

# 1. Übungsblatt

---

## Aufgabe 1

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Zu Beginn schon die ersten drei Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad f''(x) = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} \quad f'''(x) = \frac{11 - 6 \ln x}{x^4}$$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{Regel von l'Hospital} \Rightarrow = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

b) Damit wir mögliche Kandidaten für die Extremstellen von  $f$  erhalten benutze ich das notwendige Kriterium  $f'(x_0) = 0$ :

$$f'(x_0) = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = e$$

Zur Überprüfung wird das Hinreichende Kriterium  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) \neq 0$  angewendet:

$$f''(x_0) = f''(e) = \frac{-3e + 2e * \ln e}{e^4} = -e^{-3}$$

durch einsetzen von  $x_0 = e$  in die Funktion  $f$  erhalten die Position des Maximums:

$$f(x_0) = f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} > 0 > -\infty$$

da sich  $f$  bei den Randstellen 0 bzw.  $-\infty$  annähert, liegt bei  $(e, f(e))$  ein globales Maximum.

c) Da  $f'$  stetig auf  $(0, \infty)$  ist, können wir mit der Nullstelle aus b) und einsetzen von Werten im jeweiligen Intervall herausfinden:

$$x \in (0, e) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad x = e \Rightarrow f'(x) = 0 \quad x \in (e, \infty) \Rightarrow f'(x) < 0$$

Daraus lässt sich direkt auf die Monotonie schließen:

$$x \in (0, e) \Rightarrow f \text{ streng monoton steigend}$$

$$x \in (e, \infty) \Rightarrow f \text{ streng monoton fallend}$$

(Durch einschließen von  $e$  in den Intervallen wäre  $f$  monoton fallend bzw. steigend.)

d) Für die Wendepunkte wird das notwendige Kriterium angewendet:

$$\begin{aligned}f''(x_0) = 0 &\Rightarrow \frac{-3 + 2 \ln x_0}{x_0^3} = 0 \\&\Leftrightarrow \ln x_0 = 1.5 \\&\Leftrightarrow x_0 = e^{1.5}\end{aligned}$$

Die Überprüfung mit dem hinreichenden Kriterium  $f''(x_0) = 0, f^{(3)} \neq 0$ :

$$f^{(3)}(x_0) = \frac{11 - 6 * \ln(e^{1.5})}{e^{4*1.5}} = \frac{2}{e^6} \neq 0 \implies (e^{1.5}, f(e^{1.5})) \text{ ist ein Wendepunkt}$$

## Aufgabe 2

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1 + \ln x)$$

aus Ketten- und Produktregel folgen die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x(1 + \ln x)} \\ f''(x) &= \frac{-2 - \ln x}{x^2 * (1 + \ln x)^2} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2 \ln^2(x) + 7 \ln(x) + 7}{x^3 (\ln(x) + 1)^3} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{6 \ln^3(x) + 29 \ln^2(x) + 52 \ln(x) + 35}{x^4 (\ln(x) + 1)^4} \end{aligned}$$

Das  $n$ -te Taylorpolynom am Entwicklungspunkt  $x_0$  ist definiert durch

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Daraus ergibt sich bei der  $f$  am Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$ :

$$T_0(x; 1) = f(1) = \ln(1 + \ln 1) = \ln 1 = 0$$

$$T_1(x; 1) = T_0(x; 1) + f'(1) * (x - 1) = 0 + (x - 1) * 1 = x - 1$$

$$T_2(x; 1) = T_1(x; 1) + \frac{f''(1)}{2} * (x - 1)^2 = x - 1 + (-1) * (x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 3x - 2$$

$$T_3(x; 1) = T_2(x; 1) + \frac{f^{(3)}(1)}{6} * (x - 1)^3 = -x^2 + 3x - 2 + \frac{7}{6} * (x - 1)^3 = \frac{7}{6}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{13}{2}x - \frac{19}{6}$$

Das Restglied von Lagrange lautet nach der Taylorsche Formel:

$$\begin{aligned} R_n(x, x_0) &:= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \\ \Rightarrow R_3(x, 1) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} * (x - 1)^4 \\ &= -\frac{6 \ln^3(\xi) + 29 \ln^2(\xi) + 52 \ln(\xi) + 35}{\xi^4 (\ln(\xi) + 1)^4} * \frac{(x - 1)^4}{24} \end{aligned}$$

mit einer Stelle  $\xi = x_0 + \alpha(x - x_0)$  und  $\alpha \in (0, 1)$ .