**Benedikt Sander**
**Tahir Kamcili**
**Matthias Maile**

**Astroteilchenphysik**
**Sommersemester 2020**

# 4. Übungsblatt

## Aufgabe 12

a) Für die Bestimmung der Hubble-Konstante $H_0$ gibt es zwei Methoden, welche allerdings zwei abweichende Ergebnisse liefert.
Eine Methode ist es, mit der kosmischen Hintergrundstrahlung die Hubble Konstante zu ermittlen. Dabei erhält man einen Wert für $H_0$:

$$H_0 = 66.6 \ km \ s^{-1} Mpc^{-1}$$

Eine andere Methode ist es, von einem entfernten Objekt mit der kosmischen Abstandsleiter die Distanz zu bestimmen und dann ausgehend von der Distanz und der Rotverschiebung die Hubble-Konstante zu errechnen.
Damit erhält man einen (vom vorherigen Wert stark abweichenden) Wert:

$$H_0 = 74.03 \ km \ s^{-1} Mpc^{-1}$$

Die Differenz zwischen den Werten ist sehr signifikant, und bei der Präzision der Messungen auch nicht mit Messfehlern erklärbar.
Da der Hubble-Parameter nicht konstant ist, könnte man eine solche Differenz mit dieser zeitlichen Abhängigkeit erklären. Allerdings weichen die Messwerte auch bei gleichen Messzeiträumen ab. Daher muss es noch weitere Effekte geben, welche noch nicht im kosmologischen Standartmodel einbezogen werden.

Aus dem Zusammenhang $v = H_0 d$ lässt sich das Alter des Universums $t_0$ abschätzen:

$$\begin{aligned} v &= H_0 d \\ \int_0^{t_0} v \ dt &= \int_0^{t_0} H_0 d \ dt \\ d &= t_0 \cdot H_0 d \\ \Rightarrow t_0 &= \frac{1}{H_0} \end{aligned}$$

Mit dieser Abschäzung erhalten wir für die eben genannten Werte:

| | |
|---|---|
| Hintergrund-Strahlung | $t_0 = \frac{1}{66.6} \cdot 3.09 \cdot 10^{19} s = 14.8 * 10^9$ Jahre |
| Distanzleiter | $t_0 = \frac{1}{74.03} \cdot 3.09 \cdot 10^{19} s = 13.4 * 10^9$ Jahre |

b) Aus der Kosmischen Rotverschiebung folgen $a(t)$ und $\dot{a}(t)$:

$$a(t) \cdot (1+z) = a_0 \Rightarrow a(t) = \frac{a_0}{1+z}$$
$$d_t a(t) = a_0 \frac{d_t z}{(1+z)^2}$$

Setzen wir das in $H$ ein erhalten wir:

$$H(a(t)) = \frac{d_t a}{a} = \frac{1+z}{a+0}\frac{d_t z \cdot a_0}{(1+z)^2}$$
$$= \frac{d_t z}{1+z} \tag{1}$$

Aus der ersten Friedmann-Gleichung folgt zudem der Zusammenhang zwischen dem Hubble-Parameter $H$ und der kosmischen Rotverschiebung $z$:

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_{\text{Masse}}(1+z)^3 + \Omega_{\text{Strahlung}}(1+z)^4 + \Omega_{\text{Dunkle Energie}}}$$

Wenn wir diesen Ausdruck mit dem aus (1) gleichsetzen erhalten wir den differentiellen Zusammenhang zwischen der Zeit und der kosmischen Rotverschiebung:

