Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

19. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Das elektrische Feld im Bereich des Kondensators folgt aus einem Wegintegral:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad U = -\int_0^d E\ dl \Rightarrow U = \frac{-\sigma\ d}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{-U}{d} \tag{1.1}$$

Die gesamte Kraft auf ein geladenes Teilchen in einem magnetischen und elektrischen Feld ist gegeben durch:

$$\vec{F}_{\text{ges}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Das stellen wir zu v um:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{ges}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) &\stackrel{!}{=} \vec{0} \\ E &= vB \\ v &= \frac{E}{B} \\ (1.1) \Rightarrow v &= \frac{U}{d \cdot B} \approx \frac{2}{3}c \end{aligned}$$

e) Im Zyklotron werden die Teilchen "nach links" abgelenkt (in Bewegungsrichtung betrachtet). Obwohl im Bereich des Kondensator die Richtung des magnetischen Feldes die gleiche ist, werden die Teilchen in die andere Richtung gelenkt.

Aufgabe 2

a)

(i) $\epsilon_{ijk} = \alpha \ \epsilon_{jki} = \alpha \ \epsilon_{ijk} \Rightarrow \alpha = 1$

(ii) $\epsilon_{ijk} = \alpha \ \epsilon_{jik} = -\alpha \ \epsilon_{ijk} \Rightarrow \alpha = -1$

(iii) $\epsilon_{iik} = \alpha \ \epsilon_{ijk} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

b) Zur besseren Lesbarkeit wird Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

(i) $\epsilon_{ijk} \ \epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk}^2 = \begin{cases} 1 & \text{für Permutationen von 1,2,3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

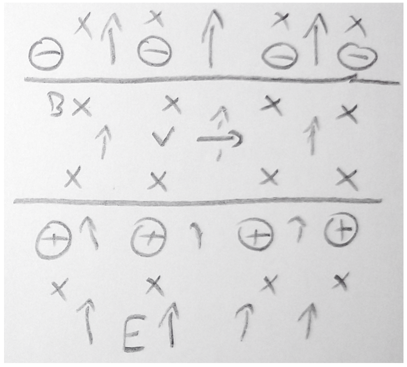
(ii) $\epsilon_{ijk} \ \epsilon_{kmn} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = m \wedge j = n \\ -1 & \text{für } i = n \wedge j = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

c)

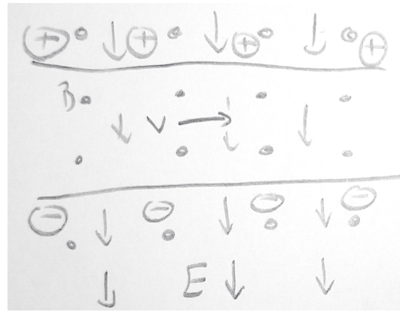
$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \epsilon_{ijk} \ \hat{i} \cdot a_j \cdot (\vec{b} \times \vec{c})_k \\ &= \epsilon_{ijk} \ \hat{i} \cdot a_j \cdot \epsilon_{kmn} \cdot b_m \cdot c_n \\ b)(ii) \Rightarrow &= \hat{i} \cdot b_i a_j c_j - \hat{i} \cdot c_i a_j b_j \\ &= \vec{b} \cdot a_j c_j - \vec{c} \cdot a_j b_j \\ &= \vec{b} \ (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \ (\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Für die Konfiguration der Richtung von E- und B-Feld existieren zwei Möglichkeiten:



(a) E-Feld nach oben gerichtet,
B-Feld "ins Papier"



(b) E-Feld nach unten gerichtet,
B-Feld "zum Leser"

b) Wenn man den Spalt klein genug macht, so darf die Geschwindigkeit in y-Richtung nicht stark gewesen sein. Damit können wir die Lorentzkraft als konstant annehmen und die auf das Teilchen wirkende Kraft ist ebenfalls konstant:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q(E + vB) \cdot \vec{e}_y$$

