Universitatea Babeş–Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică
Ecuaţii cu derivate parţiale

Probleme. LISTA 8 - Funcţia lui Green a Problemei Dirichlet pentru operatorul Laplace

1. Fie $a > 0$ şi $f \in C[0, a]$. Considerăm problema Dirichlet (sau bilocală)

$$u''(x) = f(x), \quad x \in (0, a), \quad u(0) = u(a) = 0.$$

(i) Să se justifice că problema are o unică soluţie $u \in C^2[0, a]$.

(ii) Fie $G\colon [0, a] \times [0, a] \to \mathbb{R}$ dată de

$$G(x, y) = \begin{cases} (a - x)\frac{y}{a}\,, & 0 \le y < x \le a \\ (a - y)\frac{x}{a}\,, & 0 \le x \le y \le a \end{cases}$$

Să se observe că

$$\begin{aligned} &G(x, y) > 0, \quad x, y \in (0, a) \\ &G(x, 0) = G(x, a) = G(0, y) = G(a, y) = 0, \quad x, y \in [0, a] \\ &\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = 0, \quad y \neq x \\ &G(x, y) = G(y, x), \quad x, y \in [0, a]. \end{aligned}$$

(iii) Fie

$$u(x) = -\int_0^a G(x, y) f(y) dy \quad x \in [0, a].$$

Să se justifice că $u \in C^2[0, a]$ şi că este unica soluţie a problemei.

(iv)* Să se construiască formula de la (iii) pentru soluţia problemei.

Definiţia 1 *Fie $n \ge 2$ şi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nevidă, deschisă. Funcţia lui Green pentru operatorul Laplace în Ω este*

$$G : (\Omega \times \overline{\Omega}) \setminus \{(x, x) \ : \ x \in \Omega\} \to \mathbb{R}, \quad G(x, y) = \Phi(x, y) - N(x - y)$$

unde $\Phi : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisface următoarele condiţii pentru fiecare $x \in \Omega$

$$\Phi(x, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \Delta_y \Phi(x, y) = 0,\, y \in \Omega, \quad \Phi(x, y) = N(x - y),\, y \in \partial\Omega.$$

De acum, vom folosi notaţiile din definiţia de mai sus.

2. Să se arate că, pentru fiecare $x \in \Omega$ fixat avem

$$\begin{aligned}
&G(x,\cdot) \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{x\}) \;\; \text{şi} \;\; \lim_{y \to x} G(x,y) = +\infty \\
&\Delta_y G(x,y) = 0 \;\; \text{pentru orice} \;\; y \in \Omega \setminus \{x\} \\
&G(x,y) = 0 \;\; \text{pentru orice} \;\; y \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

3. Să se arate că $G(x,y) > 0$ pentru $x, y \in \Omega$, $x \neq y$; şi
$G(x,y) < -N(x-y)$ pentru $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, când $n \geq 3$.

4*. Să se arate continuitatea funcţiei $\Phi : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$.

Teorema 1 (Teorema de reprezentare) *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu mărginit de clasă C^1 pentru care există funcţia lui Green G. Fie $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$ şi $u \in C^2(\overline{\Omega})$ astfel încât*

$$\Delta u = f, \;\; \text{în } \Omega, \quad u = g \;\text{pe } \partial\Omega.$$

Atunci

$$u(x) = -\int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) g(y) d\sigma_y, \quad x \in \Omega.$$

5. Scrieţi formula de reprezentare a soluţiei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a Problemei Dirichlet:
(i) $\Delta u = -|x|$ în Ω, $u = 0$ pe $\partial\Omega$.
(ii) $\Delta u = 0$ în Ω, $u = 2$ pe $\partial\Omega$.

6. Fie $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ bila unitate şi G funcţia lui Green pentru B_1.
(i) Pentru $u(x) = |x|^2 - 1$ calculaţi Δu şi $u|_{\partial B_1}$.
(ii) Pentru fiecare $x \in B_1$ să se determine valoarea integralei

$$\int_{B_1} G(x,y)\, dy.$$

7. Fie $R > 0$ şi $B \subset \mathbb{R}^n$ bila cu centrul în origine şi de rază R.

Fixăm $x \in B \setminus \{0\}$ şi notăm

$$\overline{x} = \frac{R^2}{|x|^2} x,$$

inversul lui x faţă de sfera ∂B.

(i) Să se arate că $|\overline{x}| = \frac{R^2}{|x|} > R$ şi

$$|\overline{x} - y| = \frac{R}{|x|} |x - y|, \quad y \in \partial B.$$

(ii) Să se determine $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ astfel încât

$$\alpha(x) N(\overline{x} - y) + \beta(x) = N(x - y), \quad y \in \partial B.$$

(iii) Să se determine expresia funcţiei lui Green pentru bila B.

