

## 22. Übungsblatt

$$1) \quad (\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

$$a) \quad (\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \frac{1}{c^2} \vec{E}_0 \omega^2 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{k}^2 \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \frac{1}{c^2} \vec{E}_0 \omega^2 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{k}^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

b)  $c$  ist die Phasen- bzw. die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

$$c) \quad E(x, t) = E_0 \int f(k) e^{i(\omega t - kx)} dk$$

$$= E_0 \int f(k) e^{i(\omega t - kx)} dk$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \cdot E_0 \int f(k) e^{i(\omega t - kx)} dk = 0$$

Ein Wellenpaket stellt lediglich die Überlagerung mehrerer Wellen dar.

Da jede Welle, die zum Wellenpaket beiträgt, die Form  $E(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$  hat und so eine Lösung der Wellengleichung ist, ist auch die Überlagerung eine Lösung der Wellengleichung (Superpositionsprinzip).

$$d) \quad \vec{E}(r, t) = \frac{1}{r} \vec{f}(r \pm ct)$$

In Kugelkoordinaten ist nur die Richtung in  $\vec{e}_r$  wichtig, in  $\vec{e}_\theta$  bzw.  $\vec{e}_\phi$  breitet sich die Welle nicht aus (\*)

$$\Rightarrow \Delta \Phi = \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \vec{f}(r \pm ct) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{r} \vec{f}(r \pm ct) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \left( -\frac{1}{r^2} \vec{f}(r \pm ct) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \vec{f}(r \pm ct) \right) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{f}(r \pm ct) \cdot (\pm c)^2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\vec{f}(r \pm ct) + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \vec{f}(r \pm ct) \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{f}(r \pm ct) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \cdot \left( -\frac{\partial}{\partial r} \vec{f}(r \pm ct) + \frac{\partial}{\partial r} \vec{f}(r \pm ct) + r \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} \vec{f}(r \pm ct) \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{f}(r \pm ct) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \vec{f}(r \pm ct) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{f}(r \pm ct) \right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} \vec{f}(r \pm ct) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{f}(r \pm ct)$$

## Aufgabe 2

a) Das Dipolmoment und seine Ableitungen lauten:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \quad \dot{\vec{p}}(t) = -i\omega \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \quad \ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \quad \text{mit } \vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_z$$

Dann lässt sich für die Divergenz des Vektorpotentials zeigen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \frac{-i\omega \mu_0}{4\pi r} \vec{p}_0 \exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right) \\ &= \frac{-i\omega \mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{p}_0 \frac{\exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r} \\ &= \frac{-i\omega \mu_0}{4\pi} \left( \frac{\exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{p}_0}_{=0} + \vec{p}_0 \cdot \vec{\nabla} \frac{\exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r} \right) \\ &= \frac{-i\omega \mu_0}{4\pi} \left( \vec{p}_0 \cdot \vec{\nabla} \frac{\exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r} \right) \\ &= \frac{-i\omega \mu_0}{4\pi} \vec{e}_r \cdot \vec{p}_0 \cdot \partial_r \frac{\exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r} \\ &= \frac{-i\omega \mu_0}{4\pi} \vec{e}_r \cdot \vec{p}_0 \cdot \frac{r \frac{i\omega}{c} \exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right) - \exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r^2} \\ &= \frac{-i\omega \mu_0}{4\pi} \vec{r} \cdot \left( \frac{\vec{p}_0 i\omega \exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{cr^2} - \frac{\vec{p}_0 \exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r^3} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{r} \cdot \left( \underbrace{\frac{-\omega^2 \vec{p}_0 \exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{cr^2}}_{\frac{\ddot{\vec{p}}(t-r/c)}{cr^2}} - \underbrace{\frac{i\omega \vec{p}_0 \exp \left( i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r^3}}_{-\frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{r^3}} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{r} \cdot \left( \frac{\ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} \right) \\ &= -\frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi \epsilon_0} \vec{r} \cdot \left( \frac{\ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} \right) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \vec{r} \cdot \left( \frac{\ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} \right) \\ &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{c^2} \dot{\phi}(\vec{r}, t) \\ \Rightarrow \dot{\phi}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \vec{r} \cdot \left( \frac{\ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} \right) \\ \Rightarrow \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \vec{r} \cdot \left( \frac{\dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{\vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} \right) + const. \end{aligned}$$

