Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

21. Übungsblatt

Aufgabe 1

a)

$$
\begin{aligned}
Z_{AB} &= Z_C + Z_{LR} \\
&= \frac{i\omega C}{+}\frac{i\omega LR}{i\omega L + R} \\
&= \frac{i\omega L + R + i\omega C(i\omega LR)}{i\omega C(i\omega L + R)} \\
&= \frac{R - \omega^2 LCR + i\omega L}{i\omega CR - \omega^2 LC}
\end{aligned}
$$

Für die relle Impedanz:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(Z_{AB}) &= \frac{\omega L(-\omega^2 LC) - (R - \omega^2 LCR)\cdot \omega CR}{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC)^2} \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow 0 &= \omega L(-\omega^2 LC) - (R - \omega^2 LCR)\cdot \omega CR \\
&= -\omega^3 L^2 C - \omega CR^2 + \omega^3 LC^2 R^2 \\
\Rightarrow 0 &= -\omega^2 L^2 C - CR^2 + \omega^2 LC^2 R^2 \\
\Leftrightarrow CR^2 &= -\omega^2 L^2 C + \omega^2 LC^2 R^2 \\
\Rightarrow \omega^2 &= \frac{CR^2}{L^2 C^2 R^2 - L^2 C} \\
\Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{R^2}{L^2 CR^2 - L^2}}
\end{aligned}
$$

b) Die an der LCR-Schaltung abfallende Spannung U_{AB} ist bestimmt durch

$$
U_{AB} = \frac{Z_{AB}}{R_i + Z_{AB}} U_0
$$

Dann lautet die elektrische Leistung der LCR-Schaltung:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{\Delta U^2}{Z_{AB}} \\
&= \frac{Z_{AB}^2}{(R_i + Z_{AB})^2}\frac{1}{Z_{AB}} U_0 \\
&= \frac{Z_{AB}}{(R_i + Z_{AB})^2} U_0
\end{aligned}
$$

Diese wird maximal für

$$
\begin{aligned}
d_{Z_{AB}} P &= U\frac{(R_i + Z_{AB})^2 - Z_{AB}\cdot 2\cdot (R_i + Z_{AB})}{(R_i + Z_{AB})^4} \overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow 0 &= R_i + Z_{AB} - 2Z_{AB} \\
\Rightarrow Z_{AB} &= R_i
\end{aligned}
$$

c)

$$\begin{aligned}
R_i &= \frac{R - \omega^2 LCR + i\omega L}{i\omega CR - \omega^2 LC} \\
Z_{AB} \in \mathbb{R} \Rightarrow &= \frac{(R - \omega^2 LCR)(-\omega^2 LC) + \omega^2 LCR}{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC)^2} \\
&= \frac{\omega^4 L^2 C^2 R - \omega^2 LCR + \omega^2 LCR}{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC)^2} \\
&= \frac{\omega^4 L^2 C^2 R}{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC)^2} \\
&= \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \\
\Rightarrow 0 &= \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} - R_i \\
\Leftrightarrow 0 &= \omega^2 L^2 R - R_i R^2 - R_i \omega^2 L^2 \\
\Leftrightarrow 0 &= R^2 - \frac{\omega^2 L^2}{R_i} R + \omega^2 L^2
\end{aligned}$$

Mit der pq-Formel erhalten wir eine Lösung:

$$R = \frac{\omega^2 L^2}{2R_i} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega^2 L^2}{2R_i}\right)^2 - \omega^2 L^2}$$

Aufgabe 2

Die Leistung des Heizlüfters hängt vom Spannungsabfall an diesem ab:

$$P_H = \frac{\Delta U^2}{R_2}$$

Der Spannungsabfall folgt aus den Kirchhoffschen Regeln:

$$\Delta U = U_H \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Dann können wir den benötigten Widerstand genau berechnen:

$$\begin{aligned}
P_H &= U_H^2 \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{1}{R_2} \\
&= U_H^2 \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} \\
\Leftrightarrow P_H (R_1 + R_2)^2 &= U_H^2 R_2 \\
\Leftrightarrow 0 &= P_H R_1^2 + 2 P_H R_1 R_2 + P_H R_2^2 - U_H^2 R_2 \\
\Leftrightarrow 0 &= R_2^2 + \left(2R_1 - \frac{U_H^2}{P_H}\right) R_2 + R_1^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Da die Leitung einen Widerstand besitzt, verrichtet der Strom an diesem Arbeit durch Aufheizen des Kabels.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R$$

Dieser ist proportional zum Quadrat der Stromstärke I, d.h. diese sollte minimiert werden. Dafür muss die Spannung U angehoben werden. b)

$$P = I^2 \cdot R = 500^2\ A^2 \cdot 0.2\ k\Omega = 5 \cdot 10^4\ W$$

Aufgabe 5

a)

1. Mit Gaußschem Satz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\ dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\ dV \Rightarrow \oint_{\partial_V} \vec{E}\ d\vec{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\ dV = \frac{q_{\text{enq}}}{\epsilon_0}$$

2. Ebenfalls mit Gaußschem Satz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\ dV = 0 \Rightarrow \oint_{\partial_V} \vec{B}\ d\vec{A} = 0$$

3. Mit Satz von Stokes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \Rightarrow \int_A \vec{\nabla} \times \vec{E}\ d\vec{A} = \int_A -\partial_t \vec{B}\ d\vec{A} \Rightarrow \oint_{\partial_A} \vec{E}\ d\vec{r} = -\partial_t \int_A \vec{B}\ \vec{dA} = -\partial_t \phi$$

4.

b) Aus der 4. Maxwell-Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \\ \Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)}_{=0} &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\partial_t \vec{E}\right) \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}} &= -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}{\epsilon_0} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ausgehend von (5.1) und der Kontinuitätsgleichung lässt sich dann zeigen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(0) + \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}}\ dt \\ (5.1) \Rightarrow \quad &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} - \int_0^t \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}{\epsilon_0}\ dt \\ (\text{Kontinuität}) \Rightarrow \quad &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \int_0^t \frac{\partial_t \rho}{\epsilon_0}\ dt \\ &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \frac{\rho(t)}{\epsilon_0}\bigg|_0^t \\ &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \frac{\rho(t)}{\epsilon_0}\bigg|_0^t \\ &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \frac{\rho(t)}{\epsilon_0} - \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\rho(t)}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Mit der 2. und 3. Maxwellgleichug lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0) + \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{B}}(t)\ dt \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0) - \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times E(t)\right)\ dt \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$