקודות מתי שרוצים.
- ניתן להגדיר/ לחשב את המקדמים בצורה רקורסיבית בעזרת פונקציית הפרשים סופיים מחולקים:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}$$
$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$
$$f[x_i, x_{i-1}, \dots, x_0] = \frac{f[x_i, x_{i-1}, \dots, x_1] - f[x_{i-1}, \dots, x_0]}{x_i - x_0}$$
$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_{n-1})$$

<u>סיכום ביניים אינטרפולציה פולינומיאלית</u>

- לגרנג'
- ניוטון

Input: נקודות של הפונק' הלא ידועה, m נקודות.
Output: ביטוי אנליטי מצורה של פולינום מסדר m-1 (תקף באינטרוול הנתון).

דוגמא: בדיקה לנכונות השיטה, פולינום לגרנז':

הפונקציה: $f(x) = x^3 + 7x^4 + 4$

$$x_0 = 0\ ,\ x_1 = 1\ ,x_2 = 2$$
$$f(x_0) = 4, f(x_1) = 12, f(x_2) = 40$$

$$P_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f_2$$
$$= \frac{x^2 - 3x + 2}{(-1)\cdot(-2)} \cdot 4 + \frac{x^2 - 2x}{1\cdot(-1)} \cdot 12 + \frac{x^2 - x}{2\cdot 1} \cdot 40$$
$$= 2x^2 - 6x - 12x^2 + 24x + 20x^2 - 20x = 10x^2 - 2x + 4$$

הפולינום שהתקבל עובר דרך הנקודות של הפונקציה המקורית, אך הוא שונה מהפונקציה המקורית.

בדיקה לנכונות השיטה פולינום ניוטון :

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$f[x_0] = f_0 = 4$$
$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = \frac{4 - 12}{0 - 1} = 8$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{8 - 28}{0 - 2} = 10$$
$$p(x) = 4 + 8(x - 0) + 3(x - 0)(x - 1) = 4 + 8x + 10x^2 - 10x = 10x^2 - 2x + 4$$

נוסיף נקודה : $x_3 = 3\ \rightarrow\ f(x_3) = 94$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_2} = \frac{10 - 13}{0 - 3} = 1$$

$$f[x_1,x_2,x_3\,] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_2,x_3\,]}{x_1 - x_3} = \frac{28-54}{1-3} = 13$$

$$p(x) = 10x^2 - 2x + 4 + 1(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = 10x^2 - 2x + 4 + x^3 - 3x^2 + 2x$$
$$= x^3 + 7x^2 + 4$$

ננסה להוסיף נקודה נוספת: $x_4 = 4 \;\rightarrow\; f(x_4) = 180$

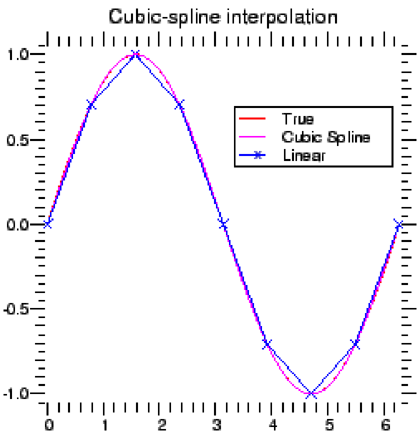
$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_0,x_1,x_2,x_3] - f[x_1,x_2,x_3\,,x_4]}{x_0 - x_4} = \frac{1-1}{0-4} = 0$$

$$f[x_1,x_2,x_3\,,x_4] = \frac{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_2,x_3,x_4\,]}{x_1 - x_4} = \frac{13-16}{-3} = 1$$

$$f[x_2,x_3,x_4\,] = \frac{f[x_2,x_3\,] - f[x_3,x_4\,]}{x_2 - x_4} = \frac{54-86}{2-4} = 16$$

קיבלנו שהמקדם של x^4 מתאפס, כלומר לא ניתן להגיע לסדר גבוה מהפונקציה המקורית (במקרה שהפונקציה היא אכן פולינומית).

Spline



שיטת אינטרפולציה הבנוייה ממקטעים התפורים אחד לשני. קטע הוא פולינום מדרגה נמוכה (1,2,3).

ההנחה היא שהפוקציה צריכה להיות רציפה עד הנגזרת ה- m-1 כאשר משתמשים בפולינום מדרגה m.

לדוגמא עבור אינטרוולים עם פונקציה מסדר 2, הפונק' $\hat{f}(x)$ והנגזרת $\hat{f}'(x)$ צריכות להיות רציפות.

הבעייתיות בשיטה זו היא מציאת מקדמים עבור כל אינטרוול.

