Matthias Maile

4. Übungsblatt

Aufgabe 13

a) Faktorisierung der Funktion:

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$
$$\Leftrightarrow x = A(x+1)^2 + B(x+1) + C \quad \Rightarrow A = 0 \text{ Für gleichheit beider Seiten muss Grad gleich sein}$$
$$\Rightarrow x = B \cdot x + B + C \quad \Rightarrow B = -C,\ B = 1 \Rightarrow C = -1$$
$$\Rightarrow \frac{x}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$$

Dann lässt sich das Integral evaluieren:

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x+1)^3}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\right) dx$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$$
$$\text{Skript S.346} \Rightarrow = \left[-\frac{1}{x+1} + c\right]_0^\infty - \left[-\frac{1}{2(x+1)^2} + d\right]_0^\infty$$
$$= -0 + 1 + 0 - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

b)

$$\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx \qquad u := x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$
$$= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arsinh}(u) + c\right]_0^\infty$$
$$\Rightarrow \operatorname{arsinh}(u) \text{ divergiert für } u \to \infty$$

Somit existiert das Integral nicht.

c)

Aufgabe 14

a) Gegeben war die Reihe

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$$

Mit dem Integralkriterium lässt sich die Divergenz feststellen:

$$\begin{aligned}
&\int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}\ dn && u := \ln(n) \Rightarrow dn = n\cdot du\\
&\Rightarrow= \int_{\ln n_0}^{\infty} \frac{n\cdot du}{n\cdot u\cdot \ln(u)} && z := \ln(u) \Rightarrow du = u\cdot dz\\
&\Rightarrow= \int_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} \frac{u\ dz}{u\ln(z)}\\
&= \int_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} \frac{dz}{z}\\
\text{Hauptsatz}\quad &\Rightarrow= [\ln z]_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} = \infty - \ln(\ln n_0) = \infty
\end{aligned}$$

Da das unbestimmte Integral für alle n_0 divergiert muss auch die Reihe divergieren.

b) Gegeben war die Reihe

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln^2(\ln n)}$$

Mit dem Integralkriterium lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned}
&\int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln^2(\ln(n))}\ dn && u := \ln(n) \Rightarrow dn = n\cdot du\\
&\Rightarrow= \int_{\ln n_0}^{\infty} \frac{n\cdot du}{n\cdot u\cdot \ln^2(u)} && z := \ln(u) \Rightarrow du = u\cdot dz\\
&\Rightarrow= \int_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} \frac{u\ dz}{u\ln^2(z)}\\
&= \int_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} \frac{dz}{z^2}\\
\text{Hauptsatz}\quad &\Rightarrow= \left[\frac{-1}{z}\right]_{\ln(\ln n_0)}^{\infty} = 0 - \frac{-1}{\ln(\ln(n_0))} = \frac{1}{\ln(\ln(n_0))}
\end{aligned}$$

Da das Integral für $n_0 \geq 1$ bestimmt ist, ist die Reihe divergent.