

**Table des matières**

**Université des Antilles**

DORIVAL PIERRE CHRISLIN

*19 avril 2024*

## Résoluton Exercices 1

On considère un modèle à générations imbriquées où les ménages ne vivent que deux périodes. Au cours de leur période d'activité, ils perçoivent un salaire  $w_t$  qu'ils affectent à la consommation  $c_t$  courante et à l'épargne  $s_t$ . Au cours de leur période de retraite, ils consacrent leur épargne à la consommation différée  $d_{t+1}$ . Leurs préférences intertemporelles sont représentées par la fonction d'utilité :

$$u_t(c_t; d_{t+1}) = \frac{1}{2} \log c_t + \frac{1}{2} \log d_{t+1}$$

Dans cette économie, les impôts sont nuls ( $x = 0$ ). Les individus nés en  $t$  sont en nombre  $L_t$ . Le taux de croissance du nombre de travailleurs d'une génération à l'autre est noté  $n = 1$  :

a) Exprimons les consommations des jeunes et des vieux en fonction du salaire  $w_t$  :

Fonction d'utilité compte tenu de la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$\begin{cases} \text{Max } u_t(c_t; d_{t+1}) = \frac{1}{2} \log c_t + \frac{1}{2} \log d_{t+1} \\ w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \end{cases}$$

Considérons la fonction Lagrangienne :

$$L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t) = \frac{1}{2} \log c_t + \frac{1}{2} \log d_{t+1} + \lambda_t (w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}})$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport  $c_t$  :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = \frac{1}{2c_t} - \lambda_t$$

$$\text{Posons } \frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1}{2c_t} \quad (1)$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport  $d_{t+1}$  :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = \frac{1}{2d_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}}$$

$$\text{Posons } \frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1+r_{t+1}}{2d_{t+1}} \quad (2)$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport  $\lambda_t$  :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

$$\text{Posons } \frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = 0$$

$$\Rightarrow w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \quad (3)$$

(1) et (2) nous donnent :

$$\frac{1}{c_t} = \frac{1+r_{t+1}}{d_{t+1}}$$

$$\Rightarrow c_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \text{ et } d_{t+1} = c_t(1+r_{t+1})$$

$$\text{Dans (1) } w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

$$\text{D'où } \boxed{c_t = \frac{1}{2}w_t} \quad \text{et} \quad \boxed{d_{t+1} = \frac{1}{2}w_t(1+r_{t+1})}$$

b) Déterminer l'épargne en fonction de  $w_t$ .

$$\text{On sait que : } s_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_t = \frac{1}{2}w_t}$$

La technologie est représentée par la fonction de production :

$$Y_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}}$$

avec  $K_t$  est le stock de capital et  $L_t$  l'emploi.

c) Supposant les marchés concurrentiels, exprimer le salaire et les taux d'intérêt en fonction du stock de capital par tête.