

16. Übungsblatt

Aufgabe 1: Eine geladene Linie

a) Die dreidimensionale Linienladungsdichte ρ lautet:

$$\rho(\vec{r}) = \sigma \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \Theta\left(z + \frac{a}{2}\right) \cdot \Theta\left(\frac{a}{2} - z\right) \quad \text{mit } \sigma \text{ als Linienladungsdichte } \sigma = \frac{Q}{a}$$

b) Aus der Multipolentwicklung folgt:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma \cdot \delta(x') \cdot \delta(y') \cdot \Theta\left(z' + \frac{a}{2}\right) \cdot \Theta\left(\frac{a}{2} - z'\right)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}} dz' \\ \begin{matrix} r^2 := x^2 + y^2 \\ u := z - z' \end{matrix} \Rightarrow &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{z+\frac{a}{2}}^{z-\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 + u^2}} du \\ &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{z+\frac{a}{2}}^{z-\frac{a}{2}} \frac{1}{u + \sqrt{r^2 + u^2}} \frac{u + \sqrt{r^2 + u^2}}{\sqrt{r^2 + u^2}} du \\ &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{z+\frac{a}{2}}^{z-\frac{a}{2}} \frac{1}{u + \sqrt{r^2 + u^2}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{r^2 + u^2}}\right) du \\ v := u + \sqrt{r^2 + u^2} \quad du &= \frac{dv}{1 + \frac{u}{\sqrt{r^2 + u^2}}} \Rightarrow = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{v} dv \\ &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{z + \frac{a}{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2}}{z - \frac{a}{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2}}\right) \end{aligned}$$

c)

1. $x = y = 0, z \rightarrow \frac{a}{2}$

$$\phi(z \rightarrow \frac{a}{2}) = \lim_{z \rightarrow \frac{a}{2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \left(\frac{z + \frac{a}{2} + \sqrt{(z + \frac{a}{2})^2}}{z - \frac{a}{2} + \sqrt{(z - \frac{a}{2})^2}} \right) = \lim_{z \rightarrow \frac{a}{2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \left(\frac{2z + a}{2z - a} \right)$$

2. $\vec{r} \in x\text{-Achse}$

$$\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \left(\frac{\frac{a}{2} + \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}}{-\frac{a}{2} + \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a^2}{4} \right)^2} \right)$$

3. $r_z = 0, r \gg \frac{a}{2}$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \left(\frac{\frac{a}{2} + \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}}{-\frac{a}{2} + \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}} \right) \stackrel{r \gg \frac{a}{2}}{\approx} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \left(\frac{r + \frac{a}{2}}{r - \frac{a}{2}} \right)$$

Aufgabe 2: Ladungsverteilung und Multipolmomente

a)

$$\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta(x)\delta(y) \cdot (\delta(z+a) + \delta(z-a) - 2\delta(z))$$

b)

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q \cdot \delta(x')\delta(y') \cdot (\delta(z'+a) + \delta(z'-a) - 2\delta(z'))}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(z'+a) + \delta(z'-a) - 2\delta(z')}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}} dz' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \\ r := \sqrt{x^2 + y^2} &\Rightarrow = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}} - \frac{2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z-a}{r}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z+a}{r}\right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{r}\right)^2}} \right] \\ \text{Taylor} &\Rightarrow = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} * \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z-a}{r} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{z-a}{r} \right)^4 + \dots \right. \\ &\quad \left. + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z+a}{r} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{z+a}{r} \right)^4 + \dots \right. \\ &\quad \left. - 2 - \frac{2}{2} \left(\frac{z}{r} \right)^2 - \frac{6}{8} \left(\frac{z}{r} \right)^4 + \dots \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1+1-2}{r}}_0 + \underbrace{\frac{(z-a)^2 + (z+a)^2 - 2z^2}{2r^3}}_{\frac{a^2}{r^3}} + \underbrace{\frac{3(z-a)^4 + 3(z+a)^4 - 6z^4}{8r^5}}_{\frac{9a^2z^2 + a^4}{4r^5}} + \dots \right] \\ &= \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{z^2 + a^2}{4r^5} \right) \end{aligned}$$