Spline מסדר 3 נקרא cubic spline, נעבוד עם תנאי שפה טבעיים (natural spline), נכתוב את המשוואה לכל קטע:

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$$

עבור m קטעים (m+1 נקודות)

1. $S(x_i) = f_i \qquad \forall\; i = 0 \dots m-1 \qquad \rightarrow m$
2. $S_{m-1}(x_m) = f_m$
3. $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \quad \forall\, i = 0 \dots m-2 \qquad \rightarrow m-1$
4. $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \quad \forall\, i = 0 \dots m-2 \qquad \rightarrow m-1$
5. $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}) \quad \forall\, i = 0 \dots m-2 \qquad \rightarrow m-1$

$$\overline{4m-2}$$

עבור תנאי שפה טבעיים נוסיף: $S_0''(x_0) = S_{m-1}''(x_m) = 0$

נניח: $h = x_{i+1} - x_i$

$$S_i'(x_{i+1}) = 3a_i h^2 + 2b_i h + c_i$$

$$S_i''(x_{i+1}) = 6a_i h + 2b_i$$

מ-**1.** נקבל $\boldsymbol{d_i = f_i}$

נגדיר משתנה עזר σ_i

$$\sigma_i = S_i''(x_i) = 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i = 2b_i \;\; \rightarrow \;\; \boldsymbol{b_i = \frac{\sigma_i}{2}}$$

$$\sigma_{i+1} = 6a_i h + 2b_i \;\rightarrow \boldsymbol{a_i = \frac{\sigma_{i+1} - 2b_i}{6h} = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{6h}}$$

מתנאי **3.** :

$$f_{i+1} = a_i h^3 + b_i h^2 + c_i h + d_i = \frac{\sigma_{i+1}' - \sigma_i}{6h} h^3 + \frac{\sigma_i'}{2} h^2 + c_i h + f_i$$

$$\rightarrow \boldsymbol{c_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - h\frac{2\sigma_i + \sigma_{i+1}}{6}}$$

מתנאי **4.** :

$$c_{i+1} = 3a_i h^2 + 2b_i h + c_i \rightarrow \; S_{i+1}'(x_{i+1}) \; = S_i'(x_{i+1})$$

$$c_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - h\frac{2\sigma_i + \sigma_{i+1}}{6} = 3a_{i-1}h^2 + 2b_{i-1}h + c_{i-1}$$
$$= 3h^2\frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{6h} + 2h\frac{\sigma_{i-1}}{2} + \cdots + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - h\frac{2\sigma_{i-1} + \sigma_i}{6}$$

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h} = \frac{h}{6} \cdot [2\sigma_i + \sigma_{i+1} + 3\sigma_i - 3\sigma_{i-1} + 6\sigma_{i-1} - 2\sigma_{i-1} - \sigma_i]$$

$$\sigma_{i-1} + 4\sigma_i + \sigma_{i+1} = \frac{6}{h^2}[f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}] \qquad \forall\, i = 1, \dots, m-1$$

נרשום במערכת משוואות: $(\sigma_0 = \sigma_m = 0)$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{m-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} f_2 - 2f_1 + f_0 \\ f_3 - 2f_2 + f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \end{bmatrix}$$

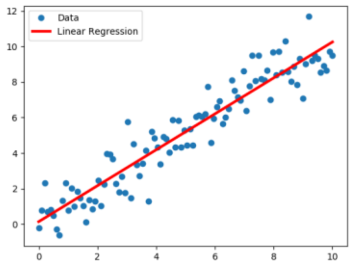
בעיה כזאת אנחנו יודעים כבר לפתור בשיטת תומאס.

סיכום אינטרפולציה

- מטרת האינטרפולציה: מציאת ערכי ביניים לפונקציה הנתונה בנקודות בדידות.
- פונקציית הקירוב עוברת דרך הנקודות.
- אינטרפולציה פולינומיאלית- ניוטון ולגרנז' – פונקציות הקירוב הן מסוג פולינום.
- Spline- משתמשים בפולינומים מסדר נמוך (2/3) ומוצאים פונקציה לכל קטע.

אקסטרפולציה- מציאת ערך אשר נמצא מחוץ לנקודות הנתונות.

התאמת עקומים (curve fitting)



- הבעיה: הנתונים הנמדדים מכילים שגיאה אבל יש לנו מודל על הפונקציה.
- צריך למצוא פרמטרים של הפונקציה שיתנו התאמה מרבית לנתונים.
- הקו לא בהכרח עובר בנקודות כמו באינטרפולציה.

נגדיר את הבעיה: נתונות נקודות ...n=1,2,3 לכל נקודה נתון (x_i, y_i) כאשר x הוא המשתנה הבלתי תלוי ו-y הוא המשתנה התלוי, העקום המתאים $\hat{y}(x)$.

השגיאה בנקודה i: $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}(x_i)$

דרושה הגדרה למונח "מתאים ביותר", מקובל להשתמש בסכום השגיאות הריבועיות (least squres).

$$min \sum \varepsilon n^2 = min \sum \left(y_n - \hat{y}(x_n)\right)^2$$

לדוגמא, במקרה של קו ליניארי $\quad y(x) = b_0 + b_1 x + \varepsilon$

$$min \sum (y_n - b_0 - b_1 x_n)^2$$

נקרא **רגרסיה ליניארית - linear regression**.

$$S(b_0, b_1) = \sum ((y_n - b_0 - b_1 x_n)^2$$

כדי לפתור בעיה זו נבצע גזירה חלקית למציאת נקודות מינימום.

$$\frac{\partial S}{\partial b_0} = -2 \sum (y_n - b_0 - b_1 x_n) \rightarrow \sum y_n = N b_0 + b_1 \sum x_n$$

$$\frac{\partial S}{\partial b_1} = -2 \sum x_n (y_n - b_0 - b_1 x_n) \rightarrow \sum x_n y_n = b_0 \sum x_n + b_1 \sum x_n^2$$

