Université Des Antilles

Master Mathématiques et Applications
Economie et Finance

Devoir d'économie

Pierre Chrislin DORIVAL

Professeur : Patrice BORDA

25 Avril 2024

Résoluton Exercices 1

On considère un modèle à générations imbriquées où les ménages ne vivent que deux périodes. Au cours de leur période d'activité, ils perçoivent un salaire w_t qu'ils affectent à la consommation c_t courante et à l'épargne s_t. Au cours de leur période de retraite, ils consacrent leur épargne à la consom- mation différée d_{t+1}. Leurs préférences intertemporelles sont représentées par la fonction d'utilité :
$u_t(c_t; d_{t+1}) = \frac{1}{2}\log c_t + \frac{1}{2}\log d_{t+1}$

Dans cette économie, les impôts sont nuls ($x = 0$). Les individus nés en t sont en nombre L_t. Le taux de croissance du nombre de travailleurs d'une génération à l'autre est noté $n = 1$:

a) Exprimons les consommations des jeunes et des vieux en fonction du saliare wt :

Fonction d'utilité compte tenu de la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$\begin{cases} Max\ u_t(c_t; d_{t+1}) & = \frac{1}{2}\log c_t + \frac{1}{2}\log d_{t+1} \\ w_t & = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \end{cases}$$

Considérons la fonction Lagrangienne :

$L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t) = \frac{1}{2}\log c_t + \frac{1}{2}\log d_{t+1} + \lambda_t(w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}})$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport c_t :

$\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial c_t} = \frac{1}{2c_t} - \lambda_t$

Posons $\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial c_t} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1}{2c_t} \tag{1}$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport d_{t+1} :

$\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = \frac{1}{2d_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}}$

Posons $\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1+r_{t+1}}{2d_{t+1}} \tag{2}$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport λ_t :

$\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial \lambda_t} = w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

Posons $\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial \lambda_t} = 0$

$$\Rightarrow w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \tag{3}$$

(1) et (2) nous donnent :

$\frac{1}{c_t} = \frac{1+r_{t+1}}{d_{t+1}}$

$\Rightarrow c_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$ et $d_{t+1} = c_t(1+r_{t+1})$

Dans (1) $w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

D'oú $\boxed{c_t = \frac{1}{2}w_t}$ et $\boxed{d_{t+1} = \frac{1}{2}w_t(1+r_{t+1})}$

b) Déterminer l'épargne en fonction de w_t.

On sait que : $s_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

$\Rightarrow \boxed{s_t = \frac{1}{2}w_t}$

La technologie est représentée par la fonction de production :

$Y_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}}$

avec K_t est le stock de capital et L_t l'emploi.

c) Supposant les marchés concurrentiels, exprimons le salaire et les taux d'intérêt en fonction du stock de capital par tête.

$max\ \pi_t = Y_t - w_tL_t - K_tr_t$

$max\ \pi_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}} - w_tL_t - K_tr_t$

$\frac{\partial(max\ \pi_t)}{\partial K_t} = 5K_t^{\frac{-1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}} - r_t$

$\Rightarrow r_t = 5(\frac{K_t}{L_t})^{\frac{-1}{2}} = 5k_t^{\frac{-1}{2}}$ avec k_t stock capital par tête.

$\Rightarrow \boxed{r_t = 5k_t^{\frac{-1}{2}}}$

Calcul maintenant $\frac{\partial(max\ \pi_t)}{\partial L_t}$

$$\frac{\partial(max\ \pi_t)}{\partial L_t} = 5K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{-1}{2}} - w_t$$

$$\Rightarrow r_t = 5(\frac{K_t}{L_t})^{\frac{1}{2}} = 5k_t^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec } k_t \text{ stock capital par tête.}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_t = 5k_t^{\frac{1}{2}}}$$

d) Déterminons l'évolution du stock de capital par tête.

