

Table des matières

Université des Antilles

DORIVAL PIERRE CHRISLIN

22 avril 2024

Résoluton Exercices 1

On considère un modèle à générations imbriquées où les ménages ne vivent que deux périodes. Au cours de leur période d'activité, ils perçoivent un salaire w_t qu'ils affectent à la consommation c_t courante et à l'épargne s_t . Au cours de leur période de retraite, ils consacrent leur épargne à la consommation différée d_{t+1} . Leurs préférences intertemporelles sont représentées par la fonction d'utilité :

$$u_t(c_t; d_{t+1}) = \frac{1}{2} \log c_t + \frac{1}{2} \log d_{t+1}$$

Dans cette économie, les impôts sont nuls ($x = 0$). Les individus nés en t sont en nombre L_t . Le taux de croissance du nombre de travailleurs d'une génération à l'autre est noté $n = 1$:

a) Exprimons les consommations des jeunes et des vieux en fonction du salaire w_t :

Fonction d'utilité compte tenu de la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$\begin{cases} \text{Max } u_t(c_t; d_{t+1}) = \frac{1}{2} \log c_t + \frac{1}{2} \log d_{t+1} \\ w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \end{cases}$$

Considérons la fonction Lagrangienne :

$$L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t) = \frac{1}{2} \log c_t + \frac{1}{2} \log d_{t+1} + \lambda_t (w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}})$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport c_t :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = \frac{1}{2c_t} - \lambda_t$$

$$\text{Posons } \frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1}{2c_t} \quad (1)$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport d_{t+1} :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = \frac{1}{2d_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}}$$

$$\text{Posons } \frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1+r_{t+1}}{2d_{t+1}} \quad (2)$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport λ_t :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

$$\text{Posons } \frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = 0$$

$$\Rightarrow w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \quad (3)$$

(??) et (??) nous donnent :

$$\frac{1}{c_t} = \frac{1+r_{t+1}}{d_{t+1}}$$

$$\Rightarrow c_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \text{ et } d_{t+1} = c_t(1+r_{t+1})$$

$$\text{Dans (??) } w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

$$\text{D'où } \boxed{c_t = \frac{1}{2}w_t} \quad \text{et} \quad \boxed{d_{t+1} = \frac{1}{2}w_t(1+r_{t+1})}$$

b) Déterminer l'épargne en fonction de w_t .

$$\text{On sait que : } s_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_t = \frac{1}{2}w_t}$$

La technologie est représentée par la fonction de production :

$$Y_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}}$$

avec K_t est le stock de capital et L_t l'emploi.

c) Supposant les marchés concurrentiels, exprimons le salaire et les taux d'intérêt en fonction du stock de capital par tête.

$$\max \pi_t = Y_t - w_t L_t - K_t r_t$$

$$\max \pi_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}} - w_t L_t - K_t r_t$$

$$\frac{\partial(\max \pi_t)}{\partial K_t} = 5K_t^{-\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}} - r_t$$

$$\Rightarrow r_t = 5\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{-\frac{1}{2}} = 5k_t^{-\frac{1}{2}} \quad \text{avec } k_t \text{ stock capital par tête.}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_t = 5k_t^{-\frac{1}{2}}}$$

Calcul maintenant $\frac{\partial(\max \pi_t)}{\partial L_t}$

$$\frac{\partial(\max \pi_t)}{\partial L_t} = 5K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{-\frac{1}{2}} - w_t$$

$$\Rightarrow r_t = 5\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{2}} = 5k_t^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec } k_t \text{ stock capital par tête.}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_t = 5k_t^{\frac{1}{2}}}$$

d) Déterminons l'évolution du stock de capital par tête.

$$K_{t+1} = L_t s_t \quad \text{or} \quad L_t = \frac{L_{t+1}}{N}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow K_{t+1} = L_{t+1} \frac{s_t}{2} \\
&\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = k_{t+1} = \frac{1}{4} w_t \quad \text{car } s_t = \frac{1}{2} w_t \\
&\Rightarrow \boxed{k_{t+1} = \frac{5}{4} k_t^{\frac{1}{2}}} \quad w_t = 5 k_t^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

e) Déterminons l'expression du capital par tête à l'équilibre. Cet équilibre est-il stable :

$$\text{A l'équilibre : } k_{t+1} = k_t = k^* = \frac{5}{4} k^{*\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^* = \frac{25}{16}}$$

$$\log(k_{t+1}) = \log\left(\frac{5}{4} k_t^{\frac{1}{2}}\right) = \log\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{1}{2} \log(k_t)$$

$$\Rightarrow \log(k_{t+1}) - \log\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} \log(k_t)$$

$$\Rightarrow \log(\widehat{k_{t+1}}) = \frac{1}{2} \log(\widehat{k_t})$$

$$\alpha < \frac{1}{2} < 1$$

L'équilibre est stable

f) La valeur du stock de capital de la règle d'or.

$$Y_t = 10 K_t^{\frac{1}{2}} L_t^{\frac{1}{2}}$$

$$Y_t = L_t c_t + L_{t+1} K_{t+1} + L_{t-1} d_{t+1}$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = c_t + (1+n) K_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1+n} \quad \text{car } L_{t+1} = (1+N) L_t$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = 10 \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{2}} = 10 k_t^{\frac{1}{2}}$$

$$10 k_t^{\frac{1}{2}} = c_t + (1+n) K_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1+n}$$

$$c_t = 10 k_t^{\frac{1}{2}} - 2 K_{t+1} - \frac{d_{t+1}}{2}$$

$$\frac{\partial c_t}{\partial K_t} = 5 k_t^{-\frac{1}{2}} - 2$$

$$\text{Posons } \frac{\partial c_t}{\partial K_t} = 0$$

$$k_t^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$k_t = \frac{25}{4} = k_{or}$$

Dans ce cas l'économie est en régime sous-accumulation.

Résoluton Exercices 1

Considérons un modèle à générations imbriquées où les ménages ne vivent que deux périodes. Durant la première période, ils perçoivent un salaire w_t ; qu'ils affectent à la consommation courante c_t ; et à l'épargne s_t ; et au versement des cotisations de retraite, σw_t : σ ; est le taux de cotisation à la retraite par

répartition. Devenus vieux à la deuxième période, ils consacrent leur épargne et leur pension de retraite $\bar{\theta}\phi w_t$; à la consommation différée d_{t+1} .

$\bar{\theta}$; est l'espérance de vie du retraité tandis que ; est le taux de remplacement des retraites. Les préférences des ménages sont représentées par la fonction d'utilité :