נסדר בתור מערכת משוואות:

$$N b_0 + b_1 \sum x_n = \sum y_n$$

$$b_0 \sum x_n + b_1 \sum x_n^2 = \sum x_n y_n$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} N & \sum x_n \\ \sum x_n & \sum x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_n \\ \sum x_n y_n \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow b1 = \frac{N \sum x_n y_n - \sum x_n \sum y_n}{N \sum x_n^2 - [\sum x_n]^2}$$

$$\rightarrow b_0 = \frac{\sum y_n}{N} - b_1 \frac{\sum x_n}{N}$$

דוגמא: X=1,2,3,4,5
Y=16,25,36,45,54

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 176 \\ 624 \end{bmatrix} \rightarrow b_0 = 6.4 \quad \rightarrow b_1 = 9.6$$

הפונקציה המקורית: $f = 9x + 8$ ו"לכלוכים".

באופן כללי $[x_1, x_2 \dots x_n]$ ו-$[f(x_1), f(x_2), \dots f(x_n)]$, רוצים להתאים $F(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \emptyset_j(x)$

כאשר ה-$\emptyset_j(x_j)$ יכול להיות כל פונקציה.

נרצה למצוא a_jים כך שההתאמה לנקודות תהיה טובה ביותר:

$$S = \sum \varepsilon_i^2 = \sum \big(F(x_i) - f(x_i)\big)^2$$

כעת ניתן לחפש מינימום של S ע"י גזירה:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 \, , j = 0,1,2 \dots$$

דוגמא:

$$F = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x)$$

$$S = \sum \big(a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) - f(x_i)\big)^2$$

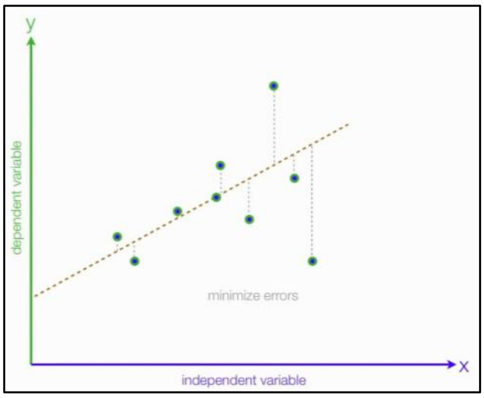
$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum \big(a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) - f(x_i)\big)(-\sin(x_n)) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \sum \big(a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) - f(x_i)\big)(-\sin(2x_n)) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_3} = 2 \sum \big(a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) - f(x_i)\big)(-\sin(3x_n)) = 0$$

התקבלה בעיה לינארית, המקדמים (a) בחזקת 0 או 1 , נשים לב כי אנחנו מתייחסים למקדמים ולא ל-x .

$$\begin{bmatrix} \sum(\sin(x_n))^2 & \sum \sin(2x_n)\sin(x_n) & \sum \sin(3x_n)\sin(x_n) \\ \sum \sin(x_n)\sin(2x_n) & \sum(\sin(2x_n))^2 & \sum \sin(3x_n)\sin(2x_n) \\ \sum \sin(x_n)\sin(3x_n) & \sum \sin(2x_n)\sin(3x_n) & \sum(\sin(3x_n))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f_n \sin(x_n) \\ \sum f_n \sin(2x_n) \\ \sum f_n \sin(3x_n) \end{bmatrix}$$



#נשים לב כי השגיאה היא קו אנכי שמתקדם לעבר הפונקציה, לא בהכרח אנך לפונקציה כלומר לא בהכרח המרחק הקצר ביותר!

<u>אופטימיציזה</u>

מציאת ערך קיצון (מינימום/ מקסימום) של פונקציה.
בעיה מאוד נפוצה בהנדסה
נדבר על מציאת מינימום למרות שזה שקול למציאת מקסימום [max[f(x)]=min[-f(x).

סיווג של בעיות אופטימיזציה:
- עם או ללא אילוצים (למשל פתרון בתחום מסוים, פתרון מצוי על קו כלשהוא...).
- ליניארי או לא ליניארי
- משתנה יחיד או רבים

הגישות לפתרון:
- גזירה של הפונקציה ומציאת שורשים כפי שלמדנו.
- פתרון ישיר ע"י שיטות חיפוש או שיטות גרדיאנט (שיפוע).

<u>משתנה בודד</u>

שיטת חיתוך הזהב *golden section search* – שיטת תחום

חיפוש בתחום סגור [L,U] לפי השלבים הבאים:

1. חשב (x_1, x_2) :

$$x_1 = L + \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(U-L) = L + 0.381(U-L) = 0.618L + 381U$$

$$x_2 = L + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(U-L) = L + 0.618(U-L) = 0.381L + 0.618U$$

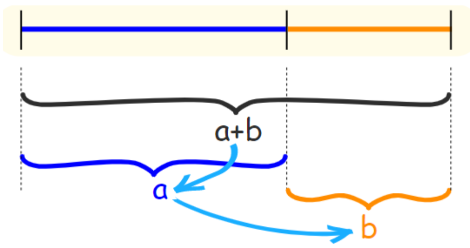
2. עדכון L, U:

$$f(x_1) > f(x_2) \ \to L = x_1 \,, x_1 = x_2 \,, x_2 = L + 0.618(U-L)$$
$$f(x_1) < f(x_2) \ \to U = x_2 \,, x_2 = x_1 \,, x_1 = L + 0.381(U-L)$$

נשים לב כי מובטח שהפתרון נמצא בין L ל- U ולא בין x_1 ל-x_2.

