

7. Übungsblatt

Aufgabe 19

a) Da sich in beiden Prozessen jeweils ein Teilchen in zwei aufteilt, verdoppelt sich nach jedem Splitting die Teilchenanzahl:

$$N_n = 2^n$$

Die Energie wird hälftig aufgeteilt, d.h. dass die Energie pro Teilchen nach n Splits gegeben ist durch

$$E_n = \frac{E_0}{N_n} = E_0 \cdot 2^{-n}.$$

b) Der Teilchenschauer geht so lange weiter, bis E_n unter die kritische Energie E_c fällt. Die Anzahl an Splitting Events ist somit vom Logarithmus der Anfangsenergie abhängig:

$$E_n = E_0 \cdot 2^{-n} \stackrel{!}{>} E_c \Rightarrow n_{\max} = \log_2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right)$$

Daraus folgt die maximale Anzahl an Teilchen:

$$N_{\max} = 2^{n_{\max}} = 2^{\log_2(E_0/E_c)} = \frac{E_0}{E_c}$$

Wenn man die Splitting-Länge d kennt lässt sich die atmosphärische Tiefe errechnen:

$$X_{\max}^{\gamma} = d \cdot n_{\max} = d \cdot \log_2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right)$$

c)

$$n_{\max} = \log_2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right) = 13.522$$

$$X_{\max}^{\gamma} = d \cdot n_{\max} = 338.05 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$$

d)

$$\begin{aligned} X &= \int \rho(h) \, dh \\ &= \int_{h_{\max}}^{\infty} \rho(0) \exp\left(-\frac{h}{h_s}\right) \, dh \\ &= -h_s \rho(0) \exp\left(-\frac{h}{h_s}\right) \Big|_{h_{\max}}^{\infty} \\ &= h_s \rho(0) \exp\left(-\frac{h_{\max}}{h_s}\right) \\ \Rightarrow \exp\left(-\frac{h_{\max}}{h_s}\right) &= \frac{X}{h_s \rho(0)} \\ \Rightarrow -\frac{h_{\max}}{h_s} &= \ln\left(\frac{X}{h_s \rho(0)}\right) \\ \Rightarrow h_{\max} &= -h_s \ln\left(\frac{X}{h_s \rho(0)}\right) \\ &\approx 9.57 \text{ km} \end{aligned}$$