Etem Kalyon
Matthias Maile
Roman Surma

15. Übungsblatt

Aufgabe 1

1) $$V(x,y,z) = \ln\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

a) $\vec{\nabla} V$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\ln\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \cdot \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'$$

$$\left(z \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = z \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} V(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cancel{z}} \cdot \frac{2x\cancel{z}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} V(x,y,z) = \frac{2y\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} V(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} V(\ldots) = \begin{pmatrix} \frac{2x\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{2y\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

b) Zylinderkoord.: $V(r, \varphi, z)$ $z = z$ $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$V(z, r) = \ln\left(\frac{z}{r}\right)$

$$\ln\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\vec{\nabla} V(r,z) = \frac{\partial}{\partial r}\left(V(r,z)\right) \cdot \vec{e_r} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(V(r,z)\right) \cdot \vec{e_\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}\left(V(r,z)\right) \cdot \vec{e_z}$$

$$= -\frac{1}{r} \cdot \vec{e_r} + 0 + \frac{1}{z} \cdot \vec{e_z}$$

c) Richtungsableitung in radiale Richtung

$\nabla f \cdot \vec{e_r} = -\frac{1}{r}\vec{e_r}$ ($\vec{\nabla} f$ aus b) gegeben)

Aufgabe 2

a) Δ in Kugelkoordinaten:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}(\partial_r(r^2\partial_r f) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta f) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 f)$$

Die Poisson-Gleichung lautet:

$$\Delta\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{-\rho(r,\theta,\varphi)}{\epsilon_0}$$

Da die Ladung als Kugel (also symmetrisch zu θ und φ) angeordnet ist, vereinfacht sich diese:

$$\Delta\phi(r) = \frac{-\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Die partiellen Ableitungen zu θ und φ sind dem ensprechend auch 0.
Durch zweifaches Integrieren können wir für $r > R$ ermitteln:

$$\begin{aligned}\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\phi\right) &= \frac{-\rho_0}{\epsilon_0} = 0\\ \Leftrightarrow \partial_r\left(r^2\partial_r\phi\right) &= 0\\ \Leftrightarrow r^2\partial_r\phi &= \alpha\\ \Leftrightarrow \partial_r\phi &= \frac{\alpha}{r^2}\\ \Leftrightarrow \phi &= -\frac{\alpha}{r} + \beta\end{aligned}$$

Ebenso kann man für $r \leq R$ ermitteln:

$$\begin{aligned}\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\phi\right) &= \frac{-\rho_0}{\epsilon_0}\\ \Leftrightarrow \partial_r\left(r^2\partial_r\phi\right) &= \frac{-\rho_0}{\epsilon_0}r^2\\ \Leftrightarrow r^2\partial_r\phi &= \frac{-\rho_0}{3\epsilon_0}r^3 + \gamma\\ \Leftrightarrow \partial_r\phi &= \frac{-\rho_0}{3\epsilon_0}r + \frac{\gamma}{r^2}\\ \Leftrightarrow \phi &= \frac{-\rho_0}{6\epsilon_0}r^2 - \frac{\gamma}{r} + \delta\end{aligned}$$

b) 1. Für die erste RB $-\infty < \lim_{r\to 0}\phi(r) < \infty$ muss gelten:

$$\lim_{r\to 0}\phi(r) = \lim_{r\to 0}\frac{-\rho_0}{6\epsilon_0}r^3 - \frac{\gamma}{r} + \delta \overset{!}{\in} (-\infty,\infty) \Rightarrow \gamma = 0$$

2. Die Bedingung, dass das Potential für $r \to \infty$ gegen 0 gehen soll bewirkt, dass die Werte des Potentials auf einen festen Wert gesetzt werden.
Ohne diese könnte man durch β und δ das Potential beliebig nach oben und unten Verschieben. Einen Punkt im Unendlichen als Referenz zu wählen, ist jedoch die Konvention in der Physik.

$$\lim_{r\to\infty}\phi(r) = \lim_{r\to\infty} -\frac{\alpha}{r} + \beta = \beta \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \beta = 0$$

