Matthias Maile

6. Übungsblatt

Aufgabe 21

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = e^{x-y}\left(\frac{x^3}{3} - y\right)$$

dann folgen die partiellen Ableitungen aus der Produkt- und Kettenregel und dem Satz von Schwartz:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= e^{x-y}\left(\frac{x^3}{3} - y + x^2\right)\\
\partial_y f(x,y) &= e^{x-y}\left(y - \frac{x^3}{3} - 1\right)\\
\partial_x^2 f(x,y) &= e^{x-y}\left(\frac{x^3}{3} - y + 2x^2 + 2x\right)\\
\partial_y^2 f(x,y) &= e^{x-y}\left(2 - y + \frac{x^3}{3}\right)\\
\partial_x\partial_y f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y) &= e^{x-y}\left(y - \frac{x^3}{3} - 1 - x^2\right)
\end{aligned}$$

Das notwendige Kriterium für Extrema:

$$\mathrm{grad} f(\vec{a}) = \vec{0}$$

Der Gradient folgt aus den zuvor berechneten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad} f(x,y) &= (\partial_x f(x,y),\ \partial_y f(x,y))\\
&= \left(e^{x-y}\left(\frac{x^3}{3} - y + x^2\right),\ e^{x-y}\left(y - \frac{x^3}{3} - 1\right)\right) \stackrel{!}{=} \vec{0} = (0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow e^{x-y}\left(\frac{x^3}{3} - y + x^2\right) = 0 && \wedge && e^{x-y}\left(y - \frac{x^3}{3} - 1\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - y + x^2 = 0 && && y - \frac{x^3}{3} - 1 = 0\\
&\Rightarrow \frac{x^3}{3} + x^2 = y \quad (21.1) && && \underset{\text{einsetzen}}{\overset{(21.1)}{}} \Rightarrow \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^3}{3} - 1 = 0\\
&\underset{\text{einsetzen}}{\overset{21.2}{}} \Rightarrow \frac{(\pm 1)^3}{3} + (\pm 1)^2 = y && && \Rightarrow x = \pm 1 \quad (21.2)\\
&\Leftrightarrow 1 \pm \frac{1}{3} = y
\end{aligned}$$

Damit lauten die zwei möglichen Extremstellen

$$\vec{a}_1 = \left(1,\ \frac{4}{3}\right) \quad \vec{a}_2 = \left(-1,\ \frac{2}{3}\right)$$

Um zu bestimmen ob es sich um Maxima oder Minima (oder Sattelstellen) handelt betrachten wir die Definitheit der Hessematrix an den mögl. Extremstellen.
Die Hessematrix folgt aus den Ableitungen:

$$H_f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(x,y) & \partial_x \partial_y f(x,y) \\ \partial_y \partial_x f(x,y) & \partial_y \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-y}\left(\frac{x^3}{3} - y + 2x^2 + 2x\right) & e^{x-y}\left(y - \frac{x^3}{3} - 1 - x^2\right) \\ e^{x-y}\left(y - \frac{x^3}{3} - 1 - x^2\right) & e^{x-y}\left(2 - y + \frac{x^3}{3}\right) \end{pmatrix}$$

Für $\vec{a}_1$ finden wir dann ein relatives Minimum (mit dem hinreichenden Kriterium):

$$\begin{aligned} \det\left(H_f\left(1,\ \frac{4}{3}\right)\right) &= \det\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 2 + 2\right) & e^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} - 2\right) \\ e^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} - 2\right) & e^{-\frac{1}{3}}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 3 \cdot e^{-\frac{1}{3}} & -e^{-\frac{1}{3}} \\ -e^{-\frac{1}{3}} & e^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot e^{-\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}} \\ &= 2 \cdot e^{-\frac{2}{3}} > 0 \\ \partial_x \partial_x f\left(1,\ \frac{4}{3}\right) &= e^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 2 + 2\right) \\ &= 3 \cdot e^{-\frac{1}{3}} > 0 \end{aligned}$$

Mit dem hinreichenden Kriterium finden wir dann einen Sattelpunkt bei $\vec{a}_2$:

$$\begin{aligned} \det\left(H_f\left(-1,\ \frac{2}{3}\right)\right) &= \det\begin{pmatrix} e^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{2}{3} + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right) & e^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} - 1 - (-1)^2\right) \\ e^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} - 1 - (-1)^2\right) & e^{-\frac{5}{3}}\left(2 - \frac{2}{3} + \frac{(-1)^3}{3}\right) \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} -e^{-\frac{5}{3}} & -e^{-\frac{5}{3}} \\ -e^{-\frac{5}{3}} & e^{-\frac{5}{3}} \end{pmatrix} \\ &= -e^{-\frac{10}{3}} - e^{-\frac{10}{3}} \\ &= -e^{-\frac{10}{3}} < 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 22

b) Eine Einschränkung der φ-Komponente liefert uns eine globale bijektive Abbildung, dazu wird nicht auf die z-Achse abgebildet:

$$\vec{\phi} : (0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus (z - \text{Achse}), \qquad \vec{\phi}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Da die r-Komponente in Zylinderkoordinaten den Abstand von der z-Achse beschreibt folgt aus dem Satz des Pytaghoras:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dann lässt sich für φ und z bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2}\cos(\varphi) \\ \sqrt{x^2+y^2}\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Die zwei Ausdrücke für φ bedeuten das natürlich gleiche; x, y, und $\sqrt{x^2+y^2}$ sind Anka-, Gegegenkathede und Hypothenuse und der Quotient von diesen sind ja gerade sin und cos.

Durch scharfes hingucken erkennt man für z:

$$z = z$$

Damit lautet die Umkehrabbildung, bei der mindestens x oder y ungleich 0 sein müssen:

$$\vec{\phi}^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ z \end{pmatrix}$$