b) Das  $\vec{E}$ -Feld in der Elektrodynamik ist gegeben durch

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$$

Die zeitliche Ableitung von  $\vec{A}$  lautet

$$\partial_t A = \partial_t \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) = \frac{-\omega^2 \mu_0}{4\pi r} \vec{p}_0 \exp \left( \frac{i\omega r}{c} - i\omega t \right)$$

aus  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  folgt, dass

$$\partial_t A = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2 r} \vec{p}_0 \exp \left( \frac{i\omega r}{c} - i\omega t \right) \quad (2.1)$$

Für  $\vec{\nabla}\phi$  lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\phi &= \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{r} \cdot \left( \frac{\dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{\vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} \right) \\ &= \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{(\vec{e}_r \cdot \vec{p}_0)}_{p_0 \cos \theta} \underbrace{\left( \frac{\exp \left( \frac{i\omega r}{c} - i\omega t \right)}{r^2} - \frac{i\omega \exp \left( \frac{i\omega r}{c} - i\omega t \right)}{cr} \right)}_{\alpha:=} \\ &= \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \cos \theta \cdot \alpha \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \vec{e}_r \partial_r (p_0 \cos \theta \cdot \alpha) + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \partial_\theta (p_0 \cos \theta \cdot \alpha) + \frac{\vec{e}_\phi}{r \sin \theta} \underbrace{\partial_\phi (p_0 \cos \theta \cdot \alpha)}_0 \right) \\ &= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \vec{e}_r \cdot \cos \theta \cdot \partial_r \alpha + \frac{\vec{e}_\theta \cdot \alpha}{r} \partial_\theta \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Die Nebenrechnung für  $\partial_r \alpha$ :

$$\begin{aligned} \partial_r \alpha &= \partial_r \left( \exp \left( \frac{i\omega r}{c} - i\omega t \right) \cdot \left( \frac{1}{r^2} - \frac{i\omega}{cr} \right) \right) \\ &= \exp \left( \frac{i\omega r}{c} - i\omega t \right) \cdot \left( \frac{2i\omega}{cr^2} + \frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{2}{r^3} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \exp(\dots) \left( \vec{e}_r \cdot \cos \theta \cdot \left( \frac{2i\omega}{cr^2} + \frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{2}{r^3} \right) + \vec{e}_\theta \cdot \sin \theta \cdot \left( \frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{cr^2} \right) \right)$$

Mit der Eigenschaft  $\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos \theta - \vec{e}_\theta \sin \theta$  lässt sich der Ausdruck (2.1) für  $\partial_t \vec{A}$  umschreiben:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{A} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2 r} \vec{p}_0 \exp \left( \frac{i\omega r}{c} - i\omega t \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2 r} p_0 \cdot \vec{e}_z \exp \left( \frac{i\omega r}{c} - i\omega t \right) \\ &= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \exp(\dots) \frac{\omega^2}{c^2 r} (\vec{e}_\theta \sin \theta - \vec{e}_r \cos \theta) \end{aligned}$$

Dann lauten die Komponenten des  $\vec{E}$ -Feldes:

$$\begin{aligned}
 E_r &= -\left(\vec{\nabla}\phi\right)_r - \left(\partial_t \vec{A}\right)_r \\
 &= -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right) \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{2i\omega}{c^2 r^2} + \frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{2}{r^3} - \frac{\omega^2}{c^2 r}\right) \\
 &= \frac{p_0}{2\pi\epsilon_0} \exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right) \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{c r^2}\right) \\
 E_\theta &= -\left(\vec{\nabla}\phi\right)_\theta - \left(\partial_t \vec{A}\right)_\theta \\
 &= -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right) \cdot \sin\theta \cdot \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{i\omega}{c r^2} + \frac{1}{r^3}\right)
 \end{aligned}$$

2c) Fernfeld von  $\vec{E}$ :

