Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

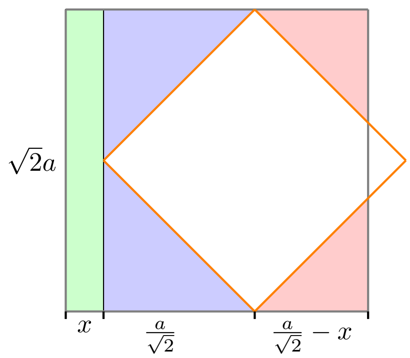
17. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für die Feldenergie betrachten wir das E-Feld im Kondensator. Da wo sich das Dielektrikum befindet, ist das Feld $\frac{U}{de_r}$, im restlichen Bereich $\frac{U}{d}$.

$$E(\vec{r}, x) = \begin{cases} \frac{U}{e_r d} & \text{für } \vec{r} \in A(x) \\ \frac{U}{d} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $A(x)$ die freie Fläche, welche natürlich von der Auslenkung x abhängt.
Diesen Zusammenhang löst man am einfachsten grafisch:



Dann folgt $A(x)$:

$$\begin{aligned} A(x) = A_1(x) + A_2(x) + A_3(x) &= x \cdot \sqrt{2}a + \frac{a^2}{2} + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x\right)^2 \\ &= x \cdot \sqrt{2}a + \frac{a^2}{2} + x^2 - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}x + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= x^2 + a^2 \end{aligned}$$

Die elektrische Feldenergie ist gegeben durch

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2(\vec{r}) d^3 r$$

Die Energie des E-Feldes ermitteln wir durch Aufteilung des Bereiches mit und ohne Dielektrikum.
Dadurch erhalten wir zwei Bereiche, für die das E-Feld homogen ist. Dank der Homogenität müssen wir nicht mehr integrieren sondern können mit dem Volumen multiplizieren:

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2(\vec{r}) d^3 r \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\left(\frac{U}{\epsilon_r d}\right)^2 \cdot d \cdot A(x) + \frac{U^2}{d^2} \cdot d \cdot 2a^2 - \frac{U^2}{d^2} \cdot d \cdot A(x) \right) \\ &= \frac{\epsilon_0 U^2}{2d} \left(\frac{A(x)}{\epsilon_r^2} + 2a^2 - A(x) \right) \\ &= \frac{\epsilon_0 U^2}{2d} A(x) \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_r^2} - 1 \right) + \frac{\epsilon_0 U^2 a^2}{d} \end{aligned}$$

Mit der Gleichung $F = -\vec{\nabla} W$ lässt sich die rückstellende Kraft bestimmen:

$$\begin{aligned} F = -\vec{\nabla} W &= -\partial_x \left(\frac{\epsilon_0 U^2}{2d} A(x) \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_r^2} - 1 \right) + \frac{\epsilon_0 U^2 a^2}{d} \right) \cdot \hat{x} \\ &= -\frac{\epsilon_0 U^2}{d} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_r^2} - 1 \right) \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

b) Mit dem Ergebnis für die rückstellende Kraft aus a) können wir die DGL aufstellen:

$$\begin{aligned} F = m\ddot{x} &= -\frac{\epsilon_0 U^2}{d} \cdot \frac{1-\epsilon_r^2}{\epsilon_r^2} \cdot x \\ \Leftrightarrow -\frac{\epsilon_0 U^2}{dm} \cdot \frac{1-\epsilon_r^2}{\epsilon_r^2} \cdot x + \ddot{x} = 0 \end{aligned}$$

Diese besitzt eine uns bekannte Form mit der Lösung

$$x(t) = \alpha \cdot \exp\left(\sqrt{-\frac{\epsilon_0 U^2}{dm} \cdot \frac{1-\epsilon_r^2}{\epsilon_r^2}} \cdot i \cdot t \right)$$

Die Oszillation hat die Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\epsilon_r^2 \cdot d \cdot m}{\epsilon_0 \cdot U^2 \cdot (1-\epsilon_r^2)}}$$

