**Matthias Maile**



# 3. Übungsblatt

$PI \Leftrightarrow$ Partielle Integration $\quad KR \Leftrightarrow$ Kettenregel $\quad SU \Leftrightarrow$ Substitution

## Aufgabe 9

a) i)

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \left(e^{3x} - \sqrt[3]{e^x}\right) dx &= \int_0^3 \left(e^{3x} - e^{\frac{x}{3}}\right) dx \\
&= \int_0^3 e^{3x} dx - \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx \\
&= \left[\frac{1}{3}e^{3x} + C\right]_0^3 - \left[3e^{\frac{x}{3}} + D\right]_0^3 \\
&= \left(\frac{e^9}{3} + C - \frac{e^0}{3} - C\right) - \left(3e + D - 3e^0 - D\right) \\
&= \frac{e^9}{3} - \frac{1}{3} - 3e + 3 \\
&= \frac{e^9 - 9e + 8}{3}
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot(x)\ln(\sin x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} \ln(\sin x) dx \\
u := \sin(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos(x)} \Rightarrow \quad & \overset{\text{SU}}{=} \int_{\sin\frac{\pi}{6}}^{\sin\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} \ln(\sin x) \frac{du}{\cos x} \\
& = \int_{\sin\frac{\pi}{6}}^{\sin\frac{\pi}{3}} \frac{1}{u} \ln(u) du \\
\int g(x)g'(x)dx \overset{KR}{=} \frac{1}{2}\left(g(x)\right)^2 + C \Rightarrow \quad & = \frac{1}{2}\left(\ln(u)\right)^2 + C\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
& = \frac{\ln^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}
\end{aligned}$$

b) i)

$$\begin{aligned}
\int x\ln^2(x)dx &\overset{\text{PI, KR}}{=} \frac{1}{2}x^2\ln^2 x + C - \frac{1}{2}\int x^2 * 2\ln x\frac{1}{x}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x + C - \int x\ln x dx \\
&\overset{\text{PI}}{=} \frac{1}{2}x^2\ln^2 x + C - \frac{1}{2}x^2\ln x + \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x + C - \frac{1}{2}x^2\ln x + \int \frac{1}{2}xdx \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C \\
&= \frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

Da der $\ln x$ nur im Reellen nur für positive $x$ definiert ist, gilt die eben bestimmte Stammfunktion nur für $x \in (0, \infty)$.

ii)

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\cos(5x)dx &\overset{\text{PI}}{=} -e^{-x}\cos(5x) + C - \int e^{-x} * (-5)\sin(5x)dx \\
&= -e^{-x}\cos(5x) + C + 5\int e^{-x}\sin(5x)dx \\
&\overset{\text{PI}}{=} -e^{-x}\cos(5x) + C - 5e^{-x}\sin(5x) - 5\int e^{-x} * 5\cos(5x)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int e^{-x}\cos(5x)dx &= -e^{-x}\cos(5x) + C - 5e^{-x}\sin(5x) - 25\int e^{-x}\cos(5x)dx \qquad \Big| + \left(25\int e^{-x}\cos(5x)dx\right) \\
\Leftrightarrow 26\int e^{-x}\cos(5x)dx &= -e^{-x}\cos(5x) + C - 5e^{-x}\sin(5x) \\
\Leftrightarrow \int e^{-x}\cos(5x)dx &= \frac{-e^{-x}\cos(5x) - 5e^{-x}\sin(5x)}{26} + D
\end{aligned}$$

Gültig für $x \in \mathbb{R}$

# Aufgabe 10

**a)** 1. Schritt: Polynomdivision (Grad der Fkt. im Zähler < Grad der Fkt. im Nenner)

$$\begin{aligned}
&(2x^3 - x^2 - 10x + 19) : (x^2 + x - 6) = 2x - 3 + \frac{5x+1}{x^2+x-6} \\
&-(2x^2 + 2x - 12x) \\
&\overline{\phantom{-(}0 - 3x^2 + 2x + 19} \\
&\phantom{-(}-(-3x^2 - 3x + 18) \\
&\overline{\phantom{-(}0 \quad 5x + 1}
\end{aligned}$$

2. Schritt: Faktorisierung des Nenner-Polynoms

$$x^2 + x - 6 = (x+3) * (x-2)$$

3. Schritt: Partialbruchzerlegung Wie nehmen dafür den Rest der Polynomdivision:

$$\frac{5x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$
$$\Rightarrow 5x+1 = A*(x-2) + B*(x+3)$$

Das liefert uns das LGS:

$$A + B = 5 \Rightarrow A = 5 - B$$
$$-2A + 3B = 1 \Rightarrow -2*(5-B) + 3B = -10 + 5B = 1 \Rightarrow B = \frac{11}{5},\ A = \frac{14}{5}$$

Damit verbleibt das Integral:

$$\int \left(2x - 3 + \frac{14}{5(x+3)} + \frac{11}{5(x-2)}\right) dx = x^2 - 3x + \frac{14}{5}\ln|x+3| + \frac{11}{5}\ln|x-2| + C$$

**b)** Grad des Polynoms im Nenner ist größer als Grad des Zählerpolynoms, ist dazu in faktorisierter Form gegeben.
Partialbruch-Zerlegung:

$$\frac{x}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$
$$x = A(x-1)^2 + B(x-1) + C \Rightarrow A = 0$$

$A \neq 0$ impliziert ein Polynom auf der rechten Seite, die linke Seite ist linear

$$x = Bx - B + C \Rightarrow B = C = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x}{(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$$

Die Partialbruchzerlegung lässt sich mit der Formel

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$$

integrieren:

$$\begin{aligned}
\int_2^5 \frac{x}{(x-1)^3} dx &= \int_2^5 \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\right) dx \\
&= \int_2^5 \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_2^5 \frac{1}{(x-1)^3} dx \\
&= \left[-\frac{1}{(2-1)*(x-1)^1} + C\right]_2^5 + \left[-\frac{1}{(3-1)(x-1)^2} + D\right]_2^5 \\
&= \left[\frac{-1}{x-1} + C\right]_2^5 + \left[\frac{-1}{2(x-1)^2} + D\right]_2^5 \\
&= \frac{-1}{4} - \frac{-1}{1} + \frac{-1}{2*16} - \frac{-1}{2} \\
&= -\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{32} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{39}{32}
\end{aligned}$$