מה זה *golden ratio*?

יש לנו קטע



נרצה ש- *a+b* ל- *a* יהיה כמו *a* ל-*b*.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \ \to \ a = \varphi \cdot b$$

$$\frac{\varphi \cdot b + b}{\varphi \cdot b} = \frac{\varphi \cdot b}{b} \ \to \ \frac{\varphi + 1}{\varphi} = \varphi \ \to \ \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

עבור a+b=1 נקבל a=0.618 ו-b=0.381.

דוגמא:

מצא מינימום לפונקציה בתחום של [0,4].

$$f(x) = 0.1x^2 - 2\sin(x)$$

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx} = 0.2x - 2\,cos(x) = 0$$

מציאת מינימום ע"י שיטת חציית התחום על הנגזרת.

$$x_1 = 0, x_2 = 4 \;\rightarrow g(x_1) = -2\,, g(x_2) = 2.1$$

$$x_{new} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2 \;\rightarrow g(x_{new}) = 1.232 \;\rightarrow x_2 = x_{new}$$

$$\rightarrow x_{new} = 1 \;\rightarrow g(x_{new}) = -0.88 \;\rightarrow x_1 = x_{new}$$

$$\rightarrow x_{new} = 1.5 \;\rightarrow g(x_{new}) = 0.15 \;\rightarrow x_2 = x_{new}$$

פתרון בשיטת golden section:

$$L = 0\,, U = 4$$

$$x_1 = 0.381L + 0.618U = 1.524 \;\rightarrow f(x_1) = -1.765$$
$$x_2 = 0.618L + 0.381U = 2.472 \;\rightarrow f(x_2) = -0.63$$
$$\rightarrow f(x_1) < f(x_2) \;\rightarrow U = x_2 = 2.472\,, x_2 = x_1 = 1.524\,, x_1 = 0.942$$
$$\rightarrow x_1 = 0.942 \rightarrow f(x_1) = -1.53\,, \rightarrow f(x_2) = -1.765$$
$$\rightarrow f(x_1) > f(x_2) \;\rightarrow L = x_1 = 0.942\,, x_1 = x_2 = 1.524\,, x_2 = 1.89$$
$$\rightarrow f(x_1) = -1.53\,, x_2 = 1.89 \rightarrow f(x_2) = -1.543$$
$$\rightarrow f(x_1) > f(x_2) \;\rightarrow L = x_1 = 0.942\,, x_1 = x_2 = 1.89\,, x_2 = 2.11$$

שיטת ניוטון

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$f'^{(x)} = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \cdots + O((x - x_0)^2)$$

$$f'^{(x)} = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) = 0 \;\rightarrow x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f'\left(x^{(n)}\right)}{f''(x^{(n)})}$$

דוגמא:

$$f(x) = xsin(x) + e^{2-x} \quad [1,7]$$

מצא מינימום של $f'(x_0)$.

$$f'(x) = xcos(x) + \sin(x) - e^{2-x}$$

$$f''(x) = xsin(x) + 2\cos(\mathrm{x}) + e^{2-x}$$

ניחוש התחלתי $x_0 = 4$

$$x_1 = 4 - \frac{-3.5}{1.44} = 6.43$$

$$x_2 = 6.43 - \frac{-3.5}{1.88} = 5.89\ , x_3 = 4.66, x_4 = 4.94$$

התכנסות יותר מהירה אבל קיימת סכנת התבדרות גדולה יותר.

אופטימיזציה במשתנים מרובים

$$\min f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$$

גישה ראשונה:

גזירה לפי כל אחד מהמשתנים ובנייה של מערכת משוואות לא לינארית.

$$g_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0\ , g_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, g_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3} \dots g_n = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

גישה שנייה – שיטת המורד התלול Gradient descent:

בחירה של ניחוש התחלתי x_0, זיהוי כיוון הירידה המקסימלי וצעידה מדודה.

כיוון הירידה המקסימלי הינו: $-\nabla\vec{f} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

במינימום מתקיים: $\nabla\vec{f} = 0$

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - \alpha\nabla f(\vec{x}^{(n)})$$

איך מוצאים את α? נגדיר בעיה חדשה:

$$g(\alpha) = f\left(\vec{x}^{(n+1)}\right) = f\left(\vec{x}^{(n)} - \alpha\nabla f\left(\vec{x}^{(n)}\right)\right) \quad \min_{\alpha} g\ (\alpha)$$

באופן זה פותרים אופטימיזציה במשתנה יחיד.

איך השיטה מתכנסת? בעצם בכל נקודה אנחנו יורדים מרחק של α בכיוון הירידה המקסימלי (גרדיאנט).