$K_{t+1} = L_t s_t$ or $L_t = \frac{L_{t+1}}{N}$

$\Rightarrow K_{t+1} = L_{t+1}\frac{s_t}{2}$

$\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = k_{t+1} = \frac{1}{4}w_t$ car $s_t = \frac{1}{2}w_t$

$\Rightarrow \boxed{k_{t+1} = \frac{5}{4}k_t^{\frac{1}{2}}}$ car $w_t = 5k_t^{\frac{1}{2}}$

e) Déterminons l'expression du capital par tête à l'équilibre. Cet équilibre est-il stable :

A l'équilibre : $k_{t+1} = k_t = k^* = \frac{5}{4}k^{*\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{k^* = \frac{25}{16}}$$

$$\log(k_{t+1}) = \log(\frac{5}{4}k_t^{\frac{1}{2}}) + \log(\frac{5}{4}) + \frac{1}{2}\log(k_t)$$

$$\Rightarrow \log(k_{t+1}) - \log(\frac{5}{4}) = \frac{1}{2}\log(k_t)$$

$$\Rightarrow \log(\widehat{k_{t+1}}) = \frac{1}{2}\log(\widehat{k_t})$$

$\alpha < \frac{1}{2} < 1$
L'équilibre est stable

f) La valeur du stock de capital de la règle d'or.

$Y_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}}$

$Y_t = L_t c_t + L_{t+1}K_{t+1} + L_{t-1}d_{t+1}$

$\frac{Y_t}{L_t} = c_t + (1+n)K_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1+n}$ car $L_{t+1} = (1+N)L_t$

$\frac{Y_t}{L_t} = 10(\frac{K_t}{L_t})^{\frac{1}{2}} = 10k_t^{\frac{1}{2}}$

$10k_t^{\frac{1}{2}} = c_t + (1+n)K_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1+n}$

$c_t = 10k_t^{\frac{1}{2}} - 2K_{t+1} - \frac{d_{t+1}}{2}$

$\frac{\partial c_t}{K_t} = 5k_t^{\frac{-1}{2}} - 2$

Posons $\frac{\partial c_t}{K_t} = 0$

$k_t^{\frac{-1}{2}} = \frac{2}{5}$

$k_t = \frac{25}{4} = k_{or}$

$k^* < k_{or}$

Dans ce cas l'économie est en régime sous-accumulation.

Résoluton Exercices 2

Considérons un modèle à générations imbriquées où les ménages ne vivent que deux périodes. Durant la première période, ils perçoivent un salaire w_t ; qu'ils affectent à la consommation courante c_t ; et à l'épargne s_t ; et au versement des cotisations de retraite, σw_t : σ ; est le taux de cotisation à la retraite par répartition. Devenus vieux à la deuxième période, ils consacrent leur épargne et leur pension de retraite $\overline{\theta}\phi w_t$; à la consommation différée d_{t+1}. $\overline{\theta}$; est l'espérance de vie du retraité tandis que ; est le taux de remplacement des retraites. Les préférences des ménages sont représentées par la fonction d'utilité :
$u_t(c_t; d_{t+1}) = (1-s)\log c_t + s\log d_{t+1} \quad 0 < s < 1$
Notons N, l'effctif (constant) de la population active.
a) Déterminons la contrainte budgétaire intertemporelle des ménages.

Fonction d'utilité compte tenu de la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$\begin{cases} Max\ u_t(c_t; d_{t+1}) = (1-s)\log c_t + s\log d_{t+1}; 0 < s < 1 \\ w_t = c_t + s_t + \sigma w_t \end{cases}$$

On sait que :

$d_{t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + \overline{\theta}\phi w_t$

$\Rightarrow s_t = \frac{d_{t+1} - \overline{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})}$

b) Exprimeons les consommations et l'épargne en fonction du salaire et du taux d'intérêt.
La technologie des firmes individuelles est représentée par la fonction de production suivante :

$Y_{it} = A_t K_{it}^{\alpha} L_{it}^{1-\alpha}$

avec $\quad A_t = B K_t^{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad i = \{1, 2, 3, ..., M\}$

$Y_{it}, K_{it}, L_{it},$; reprÈsentent respectivement, la production, le stock de capital et l'emploi de la firme i. A_t est l'efficacité du travail tandis que K_t est assimilé au stock de capital total.

Considérons la fonction Lagrangienne :
$L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t) = (1-s)\log c_t + s \log d_{t+1} + \lambda_t (w_t - c_t - \sigma w_t - \frac{d_{t+1} - \overline{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})})$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport c_t :

$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = \frac{1-s}{c_t} - \lambda_t$
Posons $\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1-s}{c_t} \tag{4}$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport d_{t+1} :

$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = \frac{s}{d_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}}$

Posons $\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{(1+r_{t+1})s}{d_{t+1}} \tag{5}$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport λ_t :

$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

Posons $\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = 0$

$\Rightarrow w_t - c_t - \sigma w_t - \frac{d_{t+1} - \overline{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})} = 0$

$$\Rightarrow w_t = \frac{c_t(1+r_{t+1}) + d_{t+1} - \overline{\theta}\phi w_t}{(1-\sigma)(1+r_{t+1})} \tag{6}$$