Aufgabe 2

Aufgabe 3

a) Mit der Formel für den elektrischen Widerstand können wir das Volumen der Konstruktion ermitteln:

$$\begin{aligned} R &= \rho_r \cdot \frac{l}{A}, & V &= 6 \cdot l \cdot A \\ \Rightarrow A &= \frac{\rho_r \cdot l}{R} \quad (1) & \overset{(1)}{\Rightarrow} V &= 6 \frac{\rho_r \cdot l^2}{R} \end{aligned}$$

Damit folgt das Gewicht:

$$m = \rho \cdot V = \frac{6 \cdot \rho \cdot \rho_r \cdot l^2}{R}$$

Und der Preis:

$$\text{Preis} = k \cdot m = 120.30 \text{ Euro}$$

Aufgabe 4

a) Die Gesamtkapzität der Schaltung lautet

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 + C_2}$$

Dann können wir durch die Bedingung $C_{ges} = C_2$ bestimmen:

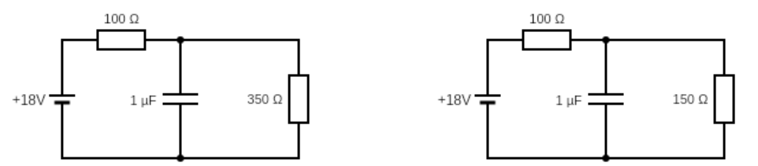
$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_2} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 + C_2} \\ &= \frac{C_1 + C_2 + C_1}{C_1(C_1 + C_2)} \\ \Leftrightarrow C_2 &= \frac{C_1(C_1 + C_2)}{2C_1 + C_2} \\ \Leftrightarrow C_2^2 + 2C_1 C_2 &= C_1^2 + C_1 C_2 \\ \Leftrightarrow 0 &= C_1^2 - C_1 C_2 - C_2^2 \end{aligned}$$

Mit der pq-Formel erhalten wir C_1:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{C_2}{2} \pm \sqrt{\frac{C_2^2}{4} + C_2^2} \\ &= \frac{C_2}{2} \pm \sqrt{1.25} \cdot C_2 \\ C_1 \geq 0 \Rightarrow &= \frac{C_2}{2} + \frac{5}{4} C_2 = \frac{7}{4} C_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Die Schaltung vereinfacht sich zu den zwei Zeitintervallen:



(a) Für $t < 0$ (b) Für $t \geq 0$

Wenn wir die Schaltungen als Spannungsteiler betrachten erhalten wir U_C für $t < 0$ und $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} U_C(t < 0) &= \frac{350\Omega}{100\Omega + 350\Omega} U_q \\ &= \frac{350}{450} U_q \\ &= 14V \end{aligned} \qquad \begin{aligned} U_C(t \to \infty) &= \frac{150\Omega}{100\Omega + 150\Omega} U_q \\ &= \frac{150}{350} U_q \\ &= 10.8V \end{aligned}$$

D.h. wenn bei $t = 0$ der Schalter geschlossen wird, ist auf den Kondensatorplatten ein Potential von $14V$, während von der Spannungsquelle nur noch $10.8V$ wirken.
Die 'wirkende' Potentialdifferenz des Kondensators für $t = 0$ lautet somit

$$U_{\text{Cap}}(0) = 14V - 10.8V = 3.2V$$

Da sich der Kondensator am Widerstand $R_3 = 150\Omega$ entlädt lautet die die Potentialdifferenz die aus dem Kondensator folgt:

$$U_{\text{Cap}}(t) = U_{\text{Cap}}(0) \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} = U_{\text{Cap}}(0) \cdot e^{\frac{-t}{R_3 C}} = 3.2V \cdot \exp\left(\frac{-t}{150\Omega\mu F}\right)$$

Zusammen mit der Spannungsquelle existiert die Potentialdifferenz $U_C(t)$:

$$U_C = 10.8V + U_{\text{Cap}}(t) = 10.8V + 3.2V \cdot \exp\left(-\frac{2t}{3s} \cdot 10^4\right)$$