Damit folgt das Potential $\phi(r)$ und die Ableitung $\phi'(r)$:

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{r} & \text{falls } r > R \\ -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}r^2 + \delta & \text{falls } r \leq R \end{cases} \qquad \phi'(r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{r^2} & \text{falls } r > R \\ -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r & \text{falls } r \leq R \end{cases}$$

3.

$$\limsup_{r \to R} \phi(r) \stackrel{!}{=} \liminf_{r \to R} \phi(r)$$
$$\Leftrightarrow \frac{-\alpha}{r} = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 + \delta$$
$$\Rightarrow \delta = -\frac{\alpha}{R} + \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0}$$

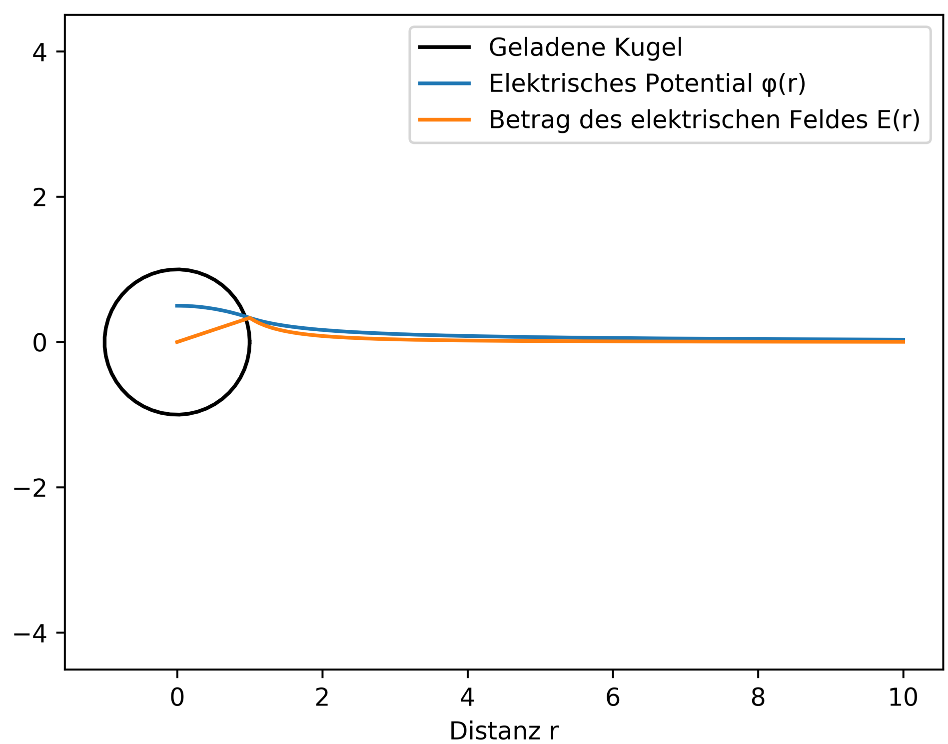
4. Da die Ladung bei $r = R$ einen Sprung besitzt, besitzt das Integral der Ladung an der Stelle einen Knick (ist aber stetig). Das Integral der Ladung ρ ist gleichzeitig die erste Ableitung vom Potential, daher muss diese stetig sein.

$$\limsup_{r \to R} \phi'(r) \stackrel{!}{=} \liminf_{r \to R} \phi'(r)$$
$$\frac{\alpha}{R^2} = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R$$
$$\Rightarrow \alpha = -\frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow \delta = -\frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}$$

Durch die vier Randbedingungen folgt das Potential ϕ und die Ableitung ϕ':

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} & \text{falls } r > R \\ -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} & \text{falls } r \leq R \end{cases} \qquad \phi'(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{falls } r > R \\ -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r & \text{falls } r \leq R \end{cases}$$

c) Da $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d}{dr}\phi(\vec{r})$ können wir die Ableitung aus b) benutzen:



