

4. Übungsblatt

Aufgabe 13

a) Faktorisierung der Funktion:

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x+1)^3} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} \\ \Leftrightarrow x &= A(x+1)^2 + B(x+1) + C \quad \Rightarrow A = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Für Gleichheit beider Seiten} \\ \text{muss Grad gleich sein} \end{array} \\ \Rightarrow x &= B \cdot x + B + C \quad \Rightarrow B = -C, \quad B = 1 \Rightarrow C = -1 \\ \Rightarrow \frac{x}{(x+1)^3} &= \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

Dann lässt sich das Integral evaluieren:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{(x+1)^3} dx &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2} dx - \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3} dx \\ \text{Skript S.346} \Rightarrow &= \left[-\frac{1}{x+1} + c \right]_0^\infty - \left[-\frac{1}{2(x+1)^2} + d \right]_0^\infty \\ &= -0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx \quad u := x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{arsinh}(u) + c]_0^\infty \\ &\Rightarrow \operatorname{arsinh}(u) \text{ divergiert für } u \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Somit existiert das Integral nicht.

c)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx \quad u := e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u} \\ = \int_1^e \frac{du}{u \cdot (u - 1)} \end{aligned}$$

Dieser Bruch kann mit einer Partialbruchzerlegung ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u \cdot (u - 1)} &= \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u} \\ \Leftrightarrow 1 &= A \cdot u + B \cdot (u - 1) \Rightarrow A = 1, B = -1 \end{aligned}$$

Einsetzen ins Integral:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{du}{u \cdot (u - 1)} &= \int_1^e \frac{du}{u - 1} - \int_1^e \frac{du}{u} \\ &= [\ln |u - 1| - \ln(u)]_1^e \\ &= \ln \left(\frac{u - 1}{u} \right)_1^e \\ &= \ln \left(\frac{e - 1}{e} \right) - \underbrace{\ln \left(\frac{1 - 1}{1} \right)}_{\ln 0 \rightarrow -\infty} \end{aligned}$$

Da im letzten Schritt der $\ln 0$ bestimmt werden soll (oder durch eine andere Darstellung eine 0-Division auftritt, ist das Integral nicht definiert.

Aufgabe 14

a) Gegeben war die Reihe

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$$

Mit dem Integralkriterium lässt sich die Divergenz feststellen:

$$\begin{aligned} \int_{n_0}^\infty \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))} dn \quad u := \ln(n) \Rightarrow dn = n \cdot du \\ \Rightarrow \int_{\ln n_0}^\infty \frac{n \cdot du}{n \cdot u \cdot \ln(u)} \quad z := \ln(u) \Rightarrow du = u \cdot dz \\ \Rightarrow \int_{\ln(\ln n_0)}^\infty \frac{u \cdot dz}{u \ln(z)} \\ = \int_{\ln(\ln n_0)}^\infty \frac{dz}{z} \\ \text{Hauptsatz} \Rightarrow [\ln z]_{\ln(\ln n_0)}^\infty = \infty - \ln(\ln n_0) = \infty \end{aligned}$$

Da das unbestimmte Integral für alle n_0 divergiert muss auch die Reihe divergieren.

b) Gegeben war die Reihe

$$\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln^2(\ln n)}$$

Mit dem Integralkriterium lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned} & \int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln^2(\ln(n))} dn && u := \ln(n) \Rightarrow dn = n \cdot du \\ \Rightarrow & \int_{\ln n_0}^{\infty} \frac{n \cdot du}{n \cdot u \cdot \ln^2(u)} && z := \ln(u) \Rightarrow du = u \cdot dz \\ \Rightarrow & \int_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} \frac{u \cdot dz}{u \ln^2(z)} \\ & = \int_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} \frac{dz}{z^2} \\ \text{Hauptsatz} \Rightarrow & \left[\frac{-1}{z} \right]_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} = 0 - \frac{-1}{\ln(\ln(n_0))} = \frac{1}{\ln(\ln(n_0))} \end{aligned}$$

Da das Integral für $n_0 \geq 1$ bestimmt ist, ist die Reihe divergent.