Das erste nicht-verschwindene Moment ist damit das Quadrupolmoment

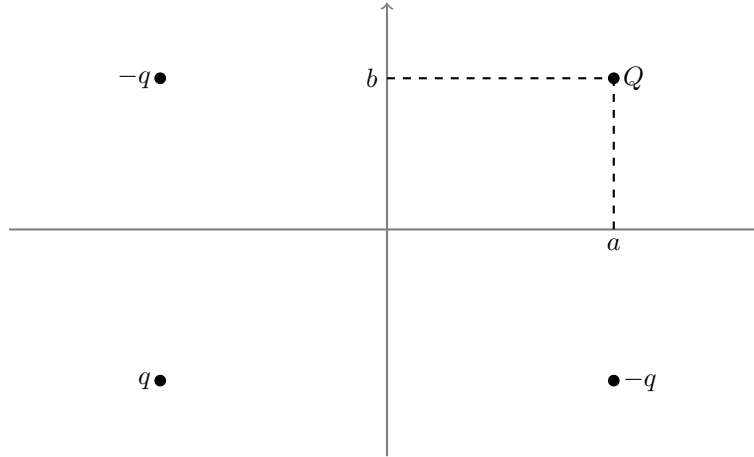
$$Q(\vec{e}_r) = qa^2$$

c) Aus dem Quadrupolmoment folgt das Potential:

$$\phi(r) = \frac{Q(\vec{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Aufgabe 3: Spiegelladungen

a) Zum Erfüllen der Randbedingung setzen 3 weitere Ladungen in das System, die gegenüberliegende Ladung ist gleichnamig. Die Ladungen im 2. und im 4. Quadranten sind jedoch negativ geladen. Die Anordnung sieht dann wie folgt aus:



Durch die Multipolentwicklung können wir das elektrische Potential im Raum ermitteln:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{d(\vec{r}, \vec{q}_i)} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}}_{\text{Durch Ladung } Q} - \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}}}_{\text{Spiegelladung im 2. Quadrant}} + \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}}}_{\text{Spiegelladung im 3. Quadrant}} - \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}}}_{\text{Spiegelladung im 4. Quadrant}} \right]\end{aligned}$$

Die Randbedingung $\phi = 0$ auf den Platten ist damit auch erfüllt:

$$\begin{aligned}\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + (0-b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + (0-b)^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + (0+b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + (0+b)^2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} \right] \\ &= 0 \\ \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{(0-a)^2 + (y-b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(0+a)^2 + (y-b)^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(0+a)^2 + (y+b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(0-a)^2 + (y+b)^2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{a^2 + (y-b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{a^2 + (y-b)^2}} + \frac{Q}{\sqrt{a^2 + (y+b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{a^2 + (y+b)^2}} \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

b) Für den Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass zwei Lösungen, ϕ_1 und ϕ_2 existieren. Die Differenz der Potentiale definieren wir als $\phi_0 = \phi_1 - \phi_2$.
Aus dem ersten Greenschen Satz folgt dann:

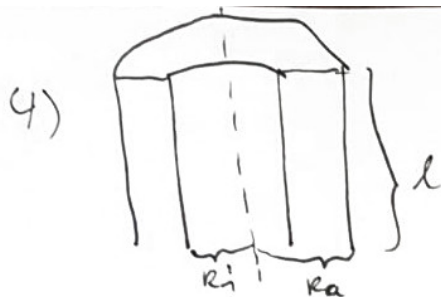
$$\begin{aligned} \int_V (\vec{\nabla} \phi_0)^2 d^3r + \underbrace{\int_V \phi_0 \cdot \Delta \phi_0 d^3r}_{\substack{\Delta \phi_0 = \Delta \phi_1 - \Delta \phi_2 \\ = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0}} = \underbrace{\int_{\partial V} \phi_0 \cdot \partial_n \phi_0 d^2r}_{=0, \text{ wegen Dirichlet Rdb muss } \phi_0(\vec{r})|_{r \in \partial V} = 0 \text{ gelten}} \\ \int_V (\vec{\nabla} \phi_0)^2 d^3r + 0 = 0 \end{aligned}$$

In der 2. Zeile wird das \vec{E} -Feld des Differenzfeldes ϕ_0 quadriert und, muss also ≥ 0 sein.