Dann können wir für die Koordinaten des Teilchens schreiben (t_1 ist der Zeitpunkt bei dem das Teilchen den Spalt erreicht):

$$x(t) = v \cdot t \Rightarrow t_1 = \frac{L}{v}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{q(E + vB)}{2m}t^2$$
$$\Rightarrow y(t_1) = \frac{q(E + vB)}{2m}\frac{L^2}{v^2}$$

Wenn der Spalt in y-Richtung von $-a$ bis a geht erhalten wir die zwei Intervalgrenzen v_1 und v_2:

$$\begin{aligned}
v_1: \quad y(t_1) &= \frac{q(E + v_1 B)}{2m}\frac{L^2}{v_1^2} \overset{!}{=} a \\
\Rightarrow 0 &= a - \frac{qEL^2}{2mv_1^2} - \frac{qBL^2}{2mv_1} \\
&= av_1^2 - \frac{qBL^2}{2m}v_1 - \frac{qEL^2}{2m} \\
&= v_1^2 - \frac{qBL^2}{2ma}v_1 - \frac{qEL^2}{2ma} \\
v_2: \quad y(t_1) &= \frac{q(E + v_2 B)}{2m}\frac{L^2}{v_2^2} \overset{!}{=} -a \\
\Rightarrow 0 &= a + \frac{qEL^2}{2mv_2^2} + \frac{qBL^2}{2mv_2} \\
&= av_2^2 + \frac{qBL^2}{2m}v_2 + \frac{qEL^2}{2m} \\
&= v_2^2 + \frac{qBL^2}{2ma}v_2 + \frac{qEL^2}{2ma}
\end{aligned}$$

Mit der pq-Formel erhalten wir die Lösungen für v_1 und v_2 (wobei der -Teil eine negative Geschwindigkeit erzeugt und ignoriert werden kann)

$$v_1 = \frac{qBL^2}{4ma} \pm \sqrt{\left(\frac{qBL^2}{4ma}\right)^2 + \frac{qEL^2}{2ma}} \qquad\qquad v_2 = -\frac{qBL^2}{4ma} \pm \sqrt{\left(\frac{qBL^2}{4ma}\right)^2 - \frac{qEL^2}{2ma}}$$

c) Die Gesamtkraft auf ein geladenes Teilchen im Wienfilter (Summe aus Coulomb- und Lorentzkraft) lautet:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Mit dem 3. Newtonschen Axiom können wir die DGL aufstellen:

$$\begin{aligned}
\vec{F} = m \cdot \dot{\vec{v}} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\
&= Eq\ \vec{e}_y + Bq\ (\dot{\vec{v}} \times \vec{e}_z) \\
&= Eq\ \vec{e}_y + Bq \cdot \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Man erhält ein System aus 3 Gleichungen:

$$\dot{v}_x = \frac{qB}{m} v_y \tag{3.1}$$
$$\dot{v}_y = \frac{Eq}{m} - \frac{qB}{m} v_x \tag{3.2}$$
$$\dot{v}_z = 0 \tag{3.3}$$

Durch Ableiten der ersten und einsetzen in die zweite Gleichung bringt uns $v_x(t)$:

$$\begin{gathered}
(3.1) \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \ddot{v}_x = \frac{qB}{m} \dot{v}_y \Rightarrow \dot{v}_y = \frac{m}{qB} \ddot{v}_x \\
\text{Einsetzen in (3.2) } \Rightarrow \frac{m}{qB} \ddot{v}_x = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m} v_x \\
\ddot{v}_x + \underbrace{\left(\frac{qB}{m}\right)^2}_{=\omega^2} v_x = \frac{qE}{m} \frac{qB}{m}
\end{gathered}$$

Mit dem Ansatz $v_x(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) + \gamma$ erhalten wir mit den Randbedingungen:

- $\alpha = 0$, da bei $t = 0$ keine Kraft in x-Richtung wirkt
- γ mit der partikulären Lösung:
$$\omega^2 \cdot \gamma = \frac{q^2\ E\ B}{m^2} \Rightarrow \gamma = \frac{E}{B}$$
- β folgt aus der Rdb $v_x(0) = v_0$:

$$v_x(0) = \beta \cos(0) + \frac{E}{B} = \beta + \frac{E}{B} \overset{!}{=} v_0 \Rightarrow \beta = v_0 - \frac{E}{B}$$

