4. Übungsblatt

Aufgabe 17

a) (i) $$\operatorname{grad} f_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x (2\sin(x) + x\ln(yz)) \\ \partial_y (2\sin(x) + x\ln(yz)) \\ \partial_z (2\sin(x) + x\ln(yz)) \end{pmatrix}$$

(Kettenregel) $$= \begin{pmatrix} 2\cos(x) + \ln(yz) \\ x \cdot \frac{1}{yz} \cdot z \\ x \cdot \frac{1}{yz}\, y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos(x) + \ln(yz) \\ \frac{x}{y} \\ \frac{x}{z} \end{pmatrix}$$

(ii) $$D\vec{f}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(\vec{r}) & \partial_y f_1(\vec{r}) \\ \partial_x f_2(\vec{r}) & \partial_y f_2(\vec{r}) \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \partial_y \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \partial_x \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \partial_y \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

(Quotientenregel) $$= \begin{pmatrix} \frac{+2xy}{x^2+y^2} & \frac{-y^2 + y\cdot 2y}{x^2+y^2} \\ \frac{x^2 - 2x\cdot x}{x^2+y^2} & \frac{-2xy}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} 2xy & 2y^2 \\ -x^2 & -2xy \end{pmatrix}$$

b) i) $g_1(x,y) = 5x^4 + 3y^4$

$$L = Dg_1(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x (5x^4 + 3y^4) \\ \partial_y (5x^4 + 3y^4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20x^3 \\ 12y^3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} = (0,1)$

$$g_1(\vec{a}) = g_1((0,1)) = 3$$

$$L(\vec{a}) = L((0,1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

~~Normalenvektor:~~ $\cancel{\vec{N} = \begin{pmatrix} f_x(\vec{a}) \\ f_y(\vec{a}) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20x^3 \\ 12y^3 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Normalenvektor:

$$\vec{N}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} f_x(\vec{a}) \\ f_y(\vec{a}) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \cdot 0^3 \\ 12 \cdot 1^3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tangential-Ebene:

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

(ii) $g_2(x,y) = x^3 - 5xy + \sin(xy) + y^4$

$$L = Dg_2(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x g_2(x,y) \\ \partial_y g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 5y + y \cdot \sin(xy) \\ -5x + x \cdot \sin(xy) + 4y^3 \end{pmatrix}$$

$g_2(\vec{a}) = 1$ $\Rightarrow$ Normalenvektor:

$$L(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{N}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} f_x(\vec{a}) \\ f_y(\vec{a}) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ebene:

$$E: \left(\vec{p} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

~~$\Rightarrow$ Ebene:~~ $\cancel{E: \left(\vec{p} - \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

Aufgabe 18

a)

$$
\begin{aligned}
D\left(f\vec{g}\right)(\vec{a}) &= \sum_{ij} \partial_{x_j} \left(f\vec{g}\right)_i (\vec{a}) \\
\overset{\text{Produkt-}}{\underset{\text{Regel}}{}} \Rightarrow &= \sum_{ij} \underbrace{g_i(\vec{a})}_{\vec{g}(\vec{a})} \cdot \underbrace{\partial_{x_j} f(\vec{a})}_{\nabla f(\vec{a})} + f(\vec{a}) \cdot \underbrace{\partial_{x_j} g_i(\vec{a})}_{D\vec{g}(\vec{a})} \\
&= \vec{g}(\vec{a}) \vec{\nabla} f(\vec{a}) + f(\vec{a}) D\vec{g}(\vec{a})
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
Dh(x,y) &= D\left(e^{xy}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \nabla e^{xy} + e^{xy}\, D\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \\
&\cancel{= \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \left(ye^{xy}, xe^{xy}\right) + e^{xy}} \\
&= \begin{pmatrix} y \cdot \nabla e^{xy} \\ x \cdot \nabla e^{xy} \end{pmatrix} + e^{xy} \cdot D\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y \cdot \left(ye^{xy}, xe^{xy}\right) \\ x \cdot \left(ye^{xy}, xe^{xy}\right) \end{pmatrix} + e^{xy} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} & (xy+1)\, e^{xy} \\ (xy+1)\, e^{xy} & x^2 e^{xy} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{!}{=} Dh(x,y) &= \begin{pmatrix} \operatorname{grad} h_1(x,y) \\ \operatorname{grad} h_2(x,y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x e^{xy} \cdot y & \partial_y e^{xy} \cdot y \\ \partial_x e^{xy} \cdot x & \partial_y e^{xy} \cdot x \end{pmatrix} \\
\text{(Produkt-Regel)} &= \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} & y^2 e^{xy} + e^{xy} \\ x^2 e^{xy} + e^{xy} & x^2 e^{xy} \end{pmatrix} \qquad \square
\end{aligned}
$$