



UNIVERSITÉ DES ANTILLES

MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
ECONOMIE ET FINANCE

Devoir d'économie

Pierre Chrislin DORIVAL

Professeur : Patrice BORDA

25 Avril 2024

Résolution Exercices 1

On considère un modèle à générations imbriquées où les ménages ne vivent que deux périodes. Au cours de leur période d'activité, ils perçoivent un salaire w_t qu'ils affectent à la consommation c_t courante et à l'épargne s_t . Au cours de leur période de retraite, ils consacrent leur épargne à la consommation différée d_{t+1} . Leurs préférences intertemporelles sont représentées par la fonction d'utilité :

$$u_t(c_t; d_{t+1}) = \frac{1}{2} \log c_t + \frac{1}{2} \log d_{t+1}$$

Dans cette économie, les impôts sont nuls ($x = 0$). Les individus nés en t sont en nombre L_t . Le taux de croissance du nombre de travailleurs d'une génération à l'autre est noté $n = 1$:

a) Exprimons les consommations des jeunes et des vieux en fonction du salaire w_t :

Fonction d'utilité compte tenu de la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$\begin{cases} \text{Max } u_t(c_t; d_{t+1}) &= \frac{1}{2} \log c_t + \frac{1}{2} \log d_{t+1} \\ w_t &= c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \end{cases}$$

Considérons la fonction Lagrangienne :

$$L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t) = \frac{1}{2} \log c_t + \frac{1}{2} \log d_{t+1} + \lambda_t (w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}})$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport c_t :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = \frac{1}{2c_t} - \lambda_t$$

$$\text{Posons } \frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1}{2c_t} \quad (1)$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport d_{t+1} :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = \frac{1}{2d_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}}$$

$$\text{Posons } \frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1 + r_{t+1}}{2d_{t+1}} \quad (2)$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport λ_t :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

Posons $\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = 0$

$$\Rightarrow w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \quad (3)$$

(1) et (2) nous donnent :

$$\frac{1}{c_t} = \frac{1+r_{t+1}}{d_{t+1}}$$

$$\Rightarrow c_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \text{ et } d_{t+1} = c_t(1+r_{t+1})$$

Dans (1) $w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

D'où $\boxed{c_t = \frac{1}{2}w_t}$ et $\boxed{d_{t+1} = \frac{1}{2}w_t(1+r_{t+1})}$

b) Déterminer l'épargne en fonction de w_t .

On sait que : $s_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

$$\Rightarrow \boxed{s_t = \frac{1}{2}w_t}$$

La technologie est représentée par la fonction de production :

$$Y_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}}$$

avec K_t est le stock de capital et L_t l'emploi.

c) Supposant les marchés concurrentiels, exprimons le salaire et les taux d'intérêt en fonction du stock de capital par tête.

$$\max \pi_t = Y_t - w_t L_t - K_t r_t$$

$$\max \pi_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}} - w_t L_t - K_t r_t$$

$$\frac{\partial(\max \pi_t)}{\partial K_t} = 5K_t^{-\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}} - r_t$$

$$\Rightarrow r_t = 5\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{-\frac{1}{2}} = 5k_t^{-\frac{1}{2}} \quad \text{avec } k_t \text{ stock capital par tête.}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_t = 5k_t^{-\frac{1}{2}}}$$

Calcul maintenant $\frac{\partial(\max \pi_t)}{\partial L_t}$

$$\frac{\partial(\max \pi_t)}{\partial L_t} = 5K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{-\frac{1}{2}} - w_t$$

$$\Rightarrow r_t = 5\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{2}} = 5k_t^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec } k_t \text{ stock capital par tête.}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_t = 5k_t^{\frac{1}{2}}}$$

d) Déterminons l'évolution du stock de capital par tête.

$$K_{t+1} = L_t s_t \quad \text{or} \quad L_t = \frac{L_{t+1}}{N}$$

$$\Rightarrow K_{t+1} = L_{t+1} \frac{s_t}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = k_{t+1} = \frac{1}{4}w_t \quad \text{car } s_t = \frac{1}{2}w_t$$

$$\Rightarrow \boxed{k_{t+1} = \frac{5}{4}k_t^{\frac{1}{2}}} \quad \text{car } w_t = 5k_t^{\frac{1}{2}}$$

e) Déterminons l'expression du capital par tête à l'équilibre. Cet équilibre est-il stable :

$$\text{A l'équilibre : } k_{t+1} = k_t = k^* = \frac{5}{4}k^{*\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^* = \frac{25}{16}}$$

$$\log(k_{t+1}) = \log\left(\frac{5}{4}k_t^{\frac{1}{2}}\right) + \log\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{1}{2}\log(k_t)$$

$$\Rightarrow \log(k_{t+1}) - \log\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}\log(k_t)$$

$$\Rightarrow \log(\widehat{k_{t+1}}) = \frac{1}{2}\log(\widehat{k_t})$$

$$\alpha < \frac{1}{2} < 1$$

L'équilibre est stable

f) La valeur du stock de capital de la règle d'or.