Fernfeld  $\Rightarrow$  nur  $\frac{1}{r}$  Terme werden beachtet,  $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}$  wird weggelassen

$\Rightarrow E_{r, \text{fern}} = 0$

$E_{\theta, \text{fern}} = -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \frac{\omega^2}{c^2 r} \exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right)$

$\rightarrow E_{\phi, \text{fern}} = \frac{-p_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(i(\omega r - \omega t)) \cdot \vec{e}_\phi$

Fernfeld von  $\vec{B}$ :

$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \left( \vec{r} \times \left( \frac{d\vec{p}}{dt}(t - \frac{r}{c}) - \frac{1}{c} \vec{p}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{c}_r \right) \right)$

$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \underbrace{\frac{1}{r^2} \vec{p}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{c}_r}_{\sim \frac{1}{r^2} \rightarrow \text{Nahfeld}} - \underbrace{\frac{1}{r} \vec{p}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{c}_r}_{\sim \frac{1}{r} \rightarrow \text{Fernfeld}} \right)$

$\Rightarrow B_{\text{fern}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} (\vec{c}_r \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}))$

$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \omega^2 \exp(-i\omega(t - \frac{r}{c})) (\vec{p}_0 \times \vec{c}_r)$

$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{r} \exp(\dots) \cdot p_0 \cdot (\vec{c}_\theta \times \vec{c}_\phi)$

$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{r} \exp(\dots) p_0 \cdot \vec{c}_\phi \cdot \sin\theta$

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$

$= \frac{1}{\mu_0} \frac{-p_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(\dots) \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{r} \exp(\dots) p_0 \cdot (\vec{c}_\theta \times \vec{c}_\phi)$

$= \frac{-p_0^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2} [\exp(\dots)]^2 (\vec{c}_\theta \times \vec{c}_\phi)$

$= \frac{-p_0^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2} [\exp(\dots)]^2 \vec{c}_r$

Der Poynting Vektor zeigt (aufgrund des negativen Vorzeichens in der Rechnung, wahrscheinlich irgendwo eins falsch gesetzt) vom Beobachter zur Quelle.

$$\vec{S} \parallel \vec{c}_r$$

Auf der Äquatorialebene ist dieser am stärksten, bei den Polen geht dieser gegen 0.

### Aufgabe 3

1) Satz von Poynting:

$$\begin{aligned}\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV &= - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{s} + \partial_t u) dV \\ &= - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{s} dV - \int_V \partial_t u dV \\ &= - \int_V \vec{s} \cdot d\vec{A} - \partial_t W\end{aligned}$$

Was in Bauteilen gespeicherte Energie

$\vec{j} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$   $\Rightarrow$  für  $\vec{s} \neq 0$  müssen  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld an einem Punkt vorliegen  
↳ nur beim Widerstand der Fall

Für den Widerstand:

$$\begin{aligned}\vec{E}\text{-Feld: } \vec{E} &= \frac{\Delta u}{\Delta r} \text{ in Leiterdriftung } \hat{e} \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{\Delta u}{\Delta r} \cdot \hat{e} = \frac{R \cdot \vec{I}}{\Delta r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}\text{-Feld: } \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r = \text{radius des Widerstands} \\ \text{Feld ist Wirbelfeld} \\ \Rightarrow \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int \vec{s} \cdot d\vec{A} &= \int \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{A} \\ &= \int \frac{R I}{2\pi r \cdot \Delta r} d\vec{A} \\ &= \frac{I^2}{2\pi r \cdot \Delta r} A = R I^2 \quad (3.1)\end{aligned}$$

Für die Induktivität:

$$W_L = \frac{1}{2} L I^2 \quad (3.2)$$

Für den Kondensator:

$\vec{j}$  und  $\vec{E}$  homogen, parallel

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV &= \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot V \\ &= j \cdot E \cdot A \cdot d_c \quad (*)\end{aligned}$$

$$j = \frac{I}{A} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A \epsilon_0} \quad C = \frac{A \epsilon_0}{d_c}$$

