Matthias Maile

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Zu Beginn schon die ersten drei Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} \qquad f'''(x) = \frac{11 - 6\ln x}{x^4}$$

a)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$$
$$\text{Regel von l'Hospital} \Rightarrow = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

b) Damit wir mögliche Kandidaten für die Extremstellen von f erhalten benutze ich das notwendige Kriterium $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x_0) = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = e$$

Zur Überprüfung wird das Hinreichende Kriterium $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) \neq 0$ angewendet:

$$f''(x_0) = f''(x_0) = \frac{-3e + 2e * \ln e}{e^4} = -e^{-3}$$

durch einsetzen von $x_0 = e$ in die Funktion f erhalten die Position des Maximums:

$$f(x_0) = f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} > 0 > -\infty$$

da sich f bei den Randstellen 0 bzw. $-\infty$ annähert, liegt bei $(e, f(e))$ ein globales Maximum.

c) Da f' stetig auf $(0, \infty)$ ist, können wir mit der Nullstelle aus b) und einsetzen von Werten im jeweiligen Intervall herausfinden:

$$x \in (0, e) \Rightarrow f'(x) > 0 \qquad x = e \Rightarrow f'(x) = 0 \qquad x \in (e, \infty) \Rightarrow f'(x) < 0$$

Daraus lässt sich direkt auf die Monotonie schließen:

$$x \in (0, e) \Rightarrow f \text{ streng monoton steigend}$$
$$x \in (e, \infty) \Rightarrow f \text{ streng monoton fallend}$$

(Durch einschließen von e in den Intervallen wäre f monoton fallend bzw. steigend.)

d) Für die Wendepunkte wird das notwendige Kriterium angewendet:

$$\begin{aligned} f''(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{-3 + 2\ln x_0}{x_0^3} &= 0 \\ \Leftrightarrow \ln x_0 &= 1.5 \\ \Leftrightarrow x_0 &= e^{1.5} \end{aligned}$$

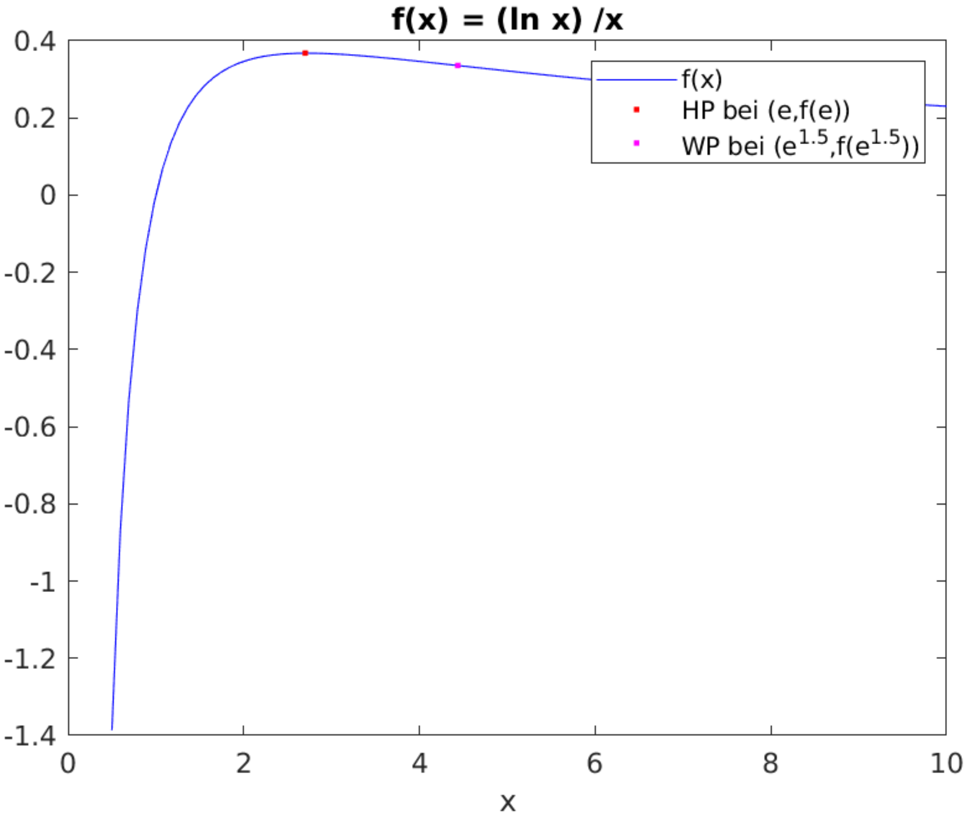
Die Überprüfung mit dem hinreichenden Kriterium $f''(x_0) = 0, f^{(3)} \neq 0$:

$$f^{(3)}(x_0) = \frac{11 - 6 * \ln(e^{1.5})}{e^{4*1.5}} = \frac{2}{e^6} \neq 0 \Longrightarrow (e^{1.5}, f(e^{1.5})) \text{ ist ein Wendepunkt}$$

Da im intervall bei $x = e^{1.5}$ der einzige Hochpunkt von f liegt, muss der Graph von f auf dem Intervall $(0, e^{1.5})$ konkav sein.
Beim Wendepunkt ist die 3. Ableitung positiv. Die 1. Ableitung hat an der Stelle also einen Tiefpunkt, muss danach also wieder steigen. Somit ist f für $x \in (e^{1.5}, \infty)$ konvex.

$$\begin{aligned} x \in (0, e^{1.5}) &\Rightarrow f \text{ konkav} \\ x \in (e^{1.5}, \infty) &\Rightarrow f \text{ konvex} \end{aligned}$$

e)



Aufgabe 2

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1+\ln x)$$

aus Ketten- und Produktregel folgen die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x(1+\ln x)} \\
f''(x) &= \frac{-2-\ln x}{x^2 * (1+\ln x)^2} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{2\ln^2(x) + 7\ln(x) + 7}{x^3\left(\ln(x)+1\right)^3} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6\ln^3(x) + 29\ln^2(x) + 52\ln(x) + 35}{x^4\left(\ln(x)+1\right)^4}
\end{aligned}$$

Das n-te Taylorpolynom am Entwicklungspunkt x_0 ist definiert durch

$$T_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Daraus ergibt sich bei der f am Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
&T_0(x;1) = f(1) = \ln(1+\ln 1) = \ln 1 = 0 \\
&T_1(x;1) = T_0(x;1) + f'(1) * (x-1) = 0 + (x-1) * 1 = x-1 \\
&T_2(x;1) = T_1(x;1) + \frac{f''(1)}{2} * (x-1)^2 = x - 1 + (-1) * (x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 3x - 2 \\
&T_3(x;1) = T_2(x;1) + \frac{f^{(3)}(1)}{6} * (x-1)^3 = -x^2 + 3x - 2 + \frac{7}{6} * (x-1)^3 = \frac{7}{6}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{13}{2}x - \frac{19}{6}
\end{aligned}$$

Das Restglied von Lagrange lautet nach der Taylorschen Formel:

$$\begin{aligned}
R_n(x,x_0) &:= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\
\Rightarrow R_3(x,1) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} * (x-1)^4 \\
&= -\frac{6\ln^3(\xi) + 29\ln^2(\xi) + 52\ln(\xi) + 35}{\xi^4\left(\ln(\xi)+1\right)^4} * \frac{(x-1)^4}{24}
\end{aligned}$$

mit einer Stelle $\xi = x_0 + \alpha(x-x_0)$ und $\alpha \in (0,1)$.