לדוגמא:

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^4 + x + 1$$

נרצה למצוא את ערכי x ו-y בהם הפונקציה מקבלת מינימום.

$$\nabla\vec{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x + y + 1, x + 4y^3)$$

ניחוש התחלתי: $(x_0, y_0) = (1,1)$

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix} 2x^{(0)} + y^{(0)} + 1 \\ x^{(0)} + 4{y^{(0)}}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4\alpha \\ 1 - 5\alpha \end{pmatrix}$$

$$g(\alpha) = f(1 - 4\alpha, 1 - 5\alpha) = (1 - 4\alpha)^2 + (1 - 4\alpha)(1 - 5\alpha) + (1 - 5\alpha)^4 + 1 - 4\alpha + 1 =$$

כעת ניתן לפתור באמצעות שיטת חיתוך הזהב: L=0 , U=3

$$\alpha_1 = L + 0.381(U-L) = 1.14 \ \rightarrow g(\alpha_1) = 521.2$$

$$\alpha_2 = L + 0.618(U-L) = 1.854 \ \rightarrow g(\alpha_2) = 476.6$$

<u>סיכום אופטימיזציה</u>

<u>במשתנה יחיד</u>- דומה למציאת שורשים

ראינו שיטת תחום (golden section) ושיטת נגזרת כמו ניוטון רפסון.

<u>בממד גבוה</u>- מערכת משוואות לא לינאריות או שיטת המורד התלול.

שיטות אלו מתכנסות למינימום מקומי (local minima) ולכן על מנת למצוא מינימום גלובלי צריך לסרוק מספר נק' התחלה.

כמובן יש חשיבות גדולה לסוג פונקציות, לעיתים לפי סוג הפונקציה נוכל להעריך באיזה תחום ימצא המינימום הגלובלי.

גזירה נומרית

מציאת ערך הנגזרת של פונקציה בנקודה מסויימת.

מתי צריך?

1. כשמסובך לחשב אנליטית
2. הפונקציה נתונה בנקודות בדידות (תוצאה של מדידה).
3. ככלי לפתרון משוואות דיפרנציאליות באופן נומרי

נפתח ביטויים נומריים לנגזרת:

$$f'(x) = \lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

h- גודל צעד

פיתוח טיילור סביב x:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

קירוב נגזרת ע"י הפרשים קדמיים:

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h)$$

קירוב נגזרת ע"י הפרשים אחוריים:

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h)$$

$$
\begin{aligned}
f(x+h) - f(x-h) \\
&= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \\
&- \left[f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots\right] \\
&= 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + O(h^5)
\end{aligned}
$$

קירוב נגזרת הפרשים מרכזיים: (דיוק יותר גבוה)

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathrm{O}(h^2)$$

דוגמא:

$$f(x) = x^7 \sin(2x)\, e^{2x}$$

פתרון אנליטי:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 7x^6 \sin(2x)\, e^{2x} + x^7 2\cos(2x)\, e^{2x} + x^7 \sin(2x)\, 2e^{2x} \\
&= x^6 e^{2x}\big(7\sin(2x) + 2xcos(2x) + 2xsin(2x)\big)
\end{aligned}
$$

$$f'(1) = e^2\big(7\sin(2) + 2cos(2) + 2sin(2)\big) = 54.31978263$$

הפרשים קדמיים:

$$f'(1) = \frac{\mathrm{f}(1.1) - \mathrm{f}(1)}{0.1} = \frac{1.1^7 \sin(2\cdot 1.1)\, e^{2\cdot 1.1} - \sin(2)\, e^2}{0.1} = 75$$

הפרשים אחוריים:

$$f'(1) = f'(1) = \frac{\mathrm{f}(1) - \mathrm{f}(0.9)}{0.1} = 39$$

הפרשים קדמיים עם h קטן יותר:

$$f'(1) = \frac{f(1.01) - f(1)}{0.01} = 56.1455$$

הפרשים מרכזיים:

$$f'(1) = f'(1) = \frac{\mathrm{f}(1.01) - \mathrm{f}(0.99)}{0.02} = 54.347$$

#(ראה תרגול MATLAB 02.06.19) בהגעה לערכי h מאוד קטנים מתחילות להתקבל שגיאות חישוב של המחשב המביאות לשגיאות בתוצאה הכללית.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{6}f'''(x) + \cdots$$

$$f'(x) = \frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} + \frac{h^2/4}{6}f'''(x) + \cdots$$

$$\frac{h^2/4}{6}f'''(x) = k\frac{h^2}{4}$$

$$f_h'(x) + kh^2 = f_{\frac{h}{2}}'(x) + k\frac{h^2}{4}$$

$$k\frac{h^2}{4} = \frac{f_{\frac{h}{2}}'(x) - f_h'(x)}{3}$$

$$f'(x) = f_{\frac{h}{2}}'(x) + k\frac{h^2}{4} = f_{\frac{h}{2}}'(x) + \frac{f_{\frac{h}{2}}'(x) - f_h'(x)}{3} = \frac{4}{3}f_{\frac{h}{2}}'(x) - \frac{1}{3}f_h'(x)$$

מכך מתקבל דיוק הגבוה בסדר גודל ע"פ חישוב הערך במחצית צעד.

<u>קירוב לנגזרת השנייה</u>

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2f''(x) + 2\frac{h^4}{4^2}f^{(4)}(x)$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2f''(x) + O(h^4)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \leftrightarrow \boldsymbol{f_i''} = \boldsymbol{\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}}$$

אפשר לחשב ביטויים לנגזרות גבוהות יותר ע"י שימוש בנגזרת כאופרטור.