Aufgabe 3

Die Ladungsdichte der Elektronen war gegeben durch

$$\rho_e(\vec{r}) = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

Damit folgt das elektrische Potential, welches durch das Elektron erzeugt wird:

$$\begin{aligned}
\phi_e\left(\vec{r}\right) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho_e(\vec{r'})r'^2 \sin\vartheta'}{d\left(\vec{r'}, \vec{r}\right)} d\varphi' d\vartheta' dr' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{-\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r'}{a}\right) r'^2 \sin\vartheta'}{d\left(\vec{r'}, \vec{r}\right)} d\varphi' d\vartheta' dr' \\
&= -\frac{e}{2a^3\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{\exp\left(-\frac{2r'}{a}\right) r'^2 \sin\vartheta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'\cos\theta'}} d\vartheta' dr' \\
&= -\frac{e}{2a^3\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r'}{a}\right) \frac{r'}{r} \underbrace{\left(\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'}\right)}_{\xi :=} dr'
\end{aligned}$$

Mit einer Fallunterscheidung lässt sich ξ durch Verwendung der binomischen Formeln vereinfachen:

$$\begin{aligned}
r > r' : \qquad & \xi = \sqrt{(r + r')^2} - \sqrt{(r - r')^2} = (r + r') - (r - r') = 2r' \\
r < r' : \qquad & \xi = \sqrt{(r' + r)^2} - \sqrt{(r' - r)^2} = (r' + r) - (r' - r) = 2r
\end{aligned}$$

Da für ξ 2 Fälle existieren Teilen wir das Integral an dieser Stelle auf.
Durch partielle Integration erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
\phi_e\left(\vec{r}\right) &= -\frac{e}{ra^3\pi\epsilon_0} \int_0^r \exp\left(-\frac{2r'}{a}\right) r'^2 dr' - \frac{e}{a^3\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) r' \, dr' \\
&= -\frac{e}{ra^3\pi\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{-2r'}{a}\right) \left(\frac{-r'^2 a}{2} - \frac{r'a^2}{2} - \frac{a^3}{4}\right) + \frac{a^3}{4}\right]_0^r - \frac{e}{a^3\pi\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{-2r'}{a}\right) \left(\frac{r'a}{2} + \frac{a^2}{4}\right)\right]_r^\infty \\
&= -\frac{e}{ra^3\pi\epsilon_0} \exp\left(\frac{-2r}{a}\right) * \left(\frac{-r^2 a}{2} - \frac{ra^2}{2} - \frac{a^3}{4}\right) - \frac{e}{ra^3\pi\epsilon_0} \frac{a^3}{4} - \frac{e}{a^3\pi\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{-2r}{a}\right) * \left(\frac{ra}{2} + \frac{a^2}{4}\right)\right] \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 ra^3} \exp\left(\frac{-2r}{a}\right) * \left(a^3 + ra^2\right) - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^3 r} a^3 \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(\frac{-2r}{a}\right) * \left(1 + \frac{r}{a}\right) - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}
\end{aligned}$$

Da das Proton als Punktladung angenommen werden kann lautet das elektrisches Potential:

$$\phi_p(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Das Gesamtpotential als Summe lautet damit:

$$\phi_{ges}(r) = \phi_e(r) + \phi_p(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(\frac{-2r}{a}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

Das elektrische Feld folgt dann aus der Produktregel:

