Matthias Maile

2. Übungsblatt

Aufgabe 5

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^3}(x-1)^n$$

Der 0. Koeffizient a_0 ist 0, daher kann der Index verschoben werden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^3}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^3}(x-1)^n$$

Da $a_n = \frac{n^2}{1+n^3} > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt, kann man die Quotientenformel für den Konvergenzradius benutzen:

$$\begin{aligned}
r = \frac{1}{c} \text{ für } c &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{1+(n+1)^3} \frac{1+n^3}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{1+n^3+3n^2+3n+1} \frac{1+n^3}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2n^4+n^3+n^2+2n+1}{n^5+3n^4+3n^3+2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n^{-1}+n^{-2}+n^{-3}+2n^{-4}+n^{-5}}{1+3n^{-1}+3n^{-2}+2n^{-3}} = 1 \\
\Rightarrow r = \frac{1}{c} = 1
\end{aligned}$$

Die Betrachtung der Randpunkte zeigte dazu:

- Für $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow$ alternierende Nullfolge, konv. nach Leibnizkriterium
- Für $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$ divergiert

Damit konvergiert die Potenzreihe für $x \in [0, 2)$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!2^{2n}}{(2n)!}(x-1)^n$$

da alle Koeffizienten $\neq 0$ sind, kann die Formel $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$ benutzt werden:

$$\begin{aligned}
r = \frac{1}{c} \text{ mit } c &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\ 2^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n!\ 2^{2n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n+1} = 2 \\
\Rightarrow r &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Die Konvergenz an den Randpunkten folgt aus dem Quotientenkriterium (aufgrund der Betragsstriche ist dabei die Betrachtung von $x = x_0 - 0.5$ mit der von $x = x_0 + 0.5$ identisch.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)!\ 2^{2n+2}\ (\pm 0.5)^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{2n!}{n! * 2^{2n} * (\pm 0.5)^{n+1}}\right| \overset{!}{<} 1 \\
&= \left|\frac{(n+1) * 4 * (\pm 0.5)}{(2n+2)(2n+1)}\right| \\
&= \left|\frac{\pm 2}{2 * (2n+1)}\right| = \frac{1}{2n+1} < 1 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Durch die Konvergenz and den Rändern des Intervalls besitzt die Reihe das Konvergenzintervall

$$x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^n \left(x + \frac{1}{4}\right)^n$$

Die Berechnungsformel für den Konvergenzradius:

$$\begin{aligned}
r = \frac{1}{c} \text{ mit } c &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 2^n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{n^2} \\
&= \limsup_{n\to\infty} 2\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 2 \\
\Rightarrow r &= \frac{1}{2}, \quad x_0 = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Für die Randpunkte:

- $x = -\frac{1}{2} + x_0 = -\frac{3}{4}$: $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2(-1)^n \Rightarrow$ keine Nullfolge, somit divergiert die Reihe bei $x = -\frac{3}{4}$
- $x = \frac{1}{2} + x_0 = \frac{1}{4}$: $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^n \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \Rightarrow$ keine Nullfolge, die Reihe divergiert bei $x = \frac{1}{4}$

Die Reihe Konvergiert also für $x \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$

Aufgabe 6

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)e^x$$

Für eine Funktion der Form $(a+x)e^x$ folgt die Ableitung aus der Produktregel:

$$\frac{d}{dx}\left((a+x)e^x\right) = (a+x) * \frac{d}{dx}e^x + \left(\frac{d}{dx}(a+x)\right)e^x = (a+x)e^x + 1 * e^x = (a+1+x)e^x$$

Die n-te Ableitung von f lautet demnach:

$$f^{(n)}(x) = (1+n+x)e^x$$

Am Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ lautet diese:

$$f^{(n)}(-1) = n * e^{-1} = \frac{n}{e}$$

Aus den Ableitungen folgt die Taylorreihe:

$$T_\infty(x;-1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(-1)}{i!} * (x+1)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{e * i!} * (x+1)^i$$

Die Koeffizienten a_n des Taylorpolynoms sind für $n > 0$ positiv, da der Funktionswert am Entwicklungspunkt 0 ist, kann das 0. Taylorpolynom vernachlässigt werden.
Der Konvergenzradius folgt dann:

$$\begin{aligned}
r = \frac{1}{c} \text{ mit } c &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e * (n+1)!} * \frac{e * n!}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) * n!}{(n+1)!\; n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \\
\Rightarrow r &= \frac{1}{c} = \infty
\end{aligned}$$

Da der Konvergenzradius vom Taylorpolynom gegen ∞ geht, stellt es die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ dar.