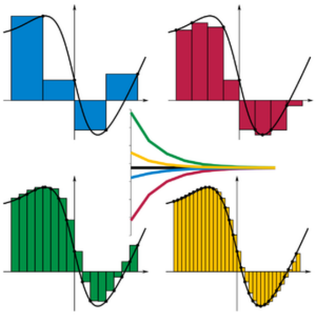
$$f'''(x) = \frac{d}{dx}[f''(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}\right]$$

אופרטור הגזירה לפי הפרשים מרכזיים:

$$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\frac{f_{i+2} - f_i}{2h} - 2\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + \frac{f_i - f_{i-2}}{2h}\right] = \frac{1}{2h^3}[f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}]$$

לחישוב זה כבר דרושות חמש נקודות.



אינטגרציה נומרית

מתי צריך?

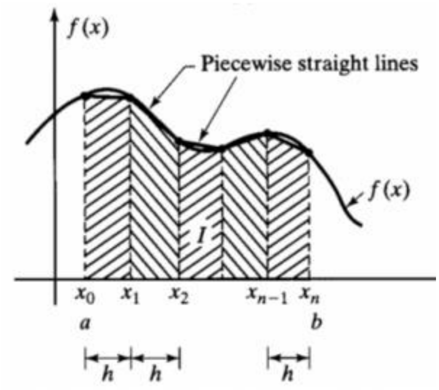
1. האינטגרל מסובך לחישוב אנליטי
2. לא קיימת פונקציה קדומה
3. הפונקציה נתונה בנקודות בדידות

הרעיון הכללי דומה להגדרה האנליטית של האינטגרל:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x$$

מחלקים את האינטרוול [a,b] לקטעים קטנים בגודל Δx וסוכמים את שטחי המלבנים $\Delta x \cdot f(x)$. בגבול $\Delta x \to 0$ הסכום מתכנס לאינטגרל.

נפתח נוסחה לשטחים:



$$\int_x^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(x)}{2!}(t-x)^2 + \frac{f'''(t)}{3!}(t-x)^3 + \cdots dt$$
$$= f(x)[x+h-x] + f'(x)\left[\frac{x+h-x-(x-x)}{2}\right]$$
$$+ \frac{f''(x)}{2!}\left[\frac{(x+h-x)^2-(x-x)^2}{3}\right] + \cdots$$

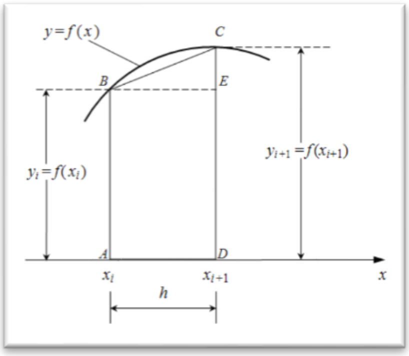
מלבן קירוב ראשון:

$$hf(x) + O(h^2)$$

טרפז קירוב שני:

$$hf(x) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h^3) = \frac{f(x)+f(x+h)}{2}h + O(h^3)$$

מדובר בדיוק מקומי, דיוק זה "יתקלקל", מספר האינטרוולים שיהיו שווה ל-h ולכן הדיוק הגלובלי שיתקבל יהיה מסדר h^2.



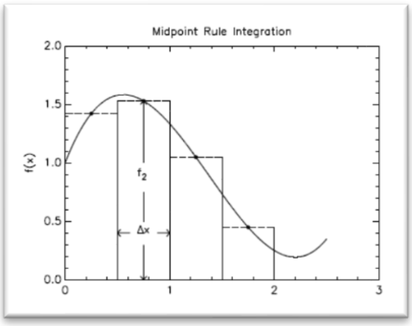
שימוש בפולינום לגראנז', האיבר המוזנח בטור:

$$E = (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(c)}{2!}$$

$$\int_0^h (x-x_0)(x-x_1)dx = \ x(x-h)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2h}{2}|_0^h$$

$$\int E = -\frac{h^3}{6}\cdot\frac{f''(c)}{2} = -\frac{h^3}{12}f''(c)$$

#כאשר יש 3 נקודות לפחות ניתן להתאים עקום מסדר שני.



נפתח שיטה שעושה שימוש בשלוש נקודות:

אפשר לעשות קירוב לינארי שמשתמש בממוצע, אבל נרצה קירוב מסדר שני, זה אפשרי כיוון שיש 3 נקודות.

$$\hat{f}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \hat{f}\,(x)dx$$

$$= \int \frac{f_0}{2h^2}(x^2 - x(x_1+x_2) + x_1x_2) - \frac{f_1}{h^2}(x^2 - x(x_0-x_2) + x_0x_2) + \frac{f_2}{2h^2}(x^2 - x(x_0+x_1) + x_0x_1)$$

$$x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h \quad \int_0^{2h} \frac{f_0}{2h^2}(x^2 - 3hx + 2h^2) - \frac{f_1}{h^2}(x^2 - 2hx) + \frac{f_2}{2h^2}(x^2 - xh)dx$$

$$=> \frac{f_0}{2h^2}\left[\frac{8h^3}{3} - 3h\frac{4h^2}{2} + 2h^2\cdot 2h\right] - \frac{f_1}{h^2}\left[\frac{8h^3}{3} - 2h\frac{4h^2}{2}\right] + \frac{f_2}{2h^2}\left[\frac{8h^3}{3} - h\frac{4h^2}{2}\right]$$

$$= h^3\left[\frac{f_0}{2h^2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{f_1}{h^2}\cdot\frac{4}{3} + \frac{f_2}{2h^2}\cdot\frac{2}{3}\right] = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$$

