

3. Übungsblatt

Aufgabe 13

a) Faktorisierung der Funktion:

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x+1)^3} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} \\ \Leftrightarrow x &= A(x+1)^2 + B(x+1) + C \quad \Rightarrow A = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Für Gleichheit beider Seiten} \\ \text{muss Grad gleich sein} \end{array} \\ \Rightarrow x &= B \cdot x + B + C \quad \Rightarrow B = -C, \quad B = 1 \Rightarrow C = -1 \\ \Rightarrow \frac{x}{(x+1)^3} &= \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

Dann lässt sich das Integral evaluieren:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{(x+1)^3} dx &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2} dx - \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3} dx \\ \text{Skript S.346} \Rightarrow &= \left[-\frac{1}{x+1} + c \right]_0^\infty - \left[-\frac{1}{2(x+1)^2} + d \right]_0^\infty \\ &= -0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx \quad u := x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{arsinh}(u) + c]_0^\infty \\ &\Rightarrow \operatorname{arsinh}(u) \text{ divergiert für } u \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Somit existiert das Integral nicht.

c)

Aufgabe 14

a) Gegeben war die Reihe

$$\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$$

Mit dem Integralkriterium lässt sich die Divergenz feststellen:

$$\begin{aligned} & \int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))} \, dn && u := \ln(n) \Rightarrow dn = n \cdot du \\ \Rightarrow & \int_{\ln n_0}^{\infty} \frac{n \cdot du}{n \cdot u \cdot \ln(u)} && z := \ln(u) \Rightarrow du = u \cdot dz \\ \Rightarrow & \int_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} \frac{u \, dz}{u \ln(z)} \\ & = \int_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} \frac{dz}{z} \\ \text{Hauptsatz} \Rightarrow & [\ln z]_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} = \infty - \ln(\ln n_0) = \infty \end{aligned}$$

Da das unbestimmte Integral für alle n_0 divergiert muss auch die Reihe divergieren.