Université Des Antilles

Master Mathématiques et Applications
Economie et Finance

Devoir d'économie

Pierre Chrislin DORIVAL

Professeur : Patrice BORDA

25 Avril 2024

Résoluton Exercices 1

On considère un modèle à générations imbriquées où les ménages ne vivent que deux périodes. Au cours de leur période d'activité, ils perçoivent un salaire w_t qu'ils affectent à la consommation c_t courante et à l'épargne s_t. Au cours de leur période de retraite, ils consacrent leur épargne à la consom- mation différée d_{t+1}. Leurs préférences intertemporelles sont représentées par la fonction d'utilité :
$u_t(c_t; d_{t+1}) = \frac{1}{2}\log c_t + \frac{1}{2}\log d_{t+1}$

Dans cette économie, les impôts sont nuls ($x = 0$). Les individus nés en t sont en nombre L_t. Le taux de croissance du nombre de travailleurs d'une génération à l'autre est noté $n = 1$:

a) Exprimons les consommations des jeunes et des vieux en fonction du saliare wt :

Fonction d'utilité compte tenu de la contrainte budgétaire intertemporelle :
$\begin{cases} Max\ u_t(c_t; d_{t+1}) & = \frac{1}{2}\log c_t + \frac{1}{2}\log d_{t+1} \\ w_t & = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \end{cases}$

Considérons la fonction Lagrangienne :

$L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t) = \frac{1}{2}\log c_t + \frac{1}{2}\log d_{t+1} + \lambda_t(w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}})$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport c_t :

$\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial c_t} = \frac{1}{2c_t} - \lambda_t$

Posons $\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial c_t} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1}{2c_t} \tag{1}$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport d_{t+1} :

$\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = \frac{1}{2d_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}}$

Posons $\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1+r_{t+1}}{2d_{t+1}} \tag{2}$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport λ_t :

$\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial \lambda_t} = w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

Posons $\frac{\partial L(c_t,d_{t+1},\lambda_t)}{\partial \lambda_t} = 0$

$$\Rightarrow w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}} \tag{3}$$

(1) et (2) nous donnent :

$\frac{1}{c_t} = \frac{1+r_{t+1}}{d_{t+1}}$

$\Rightarrow c_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$ et $d_{t+1} = c_t(1+r_{t+1})$

Dans (1) $w_t = c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

D'oú $\boxed{c_t = \frac{1}{2}w_t}$ et $\boxed{d_{t+1} = \frac{1}{2}w_t(1+r_{t+1})}$

b) Déterminer l'épargne en fonction de w_t.

On sait que : $s_t = \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

$\Rightarrow \boxed{s_t = \frac{1}{2}w_t}$

La technologie est représentée par la fonction de production :

$Y_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}}$

avec K_t est le stock de capital et L_t l'emploi.

c) Supposant les marchés concurrentiels, exprimons le salaire et les taux d'intérêt en fonction du stock de capital par tête.

$max\ \pi_t = Y_t - w_tL_t - K_tr_t$

$max\ \pi_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}} - w_tL_t - K_tr_t$

$\frac{\partial(max\ \pi_t)}{\partial K_t} = 5K_t^{\frac{-1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}} - r_t$

$\Rightarrow r_t = 5(\frac{K_t}{L_t})^{\frac{-1}{2}} = 5k_t^{\frac{-1}{2}}$ avec k_t stock capital par tête.

$\Rightarrow \boxed{r_t = 5k_t^{\frac{-1}{2}}}$

Calcul maintenant $\frac{\partial(max\ \pi_t)}{\partial L_t}$

$$\frac{\partial(max\ \pi_t)}{\partial L_t} = 5K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{-1}{2}} - w_t$$

$$\Rightarrow r_t = 5(\frac{K_t}{L_t})^{\frac{1}{2}} = 5k_t^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec } k_t \text{ stock capital par tête.}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_t = 5k_t^{\frac{1}{2}}}$$

d) Déterminons l'évolution du stock de capital par tête.

$$K_{t+1} = L_t s_t \quad \text{or} \quad L_t = \frac{L_{t+1}}{N}$$

$$\Rightarrow K_{t+1} = L_{t+1}\frac{s_t}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = k_{t+1} = \frac{1}{4}w_t \quad \text{car } s_t = \frac{1}{2}w_t$$

$$\Rightarrow \boxed{k_{t+1} = \frac{5}{4}k_t^{\frac{1}{2}}} \quad \text{car} \quad w_t = 5k_t^{\frac{1}{2}}$$

e) Déterminons l'expression du capital par tête à l'équilibre. Cet équilibre est-il stable :

A l'équilibre : $k_{t+1} = k_t = k^* = \frac{5}{4}k^{*\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{k^* = \frac{25}{16}}$$

$$\log(k_{t+1}) = \log(\frac{5}{4}k_t^{\frac{1}{2}}) + \log(\frac{5}{4}) + \frac{1}{2}\log(k_t)$$

$$\Rightarrow \log(k_{t+1}) - \log(\frac{5}{4}) = \frac{1}{2}\log(k_t)$$

$$\Rightarrow \log(\widehat{k_{t+1}}) = \frac{1}{2}\log(\widehat{k_t})$$

$\alpha < \frac{1}{2} < 1$

L'équilibre est stable

f) La valeur du stock de capital de la règle d'or.