(4) et (5) nous donnent :

$\frac{1-s}{c_t} = \frac{(1+r_{t+1})s}{d_{t+1}}$

$\Rightarrow c_t = \frac{(1-s)d_{t+1}}{(1+r_{t+1})s} \quad \text{et} \quad d_{t+1} = c_t \frac{s(1+r_{t+1})}{1-s}$

Dans (6) $w_t = \frac{c_t(1+r_{t+1})+d_{t+1}-\overline{\theta}\phi w_t}{(1-\sigma)((1+r_{t+1}))}$

Remplaçons d_{t+1} dans w_t,

$c_t(1+r_{t+1}) + \frac{c_t s(1+r_{t+1})}{1-s} - \overline{\theta}\phi w_t = w_t(1_\sigma)(1+r_{t+1})$

D'oú $\boxed{c_t = w_t(1-s)(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}} + 1 - \sigma)}$

Portons c_t dans d_{t+1},

$d_{t+1} = w_t(1-s)(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}} + 1 - \sigma)\frac{s(1+r_{t+1})}{1-s}$

$\boxed{d_{t+1} = sw_t\left(\overline{\theta}\phi + (1-\sigma)(1+r_{t+1})\right)}$

On sait que :

$s_t = \frac{d_{t+1}-\overline{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})}$

Remplaçons d_{t+1} dans w_t,

$s_t = \frac{sw_t\left(\overline{\theta}\phi+(1-\sigma)(1+r_{t+1})\right)-\overline{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})}$

$\boxed{s_t = w_t\left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right)}$

c) Montrons que dans une économie concurrentielle, le salaire et le taux d'intérêt sont donnés par :

$w_t = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}k_t$

$r_t = \alpha BN^{1-\alpha} - 1$

avec avec $k_t = \frac{K_t}{N}$

Considérons $max\ \pi_{it} = Y_{it} - w_t L_{it} - K_{it}r_t i - \sigma K_{it}$ avec $\sigma = 1$

$max\ \pi_{it} = A_t K_{it}^{\alpha} L_{it}^{1-\alpha} - w_t L_{it} - K_{it}r_{ti} - K_{it}$

$\frac{\partial(max\ \pi_t)}{\partial K_{it}} = \alpha A_t K_{it}^{\alpha-1} L_{it}^{1-\alpha} - r_t - 1 = 0$

$\Rightarrow r_t = \alpha A_t K_{it}^{\alpha-1} L_{it}^{1-\alpha} - 1$

$\Rightarrow r_t = \alpha A_t \left(\frac{K_{it}}{L_{it}}\right)^{\alpha-1} - 1$

or $k_t = \frac{K_t}{N}$

$\Rightarrow r_t = \alpha A_t k_t^{\alpha-1} - 1$

$\Rightarrow r_t = \alpha A_t \left(\frac{K_t}{N}\right)^{\alpha-1} - 1$

$\Rightarrow r_t = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} N^{1-\alpha} - 1$

$\Rightarrow r_t = \alpha B K_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1} N^{1-\alpha} - 1$

Car : $A_t = BK_t^{1-\alpha}$

Par conséquent : $\boxed{r_t = \alpha B N^{1-\alpha} - 1}$

$\frac{\partial \ max \ \pi_{it}}{\partial L_{it}} = (1-\alpha) A_t K_{it}^{\alpha} L_{it}^{-\alpha} - w_t = 0$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha) A_t \left(\frac{K_{it}}{L_{it}}\right)^{\alpha}$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha) A_t k_t^{\alpha}$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha) A_t \left(\frac{K_t}{N}\right)^{\alpha}$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha) B K_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} N^{-\alpha}$

Car : $A_t = BK_t^{1-\alpha}$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha) B K_t N^{-\alpha}$

Or $k_t = \frac{K_t}{N} \Rightarrow K_t = k_t N$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha) B k_t N N^{-\alpha}$

Par conséquent : $\boxed{w_t = (1-\alpha) B N^{1-\alpha} k_t}$

d) Déterminer la dynamique du stock de capital par tête.

$K_{t+1} = L_t s_t = N s_t$

$\Rightarrow K_{t+1} = N w_t \left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right)$

$\Rightarrow K_{t+1} = N(1-\alpha) B N^{1-\alpha} k_t \left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right)$

$\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{N} = (1-\alpha) B N^{1-\alpha} k_t \left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right)$

Par conséquent : $\boxed{k_{t+1} = (1-\alpha) B N^{1-\alpha} \left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right) k_t}$

e) Sous quelle condition le stock de capital par tète d'équilibre est-il localement stable ?

