Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

23. Übungsblatt

Aufgabe 1

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \cdot \cos(kx - \omega t)$$

a) Ausbreitung in x-Richtung $\Rightarrow \vec{k} = k \cdot \vec{e}_x$
Damit folgt $\vec{B}$:

$$\begin{aligned}\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} &= \underbrace{\frac{k}{\omega} \cdot E_0}_{B_0 = \frac{E_0}{c}} \cdot (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \cdot \cos(kx - \omega t) \\ &= \underbrace{B_0 \cdot \vec{e}_z}_{\vec{B} = B_0 \vec{e}_z} \cdot \cos(kx - \omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} &= \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu_0} \cdot \cos^2(kx - \omega t) \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_z) \\ &= \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu_0} \cdot \cos^2(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_x \\ &= \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cdot \cos^2(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_x\end{aligned}$$

b) Der Poynting-Vektor zeigt in die Richtung des Energieflusses und der Betrag von diesem ist die Intensität des Energieflusses zum Zeitpunkt t.

c)

$$I = \langle |\vec{s}| \rangle_t = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \langle |\cos^2(kx - \omega t)| \rangle_t = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}$$

d)

$$P = \frac{I}{c} = \frac{E_0^2}{2c^2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

e)

$$P = \frac{I}{c} = \frac{1.4 \cdot 10^3 \ Wm^{-2}}{3 \cdot 10^8 m/s} \approx 4.67 \cdot 10^{-6} Nm^{-2} \Rightarrow F = PA = P \cdot \pi R_E^2 \approx 5.95 \cdot 10^8 \ N$$

Aufgabe 2

a) Beim ersten Fall entsteht eine linear polarisierte Welle:

- $\delta = 0: \; \vec{E} = \begin{pmatrix} |\hat{E}_x| \cdot \cos(kz - \omega t) \\ |\hat{E}_y| \cdot \cos(kz - \omega t) \end{pmatrix} = \cos(kz - t) \cdot \begin{pmatrix} |\hat{E}_x| \\ |\hat{E}_y| \end{pmatrix}$
- $\delta = \pm\pi: \; \vec{E} = \begin{pmatrix} |\hat{E}_x| \cdot \cos(kz - \omega t) \\ |\hat{E}_y| \cdot \cos(kz - \omega t \pm \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\hat{E}_x| \cdot \cos(kz - \omega t) \\ -|\hat{E}_y| \cdot \cos kz - \omega t) \end{pmatrix} = \cos(kx - \omega t) \begin{pmatrix} |\hat{E}_x| \\ -|\hat{E}_y| \end{pmatrix}$

Beim zweiten Fall entsteht eine elliptisch polarisierte Welle (da $|\hat{E}_x| \neq |\hat{E}_y|$ keine zirkular polarisierte Welle):

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} |\hat{E}_x| \cdot \cos(kz - \omega t) \\ |\hat{E}_y| \cdot \cos(kz - \omega t \pm \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\hat{E}_x| \cdot \cos(kz - \omega t) \\ \mp|\hat{E}_y| \cdot \sin(kz - \omega t) \end{pmatrix}$$

(b)

4. Maxwell-Gleichung im Vakuum:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x \end{pmatrix} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}$$

$\vec{B}$ in x-y-Ebene (da Ausbreitung in z-Richtung)

$\Rightarrow B_z = 0$

betrachten festen Ort $\Rightarrow \partial_x = \partial_y = 0$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} -\partial_z B_y \\ \partial_z B_x \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \int dz \; \mu_0 \varepsilon_0 \; \partial_t \begin{pmatrix} E_y \\ -E_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.})$$

Für den 1. Fall:

$$\vec{E} = \cos(kz - \omega t) \cdot \begin{pmatrix} |\hat{E}_x| \\ \mp|\hat{E}_y| \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \partial_t \vec{E} = \omega \cdot \sin(kz - \omega t) \cdot \begin{pmatrix} |\hat{E}_y| \\ \mp|\hat{E}_x| \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I.} \Rightarrow \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \int dz \; \frac{1}{c^2} \; \omega \cdot \sin(kz - \omega t) \cdot \begin{pmatrix} \pm|\hat{E}_y| \\ |\hat{E}_x| \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{c^2} \frac{\omega}{k} \cdot \begin{pmatrix} \mp|\hat{E}_y| \\ |\hat{E}_x| \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \pm|\hat{E}_y| \\ -|\hat{E}_x| \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den zweiten Fall:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} |\hat{E}_x| \cos(kz - \omega t) \\ \mp|\hat{E}_y| \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \partial_t \vec{E} = \begin{pmatrix} \omega|\hat{E}_x| \sin(kz - \omega t) \\ \pm\omega|\hat{E}_y| \cos(kz - \omega t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \int dz \frac{1}{c^2} \omega \cdot \begin{pmatrix} \pm|\hat{E}_y| \cos(kz - \omega t) \\ |\hat{E}_x| \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \mp|\hat{E}_x| \sin(kz - \omega t) \\ |\hat{E}_y| \cos(kz - \omega t) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Aufgabe 3

