Matthias Maile

4. Übungsblatt

Aufgabe 13

a) Faktorisierung der Funktion:

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$
$$\Leftrightarrow x = A(x+1)^2 + B(x+1) + C \quad \Rightarrow A = 0 \text{ Für gleichheit beider Seiten muss Grad gleich sein}$$
$$\Rightarrow x = B \cdot x + B + C \quad \Rightarrow B = -C,\ B = 1 \Rightarrow C = -1$$
$$\Rightarrow \frac{x}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$$

Dann lässt sich das Integral evaluieren:

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x+1)^3}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\right)\,dx$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$$
$$\text{Skript S.346} \Rightarrow = \left[-\frac{1}{x+1} + c\right]_0^\infty - \left[-\frac{1}{2(x+1)^2} + d\right]_0^\infty$$
$$= -0 + 1 + 0 - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

b)

$$\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx \qquad u := x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$
$$= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arsinh}(u) + c\right]_0^\infty$$
$$\Rightarrow \operatorname{arsinh}(u) \text{ divergiert für } u \to \infty$$

Somit existiert das Integral nicht.

c)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{1}{e^x - 1}\, dx \quad u := e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u} \\
&= \int_1^e \frac{du}{u \cdot (u-1)}
\end{aligned}
$$

Dieser Bruch kann mit einer Partialbruchzerlegung ausgewertet werden:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{u \cdot (u-1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u} \\
&\Leftrightarrow 1 = A \cdot u + B \cdot (u-1) \ \Rightarrow A = 1,\ B = -1
\end{aligned}
$$

Einsetzen ins Integral:

$$
\begin{aligned}
\int_1^e \frac{du}{u \cdot (u-1)} &= \int_1^e \frac{du}{u-1} - \int_1^e \frac{du}{u} \\
&= [\ln|u-1| - \ln(u)]_1^e \\
&= \ln\left(\frac{u-1}{u}\right)_1^e \\
&= \ln\left(\frac{e-1}{e}\right) - \underbrace{\ln\left(\frac{1-1}{1}\right)}_{\ln 0 \to -\infty}
\end{aligned}
$$

Da im letzten Schritt der $\ln 0$ bestimmt werden soll (oder durch eine andere Darstellung eine 0-Division auftritt, ist das Integral nicht definiert.

Aufgabe 14

a) Gegeben war die Reihe

$$
\sum_2^\infty \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}
$$

Mit dem Integralkriterium lässt sich die Divergenz feststellen:

$$
\begin{aligned}
&\int_{n_0}^\infty \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}\, dn \qquad u := \ln(n) \Rightarrow dn = n \cdot du \\
&\Rightarrow= \int_{\ln n_0}^\infty \frac{n \cdot du}{n \cdot u \cdot \ln(u)} \qquad z := \ln(u) \Rightarrow du = u \cdot dz \\
&\Rightarrow= \int_{\ln(\ln n_0)}^\infty \frac{u\ dz}{u \ln(z)} \\
&= \int_{\ln(\ln n_0)}^\infty \frac{dz}{z} \\
\text{Hauptsatz}\ &\Rightarrow= [\ln z]_{\ln(\ln n_0)}^\infty = \infty - \ln(\ln n_0) = \infty
\end{aligned}
$$

Da das unbestimmte Integral für alle n_0 divergiert muss auch die Reihe divergieren.

b) Gegeben war die Reihe

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln^2(\ln n)}$$

Mit dem Integralkriterium lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned}
&\int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln^2(\ln(n))}\ dn && u := \ln(n) \Rightarrow dn = n \cdot du \\
\Rightarrow= &\int_{\ln n_0}^{\infty} \frac{n \cdot du}{n \cdot u \cdot \ln^2(u)} && z := \ln(u) \Rightarrow du = u \cdot dz \\
\Rightarrow= &\int_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} \frac{u\ dz}{u \ln^2(z)} \\
= &\int_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} \frac{dz}{z^2} \\
\text{Hauptsatz} \ \Rightarrow= &\left[\frac{-1}{z}\right]_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} = 0 - \frac{-1}{\ln(\ln(n_0))} = \frac{1}{\ln(\ln(n_0))}
\end{aligned}$$

Da das Integral für $n_0 > 1$ bestimmt ist, ist die Reihe konvergent.