Soit k^* le stock de capital par tête d'équilibre. La dynamique du stock de capital par tête est donnée par :

$$k_{t+1} = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}\left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right)k_t \tag{7}$$

Évaluons la dérivée partielle de k_{t+1} par raport à k_t autour de l'équilibre k^*

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}\left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right) \tag{8}$$

Pour que l'équilibre soit localement stable, il faut que $|B| < 1$
Comme $0 < \alpha < 1$ et $0 < s < 1 => |B| < 1$ Donc,si les perturbations initiales autour de l'équilibre sont petites, le système reviendra vers l'équilibre au fil du temps.

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial \bar{\theta}} = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}\left(\frac{\phi}{1+r_{t+1}}(s-1)\right)k_t \tag{9}$$

La conclusion analytique que nous pouvons tirer est que l'allongement de l'espérance de vie des retraités a un effet potentiellement négatif sur la dynamique économique, en diminuant le taux de croissance du stock de capital par habitant. Cette tendance peut être attribuée au fait que les individus épargnent davantage pour financer leur retraite prolongée, ce qui réduit les ressources disponibles pour les investissements dans le capital productif de l'économie.

Cependant, il est important de noter que cette conclusion dépend de divers facteurs et peut ne pas être générale dans tous les contextes économiques. Par exemple, si les politiques gouvernementales encouragent l'investissement dans le capital productif ou facilitent l'accès au financement pour les entreprises, cela pourrait atténuer l'impact négatif de l'allongement de l'espérance de vie sur la croissance du stock de capital.

En fin de compte, bien que l'allongement de l'espérance de vie puisse poser des défis économiques, il est également important de reconnaître les bénéfices sociaux potentiels, tels qu'une population active plus expérimentée et une demande soutenue pour certains biens et services liés au vieillissement de la population. Une approche équilibrée et des politiques adaptées peuvent aider à maximiser les avantages et à atténuer les inconvénients de cette évolution démographique.

f) En posant $(1+g_t) = \frac{k_{t+1}}{k_t}$ déterminer le taux de croissance de l'économie.

$k_{t+1} = (1+g_t)k_t$
Or $k_{t+1} = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}\left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)sk_t\right)$

$(1-\alpha)BN^{1-\alpha}\left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right)k_t = (1+g_t)k_t$

$\Rightarrow g_t = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}\left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right) - 1$

Posons : $g_t = g^* > 0$

$\Rightarrow (1-\alpha)BN^{1-\alpha}\left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1)+(1-\sigma)s\right) > 1$

$g)$ Etudier analytiquement l'effet de l'allongement de l'espérance de vie des retraités sur la dynamique de l'économie. Commenter

Nous examinons comment l'allongement de l'espérance de vie influence la décision d'épargne des ménages. L'idée est que si les individus s'attendent à vivre plus longtemps, ils seront incités à épargner davantage pour garantir un niveau de vie satisfaisant tout au long de leur retraite prolongée.

Pour illustrer cela, nous nous concentrons sur la variation du taux de croissance du stock de capital par habitant par rapport à l'espérance de vie $\bar{\theta}$. En d'autres termes, nous analysons comment le taux auquel le capital par habitant augmente ou diminue en fonction de l'espérance de vie des retraités.

Si $\bar{\theta}$ augmente, ce qui signifie que les individus s'attendent à vivre plus longtemps, cela pourrait entraîner une augmentation du taux d'épargne. En effet, les gens peuvent choisir de consommer moins aujourd'hui et d'épargner plus en prévision de leurs années de retraite prolongées. Cette augmentation de l'épargne contribue à une augmentation du stock de capital par habitant, car les ressources sont investies dans des actifs productifs qui augmentent la richesse nationale.

On a

$$k_{t+1} = w_t k_t\left(\frac{-\bar{\theta}(1-s)}{1+r_{t+1}} + s(1-\sigma)\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial \bar{\theta}} = -w_t k_t\left(\frac{\phi(1-s)}{1+k_{t+1}}\right) \tag{11}$$

En résumé, l'allongement de l'espérance de vie peut stimuler l'épargne des ménages, ce qui se traduit par une augmentation du stock de capital par habitant, contribuant ainsi à la croissance économique à long terme.