באופן כללי:

$$\int_{x_i}^{x_i+2h} f(t)dt \cong \frac{h}{3}[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}]$$

שיטת סימפסון לאינטגרציה נומרית

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=2,4,6}^{N-1} \frac{h}{3}[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}] = \frac{h}{3}\left[f_1 + 4\sum_{i=2,4,6\ldots}^{N-1} f_i + 2\sum_{i=3,5,7\ldots}^{N-2} f_i + f_N\right]$$

$$N = \frac{b-a}{h}$$

מתאים למס' נקודות אי-זוגי ומספר קטעים זוגי.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=3,\ldots}^{N-2} \frac{h}{6}[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}] + \frac{h}{3}[f_1 + 4f_2 + f_3 + f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N]$$

שיטת סימפסון 3/8

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4]$$

קירוב ע"י פולינום מסדר 3.

פתרון נומרי של משוואות דיפרנציאליות רגילות

נסתכל תחילה על בעיית התחלה:

$$\frac{dy}{dx} = f\big(x, y(x)\big) \qquad , \qquad y(0) = c$$

הרעיון הכללי הינו לבצע אינטגרציה נומרית ולהתקדם מנקודת ההתחלה לנקודה הבאה ולחזור על התהליך כמה שנדרש.

$$x_1 = x_0 + h$$

$$y(x_i) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h}{2!}y''(x_0) + \cdots$$

$$y'(x_0) = f(x,y)|_{x_0}$$

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0}$$

הקירוב הראשון-שיטת אוילר:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

אוילר קדמיים:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

אוילר אחוריים:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$f(x, y)$ צריך להיות כזה שיאפשר חילוף של y_{i+1}.

הפרשים מרכזיים: *(Crank Nicolson)*

$$\frac{dy}{dx}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{1}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] + O(h^3)$$

דיוק יותר גדול אבל עדיין y_{i+1} יכול להופיע בצורה סתומה.

שיפור לאוילר מסוג תחזית תיקון (predictor correction)

$$1.\ y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$2.\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})$$

שיטות מסוג רונגה-קוטה *(Ronge Kutta)*

- שיטות אלו משתמשות בחישוב $f(x, y)$ בלבד אך מאפשרות לקבל דיוק גבוה יותר.
- עבור בעיית ההתחלה: (יש את הצורה הכללית)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad , \qquad y(x_0) = c$$

$$y_{i+1} = y_i + \emptyset(x_i, y_i, h) \cdot h$$

פיתוח שיטות המשתמשות בחישוב הפונקציה וה-h בלבד.

שיטת רונגה-קוטה מסדר n, יש n איברים מהצורה:

$$\emptyset(x_i, y_i, h) = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \cdots + a_nk_n$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + b_1h, y_i + c_{11}k_1h)$$

$$k_3 = f(x_i + b_2h, y_i + c_{21}k_1h + c_{22}k_2h)$$

איך מחשבים את כל המקדמים?

דוגמא: נפתח שיטת RK מסדר 2

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2) \cdot h = y_i + (a_1f(x_i, y_i) + a_2f(x_i + b_1h, y_i + c_1k_1h)) \cdot h$$

נפתח את k_2 ע"י קירוב טיילור:

$$k_2 = f(x_i + b_1h, y_i + c_1k_1h) \approx f(x_i, y_i) + b_1h\frac{\partial f}{\partial x} + c_1hf(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2)$$

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + ha_1f(x_i, y_i) + ha_2[f(x_i + b_1h, y_i + c_1k_1h)] \\ = y_i + ha_1f(x_i, y_i) + ha_2\left[f(x_i, y_i) + b_1h\frac{\partial f}{\partial x} + c_1hf(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial y}\right] \\ = y_i + hf(x_i, y_i)(a_1 + a_2) + a_2h^2b_1\frac{\partial f}{\partial x} + h^2a_2c_1\frac{\partial f}{\partial y}f(x_i, y_i) \\ = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right] + \cdots \end{aligned}$$

השוואת מקדמים:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2b_1 = \frac{1}{2}$$

$$c_1a_2 = \frac{1}{2}$$

נבחר $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ ונקבל $b_1 = c_1 = 1$

מקבלים:

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)] + O(h^3)}$$

#נשים לב כי שיטה זו לא דורשת חישובי נגזרת ובעצם משתמשת בשיפוע הממוצע.

שיטת *RK* הנפוצה ביותר היא מסדר 4:

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] + O(h^5)}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1h}{2})$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2h}{2})$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$$

דוגמא:

$$\frac{dy}{dx} = -y \ \rightarrow f(x, y) = -y$$

$$y(0) = 1$$

$$y = ce^{-x} \ \rightarrow y = e^{-x}$$

פתרון באמצעות אוילר, קדמיים (FO):

$$\boldsymbol{y_{i+1}} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + h(-y_i) = \boldsymbol{y_i(1 - h)}$$

אחוריים (BO):

$$\boldsymbol{y_{i+1}} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) = \boldsymbol{y_i - hy_{i+1}}$$

