Numphy

Aufgabe 7.1

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ $\qquad$ $g(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

a) $x_0 = 1.1$

Das Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Damit ergeben sich $x_1 \cdots x_6$: c) $x_1 \cdots x_6$ für $g(x)$:

$f(x)$:	$g(x)$:
$x_1 = 1.279\,545\,45$	$x_1 = 1.345\,136\,72$
$x_2 = 1.350\,422\,86$	$x_2 = 1.406\,968\,36$
$x_3 = 1.383\,071\,54$	$x_3 = 1.414\,089\,51$
$x_4 = 1.398\,817\,85$	$x_4 = 1.414\,213\,52$
$x_5 = 1.406\,558\,07$	$x_5 = 1.414\,213\,56$
$x_6 = 1.410\,396\,23$	$x_6 = 1.414\,213\,56$

$\Rightarrow$ schneller Konvergenz bei $g(x)$ als bei $f(x)$

---

b)

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

$= (x^2 - 2)^2$

$\Rightarrow \sqrt{2}$ ist doppelte Nullstelle von f.

d) $g(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

$= (x^2 - 2)(x^2 - 3)$

Da f bei $x = \sqrt{2}$ ein doppelte Nullstelle besitzt, findet eine langsamere Konvergenz statt (da ja nicht nur $f(x_n)$ sondern auch $f'(x_n)$ gegen 0 geht).

g besitzt nur eine Einfache Nullstelle, weshalb die Konvergenz schneller ist.

7.2 $h(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{3} - x + \frac{1}{6}$

$h'(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} - 1$

$h''(x) = x + \frac{2}{3}$

a) - $h''(x) > 0$ für $x \in I$ $\Rightarrow$ $h'(x)$ streng monoton ~~fallend~~ wachsend auf I

$h'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - 1 < 0$ $\Rightarrow$ $h'(x) < 0$ für $x \in I$

$\Rightarrow$ $h(x)$ streng monoton fallend auf I

$h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3}\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} < 0$

$h(-\frac{1}{2}) = \frac{-1}{6}\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} > 0$

Nach dem Mittelwertsatz muss $h(x)$ eine Nullstelle im Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ besitzen.

b) Für Fixpunktproblem: Vereinfachtes Newton-Verfahren

$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{c}$, $c := h'(0) = -1$

$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(0)} = x_n + h(x_n)$

liefert uns die Fixpunktabbildung $g(x) = x + h(x)$

$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{3} - x + \frac{1}{6}$

$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{6}$

$g'(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3}$

Selbstabbildend:

Suche Extrema von $g(x)$ für $x \in I$:

$g'(x_0) = \frac{x_0^2}{2} + \frac{2x_0}{3} \overset{!}{=} 0$ $\Rightarrow$ 1. Nullstelle bei $x_0 = 0$

$\Rightarrow$ Extremum bei $x_0 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x_1}{2} + \frac{2}{3} = 0$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{4}{3} \notin I$ 2. Extremum nicht in I

$g(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{48} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \in I$

$g(0) = \frac{1}{6} \in I$

$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{48} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \in I$

da alle Extremwerte von $g(x)$ für $x \in I$ in I liegen und g stetig ist, muss g selbstabbildend sein.

<u>kontrahierend:</u>

g ist kontrahierend, falls

$$\sup_{\xi \in I} |g'(\xi)| < 1$$

$$q := \sup_{\xi \in I} |g'(\xi)| = \sup_{\xi \in I} \left| \frac{\xi^2}{2} + \frac{2}{3}\xi \right|$$

Suche Extrema mit notw. Kriterium:

$g''(\xi) = \xi + \frac{2}{3} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$ Extremum von g' außerhalb von I

Suche an Rändern von I:

$g'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{|g'(\frac{1}{2})| > |g'(-\frac{1}{2})|}$

$g'(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow q = \sup_{\xi \in I} |g'(\xi)| = g'(\tfrac{1}{2}) = \frac{11}{24}$$

c) Abschätzung a priori:

$|e_n| \leq \frac{2m}{M} q^{(2^n)}$ $\qquad m = \min_{x \in I} |h'(x)| = 1.21$

$\qquad\qquad\qquad\qquad M = \max_{x \in I} |h''(x)| = 1.17$

$\leq 2.1 \cdot (0.46)^{(2^n)} \overset{!}{\leq} 10^{-3}$

ab $N = 4$ erfüllt, das heißt man benötigt 4 Schritte damit es erfüllt ist.

(Bei $N = 3$ wäre der Fehler bei $\approx 4 \cdot 10^{-3}$, was also nicht ausreicht)