$$Y_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}}$$

$$Y_t = L_t c_t + L_{t+1} K_{t+1} + L_{t-1} d_{t+1}$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = c_t + (1+n)K_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1+n} \quad \text{car } L_{t+1} = (1+N)L_t$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = 10\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{2}} = 10k_t^{\frac{1}{2}}$$

$$10k_t^{\frac{1}{2}} = c_t + (1+n)K_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1+n}$$

$$c_t = 10k_t^{\frac{1}{2}} - 2K_{t+1} - \frac{d_{t+1}}{2}$$

$$\frac{\partial c_t}{\partial K_t} = 5k_t^{-\frac{1}{2}} - 2$$

$$\text{Posons } \frac{\partial c_t}{\partial K_t} = 0$$

$$k_t^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$k_t = \frac{25}{4} = k_{or}$$

$$k^* < k_{or}$$

Dans ce cas l'économie est en régime sous-accumulation.

Résolution Exercices 2

Considérons un modèle à générations imbriquées où les ménages ne vivent que deux périodes. Durant la première période, ils perçoivent un salaire w_t ; qu'ils affectent à la consommation courante c_t ; et à l'épargne s_t ; et au versement des cotisations de retraite, σw_t ; σ ; est le taux de cotisation à la retraite par répartition. Devenus vieux à la deuxième période, ils consacrent leur épargne et leur pension de retraite $\bar{\theta}\phi w_t$; à la consommation différée d_{t+1} . $\bar{\theta}$; est l'espérance de vie du retraité tandis que; est le taux de remplacement des retraites. Les préférences des ménages sont représentées par la fonction d'utilité :

$$u_t(c_t; d_{t+1}) = (1-s) \log c_t + s \log d_{t+1} \quad 0 < s < 1$$

Notons N , l'effectif (constant) de la population active.

a) Déterminons la contrainte budgétaire intertemporelle des ménages.

Fonction d'utilité compte tenu de la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$\begin{cases} \text{Max } u_t(c_t; d_{t+1}) = (1-s) \log c_t + s \log d_{t+1}; 0 < s < 1 \\ w_t = c_t + s_t + \sigma w_t \end{cases}$$

On sait que :

$$d_{t+1} = (1+r_{t+1})s_t + \bar{\theta}\phi w_t$$

$$\Rightarrow s_t = \frac{d_{t+1} - \bar{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})}$$

b) Exprimeons les consommations et l'épargne en fonction du salaire et du taux d'intérêt.

La technologie des firmes individuelles est représentée par la fonction de pro-

duction suivante :

$$Y_{it} = A_t K_{it}^\alpha L_{it}^{1-\alpha}$$

$$\text{avec } A_t = B K_t^{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad i = \{1, 2, 3, \dots, M\}$$

Y_{it}, K_{it}, L_{it} , ; reprÈsentent respectivement, la production, le stock de capital et l'emploi de la firme i . A_t est l'efficacitÈ du travail tandis que K_t est assimilÈ au stock de capital total.

Considérons la fonction Lagrangienne :

$$L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t) = (1-s) \log c_t + s \log d_{t+1} + \lambda_t (w_t - c_t - \sigma w_t - \frac{d_{t+1} - \bar{\theta} \phi w_t}{(1+r_{t+1})})$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport c_t :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = \frac{1-s}{c_t} - \lambda_t$$

Posons $\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1-s}{c_t} \quad (4)$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport d_{t+1} :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = \frac{s}{d_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}}$$

Posons $\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{(1+r_{t+1})s}{d_{t+1}} \quad (5)$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport λ_t :

$$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

$$\text{Posons } \frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = 0$$

$$\Rightarrow w_t - c_t - \sigma w_t - \frac{d_{t+1} - \bar{\theta} \phi w_t}{(1+r_{t+1})} = 0$$

$$\Rightarrow w_t = \frac{c_t(1+r_{t+1}) + d_{t+1} - \bar{\theta} \phi w_t}{(1-\sigma)(1+r_{t+1})} \quad (6)$$

(4) et (5) nous donnent :

$$\frac{1-s}{c_t} = \frac{(1+r_{t+1})s}{d_{t+1}}$$

$$\Rightarrow c_t = \frac{(1-s)d_{t+1}}{(1+r_{t+1})s} \quad \text{et} \quad d_{t+1} = c_t \frac{s(1+r_{t+1})}{1-s}$$

$$\text{Dans (6)} \quad w_t = \frac{c_t(1+r_{t+1})+d_{t+1}-\bar{\theta}\phi w_t}{(1-\sigma)((1+r_{t+1}))}$$

Remplaçons d_{t+1} dans w_t ,

$$c_t(1+r_{t+1}) + \frac{c_t s(1+r_{t+1})}{1-s} - \bar{\theta}\phi w_t = w_t(1-\sigma)(1+r_{t+1})$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{c_t = w_t(1-s)\left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}} + 1 - \sigma\right)}$$

Portons c_t dans d_{t+1} ,

$$d_{t+1} = w_t(1-s)\left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}} + 1 - \sigma\right) \frac{s(1+r_{t+1})}{1-s}$$

$$\boxed{d_{t+1} = s w_t (\bar{\theta}\phi + (1-\sigma)(1+r_{t+1}))}$$

On sait que :

$$s_t = \frac{d_{t+1}-\bar{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})}$$