Ordnungszahl  
an Platten

$$\begin{aligned}(*) &\Rightarrow \frac{I}{A} \cdot \frac{Q}{A \epsilon_0} \cdot A \cdot d_c \\ &= \frac{I Q}{A \epsilon_0} d_c = \frac{I Q}{C} \quad (3.3)\end{aligned}$$

$$(3.1, 3.2, 3.3) \Rightarrow \frac{I Q}{C} = -R I^2 - \partial_t \left( \frac{L I^2}{2} \right)$$

Notwendige Korrekturen:

- Leistung der Spannungsquelle muss hinzugefügt werden

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{korrigierte Gleichung: } \frac{I Q}{C} &= R I^2 - \partial_t \left( \frac{L I^2}{2} \right) + P_{\text{ext}} \\ &= R I^2 - L I \dot{I} + U_{\text{ext}} I \quad | : I\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q = -R I - L \dot{I} + U_{\text{ext}} \quad | \partial_t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{I}{C} = R \dot{I} - L \ddot{I} + \dot{U}_{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow U_{\text{ext}} = \frac{I}{C} + R \dot{I} + L \ddot{I} \quad | \cdot \frac{1}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L} \partial_t U = \ddot{I} + \frac{R}{L} \dot{I} + \frac{I}{L C}$$

b)

$$R=0 \Rightarrow \ddot{I} + \frac{I}{LC} = \frac{1}{C} \dot{Q}_Q = \frac{1}{C} \omega \cos \omega t$$

homogene Lösung:

$$\begin{aligned}\ddot{I}_h + \frac{I_h}{LC} = 0 &\Rightarrow I_h = a_1 \sin(\omega_0 t) + b_1 \cos(\omega_0 t) \\ \text{mit } \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ als Eigenfrequenz des Schaltkreises}\end{aligned}$$

partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned}\text{Ansatz: } I_p(t) &= a_p \sin(\omega t) + b_p \cos(\omega t) \\ \Rightarrow -\omega^2 a_p \sin \omega t - \omega^2 b_p \cos \omega t + \frac{a_p}{LC} \sin \omega t + \frac{b_p}{LC} \cos \omega t &= \frac{\omega}{C} \cos \omega t \\ \Rightarrow -\omega^2 b_p + \frac{b_p}{LC} &= \frac{\omega}{C} \\ \Rightarrow b_p \left( \frac{1}{LC} - \omega^2 \right) &= \frac{\omega}{C} \\ \Rightarrow b_p &= \frac{\omega}{L(\frac{1}{LC} - \omega^2)} = \frac{\omega}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ a_p &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Allgemeine Lsg: } I(t) = a_h \sin(\omega_0 t) + b_h \cos(\omega_0 t) + \frac{\omega}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

Für  $\omega$ :

Die Antriebsfrequenz  $\omega$  sollte von der Eigenfrequenz  $\omega_0$  des Schaltkreises abweichen, da es sonst zu einer Resonanzkatastrophe kommen kann (in der Gleichung einem durch 0 teilen entsprechend).

Da in der Realität zumindest durch die Bauteile immer eine geringe Dämpfung stattfindet gäbe es ein "Maximum" für die Resonanz.

Da es aber dennoch zu Schäden durch zu hohen Stromfluss kommen kann, sollte dies bei Schaltungen beachtet werden.

## Aufgabe 4

Faradaysches Induktionsgesetz:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

kein Verschiebungsstrom,  
damit 0

$$\Rightarrow \int \vec{B}(r) \cdot d\vec{r}(r) = \mu_0 \cdot I_{enc}$$

$$\Leftrightarrow B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{enc}$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r}$$

Vier Bereiche:

1. im inneren Draht ( $r < R_i$ )
2. zwischen den Strömen ( $R_i < r < R_a$ )
3. im äußeren Draht ( $R_a < r < R$ )
4. Außen ( $r > R$ )