$$Y_t = 10K_t^{\frac{1}{2}}L_t^{\frac{1}{2}}$$

$$Y_t = L_t c_t + L_{t+1}K_{t+1} + L_{t-1}d_{t+1}$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = c_t + (1+n)K_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1+n} \quad \text{car } L_{t+1} = (1+N)L_t$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = 10(\frac{K_t}{L_t})^{\frac{1}{2}} = 10k_t^{\frac{1}{2}}$$

$10k_t^{\frac{1}{2}} = c_t + (1+n)K_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1+n}$

$c_t = 10k_t^{\frac{1}{2}} - 2K_{t+1} - \frac{d_{t+1}}{2}$

$\frac{\partial c_t}{K_t} = 5k_t^{\frac{-1}{2}} - 2$

Posons $\frac{\partial c_t}{K_t} = 0$

$k_t^{\frac{-1}{2}} = \frac{2}{5}$

$k_t = \frac{25}{4} = k_{or}$

$k^* < k_{or}$

Dans ce cas l'économie est en régime sous-accumulation.

Résoluton Exercices 2

Considérons un modèle à générations imbriquées où les ménages ne vivent que deux périodes. Durant la première période, ils perçoivent un salaire w_t ; qu'ils affectent à la consommation courante c_t ; et à l'épargne s_t ; et au versement des cotisations de retraite, σw_t : σ ; est le taux de cotisation à la retraite par répartition. Devenus vieux à la deuxième période, ils consacrent leur épargne et leur pension de retraite $\overline{\theta}\phi w_t$; à la consommation différée d_{t+1}. $\overline{\theta}$; est l'espérance de vie du retraité tandis que ; est le taux de remplacement des retraites. Les préférences des ménages sont représentées par la fonction d'utilité :
$u_t(c_t; d_{t+1}) = (1-s)\log c_t + s\log d_{t+1} \quad 0 < s < 1$
Notons N, l'effctif (constant) de la population active.

a) Déterminons la contrainte budgétaire intertemporelle des ménages.

Fonction d'utilité compte tenu de la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$\begin{cases} Max\ u_t(c_t; d_{t+1}) = (1-s)\log c_t + s\log d_{t+1}; 0 < s < 1 \\ \hfill w_t = c_t + s_t + \sigma w_t \end{cases}$$

On sait que :

$d_{t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + \overline{\theta}\phi w_t$

$\Rightarrow s_t = \frac{d_{t+1} - \overline{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})}$

b) Exprimeons les consommations et l'épargne en fonction du salaire et du taux d'intérêt.
La technologie des firmes individuelles est représentée par la fonction de pro-

duction suivante :
$Y_{it} = A_t K_{it}^{\alpha} L_{it}^{1-\alpha}$

avec $\quad A_t = BK_t^{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad i = \{1, 2, 3, ..., M\}$

$Y_{it}, K_{it}, L_{it},$; reprÈsentent respectivement, la production, le stock de capital et l'emploi de la firme i. A_t est l'efficacité du travail tandis que K_t est assimilé au stock de capital total.

Considérons la fonction Lagrangienne :
$L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t) = (1-s)\log c_t + s \log d_{t+1} + \lambda_t(w_t - c_t - \sigma w_t - \frac{d_{t+1} - \overline{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})})$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport c_t :

$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = \frac{1-s}{c_t} - \lambda_t$
Posons $\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial c_t} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{1-s}{c_t} \tag{4}$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport d_{t+1} :

$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = \frac{s}{d_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}}$

Posons $\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial d_{t+1}} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t = \frac{(1+r_{t+1})s}{d_{t+1}} \tag{5}$$

Faisons la dérivée de la fonction Lagrangienne par rapport λ_t :

$\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = w_t - c_t - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

Posons $\frac{\partial L(c_t, d_{t+1}, \lambda_t)}{\partial \lambda_t} = 0$

$\Rightarrow w_t - c_t - \sigma w_t - \frac{d_{t+1} - \overline{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})} = 0$

$$\Rightarrow w_t = \frac{c_t(1+r_{t+1}) + d_{t+1} - \overline{\theta}\phi w_t}{(1-\sigma)(1+r_{t+1})} \tag{6}$$

(4) et (5) nous donnent :

$\frac{1-s}{c_t} = \frac{(1+r_{t+1})s}{d_{t+1}}$

$\Rightarrow c_t = \frac{(1-s)d_{t+1}}{(1+r_{t+1})s}$ et $d_{t+1} = c_t\frac{s(1+r_{t+1})}{1-s}$

Dans (6) $w_t = \frac{c_t(1+r_{t+1})+d_{t+1}-\overline{\theta}\phi w_t}{(1-\sigma)((1+r_{t+1}))}$