Da über eine nicht negative Zahl integriert wird, muss der Wert des Integrals auch positiv sein. Aufgrund der Poisson-Gleichung und der Dirichlet-Randbedingung ist dieser aber 0, d.h. dass auch das \vec{E} -Feld im gesamten Raum 0 ist.

$$\int_V (\vec{\nabla} \phi_0)^2 d^3r = 0 \Rightarrow \int_V (\vec{E}(\vec{r}))^2 d^3r = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = 0, \text{ für } \vec{r} \in V$$

Dies stellt keine sinnvolle Lösung für die Poissongleichung dar, weshalb keine zwei Lösungen existieren können.



Angenommen: innen $+Q$ außen $-Q$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3\vec{r} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d^3\vec{r}$$

links:

$$\Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3\vec{r} = \int_{\partial(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^l \int_0^{2\pi} E(r) \cdot r d\varphi dz = 2\pi l r E(r)$$

rechts:

$$\int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d^3\vec{r} = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & R_i < r < R_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi l r \epsilon_0} \quad \text{mit } R_i < r < R_a$$

$$\text{mit } Q_{\text{ges}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \text{ folgt: } \vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi l r \epsilon_0} \vec{e}_r$$

b) $u = \nabla \phi$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = -\frac{\partial}{\partial r} \phi(r)$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \int -E(r) dr = \int \frac{Q}{2\pi l r \epsilon_0} dr + C$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln(r) + C$$


da $R_i < r < R_a$ muss gelten: $C = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln(R_a)$
 $\Rightarrow \phi(r) = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_a}{r}\right)$

$$\Rightarrow \phi(R_a) = 0$$

$$\Rightarrow U = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_v} \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_v} \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} = \frac{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_v}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$$

c) $C = C_{\text{tot}} - C_L$



$$\Rightarrow C(h) = \frac{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_B}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} - \frac{2\pi (l-h) \epsilon_0 \epsilon_v}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \Rightarrow C(h) = C_{\text{tot}} - C_L(h)$$

$C_B > C_v$

Aufgabe 5: Greensche Funktion

Sei D ein n -dimensionaler Differentialoperator und G eine Greensche Funktion, sodass gilt:

$$DG(\vec{x}) = \delta^{(n)}(\vec{x}), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

a) Eine partikuläre Lösung $f_p(\vec{x})$ der Differentialgleichung

$$Df(\vec{x}) = J(\vec{x})$$

mit Inhomogenität $J(\vec{x})$ kann durch Faltung der Inhomogenität mit der Greenschen Funktion erzeugt werden:

$$\begin{aligned} Df_p(\vec{x}) &= J(\vec{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} J(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^n x' \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} J(\vec{x}') DG(\vec{x} - \vec{x}') d^n x' \\ &= D \int_{\mathbb{R}^n} J(\vec{x}') G(\vec{x} - \vec{x}') d^n x' \\ \Rightarrow f_p(\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} J(\vec{x}') G(\vec{x} - \vec{x}') d^n x' \end{aligned}$$

Der Sprung zwischen der 3. und 4. Zeile folgt daraus, dass D nach \vec{x} ableitet, weshalb $J(\vec{x}')$ wie ein linearfaktor behandelt werden kann.

b) Die Heaviside (Theta-Funktion)

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

c) 1.

$$\rho(r) = Q \cdot \delta^3(\vec{r}) = Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$$

2.

$$\begin{aligned} \int \vec{E} \, d\vec{A} &= \frac{Q_{\text{enq}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \int \delta^3(\vec{r}') d^3 \vec{r}' \\ E \cdot 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \end{aligned}$$

Da wir uns in einem Radialfeld befinden:

$$\begin{aligned} -\nabla\phi &= -\partial_r\phi = E(r) \\ \Leftrightarrow \phi &= -\int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi r'^2 \epsilon_0} dr' \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \cdot G(\vec{r} - \vec{r}') \, d^3 r' \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} &= \int_{\mathbb{R}^3} Q \cdot \delta^3(\vec{r}') \cdot G(\vec{r} - \vec{r}') \, d^3 r' \\ G(r) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \\
&\stackrel{(3.)}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}') \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'
\end{aligned}$$