$$\begin{aligned}
\frac{d_t z}{1+z} &\overset{!}{=} H(z) = H_0\sqrt{\Omega_{\text{Masse}}(1+z)^3 + \Omega_{\text{Strahlung}}(1+z)^4 + \Omega_{\text{Dunkle Energie}}} \\
\frac{dz}{dt} &= H_0\sqrt{\Omega_{\text{Masse}}(1+z)^5 + \Omega_{\text{Strahlung}}(1+z)^6 + \Omega_{\text{Dunkle Energie}}(1+z)^2} \\
dt &= \frac{dz}{H_0\sqrt{\Omega_{\text{Masse}}(1+z)^5 + \Omega_{\text{Strahlung}}(1+z)^6 + \Omega_{\text{Dunkle Energie}}(1+z)^2}}
\end{aligned}$$

c) Die Vereinfachung, das Universum bestehe nur aus Materie liefert uns:

$$\Omega_{\text{Masse}} = 1 \quad \Omega_{\text{Strahlung}} = 0 \quad \Omega_{\text{Dunkle Energie}} = 0$$

Damit können wir das Alter des Universums berechnen:

$$\begin{aligned}
t_0 &= \int_0^{t_0} dt = \int_{z(t=0)}^{z=z(t=t_0)} \frac{dz}{H_0\sqrt{\Omega_{\text{Masse}}(1+z)^5 + \Omega_{\text{Strahlung}}(1+z)^6 + \Omega_{\text{Dunkle Energie}}(1+z)^2}} \\
&= \int_{z(t=0)}^{z=z(t=t_0)} \frac{dz}{H_0\sqrt{(1+z)^5}} \\
&= \frac{1}{H_0}\left[\frac{-1}{1.5}(1+z)^{-1.5}\right]_{z(t=0)}^{z=z(t=t_0)} \\
&= \frac{1}{H_0}\left[\frac{-1}{1.5}\left(\frac{R(t)}{R(t_0)}\right)^{1.5}\right]_{t=0}^{t=t_0} \\
&= \frac{1}{H_0}\left(\frac{-1}{1.5}\underbrace{\left(\frac{R(0)}{R(t_0)}\right)^{1.5}}_{=0} - \frac{-1}{1.5}\underbrace{\left(\frac{R(t_0)}{R(t_0)}\right)^{1.5}}_{=1}\right) \\
&= \frac{2}{3H_0}
\end{aligned}$$

Für die zwei Messwerte von $H_0$ erhalten wir dann:

| | |
|---|---|
| Hintergrund-Strahlung | $t_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{66.6} \cdot 3.09 \cdot 10^{19}s = 9.87 * 10^9$ Jahre |
| Distanzleiter | $t_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{74.03} \cdot 3.09 \cdot 10^{19}s = 8.93 * 10^9$ Jahre |

d) Wenn wir für die Verhältnisse jedoch die Ergebnisse der Planck-Mission einsetzen, erhalten wir:

$$\Omega_{\text{Masse}} = 0.315 \quad \Omega_{\text{Strahlung}} \approx 0 \quad \Omega_{\text{Dunkle Energie}} = 0.685$$

Mit dem selben Ansatz wie in c) lässt sich damit das Alter des Universums bestimmen:

$$\begin{aligned} t_0 &= \int_0^{t_0} dt = \int_{z(t=0)}^{z=z(t=t_0)} \frac{dz}{H_0\sqrt{\Omega_{\text{Masse}}(1+z)^5 + \Omega_{\text{Strahlung}}(1+z)^6 + \Omega_{\text{Dunkle Energie}}(1+z)^2}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dz}{H_0\sqrt{0.315(1+z)^5 + 0.685(1+z)^2}} \end{aligned}$$

mit der numerischen Lösung

$$t_0 = 0.951 \cdot \frac{1}{H_0}$$

Damit folgen zwei Möglichkeiten für das Alter des Universums:

| | |
|---|---|
| Hintergrund-Strahlung | $t_0 = 0.951 \cdot \frac{1}{66.6} \cdot 3.09 \cdot 10^{19} s = 14.07 * 10^9$ Jahre |
| Distanzleiter | $t_0 = 0.951 \cdot \frac{1}{74.03} \cdot 3.09 \cdot 10^{19} s = 12.74 * 10^9$ Jahre |