Remplaçons d_{t+1} dans w_t,

$c_t(1+r_{t+1}) + \frac{c_t s(1+r_{t+1})}{1-s} - \overline{\theta}\phi w_t = w_t(1_\sigma)(1+r_{t+1})$

D'oú $\boxed{c_t = w_t(1-s)(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}} + 1 - \sigma)}$

Portons c_t dans d_{t+1},

$d_{t+1} = w_t(1-s)(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}} + 1 - \sigma)\frac{s(1+r_{t+1})}{1-s}$

$\boxed{d_{t+1} = sw_t\left(\overline{\theta}\phi + (1-\sigma)(1+r_{t+1})\right)}$

On sait que :

$s_t = \frac{d_{t+1}-\overline{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})}$

Remplaçons d_{t+1} dans w_t,

$s_t = \frac{sw_t\left(\overline{\theta}\phi+(1-\sigma)(1+r_{t+1})\right)-\overline{\theta}\phi w_t}{(1+r_{t+1})}$

$\boxed{s_t = w_t\left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right)}$

c) Montrons que dans une économie concurrentielle, le salaire et le taux d'intérêt sont donnés par :

$w_t = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}k_t$

$r_t = \alpha BN^{1-\alpha} - 1$

avec avec $k_t = \frac{K_t}{N}$

Considérons $max\ \pi_{it} = Y_{it} - w_t L_{it} - K_{it}r_t i - \sigma K_{it}$ avec $\sigma = 1$

$max\ \pi_{it} = A_t K_{it}^{\alpha} L_{it}^{1-\alpha} - w_t L_{it} - K_{it}r_{ti} - K_{it}$

$\frac{\partial(max\ \pi_t)}{\partial K_{it}} = \alpha A_t K_{it}^{\alpha-1} L_{it}^{1-\alpha} - r_t - 1 = 0$

$\Rightarrow r_t = \alpha A_t K_{it}^{\alpha-1} L_{it}^{1-\alpha} - 1$

$\Rightarrow r_t = \alpha A_t \left(\frac{K_{it}}{L_{it}}\right)^{\alpha-1} - 1$

or $k_t = \frac{K_t}{N}$

$\Rightarrow r_t = \alpha A_t k_t^{\alpha-1} - 1$

$\Rightarrow r_t = \alpha A_t \left(\frac{K_t}{N}\right)^{\alpha-1} - 1$

$\Rightarrow r_t = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} N^{1-\alpha} - 1$

$\Rightarrow r_t = \alpha B K_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1} N^{1-\alpha} - 1$

Car : $A_t = BK_t^{1-\alpha}$

Par conséquent : $\boxed{r_t = \alpha B N^{1-\alpha} - 1}$

$\frac{\partial \ max \ \pi_{it}}{\partial L_{it}} = (1-\alpha)A_t K_{it}^{\alpha} L_{it}^{-\alpha} - w_t = 0$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha)A_t \left(\frac{K_{it}}{L_{it}}\right)^{\alpha}$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha)A_t k_t^{\alpha}$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha)A_t \left(\frac{K_t}{N}\right)^{\alpha}$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha)BK_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} N^{-\alpha}$

Car : $A_t = BK_t^{1-\alpha}$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha)BK_t N^{-\alpha}$

Or $k_t = \frac{K_t}{N} \ \Rightarrow \ K_t = k_t N$

$\Rightarrow w_t = (1-\alpha)Bk_t N N^{-\alpha}$

Par conséquent : $\boxed{w_t = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}k_t}$

d) Déterminer la dynamique du stock de capital par tête.

$K_{t+1} = L_t s_t = N s_t$

$\Rightarrow K_{t+1} = N w_t \left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right)$

$\Rightarrow K_{t+1} = N(1-\alpha)BN^{1-\alpha}k_t \left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right)$

$\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{N} = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}k_t \left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right)$

Par conséquent : $\boxed{k_{t+1} = (1-\alpha)BN^{1-\alpha} \left(\frac{\overline{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right) k_t}$

e) Sous quelle condition le stock de capital par tÍte d'équilibre est-il localement stable ?

f) En posant $(1+g_t) = \frac{k_{t+1}}{k_t}$ déterminer le taux de croissance de l'économie.

$k_{t+1} = (1+g_t)k_t$

Or $k_{t+1} = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}\left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)sk_t\right)$

$(1-\alpha)BN^{1-\alpha}\left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right)k_t = (1+g_t)k_t$

$\Rightarrow g_t = (1-\alpha)BN^{1-\alpha}\left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right) - 1$

Posons : $g_t = g^* > 0$

$\Rightarrow (1-\alpha)BN^{1-\alpha}\left(\frac{\bar{\theta}\phi}{1+r_{t+1}}(s-1) + (1-\sigma)s\right) > 1$

g) Etudier analytiquement l'effet de l'allongement de l'espérance de vie des retraités sur la dynamique de l'économie. Commenter