Table des matières

Université des Antilles

Dorival Pierre Chrislin

22 avril 2024

Résoluton Exercices 1

On considère un modèle à générations imbriquées où les ménages ne vivent que deux périodes. Au cours de leur période d'activité, ils perçoivent un salaire w_t qu'ils affectent à la consommation c_t courante et à l'épargne s_t. Au cours de leur période de retraite, ils consacrent leur épargne à la consom- mation différée d_{t+1}. Leurs préférences intertemporelles sont représentées par la fonction d'utilité :

$u_t(c_t; d_{t+1}) = \frac{1}{2}\log c_t + \frac{1}{2}\log d_{t+1}$

Dans cette économie, les impôts sont nuls ($x = 0$). Les individus nés en t sont en nombre L_t. Le taux de croissance du nombre de travailleurs d'une génération à l'autre est noté $n = 1$:

a) Exprimons les consommations des jeunes et des vieux en fonction du saliare wt :

Fonction d'utilité compte tenu de la contrainte budgétaire intertemporelle :

$\begin{cases} Max\ u_t(c_t; d_{t+1}) = \frac{1}{2}\log c_t + \frac{1}{2}\log d_{t+1} \\ w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \end{cases}$

Considérons la fonction Lagrangienne :

$L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t) = \frac{1}{2}\log c_t + \frac{1}{2}\log d_{t+1} + \lambda_t(w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}})$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport c_t :

$\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial c_t} = \frac{1}{2c_t} - \lambda_t$

Posons $\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial c_t} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1}{2c_t} \tag{1}$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport d_{t+1} :

$\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = \frac{1}{2d_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}}$

Posons $\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1 + r_{t+1}}{2d_{t+1}} \tag{2}$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport λ_t :

$\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial \lambda_t} = w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

Posons $\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial \lambda_t} = 0$

$$\Rightarrow w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \tag{3}$$

(1) et (2) nous donnent :

$\frac{1}{c_t} = \frac{1+r_{t+1}}{d_{t+1}}$

$\Rightarrow c_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$ et $d_{t+1} = c_t(1 + r_{t+1})$

Dans (1) $w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

D'oú $\boxed{c_t = \frac{1}{2}w_t}$ et $\boxed{d_{t+1} = \frac{1}{2}w_t(1 + r_{t+1})}$

b) Déterminer l'épargne en fonction de w_t.

On sait que : $s_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

$\Rightarrow \boxed{s_t = \frac{1}{2}w_t}$

La technologie est représentée par la fonction de production :

$Y_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}}$

avec K_t est le stock de capital et L_t l'emploi.

c) Supposant les marchés concurrentiels, exprimons le salaire et les taux d'intérêt en fonction du stock de capital par tête.