Matthias Maile
Roman Surma

18. Übungsblatt

Aufgabe 2

Biot-Savar'sches Gesetz:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3}$$

Zur einfacheren Berechnung teilen wir den Draht in die zwei geraden Segmente (welche aufgrund der Symmetrie das Gleiche Feld am Punkt P besitzen) und in das Halbkreissegment auf.
Zur Verinfachung wird das Koordinatensystem so gelegt, dass der Punkt P im Urspung liegt.
Berechnung des Halbkreissegements:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{HK}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\varphi \times (\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3} \cdot r' \cdot \delta(z') \cdot \delta(r' - R) \cdot \Theta(\pi - \varphi')\ d\varphi' dz' d\rho' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\vec{e}_\varphi \times \mathbf{r'}}{|\mathbf{r'}|^3} \cdot R\ d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\rho}{R^2} \cdot R\ d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\vec{e}_z}{R}\ d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0\ I}{4R} \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Die Berechnung des geraden Leiterelements erfolgt mit der Formel für das Magnetfeld des endlichen Leiters, in Abhängigkeit von den Winkeln an den Enden:

$$\begin{aligned}
B_{ger}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0\ I}{4\pi R} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \\
&= \frac{\mu_0\ I}{4\pi R} \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) \\
&= \frac{\mu_0\ I}{4\pi R}
\end{aligned}$$

Das Magnetfeld folgt dann:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_{HK}(\mathbf{r}) + 2\ \mathbf{B}_{ger}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0\ I}{4R}\vec{e}_z + \frac{\mu_0\ I}{2\pi R}\vec{e}_z = \frac{\pi + 2}{4\pi R}\mu_0\ I\ \vec{e}_z$$

Aufgabe 3

Das magnetische Feld kann mit dem Biot-Savart Gesetz ermittelt werden:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\varphi \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \delta(R - \rho') \cdot \delta(z') \cdot \rho' \; d\rho' \; dz' \; d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\varphi \times (z \; \vec{e}_z - r' \vec{e}_\rho)}{\left(R^2 + z^2\right)^{1.5}} \cdot R \; d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^{2\pi} \frac{z \; \vec{e}_\rho + R \; \vec{e}_z}{\left(R^2 + z^2\right)^{1.5}} \cdot R \; d\varphi'
\end{aligned}
$$

Da sich der Magnetische Dipol auf der z-Achse befindet, verschwindet der $\vec{e}_\rho$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \; \vec{e}_z}{\left(R^2 + z^2\right)^{1.5}} \; d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0 \; I}{2} \frac{R^2 \; \vec{e}_z}{\left(R^2 + z^2\right)^{1.5}}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt die Kraft auf ein magnetisches Dipol m:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= m_z \; \partial_z B_z \; \vec{e}_z \\
&= m_z \; \frac{R^2 \; \mu_0 \; I}{2} \; \partial_z \left(R^2 + z^2\right)^{-1.5} \vec{e}_z \\
&= m_z \; \frac{R^2 \; \mu_0 \; I}{2} \; (-1.5) \left(R^2 + z^2\right)^{-2.5} \cdot 2z \; \vec{e}_z \\
&= \frac{-1.5z \cdot m_z \; R^2 \; \mu_0 \; I}{(R^2 + z^2)^{2.5}} \; \vec{e}_z
\end{aligned}
$$

Für kleine Auslenkungen, also $z \ll R$ vereinfacht sich die Kraft:

$$
\begin{aligned}
z \ll R \Rightarrow R^2 + z^2 \approx R^2 \Rightarrow \mathbf{F} &= \frac{-1.5z \cdot m_z \; R^2 \; \mu_0 \; I}{R^5} \; \vec{e}_z \\
&= \frac{-1.5z \cdot m_z \; \mu_0 \; I}{R^3} \; \vec{e}_z
\end{aligned}
$$

Schreibt man diesen Ausdruck als Differentialgleichung erhalten wir den harmonischen Oszillator:

$$
F_z = M \ddot{z} = \frac{-1.5z \cdot m_z \; \mu_0 \; I}{R^3} \Rightarrow \ddot{z} + \underbrace{\frac{1.5 \cdot m_z \; \mu_0 \; I}{M \cdot R^3}}_{\omega^2} \; z = 0
$$

Mit der uns schon bekannten Lösung:

$$
z(t) = z(0) \cos(\omega t) + \dot{z}(0) \sin(\omega t)
$$

Aufgabe 4

$$\vec{B}(\vec{r}) = B\vec{e}_z,\ B = const. \tag{4.1}$$

a) gesucht sei ein $\vec{A}$, sodass

$$\text{rot}\vec{A} = \vec{B}$$

Mit dem Ansatz

$$\vec{A} = M \cdot \vec{r}, \quad \vec{r} = (x,y,z)^T,\ M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

sind die Einträge von M die partiellen Ableitungen von $\vec{A}$:

$$M_{ij} = \partial_j A_i \tag{4.2}$$

Aus der Vorraussetzung rot$\vec{A} = \vec{B}$ folgen die Bedinungen für M:

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} M_{3,2} - M_{2,3} \\ M_{1,3} - M_{3,1} \\ M_{2,1} - M_{1,2} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ M_{3,2} = M_{2,3},\ M_{1,3} = M_{3,1},\ M_{2,1} = M_{1,2} + B \tag{4.3}$$

Daraus folgt dann die Matrix M (mit den Freiheitsgraden α, ...):

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta + B & \delta & \epsilon \\ \gamma & \epsilon & \zeta \end{pmatrix}$$

Das einfachste Vektorfeld für $\vec{A}$ wäre das wo alle Freiheitsgrade auf 0 gesetzt werden:

$$\vec{A}_0 = M_0 \cdot \vec{r} = M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) A_1 und A_2 seien zwei linear unabhängige Lösungen von (4.1). Dann lässt sich für eine Linearkombination

$$\vec{A}' = \alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2 \quad (\text{mit } \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$$

zeigen:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A}' &= \vec{\nabla} \times \left(\alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2\right) \\
&= \vec{\nabla} \times (\alpha_1 M_1 \cdot \vec{r} + \alpha_2 M_2 \cdot \vec{r}) \\
&= \vec{\nabla} \times ((\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) \cdot \vec{r}) \\
&= \vec{\nabla} \times \left(\sum_{ij} x_i (\alpha_1\ M_{1,ij} + \alpha_2\ M_{2,ij}) \right) \\
&= \sum_{mnij} \epsilon_{mni}\ \underbrace{\partial_{x_n} x_i (\alpha_1\ M_{1,ij} + \alpha_2\ M_{2,ij})}_{(4.2)\Rightarrow\ = \alpha_1 M_{1,in} + \alpha_2 M_{2,in}} \cdot \hat{x}_m \\
&= \sum_{mni} \epsilon_{mni}\ (\alpha_1 M_{1,in} + \alpha_2 M_{2,in}) \cdot \hat{x}_m \\
(4.3) \Rightarrow\ &= \sum_{ni} \epsilon_{3ni}\ (\alpha_1 M_{1,in} + \alpha_2 M_{2,in}) \cdot \hat{x}_3 \\
&= (\alpha_1 (M_{1,21} - M_{1,12}) + \alpha_2 (M_{2,21} - M_{2,12}))\, \vec{e}_z \\
(4.3) \Rightarrow\ &= (\alpha_1 B + \alpha_2 B)\, \vec{e}_z \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2)\, B\vec{e}_z \\
&= B\vec{e}_z
\end{aligned}$$