

2. Übungsblatt

Aufgabe 4

a) Die Masse eines Hohlkugel-Ausschnitts aus der Sonne kann angegeben werden als

$$dM = \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

Aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz folgt dann die Gewichtskraft, die auf diese Kugelschale wirkt:

$$F_G = -G \frac{M_{\text{Sonne}} * dM}{r^2} = -G \frac{M_{\text{Sonne}} * \rho(r) 4\pi r^2 dr}{r^2} = -GM 4\pi \rho(r) dr$$

Die Kraft die eine Druckdifferenz dP auf eine Fläche A bewirkt lässt sich schreiben als

$$F_p = A * dP = 4\pi r^2 dP$$

Für ein hydrostatisches Gleichgewicht müssen diese Kräfte gleich sein. Andernfalls würde sich der Stern ausdehnen bzw. zusammen ziehen, bis ein Gleichgewicht herrscht.

Dadurch lässt sich der Druckgradient bestimmen:

$$\begin{aligned} -GM 4\pi \rho(r) dr &= 4\pi r^2 dP \\ \Rightarrow \frac{dP}{dr} &= -\frac{GM \rho(r)}{r^2} \end{aligned}$$

b) Der Strahlungsfluss durch eine Kugeloberfläche entspricht der Leuchtkraft der Kugel geteilt durch die Kugeloberfläche:

$$F_{\text{rad}} = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

(P entspricht hier jetzt der Strahlungsleistung, nicht dem Druck)

Wenn wir den Gravitationsdruckgradienten mit dem dem Strahlungsgradienten gleichsetzen erhalten wir die maximale Leuchtkraft (Eddington Leuchtkraft):

$$\begin{aligned} -G \frac{M \rho(r)}{r^2} &= -\frac{\kappa \rho(r)}{c} F_{\text{rad}} \\ \Leftrightarrow -G \frac{M \rho(r)}{r^2} &= -\frac{\kappa \rho(r)}{c} \frac{P}{4\pi r^2} \\ \Leftrightarrow GM &= \frac{\kappa}{c} \frac{P}{4\pi} \\ \Leftrightarrow P &= \frac{4\pi c M G}{\kappa} \end{aligned}$$

c) Wenn die Leuchtkraft eines Sternes das Eddington Limit übersteigt, steigt der Strahlungsfluss F_{rad} , wodurch auch der Strahlungsdruckgradient steigt. Über der Eddington Grenze ist der Strahlungsdruck größer als der Gravitationsdruck, d.h. der Stern wird instabil und würde äußere Schichten ins Weltall "abwerfen".

d)

$$P_{\text{Edd}} = \frac{4\pi c M G}{\kappa} = \frac{4\pi c * 0.0083 * M_{\odot} G}{0.02 m^2} kg \approx 2.1 * 10^{31} W \approx 1.8 * 10^5 L_{\odot}$$

Mit $0.083 M_{\odot}$ befindet sich der Stern am untersten Ende (am leichtesten/kleinsten) in der Hauptreihe. Diese Sterne haben eine Leuchtkraft, die um mehr als 3 Größenordnungen unter der der Sonne liegen kann (sind also viel dunkler als die entsprechende Eddington-Leuchtkraft).

Der Strahlungsdruck spielt bei so kleinen Sternen keine große Rolle, das tut er im Allgemeinen erst bei größeren Sternen mit $m > 150 M_{\odot}$ (welche dadurch dann instabil werden).