(a) Das Dipolmoment der Anordnung lässt sich bestimmen:

$$\vec{p} = -a\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{e_z} + b\cdot\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{e}_z$$

$$= (b-a)\cdot\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{e}_z$$

Für $b=a$ ergibt sich:

$$\vec{p} = (b-b)\cdot\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{e}_z = \vec{0}$$

Da die Dipolstrahlung nur vom Dipolmoment abhängt, ist diese bei $a=b$ auch immer 0 (im Fernfeld)

(b) $a=2b$

$$\Rightarrow \vec{p} = (b-2b)\cdot\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{e}_z$$

$$= -b\cdot\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\cdot\vec{e}_z$$

$\vec{B}$ und $\vec{E}$-Fernfeld für den Dipol:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c r}\ddot{\vec{p}}\times\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left(\frac{\ddot{\vec{p}}\cdot\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} - \ddot{\vec{p}}\right)$$

Die zeitlichen Ableitungen des Dipols:

$$\vec{p} = -b\cdot\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\cdot\vec{e}_z$$

$$\dot{\vec{p}} = \frac{\omega b}{2}\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{e}_z$$

$$\ddot{\vec{p}} = \frac{\omega^2 b}{4}\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\vec{e}_z$$

Aufgrund der großen Distanz muss bei $\ddot{\vec{p}}$ die retardierte Zeit

$$t' = t - \frac{r}{c}$$

eingesetzt werden, während t die Zeit beim Beobachter beschreibt.

Damit lauten die Felder:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c r^2}\left(\ddot{\vec{p}}\times\vec{r}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c r}\cdot\frac{\omega^2 b}{4}\cdot\cos\left(\frac{\omega t'}{2}\right)\left(\vec{e}_z\times\vec{e}_r\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c r}\cdot\frac{\omega^2 b}{4}\cdot\cos\left(\frac{\omega t'}{2}\right)\cdot\sin\theta\cdot\vec{e}_\varphi$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c r}\cdot\frac{\omega^2 b}{4}\cdot\cos\left(\frac{\omega}{2}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\sin\theta\cdot\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\omega^2 b}{4}\cos\left(\frac{\omega t'}{2}\right)\left(\vec{e}_z\cdot\vec{e}_r\cdot\frac{\vec{r}}{r} - \vec{e}_z\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r}\cdot\frac{\omega^2 b}{4}\cdot\cos\left(\frac{\omega t'}{2}\right)\cdot\left(\cos\theta\cdot\vec{e}_r - \vec{e}_z\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\omega^2 b}{4}\cdot\cos\left(\frac{\omega}{2}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\cdot\left(\cos\theta\cdot\vec{e}_r - \vec{e}_z\right)$$

$$\Rightarrow |\vec{B}(\vec{r},t)| = \frac{\mu_0}{4\pi c r}\frac{\omega^2 b}{4}\cdot\cos\left(\frac{\omega}{2}(t-r/c)\right)\cdot\sin\theta$$

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_x \qquad \Rightarrow |\vec{E}(\vec{r},t)| = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\omega^2 b}{4}\cdot\cos\left(\frac{\omega}{2}(t-r/c)\right)\sqrt{(\cos\theta-1)^2 + (\cos\theta\sin\theta)^2}$$

(c) Die Energiestromdichte:

$$S = \frac{c}{\mu_0}B^2$$

$$= \frac{c}{\mu_0}\frac{\mu_0^2}{16^2 c^2\pi^2 r^2}\omega^4 b^2\cdot\cos^2\left(\frac{\omega}{2}(t-r/c)\right)\cdot\sin^2\theta$$

$$= \frac{\mu_0\cdot\omega^4\cdot b^2}{256\,c\,\pi^2 r^2}\cos^2\left(\frac{\omega}{2}(t-r/c)\right)\cdot\sin^2\theta$$

die Energie strömt entlang der Richtung zum Beobachter, somit:

$$\vec{S} = S\cdot\vec{e}_r = \frac{\mu_0\,\omega^2 b^2}{256\,c\pi^2 r^3}\cos^2\left(\frac{\omega}{2}(t-r/c)\right)\cdot\sin^2\theta\cdot\vec{r}$$

Aufgabe 4

a) Auf das Elektron wirkt eine Lorentzkraft, wodurch zum Zeitpunk $t_0 + \Delta t$ das Elektron nicht mehr in die gleiche Richtung fliegt.
Waere $\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_x$, so gaebe es zum spaeteren Zeitpunkt eine Komponente in y-Richtung.

Da das Elektron auf einer Kreisbahn ist wirken Scheinkraefte. Daher ist das Ruhesystem des Elektrons kein Inertialsystem.