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1+h}$$

מרכזיים (CO):

$$\boldsymbol{y_{i+1}} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] = \boldsymbol{y_i + \frac{h}{2}[y_i + y_{i+1}]}$$

$$y_{i+1} = \frac{y_i\left(1-\frac{h}{2}\right)}{1+\frac{h}{2}}$$

RK ברביעית:

$$k_1 = y_1$$

$$k_2 = -y_i + \frac{h}{2}y_i = -y_i\left(1-\frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = -\left[y_i + \frac{h}{2} - y_i\left(1-\frac{h}{2}\right)\right] = -y_i\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}\right)$$

$$k_4 = -y_i + hy_i\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}\right) = -y_i\left(1-h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y_{i+1}} &= y_i + \frac{h}{6}\left[-y_i - 2y_i\left(1-\frac{h}{2}\right) - 2y_i\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}\right) - y_i\left(1-h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{4}\right)\right] \\ &= y_i\left[1-\frac{h}{6}-\frac{h}{3}+\frac{h^2}{6}-\frac{h}{3}+\frac{h^2}{6}-\frac{h^3}{12}-\frac{h}{6}+\frac{h^2}{6}-\frac{h^3}{12}+\frac{h^4}{24}\right] \\ &= \boldsymbol{y_i\left[1-h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24}\right]}\end{aligned}$$

$$y(1) = e^{-1} \cong 0.368$$

$$h = 1 \ \to FO = 0 \qquad \to \frac{|0.368-0|}{0.368}\times 100\% = 100\%$$

$$\to BO = 0.5 \qquad \to \frac{|0.368-0.5|}{0.368}\times 100\% = 36\%$$

$$\to CO = 0.333 \qquad \to \frac{|0.368-0.333|}{0.368}\times 100\% = 9.4\%$$

$$\to RK = 0.375 \qquad \to \frac{|0.368-0.375|}{0.368}\times 100\% = 1.9\%$$

פתרון נומרי של מערכת מד"ר

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}}{dx} = \vec{F}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(0) = \vec{C} \end{cases}$$

אוילר:

$$\vec{Y}_{i+1} = \vec{y_i} + h\vec{F}(x_i, \vec{y_i})$$

שימוש ב-RK2:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$$

$$y_1(x_0) = c_1$$

$$y_2(x_0) = c_2$$

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + \frac{h}{2}\Big[f_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}) + f_1\Big(x_i + h, y_{1,i} + hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), y_{2,i} + hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i})\Big)\Big]$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + \frac{h}{2}\Big[f_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}) + f_2\Big(x_i + h, y_{1,i} + hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), y_{2,i} + hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i})\Big)\Big]$$

שים לב כי אי אפשר להתקדם באחת המשוואות בנפרד אלא צריך לבצע כל צעד בשתי המשוואות במקביל.

שקול לפתרון משוואת מד"ר בבעיית התחלה מסדר גבוה יותר. למשל:

$$y'' + y' + 1 = 0$$

$$y(0) = 4$$

$$y'(0) = 1$$

$$y_1 = y, y_2 = y' \to y_1' = y_2 \to y_2' = -y_1 - 1$$

בעיית תנאי שפה

משוואה מסדר 2 או יותר, כאשר התנאים הם על קצות התחום:

$$y'' = f(x, y, y')$$
$$y(a) = y_a$$
$$y(b) = y_b$$

הפונקציה מוגדרת באינטרוול [a,b].

#בבעיית תנאי התחלה- כל התנאים נתונים לגבי נקודה אחת (נקודת ההתחלה) ובתנאי שפה יכיל נתונים לגבי מס' נקודות.

שתי שיטות פתרון:

1. <u>שיטת ירייה shooting method</u>

פותרים בעיית התחלה כמו שראינו אבל צריך לנחש תנאי התחלה על הנגזרת.

א. נחש את $y'(a)$
ב. נפתור לקבלת $y(b)$
ג. מתקנים את הניחוש וחוזרים על השלבים הראשונים עד לקיום תנאי השפה, במקרה זה:
$y(b) = y(b)$

אפשר להתאים עקום אינטרפולציה לניחוש הבא.

$$g(IV) = BC\ (Boundry\ Condition)$$

IV=Initial Value#

$$g(IV) - y(b) = 0$$

2. <u>שימוש בהפרשים סופיים:</u>

הצבה למשוואה את הקירובים לנגזרת וקבלת מערכת משוואות עבור הנקודות בתחום. דוגמא:

$$y'' = y + 2 + y'$$

$$y(0) = 40, y(10) = 100$$

תזכורת קירוב לנגזרת הפרשים מרכזיים:

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = y_i + 2 + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y_{i+1}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) - y_i\left(\frac{2}{h^2} + 1\right) + y_{i-1}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) = 2$$

$$y_{i+1}\overbrace{\left(\frac{2-h}{2h^2}\right)}^{k_1} - y_i\overbrace{\left(\frac{2+h^2}{h^2}\right)}^{-k_2} + y_{i-1}\overbrace{\left(\frac{2+h}{2h^2}\right)}^{k_3} = 2$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & k_3 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & k_3 \\ 0 & 0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - k_3 \cdot 40 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2 - k_i \cdot 100 \end{bmatrix}$$

$$h = 3.33$$

$$y_3k_1 + y_2k_2 + y_1k_3 = 2 \rightarrow y_3k_1 + y_2k_2 = 2 - 40k_3$$

$$y_4k_1 + y_3k_2 + y_2k_3 = 2 \rightarrow y_3k_2 + y_2k_3 = 2 - 100k_1$$