Matthias Maile

3. Übungsblatt

Aufgabe 13

a) Faktorisierung der Funktion:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{(x+1)^3} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} \\
&\Leftrightarrow x = A(x+1)^2 + B(x+1) + C \quad \Rightarrow A = 0 \ \text{Für gleichheit beider Seiten muss Grad gleich sein} \\
&\Rightarrow x = B \cdot x + B + C \quad \Rightarrow B = -C,\ B = 1 \Rightarrow C = -1 \\
\Rightarrow \frac{x}{(x+1)^3} &= \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}
\end{aligned}
$$

Dann lässt sich das Integral evaluieren:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x}{(x+1)^3}\, dx &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\, dx - \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3}\, dx \\
\text{Skript S.346} \Rightarrow &= \left[-\frac{1}{x+1} + c \right]_0^\infty - \left[-\frac{1}{2(x+1)^2} + d \right]_0^\infty \\
&= -0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\, dx \qquad u := x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \\
=&\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\, du \\
=&\frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\, du \\
=&\frac{1}{2} \left[\operatorname{arsinh}(u) + c \right]_0^\infty \\
\Rightarrow&\operatorname{arsinh}(u) \text{ divergiert für } u \to \infty
\end{aligned}
$$

Somit existiert das Integral nicht.

c)

Aufgabe 14