

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Zu Beginn schon die ersten drei Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad f''(x) = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} \quad f'''(x) = \frac{11 - 6 \ln x}{x^4}$$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{Regel von l'Hospital} \Rightarrow = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

b) Damit wir mögliche Kandidaten für die Extremstellen von f erhalten benutze ich das notwendige Kriterium $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x_0) = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = e$$

Zur Überprüfung wird das Hinreichende Kriterium $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ angewendet:

$$f''(x_0) = f''(e) = \frac{-3e + 2e * \ln e}{e^4} = -e^{-3}$$

durch einsetzen von $x_0 = e$ in die Funktion f erhalten die Position des Maximums:

$$f(x_0) = f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} > 0 > -\infty$$

da sich f bei den Randstellen 0 bzw. $-\infty$ annähert, liegt bei $(e, f(e))$ ein globales Maximum.

c) Da f' stetig auf $(0, \infty)$ ist, können wir mit der Nullstelle aus b) und einsetzen von Werten im jeweiligen Intervall herausfinden:

$$x \in (0, e) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad x = e \Rightarrow f'(x) = 0 \quad x \in (e, \infty) \Rightarrow f'(x) < 0$$

Daraus lässt sich direkt auf die Monotonie schließen:

$$x \in (0, e) \Rightarrow f \text{ streng monoton steigend}$$

$$x \in (e, \infty) \Rightarrow f \text{ streng monoton fallend}$$

(Durch einschließen von e in den Intervallen wäre f monoton fallend bzw. steigend.)

d) Für die Wendepunkte wird das notwendige Kriterium angewendet:

$$\begin{aligned}f''(x_0) = 0 &\Rightarrow \frac{-3 + 2 \ln x_0}{x_0^3} = 0 \\&\Leftrightarrow \ln x_0 = 1.5 \\&\Leftrightarrow x_0 = e^{1.5}\end{aligned}$$

Die Überprüfung mit dem hinreichenden Kriterium $f''(x_0) = 0, f^{(3)} \neq 0$:

$$f^{(3)}(x_0) = \frac{11 - 6 * \ln(e^{1.5})}{e^{4*1.5}} = \frac{2}{e^6} \neq 0 \implies (e^{1.5}, f(e^{1.5})) \text{ ist ein Wendepunkt}$$

Aufgabe 2

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1 + \ln x)$$

aus Ketten- und Produktregel folgen die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x(1 + \ln x)} \\ f''(x) &= \frac{-2 - \ln x}{x^2 * (1 + \ln x)^2} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2 \ln^2(x) + 7 \ln(x) + 7}{x^3 (\ln(x) + 1)^3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

Das n -te Taylorpolynom am Entwicklungspunkt x_0 ist definiert durch

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Daraus ergibt sich bei der f am Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} T_0(x; 1) &= f(1) = \ln(1 + \ln 1) = \ln 1 = 0 \\ T_1(x; 1) &= T_0(x; 1) + f'(1) * (x - 1) = 0 + (x - 1) * 1 = x - 1 \end{aligned}$$