

# 1. Übungsblatt

---

## Aufgabe 1

## Aufgabe 2

(a) Das Gaußsche Gesetz besagt:

$$\int \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Da  $\vec{E}$  unabhängig vom Ort auf der Fläche  $A$  ist und dazu parallel zum Normalenvektor liegt, kann der Betrag von  $\vec{E}$  aus dem Integral gezogen werden.

$\vec{E}$  und  $\hat{n}$  zeigen jedoch in verschiedene Richtungen;  $\hat{n}$  von der Erde weg, das elektrische Feld richtugn Erde. Daher entsteht ein negatives Vorzeichen.

Die Flächenladungsdichte  $\sigma$  lautet somit:

$$\begin{aligned} \int \vec{E} \, d\vec{A} &= -|\vec{E}| \int d\vec{A} = -|\vec{E}| * A = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{Q}{A} = -E * \epsilon_0 \end{aligned}$$

(b) Wenn man die Ladungsdichte  $\sigma$  aus (a) mit der Fläche  $A$  multipliziert erhält man die Gesamtladung:

$$Q_{\text{Gesamt}} = \sigma * A = -EA\epsilon_0 = -\epsilon_0 * E * 4\pi r_E^2$$

(c) Die Kraft die auf eine Kugel wirkt ist die Summe aus Gewichtskraft und Coulomkraft. Aus dem zweiten newtonschen Axiom folgt dann die Beschleunigung.

$$F_{\text{Gesamt}} = F_G + F_{Co} = mg + E * q_{Kugel} \Rightarrow a = g + \frac{E * q_{Kugel}}{m}$$

Aus der Formel für den freien Fall können wir die benötigten Zeiten für den Fall bestimmen:

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{1}{2}a * (\Delta t)^2 \\ \Rightarrow \Delta t &= \sqrt{\frac{2 * \Delta h}{a}} \end{aligned}$$

$$\Delta t_{\text{ungeladen}} = \sqrt{\frac{2 * \Delta h}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 2m}{10m/s^2}} \approx 0.6325s$$

$$\Delta t_{\text{geladen}} = \sqrt{\frac{2 * \Delta h}{g + \frac{E * q_{Kugel}}{m}}} = \sqrt{\frac{4m}{10m/s^2 + \frac{150N/C * 100\mu C}{0.1Kg}}} = \sqrt{\frac{4m}{10m/s^2 + 0.15m/s^2}} \approx 0.6278s$$

Die geladene Kugel erreicht somit die Erde ungefähr  $0.0047s$  schneller als die Ungeladene.

## Aufgabe 3

Die Coulomb- und die Gewichtskraft sind definiert als:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad F_G = m \cdot g$$

Wir definieren  $q_3 = \frac{q_1 + q_2}{2}$ , die Ladung beider Kugeln nach dem Ladungsausgleich. Aus den trigonometrischen Identitäten folgt das Verhältniss von  $F_C$  und  $F_G$ :

$$\tan \theta = \frac{F_C}{F_G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{m g \cdot r^2}$$

Für  $\theta_2$  lässt sich die das Verhältniss von  $q_1$  und  $q_2$  herleiten:

$$\begin{aligned} \tan \theta_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3^2}{m g \cdot r_2^2} \\ \Leftrightarrow q_3^2 &= \tan \theta_2 \cdot m g r_2^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \\ \Leftrightarrow q_3 = \frac{q_1 + q_2}{2} &= \sqrt{\tan \theta_2 \cdot m g r_2^2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \\ \Leftrightarrow q_1 &= \sqrt{\tan \theta_2 \cdot m g r_2^2 \cdot 16\pi\epsilon_0} - q_2 \end{aligned}$$

Aus  $\theta_1$  folgt zuletzt:

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{m g \cdot r_1^2} \\ \tan \theta_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left( \sqrt{\tan \theta_2 \cdot m g r_2^2 \cdot 16\pi\epsilon_0} - q_2 \right) q_2}{m g \cdot r_1^2} \\ 0 &= q_2^2 - q_2 \sqrt{\tan \theta_2 \cdot m g r_2^2 \cdot 16\pi\epsilon_0} + \tan \theta_1 \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot m g r_1^2 \end{aligned}$$

## Aufgabe 4

a)

b) Definition der Spannung

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Für das E-Feld eines langen Stabes bei Distanz  $r$ :

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \hat{e}_r$$

Da die Spannung größer als  $3 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$  sein soll, ist der Maximale Abstand:

$$\begin{aligned} U_{0,r} &= \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot dr \\ &= \end{aligned}$$

## Aufgabe 5

a) Nabla in Kugelkoordinaten:

$$\nabla = \hat{e}_r \cdot \partial_r + \hat{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \partial_\theta + \hat{e}_\phi \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi$$

Die Divergenz eines Radialfeldes  $\vec{E}(\vec{r}) = \alpha r^\beta \hat{e}_r$  lautet dadurch:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \left( \hat{e}_r \partial_r + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \right) \cdot \alpha r^\beta \hat{e}_r \\ &= \left( \hat{e}_r * \partial_r (\alpha r^\beta \hat{e}_r) + \hat{e}_\theta * \frac{1}{r} \partial_\theta (\alpha r^\beta \hat{e}_r) + \hat{e}_\phi * \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi (\alpha r^\beta \hat{e}_r) \right) \\ &= \left( \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r \cdot \alpha \beta r^{\beta-1} + \frac{1}{r} \cdot \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta \alpha r^\beta + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi \cdot \alpha r^\beta \right) \\ &= \left( \alpha \beta r^{\beta-1} + \frac{1}{r} \alpha r^\beta + \frac{1}{r \sin \theta} \alpha r^\beta \right) \\ &= (\alpha \beta r^{\beta-1} + \alpha r^{\beta-1} + \alpha r^{\beta-1}) \\ &= \alpha(\beta + 2) r^{\beta-1} \end{aligned}$$

Da  $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 1$  für alle  $r$  erfüllt sein soll, muss die Gleichung unabhängig von  $r$  sein:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta + 2) r^{\beta-1} &\stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \beta = 1 \text{ damit Gleichung unabhängig von } r \text{ ist} \\ \Leftrightarrow \alpha * 3 &= 1 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{3} r \hat{e}_r \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} V_{Kugel} &= \iiint dV = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \stackrel{\text{Satz v. Gauß}}{=} \iint \vec{E}(\vec{r}) dA \\ &= \iint \frac{1}{3} R \hat{e}_r dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R}{3} \hat{e}_r \cdot \hat{n} * R^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta d\varphi \\ &= \frac{R^2}{3} * 4\pi \\ &= \frac{4}{3} * \pi * R^3 \end{aligned}$$

## Aufgabe 6