8. Se dă expresia funcţiei lui Green pentru bila $B \subset \mathbb{R}^n$ cu centrul în origine şi de rază R în $(x, y) \in B \times \overline{B}$ cu $y \neq x$.

$$n \geq 3, \quad G(x, y) = \begin{cases} \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} N(\overline{x} - y) - N(x - y), & x \neq 0 \\ -\frac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}} - N(y), & x = 0. \end{cases}$$

$$n = 2, \quad G(x, y) = \begin{cases} N(\overline{x} - y) - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{|x|} - N(x - y), & x \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} \ln R - N(y), & x = 0. \end{cases}$$

Aici

$$\overline{x} = \frac{R^2}{|x|^2} x, \quad x \neq 0.$$

Să se observe că există $\lim_{|x| \to R} G(x, y) = 0$, deci se poate extinde $G(x, y) = 0$ pentru fiecare $(x, y) \in \partial B \times \overline{B}$, $y \neq x$. Să se observe că G este funcţie elementară pe domeniul de definiţie.

9. Fie $R > 0$ şi $B \subset \mathbb{R}^n$ bila cu centrul în origine şi de rază R. Fie G funcţia lui Green pentru bila B.

(i) Fixăm $x, y \in B \setminus \{0\}$ şi notăm

$$\overline{x} = \frac{R^2}{|x|^2} x, \quad \overline{y} = \frac{R^2}{|y|^2} y \,.$$

Să se arate că

$$|y|\,|\overline{y} - x| = |x|\,|\overline{x} - y|\,.$$

(ii) Să se arate că $G(x,y) = G(y,x)$, $(x,y) \in \overline{B} \times \overline{B}$, $y \neq x$.

(iii) Să se arate că $\Delta_x G(x,y) = 0$, $(x,y) \in B \times \overline{B}$, $y \neq x$.

10. Fie $R > 0$ şi $B \subset \mathbb{R}^n$ bila cu centrul în origine şi de rază R. Fie G funcţia lui Green pentru bila B. Fie $\nu(y) = \frac{1}{R}y$, versorul normalei exterioare la B în $y \in \partial B$. Să se arate că, pentru $(x,y) \in B \times \partial B$ avem

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) = -\frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R |x-y|^n}.$$

Teorema 2 (Formula lui Poisson) *Fie $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ şi $g \in C(\partial B)$. Dacă $u \in C^2(\overline{B})$ satisface*

$$\Delta u = 0 \text{ în } B, \quad u = g \text{ pe } \partial B,$$

atunci

$$u(x) = \int_{\partial B} K(x,y) g(y) d\sigma_y, \quad x \in B\,.$$

unde

$$K\colon B \times \partial B \to \mathbb{R}, \quad K(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R |x-y|^n}\,.$$

11. Să se arate că funcţia $K \in C(B \times \partial B)$, $K(\cdot, y) \in C^\infty(B)$, $y \in \partial B$ şi

$$\int_{\partial B} K(x,y) d\sigma_y = 1, \quad x \in B$$
$$\Delta_x K(x,y) = 0, \quad (x,y) \in B \times \partial B.$$

12. Fie $n = 2$. Să se determine funcţia lui Green G pentru semiplanul

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 > 0\}.$$

Să se calculeze $\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)$ pentru $(x,y) \in \Omega \times \partial\Omega$ unde ν_y este versorul normalei exterioare la Ω în $y \in \partial\Omega$. Să se arate că G are următoarele proprietăţi

(i) $G(x,y) > 0$, $x, y \in \Omega 0$, $y \neq x$;

(ii) $G(x,y) = G(x,y)$, $x, y \in \overline{\Omega} 0$, $y \neq x$.

13. Fie $n \geq 3$. Să se determine funcţia lui Green pentru semispaţiul

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 > 0\}.$$

14*. Fie $n = 2$ şi $R > 0$. Să se determine funcţia lui Green pentru semibila

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 > 0, \ |x| < R\}.$$

15. Fie $n = 2$. Să se determine funcţia lui Green G pentru primul cadran

$$\Omega = (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Să se arate că G are următoarele proprietăţi

(i) $G(x, y) > 0$, $x, y \in \Omega 0$, $y \neq x$;

(ii) $G(x, y) = G(x, y)$, $x, y \in \overline{\Omega} 0$, $y \neq x$.

16*. Fie $n = 3$ şi $R > 0$. Să se determine funcţia lui Green pentru semibila

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 > 0, \ |x| < R\}.$$