Matthias Maile
Roman Surma

21. Übungsblatt

1) a) $Z = Z_C + \frac{1}{\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_r}} = \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{R}{i\omega LR} + \frac{i\omega L}{i\omega LR}}$

$= \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{R + i\omega L}{i\omega LR}} = \frac{1}{i\omega C} + \frac{i\omega LR}{R + i\omega L}$

Z wird für sehr große ω reell

b) $P = R I^2 = U_E^2 \frac{Z}{(R_i + Z)^2}$

Die Leistung ist maximal ~~wenn~~ wenn: $\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow Z = R_i$

c) $Z = R_i$

$R_i = \frac{1}{i\omega C} + \frac{i\omega LR}{R + i\omega L} =$

$\Leftrightarrow R_i - \frac{1}{i\omega C} = \frac{i\omega LR}{R + i\omega L}$

$\Leftrightarrow \left(R_i - \frac{1}{i\omega C}\right) \cdot (R + i\omega L) = i\omega c R$

$\Leftrightarrow R_i \cdot R + i\omega L R_i - \frac{R}{i\omega C} - \frac{\cancel{i\omega}L}{\cancel{i\omega}C} = i\omega c R$

$\Leftrightarrow R \cdot \left(R_i - \frac{1}{i\omega C}\right) + i\omega L R_i - \frac{L}{C} = i\omega c R$

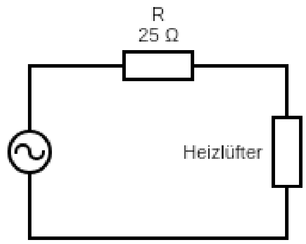
Z muss reell sein
-> Imaginäre Teile fallen weg

$\Rightarrow R \cdot R_i - \frac{L}{C} = 0$

$\Rightarrow R = \frac{L}{C \cdot R_i}$

Aufgabe 2

a) Der Aufbau sieht entsprechend aus:



Für die Betriebsleistung muss ein Strom I fließen:

$$P_H = U_H \cdot I \;\Rightarrow\; I = \frac{P_H}{U_H} \approx 7.8261\ A$$

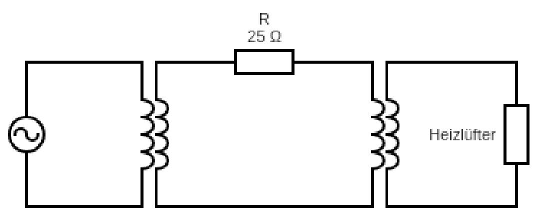
Da dieser Strom auch durch den Widerstand fließt, wird an diesem die Arbeit geleistet:

$$P_R = U_R \cdot I = R \cdot I^2 = 1531.2\ W$$

Gesamtleistung und Wirkungsgrad lauten somit

$$P_G = P_H + P_R = 3331.2\ W \Rightarrow \eta = \frac{P_H}{P_G} \approx 0.54$$

b) Mit den Transformatoren sieht der Aufbau wie folgt aus:



Aus dem Windungszahlverhältnis 9 : 1 folgt das Stromverhältnis

$$I_R : I_H = 1 : 9 \;\Rightarrow I_R = \frac{I_H}{9} \approx 0.87\ A$$

Damit muss am Widerstand die Leistung P'_R geleistet werden:

$$P'_R = R \cdot I_R^2 = 18.904\ W$$

Gesamtleistung und Wirkungsgrad lauten somit

$$P'_G = P_H + P'_H = 1818.9\ W \;\Rightarrow\; \eta' = \frac{P_H}{P'_G} \approx 0.99$$

Aufgabe 3

a) Da die Leitung einen Widerstand besitzt, verrichtet der Strom an diesem Arbeit durch Aufheizen des Kabels.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R$$

