Aufgabe 4.2

a)

$$
\begin{aligned}
P_4 \ni p(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\
\Rightarrow \int_{-1}^{1} p(x)dx &= \int_{-1}^{1} \left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\right) dx \\
&= \left[\frac{a}{5}x^5 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{c}{3}x^3 + \frac{d}{2}x + ex + f\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{a}{5}1^5 + \frac{b}{4}1^4 + \frac{c}{3}1^3 + \frac{d}{2}1^2 + e \cdot 1 + f - \left(\frac{a}{5}(-1)^5 + \frac{b}{4}(-1)^4 + \frac{c}{3}(-1)^3 + \frac{d}{2}(-1)i^2 + e \cdot (-1) + f\right) \\
&= \underbrace{\frac{a}{5} + \frac{a}{5}}_{\frac{2a}{5}} + \underbrace{\frac{b}{4} - \frac{b}{4}}_{=0} + \underbrace{\frac{c}{3} + \frac{c}{3}}_{\frac{2c}{3}} + \underbrace{\frac{d}{2} - \frac{d}{2}}_{=0} + \underbrace{e + e}_{2e} + \underbrace{f - f}_{=0} \\
&= \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} + 2e \\
\Rightarrow I_h(p_4) &= \frac{1}{9}\left(p_4(-1) + 8p_4(-0.5) + 8p_4(0.5) + p(1)\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(a - b + c - d + e\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{a}{2} - b + 2c - 4d + 8e\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{a}{2} + b + 2c + 4d + 8e\right) \\
&+ \frac{1}{9}\left(a + b + c + d + e\right) \\
&= \frac{2}{9}a + \frac{2}{9}c + \frac{2}{9}e + \frac{a}{9} + \frac{16c}{9} + \frac{8e}{9} \\
&= \frac{a}{3} + \frac{2c}{3} + 2e \\
\Rightarrow I_h(p_4) &= \int_{-1}^{1} p_4(x)\ dx - \frac{2a}{5} + \frac{a}{3}
\end{aligned}
$$

Aus dem Ergebnis wird deutlich, dass der Interpolationsfehler nur vom Leitkoeffizienten a abhängt. Wenn $a = 0$ wäre, würde der Fehler ebenfalls 0 sein. Dann wäre allerdings $p_4 \notin P_4$.
Somit wird mit der Formel kein $p_4 \in P_4$ präzise integriert.
(Falls nur ein Polynom gesucht war: $p_4 = x^4$ wird nicht genau integriert)

b) Wenn wir das Ergebnis aus a) angucken, lässt sich erkennen, dass der Fehler nur von a abhängt:

$$I_h(p) - \int_{-1}^{1} p(x)dx = \frac{a}{3} - \frac{2a}{5}$$

Da dieser Koeffizient bei einem $p \in P_3$ verschwinden muss, wird jedes Polynom 3. Grades (oder niedriger) genau Integriert.

c) als Funktion kann man die Normalverteilung nehmen, wobei μ dem Stützpunkt x_j entspricht zu dem das Gewicht $a_j < 0$ gehört.
Wenn man dann die Standartabweichung σ gegen 0 laufen lässt, geht gehen die Werte $f(x_k)_{k \neq j} \to 0$. Die Quadraturformel verinfacht sich dann:

$$I_A^{(n)}(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k) \approx a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + \ldots + a_j \cdot f(x_j) + \ldots = a_j \cdot f(x_j) < 0$$

Das Integral über die Normalverteilung ist natürlich immer positiv.