Damit lautet die Lösung der x-Koordinate:

$$v_x(t) = \left(v_0 - \frac{E}{B}\right) \cos(\omega t) + \frac{E}{B}$$

Wenn man die Lösung für v_x in (3.2) erhält man durch integrieren eine Lösung für v_y:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_y &= \frac{Eq}{m} - \frac{qB}{m} v_x \\
&= \frac{Eq}{m} - \frac{qB}{m} \left(\left(v_0 - \frac{E}{B} \right) \cos(\omega t) + \frac{E}{B} \right) \\
&= \frac{Eq}{m} - \frac{qB}{m} \frac{E}{B} - \frac{qB}{m} \left(\left(v_0 - \frac{E}{B} \right) \cos(\omega t) \right) \\
&= -\frac{qB}{m} \left(v_0 0 \frac{E}{B} \right) \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

Mit ω als Zyklotron(-kreis-)frequenz

$$\omega = \frac{qB}{m} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$$

Aufgabe 4

Aufgabe 5

b) Die induzierte Spannung hängt direkt mit der Bewegung in z-Richtung zusammen:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}A\beta z = -A\beta\dot{z}$$

Die Gesamtenergie im System setzt sich zusammen aus kinetischer und potentieller Energie, zusammen mit der Leistung des induzierten Stromes im Ring (nach der Zeit integriert, die Energie ist in Form von thermischer Energie "verloren"):

$$\begin{aligned}
E_{\text{ges}} &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + \int_0^t P_{\text{ind}}\ dt \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \int_0^t U_{\text{ind}} \cdot I_{\text{ind}}\ dt \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \int_0^t \frac{U_{\text{ind}}^2}{R}\ dt \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \int_0^t \frac{(A\beta\dot{z})^2}{R}\ dt \stackrel{!}{=} const.
\end{aligned}$$

c) Da E_{ges} konstant ist, muss die Ableitung dieser 0 sein.
Dann lässt sich die DGL aufstellen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{\text{ges}} = 0 &\stackrel{!}{=} mv\dot{v} + mgv + \frac{(A\beta\dot{z})^2}{R} \\
&= mv\dot{v} + mgv + \frac{(A\beta)^2}{R} \cdot v^2 \\
\Leftrightarrow 0 &= m\dot{v} + mg + \frac{(A\beta)^2}{R} \cdot v \\
\Leftrightarrow g &= -\dot{v} - \underbrace{\frac{(A\beta)^2}{Rm}}_{\alpha :=} \cdot v
\end{aligned}$$

Für die DGL existieren die homogene und partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned}
\text{homogene Lsg: } 0 &= -\dot{v}_h - \alpha v_h \\
\Leftrightarrow 0 &= \dot{v}_h + \alpha v_h \\
\Rightarrow v_h(t) &= \xi_1 \cdot e^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{partikuläre Lsg: } g &= -\dot{v}_p - \alpha v_p \\
\text{Ansatz: } v_p(t) &= \xi_2 \\
\Leftrightarrow g &= -\alpha\xi_2 \\
\xi_2 &= -\frac{g}{\alpha}
\end{aligned}$$

Unsere Gesamtlösung lautet dann:

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = \xi_1 \cdot e^{-\alpha t} - \frac{g}{\alpha}$$

d) Mit unserer Rdb. erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
v(0) &= \xi_1 \cdot e^{-\alpha 0} - \frac{g}{\alpha} = \xi_1 - \frac{g}{\alpha} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \xi_1 &= \frac{g}{\alpha} \\
\Rightarrow v(t) &= \frac{g}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t} - \frac{g}{\alpha}
\end{aligned}$$

Damit existiert eine Grenzgeschwindigkeit:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{g}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t} - \frac{g}{\alpha} = -\frac{g}{\alpha}$$