Dieser ist proportional zum Quadrat der Stromstärke I, d.h. diese sollte minimiert werden. Dafür muss die Spannung U angehoben werden.
b)

$$P = I^2 \cdot R = 500^2\ A^2 \cdot 0.2\ k\Omega = 5 \cdot 10^4\ W$$

Aufgabe 4

a) Mit der 4. Maxwellgleichung wissen wir, dass

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_V)$$

und diese Gleichung auch für alle Flächen erfüllt sein muss.
Wenn wir als uns eine Fläche denken, wo der Leiter komplett durch die Fläche durchstößt, also kein Verschiebungsstrom existiert, so muss gelten:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I.$$

Genauso kann man aber auch eine Fläche wählen, die, am Leiter vorbei, durch den Raum des Kondensators verläuft. Durch diese Fläche fließt dann kein Strom, sondern nur ein Verschibungsstrom. Da wir aber den Rand gleich ließen, können wir für I_V schreiben:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 I_V \;\Rightarrow\; I_V = I = 2\ A$$

b) Das elektrische Feld des Plattenkondensators ist gegeben durch

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}$$

mit σ als Flächenladungsdichte $\frac{Q}{A}$.
Dann lautet die Ableitung des $\vec{E}$-Feldes nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
\partial_t E(t) &= \partial_t \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\
&= \partial_t \frac{Q}{A \cdot \epsilon_0} \\
&= \frac{I}{A \cdot \epsilon_0} \\
&= \frac{2\ A}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

c) Der Verschiebungsstrom $\tilde{I}_V$, der durch die Fläche A' fließt, lässt sich dann bestimmen:

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_V &= \epsilon_0 \partial_t \int_{A'} \vec{E} \cdot d\vec{A}' \quad \vec{E} \text{ homogen} \\
&= \epsilon_0 \partial_t E \cdot A' \\
&= \epsilon_0 A' \frac{I}{\epsilon_0 A} \\
&= \frac{A'}{A} I \\
&= \frac{I}{4}
\end{aligned}$$

d) Aus der 4. Maxwell-Gleichung folgt dann das Megnetfeld am Rand der der Fläche A':

$$\oint_{A'} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_V) = \mu_0 I_V = \mu_0 \frac{I}{4}$$

Aufgabe 5

a)

1. Mit Gaußschem Satz
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \; dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \; dV \Rightarrow \oint_{\partial_V} \vec{E} \; d\vec{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \; dV = \frac{q_{\text{enq}}}{\epsilon_0}$$
2. Ebenfalls mit Gaußschem Satz
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \; dV = 0 \Rightarrow \oint_{\partial_V} \vec{B} \; d\vec{A} = 0$$
3. Mit Satz von Stokes
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \Rightarrow \int_A \vec{\nabla} \times \vec{E} \; d\vec{A} = \int_A -\partial_t \vec{B} \; d\vec{A} \Rightarrow \oint_{\partial_A} \vec{E} \; d\vec{r} = -\partial_t \int_A \vec{B} \; \vec{dA} = -\partial_t \phi$$
4. Mit Satz von Stokes
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \Rightarrow \int_A \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \int_A \partial_t \vec{E} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I_{\text{enq}} + \mu_0 \epsilon_0 \int_A \partial_t \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

b) Aus der 4. Maxwell-Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \\ \Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right)}_{=0} &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\partial_t \vec{E} \right) \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}} &= -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}{\epsilon_0} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ausgehend von (5.1) und der Kontinuitätsgleichung lässt sich dann zeigen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(0) + \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}} \; dt \\ (5.1) \Rightarrow \quad &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} - \int_0^t \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}{\epsilon_0} \; dt \\ (\text{Kontinuität}) \Rightarrow \quad &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \int_0^t \frac{\partial_t \rho}{\epsilon_0} \; dt \\ &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \left. \frac{\rho(t)}{\epsilon_0} \right|_0^t \\ &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \left. \frac{\rho(t)}{\epsilon_0} \right|_0^t \\ &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \frac{\rho(t)}{\epsilon_0} - \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\rho(t)}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Mit der 2. und 3. Maxwellgleichug lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0) + \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{B}}(t) \; dt \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0) - \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times E(t) \right) \; dt \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$