Remplaçons d_{t+1} dans w_t ,

$$s_t = \frac{s w_t (\bar{\theta}\phi + (1-\sigma)(1+r_{t+1})) - \bar{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})}$$

$$\boxed{s_t = w_t \left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}} (s-1) + (1-\sigma)s \right)}$$

c) Montrons que dans une économie concurrentielle, le salaire et le taux d'intérêt sont donnés par :

$$w_t = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}k_t$$

$$r_t = \alpha BN^{1-\alpha} - 1$$

$$\text{avec} \quad k_t = \frac{K_t}{N}$$

Considérons $\max \pi_{it} = Y_{it} - w_t L_{it} - K_{it} r_t - \sigma K_{it}$ avec $\sigma = 1$

$$\max \pi_{it} = A_t K_{it}^\alpha L_{it}^{1-\alpha} - w_t L_{it} - K_{it} r_t - K_{it}$$

$$\frac{\partial(\max \pi_{it})}{\partial K_{it}} = \alpha A_t K_{it}^{\alpha-1} L_{it}^{1-\alpha} - r_t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow r_t = \alpha A_t K_{it}^{\alpha-1} L_{it}^{1-\alpha} - 1$$

$$\Rightarrow r_t = \alpha A_t \left(\frac{K_{it}}{L_{it}} \right)^{\alpha-1} - 1$$

$$\text{or} \quad k_t = \frac{K_t}{N}$$

$$\Rightarrow r_t = \alpha A_t k_t^{\alpha-1} - 1$$

$$\Rightarrow r_t = \alpha A_t \left(\frac{K_t}{N}\right)^{\alpha-1} - 1$$

$$\Rightarrow r_t = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} N^{1-\alpha} - 1$$

$$\Rightarrow r_t = \alpha B K_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1} N^{1-\alpha} - 1$$

$$\text{Car : } A_t = B K_t^{1-\alpha}$$

$$\text{Par conséquent : } \boxed{r_t = \alpha B N^{1-\alpha} - 1}$$

$$\frac{\partial \max \pi_{it}}{\partial L_{it}} = (1 - \alpha) A_t K_{it}^{\alpha} L_{it}^{-\alpha} - w_t = 0$$

$$\Rightarrow w_t = (1 - \alpha) A_t \left(\frac{K_{it}}{L_{it}}\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow w_t = (1 - \alpha) A_t k_t^{\alpha}$$

$$\Rightarrow w_t = (1 - \alpha) A_t \left(\frac{K_t}{N}\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow w_t = (1 - \alpha) B K_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} N^{-\alpha}$$

$$\text{Car : } A_t = B K_t^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow w_t = (1 - \alpha) B K_t N^{-\alpha}$$

$$\text{Or } k_t = \frac{K_t}{N} \Rightarrow K_t = k_t N$$

$$\Rightarrow w_t = (1 - \alpha) B k_t N N^{-\alpha}$$

$$\text{Par conséquent : } \boxed{w_t = (1 - \alpha) B N^{1-\alpha} k_t}$$

d) Déterminer la dynamique du stock de capital par tête.

$$K_{t+1} = L_t s_t = N s_t$$

$$\Rightarrow K_{t+1} = N w_t \left(\frac{\bar{\theta} \phi}{1+r_{t+1}} (s-1) + (1-\sigma)s \right)$$

$$\Rightarrow K_{t+1} = N (1 - \alpha) B N^{1-\alpha} k_t \left(\frac{\bar{\theta} \phi}{1+r_{t+1}} (s-1) + (1-\sigma)s \right)$$

$$\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{N} = (1 - \alpha) B N^{1-\alpha} k_t \left(\frac{\bar{\theta} \phi}{1+r_{t+1}} (s-1) + (1-\sigma)s \right)$$

$$\text{Par conséquent : } \boxed{k_{t+1} = (1 - \alpha) B N^{1-\alpha} \left(\frac{\bar{\theta} \phi}{1+r_{t+1}} (s-1) + (1-\sigma)s \right) k_t}$$

e) Sous quelle condition le stock de capital par tête d'équilibre est-il localement stable ?

f) En posant $(1 + g_t) = \frac{k_{t+1}}{k_t}$ déterminer le taux de croissance de l'économie.

$$k_{t+1} = (1 + g_t)k_t$$

$$\text{Or } k_{t+1} = (1 - \alpha)BN^{1-\alpha} \left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1 - \sigma)sk_t \right)$$

$$(1 - \alpha)BN^{1-\alpha} \left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1 - \sigma)s \right) k_t = (1 + g_t)k_t$$

$$\Rightarrow g_t = (1 - \alpha)BN^{1-\alpha} \left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1 - \sigma)s \right) - 1$$

Posons : $g_t = g^* > 0$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)BN^{1-\alpha} \left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1 - \sigma)s \right) > 1$$

g) Etudier analytiquement l'effet de l'allongement de l'espérance de vie des retraités sur la dynamique de l'économie. Commenter