Matthias Maile

7. Übungsblatt

Aufgabe 25

Der Abstand zum Punkt $\vec{p}$ ist gegeben durch

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}$$

Da dieser minimiert bzw. maximiert werden soll, kann, aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion, zur Berechnung von Extrema auch die Wurzel weggelassen werden:

$$d'(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-3)^2$$

Die Nebenbedingung ist dabei, dass der Punkt auf dem Ellipsoid liegen soll:

$$E(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0$$

Dann folgt aus dem notwendigen Kriterium ein Extremum bei $\vec{a}$, sofern

$$\nabla d'(\vec{a}) - \lambda \nabla E(\vec{a}) = \vec{0},\ E(\vec{a}) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla E(\vec{a}) \neq \vec{0}$$

erfüllt sind. Die rechte Gleichung liefert uns als einzigen Ausnahmepunkt den Ursprung, welcher nicht auf der Ellipse liegt (und damit nicht weiter beachtet werden muss):

$$\nabla E(\vec{a}) = (2x,\ 4y,\ 8z) \stackrel{!}{=} (0,0,0) \Rightarrow \nabla E(\vec{0}) = \vec{0}$$

Damit lässt sich das Gleichungssystem aufstellen:

$$\nabla d'(\vec{a}) - \lambda \nabla E(\vec{a}) = \vec{0} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} 2x - \lambda 2x &= 0 \\ 2y - \lambda 4y &= 0 \\ 2x - 6 - \lambda 8z &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Die ersten 3 Zeilen liefern 3 Kandidaten für λ:

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad \lambda_3 = \frac{-3}{4z} + \frac{1}{4}$$

Damit lassen sich 3 Fälle aufstellen:
1. Fall: $\lambda_3 = \lambda_1,\ y = 0,\ x$ variabel

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 &\stackrel{!}{=} \frac{-3}{4z} + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow z &= -1 \end{aligned}$$

2. Fall: $\lambda_3 = \lambda_2\ x = 0,\ y$ variabel

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \frac{1}{2} &\stackrel{!}{=} \frac{-3}{4z} + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow z &= -3 \end{aligned}$$

Da dies gegen unsere Randbedingung verstößt (liegt nicht auf dem Parabolloid), ist dies keine Lösung.
3. Fall: $x = y = 0,\ z$ variabel

$$\begin{aligned} E(0,0,z) &= 4z^2 - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow z^2 &= 2 \quad \Rightarrow z = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Für den 1. Fall lässt sich x bestimmen:

$$E(x,0,-1) = x^2 + 4 - 8 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Damit existieren Mehrere mögliche Extrema:

$$\vec{a}_{1/2} = \begin{pmatrix} \pm 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_{3/4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Setzen man diese in unsere Distanzformel $d(x,y,z)$ ein, erhalten wir die Werte:

$$\begin{aligned} d_1 &= d(\vec{a}_1) = \sqrt{20} \\ d_2 &= d(\vec{a}_2) = \sqrt{20} \\ d_3 &= d(\vec{a}_3) \approx 1.59 \\ d_4 &= d(\vec{a}_4) = \sqrt{8} \end{aligned}$$

Somit liegt die Minimale Distanz $d_{\min} \approx 1.59$ am Punkt $(0,0,\sqrt{2})$, und die maximale Distanz $d_{\max} = \sqrt{20}$ an den Punken $(\pm 2, 0, -1)$ vor.

Aufgabe 26

a) Damit das Integral berechnet werden kann, teile ich es in einen Bereich A $0 \leq x < 1$ und einen Zweiten B $1 \leq x \leq 2$ auf.

$$\begin{aligned} \int_D \frac{y^2}{x^2} d(x,y) &= \int_A \frac{y^2}{x^2} d(x,y) + \int_B \frac{y^2}{x^2} d(x,y) \\ &= \int_0^1 \int_0^x \frac{y^2}{x^2}\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{y^2}{x^2}\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2} \frac{x^3}{3}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} \frac{1}{3x^3}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{3}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{3x^5}\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{6}\right]_0^1 + \frac{1}{3} \left[\frac{-1}{4x^4}\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \frac{1}{16} \\ &= \frac{47}{16} \frac{1}{12} \end{aligned}$$

b) Nach dem Satz von Fubini dürfen die Integrale vertauscht werden.

$$\begin{aligned}
\int_G (x+y+z)d(x,y,z) &= \int_0^{xy}\int_x^1\int_0^1 (x+y+z)\ dxdydz \\
&= \int_0^1\int_x^1\int_0^{xy} (x+y+z)\ dzdydx \\
(\text{HS}) \Rightarrow &= \int_0^1\int_x^1 \left[zx+zy+\frac{1}{2}z^2\right]_0^{xy} dydx \\
&= \int_0^1\int_x^1 \left[x^2y+xy^2+\frac{1}{2}x^2y^2\right] dydx \\
(\text{HS}) \Rightarrow &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}xy^3+\frac{1}{6}x^2y^3\right]_x^1 dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{6}x^5\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{6}x^5-\frac{1}{6}x^4+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x\right] dx \\
(\text{HS}) \Rightarrow &= \left[\frac{1}{36}x^6-\frac{1}{30}x^5+\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{36}-\frac{1}{30}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6} \\
&= \frac{9}{36}+\frac{4}{30} \\
&= \frac{1}{4}+\frac{2}{15}
\end{aligned}$$