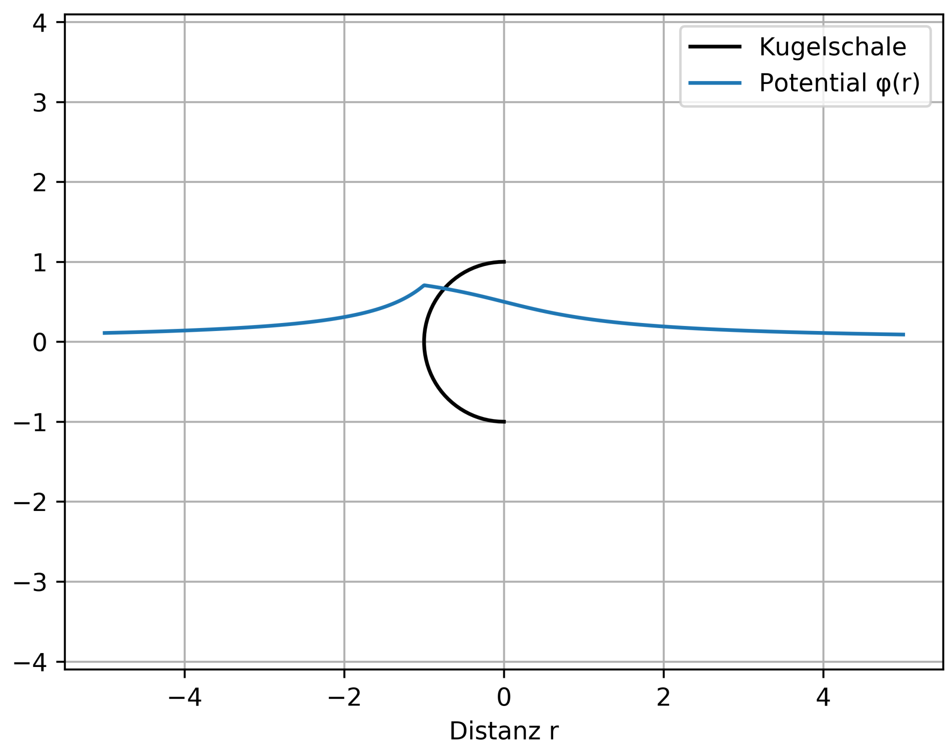
$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\phi'(r) * \hat{r} \\
&= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} * \exp\left(\frac{-2r}{a}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{-2}{a}\exp\left(\frac{-2r}{a}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right) + \exp\left(\frac{-2r}{a}\right)\frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}\exp\left(\frac{-2r}{a}\right)\left(\frac{2}{a}+\frac{2r}{a^2}+\frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\exp\left(\frac{-2r}{a}\right)\left(\frac{2r^2+2ar+a^2}{a^2r^2}\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

a)

$$
\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} d^3\vec{r}' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sigma_0\cdot\delta(r'-R)\cdot\Theta\left(\vartheta-\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{r^2+r'^2+2rr'\cos\vartheta}} r'^2 \sin\vartheta \; dr' d\varphi d\vartheta \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0\cdot\Theta\left(\vartheta-\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\vartheta}} R^2 \sin\vartheta \; d\varphi d\vartheta \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sigma_0\cdot R^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\vartheta}} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma_0 \frac{R\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\vartheta}}{r}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{R\cdot\sigma_0}{2r\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+r^2+2rR}-\sqrt{R^2+r^2}\right) \\
&= \frac{R\cdot\sigma_0}{2r\epsilon_0}\left(R+r-\sqrt{R^2+r^2}\right)
\end{aligned}
$$

b)



Aufgabe 5

a)

$$\int_{-2}^{5} \underbrace{(x^2 - 5x + 6)}_{f(x):=} \delta(x-3)dx = f(3) = 0$$

b)

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - f(a))\delta(x-a)dx = \begin{cases} f(a) - f(a) & \text{falls } a \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = 0$$

c)

$$\int_0^{\infty} x^2 \delta(x^2 - 3x + 2)dx = \sum_i \frac{x_i^2}{|2x_i - 3|} = \frac{4}{1} + \frac{1}{1} = 5$$

x_i entspricht den Nullstellen der Funktion $x^2 - 3x + 2$

d)

$$\int_0^{\infty} \ln(x)\delta'(x-a)dx = [\delta(x-a)\ln(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\delta(x-a)dx = \begin{cases} -\infty & \text{für } a = 0 \\ -\frac{1}{a} & \text{sonst} \end{cases}$$

e)

$$\int_0^{\pi} \sin^3(\theta)\delta\left(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{|-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)|} = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$$