$\vec{e}_\phi$  Strömdichte im inneren Draht

$\vec{e}_\phi$  "äußerer Draht"

$$\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi r} j_i \cdot A_i \cdot \vec{e}_\phi$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi r} j_i \cdot \pi r^2 \cdot \vec{e}_\phi$$

$$= \frac{\mu_0 j_i r}{2} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{B}_2(r) = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{B}_3(r) = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r} \vec{e}_\phi$$

$$= \frac{\mu_0 \vec{e}_\phi}{2\pi r} \left( I - \pi(r^2 - R_i^2) \cdot \frac{1}{\pi(R^2 - R_i^2)} I \right)$$

$$= \frac{\mu_0 \vec{e}_\phi}{2\pi r} I \cdot \left( 1 - \frac{r^2 - R_i^2}{R^2 - R_i^2} \right)$$

$$\vec{B}_4(r) = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r} \vec{e}_\phi$$

$$= 0$$

# Aufgabe 4

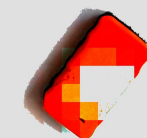
b)

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}^2 dV \\
 W_1 &= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} B_1^2 \cdot r \, dr d\varphi dz \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \left(\frac{\mu_0 j r}{2}\right)^2 \cdot r \, dr d\varphi dz \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \cdot L \cdot 2\pi \cdot \mu_0^2 j^2 \cdot \frac{1}{4} \int_0^{R_1} r^3 dr \\
 &= \frac{\mu_0 L j^2}{4} \left(\frac{1}{4} r^4\right)_0^{R_1} \\
 &= \frac{\mu_0 L j^2}{16} R_1^4 \\
 &= \frac{\mu_0 L I^2}{16\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} B_2^2 \cdot r \, dr d\varphi dz \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \cdot L \cdot 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 \cdot r \, dr \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 I^2 \cdot \frac{L}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \cdot r \, dr \\
 &= \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_3 &= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^R B_3^2 \cdot r \, dr d\varphi dz \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \cdot L \cdot 2\pi \int_{R_2}^R \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R^2 - R_2^2}\right)\right)^2 \cdot r \, dr \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \cdot L \cdot 2\pi \cdot \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2} \int_{R_2}^R \left(\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R^2 - R_2^2}\right)^2 \cdot r\right) dr \\
 &= \frac{\mu_0 \cdot L \cdot I^2}{4\pi} \int_{R_2}^R \left(\frac{1}{r} \cdot \left(1 - 2\frac{r^2 - R_2^2}{R^2 - R_2^2} + \frac{(r^2 - R_2^2)^2}{(R^2 - R_2^2)^2}\right)\right) dr \\
 &= \frac{\mu_0 L I^2}{4\pi} \cdot \left(\ln\left(\frac{R}{R_2}\right) - \frac{r^2}{R^2 - R_2^2} \right)_{R_2}^R - \frac{2 \cdot R_2^2}{R^2 - R_2^2} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + \int_{R_2}^R \left(\frac{r^2 - R_2^2}{R^2 - R_2^2}\right)^2 \frac{1}{r} dr \\
 &= \frac{\mu_0 L I^2}{4\pi} \left( \left(1 + \frac{2R_2^2}{R^2 - R_2^2}\right) \ln\left(\frac{R}{R_2}\right) - 1 + \frac{1}{(R^2 - R_2^2)^2} \int_{R_2}^R (r^4 - 2R_2^2 r^2 + R_2^4) \frac{1}{r} dr \right) \\
 &= \left( \dots \right) + \frac{1}{(R^2 - R_2^2)^2} \left( \frac{r^4}{4} - 2R_2^2 r^2 + R_2^4 \ln(r) \right) \Big|_{R_2}^R \\
 &= \frac{\mu_0 L I^2}{4\pi} \left( \left(1 + \frac{2R_2^2}{R^2 - R_2^2} + \frac{R_2^4}{(R^2 - R_2^2)^2}\right) \ln\left(\frac{R}{R_2}\right) - 1 + \frac{R^4 - R_2^4}{4(R^2 - R_2^2)^2} - 2R_2^2 \frac{R^2 - R_2^2}{(R^2 - R_2^2)^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$W_{\text{ges}} = \sum_i W_i$$



c) Ein Vorteil des Koaxialkabels ist die verbessert Abschirmung gegen externe Magnetfelder, bzw. dass andere Kabel in der Umgebung von diesem kein Magnetfeld erfahren.