

3. Übungsblatt

 $PI \Leftrightarrow$ Partielle Integration $KR \Leftrightarrow$ Kettenregel $SU \Leftrightarrow$ Substitution

Aufgabe 9

a) i)

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 (e^{3x} - \sqrt[3]{e^x}) dx &= \int_0^3 (e^{3x} - e^{\frac{x}{3}}) dx \\
 &= \int_0^3 e^{3x} dx - \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} e^{3x} + C \right]_0^3 - \left[3e^{\frac{x}{3}} + D \right]_0^3 \\
 &= \left(\frac{e^9}{3} + C - \frac{e^0}{3} - C \right) - (3e + D - 3e^0 - D) \\
 &= \frac{e^9}{3} - \frac{1}{3} - 3e + 3 \\
 &= \frac{e^9 - 9e + 8}{3}
 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot(x) \ln(\sin x) dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} \ln(\sin x) dx \\
 u := \sin(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos(x) \Rightarrow dx &= \frac{du}{\cos(x)} \Rightarrow \stackrel{SU}{=} \int_{\sin \frac{\pi}{6}}^{\sin \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} \ln(\sin x) \frac{du}{\cos x} \\
 &= \int_{\sin \frac{\pi}{6}}^{\sin \frac{\pi}{3}} \frac{1}{u} \ln(u) du \\
 \int g(x) g'(x) dx &\stackrel{KR}{=} \frac{1}{2} (g(x))^2 + C \Rightarrow = \frac{1}{2} (\ln(u))^2 + C \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
 &= \frac{\ln^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \ln^2 \left(\frac{1}{2} \right)}{2}
 \end{aligned}$$

b) i)

$$\begin{aligned}
 \int x \ln^2(x) dx &\stackrel{\text{PI, KR}}{=} \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + C - \frac{1}{2} \int x^2 * 2 \ln x \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + C - \int x \ln x dx \\
 &\stackrel{\text{PI}}{=} \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + C - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + C - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \int \frac{1}{2} x dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{4} \right) + C
 \end{aligned}$$

Da der $\ln x$ nur im Reellen nur für positive x definiert ist, gilt die eben bestimmte Stammfunktion nur für $x \in (0, \infty)$.

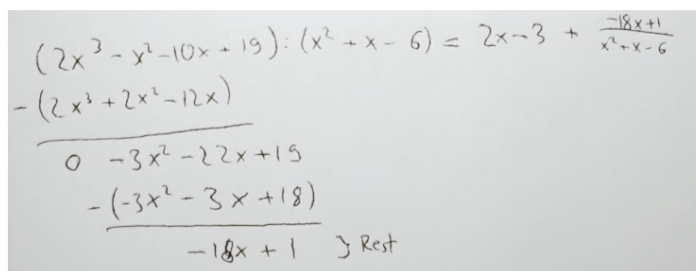
ii)

$$\begin{aligned}
 \int e^{-x} \cos(5x) dx &\stackrel{\text{PI}}{=} -e^{-x} \cos(5x) + C - \int e^{-x} * (-5) \sin(5x) dx \\
 &= -e^{-x} \cos(5x) + C + 5 \int e^{-x} \sin(5x) dx \\
 &\stackrel{\text{PI}}{=} -e^{-x} \cos(5x) + C - 5e^{-x} \sin(5x) - 5 \int e^{-x} * 5 \cos(5x) dx \\
 \Rightarrow \int e^{-x} \cos(5x) dx &= -e^{-x} \cos(5x) + C - 5e^{-x} \sin(5x) - 25 \int e^{-x} \cos(5x) dx \quad | + \left(25 \int e^{-x} \cos(5x) dx \right) \\
 \Leftrightarrow 26 \int e^{-x} \cos(5x) dx &= -e^{-x} \cos(5x) + C - 5e^{-x} \sin(5x) \\
 \Leftrightarrow \int e^{-x} \cos(5x) dx &= \frac{-e^{-x} \cos(5x) - 5e^{-x} \sin(5x)}{26} + D
 \end{aligned}$$

Gültig für $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 10

a) 1. Schritt: Polynomdivision (Grad der Fkt. im Zähler < Grad der Fkt. im Nenner)



$$\begin{array}{r}
 (2x^3 - x^2 - 10x + 19) : (x^2 + x - 6) = 2x - 3 + \frac{-18x + 1}{x^2 + x - 6} \\
 \underline{-(2x^3 + 2x^2 - 12x)} \\
 0 - 3x^2 - 22x + 19 \\
 \underline{-(-3x^2 - 3x + 18)} \\
 -18x + 1 \quad \text{Rest}
 \end{array}$$

2. Schritt: Faktorisierung des Nenner-Polynoms

$$x^2 + x - 6 = (x + 3) * (x - 2)$$

3. Schritt: Partialbruchzerlegung Wie nehmen dafür den Rest der Polynomdivision:

$$\begin{aligned}\frac{-18x+1}{(x+3)(x-2)} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \\ \Rightarrow -18x+1 &= A*(x-2) + B*(x+3)\end{aligned}$$

Das liefert uns das LGS:

$$\begin{aligned}A+B &= -18 \Rightarrow A = -18-B \\ -2A+3B &= 1 \Rightarrow -2*(-18-B) + 3B = 36 + 5B = 1 \Rightarrow B = -7, A = 25\end{aligned}$$

Damit verbleibt das Integral:

$$\int \left(2x - 3 + \frac{25}{x+3} - \frac{7}{x-2} \right) dx = x^2 - 3x + 25 \ln|x+3| - 7 \ln|x-2| + C$$

b) Grad des Polynoms im Nenner ist größer als Grad des Zählerpolynoms, ist dazu in faktorisierte Form gegeben.

Partialbruch-Zerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-1)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \\ x &= A(x-1)^2 + B(x-1) + C \Rightarrow A=0 \quad \begin{array}{l} A \neq 0 \text{ impliziert ein Polynom auf der rechten Seite,} \\ \text{die linke Seite ist linear} \end{array} \\ x &= Bx - B + C \Rightarrow B = C = 1 \\ \Rightarrow \frac{x}{(x-1)^3} &= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung lässt sich mit der Formel

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$$

integrieren:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{x}{(x-1)^3} dx &= \int_2^5 \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \right) dx \\ &= \int_2^5 \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_2^5 \frac{1}{(x-1)^3} dx \\ &= \left[-\frac{1}{(2-1)*(x-1)^1} + C \right]_2^5 + \left[-\frac{1}{(3-1)(x-1)^2} + D \right]_2^5 \\ &= \left[\frac{-1}{x-1} + C \right]_2^5 + \left[\frac{-1}{2(x-1)^2} + D \right]_2^5 \\ &= \frac{-1}{4} - \frac{-1}{1} + \frac{-1}{2*16} - \frac{-1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{32} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{39}{32}\end{aligned}$$