

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Aufgabe 2

(a) Das Gaußsche Gesetz besagt:

$$\int \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Da \vec{E} unabhängig vom Ort auf der Fläche A ist und dazu parallel zum Normalenvektor liegt, kann der Betrag von \vec{E} aus dem Integral gezogen werden.

\vec{E} und \hat{n} zeigen jedoch in verschiedene Richtungen; \hat{n} von der Erde weg, das elektrische Feld richtugn Erde. Daher entsteht ein negatives Vorzeichen.

Die Flächenladungsdichte σ lautet somit:

$$\begin{aligned} \int \vec{E} \, d\vec{A} &= -|\vec{E}| \int d\vec{A} = -|\vec{E}| * A = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{Q}{A} = -E * \epsilon_0 \approx -1.33 * 10^{-9} \frac{Q}{m^2} \end{aligned}$$

(b) Wenn man die Ladungsdichte σ aus (a) mit der Fläche A multipliziert erhält man die Gesamtladung:

$$Q_{\text{Gesamt}} = \sigma * A = -EA\epsilon_0 = -\epsilon_0 * E * 4\pi r_E^2 \approx -6.77 * 10^5 C$$

(c) Die Kraft die auf eine Kugel wirkt ist die Summe aus Gewichtskraft und Coulomkraft. Aus dem zweiten newtonschen Axiom folgt dann die Beschleunigung.

$$F_{\text{Gesamt}} = F_G + F_{Co} = mg + E * q_{Kugel} \Rightarrow a = g + \frac{E * q_{Kugel}}{m}$$

Aus der Formel für den freien Fall können wir die benötigten Zeiten für den Fall bestimmen:

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{1}{2} a * (\Delta t)^2 \\ \Rightarrow \Delta t &= \sqrt{\frac{2 * \Delta h}{a}} \end{aligned}$$

$$\Delta t_{\text{ungeladen}} = \sqrt{\frac{2 * \Delta h}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 2m}{10m/s^2}} \approx 0.6325s$$

$$\Delta t_{\text{geladen}} = \sqrt{\frac{2 * \Delta h}{g + \frac{E * q_{Kugel}}{m}}} = \sqrt{\frac{4m}{10m/s^2 + \frac{150N/C * 100\mu C}{0.1Kg}}} = \sqrt{\frac{4m}{10m/s^2 + 0.15m/s^2}} \approx 0.6278s$$

Die geladene Kugel erreicht somit die Erde ungefähr $0.0047s$ schneller als die Ungeladene.

Aufgabe 3

Die Coulomb- und die Gewichtskraft sind definiert als:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad F_G = m \cdot g$$

Wir definieren $q_3 = \frac{q_1 + q_2}{2}$, die Ladung beider Kugeln nach dem Ladungsausgleich. Aus den trigonometrischen Identitäten folgt das Verhältniss von F_C und F_G :

$$\tan \theta = \frac{F_C}{F_G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{m g \cdot r^2}$$

Für θ_2 lässt sich die das Verhältniss von q_1 und q_2 herleiten:

$$\begin{aligned} \tan \theta_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3^2}{m g \cdot r_2^2} \\ \Leftrightarrow q_3^2 &= \tan \theta_2 \cdot m g r_2^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \\ \Leftrightarrow q_3 &= \frac{q_1 + q_2}{2} = \sqrt{\tan \theta_2 \cdot m g r_2^2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \\ \Leftrightarrow q_1 &= \sqrt{\tan \theta_2 \cdot m g r_2^2 \cdot 16\pi\epsilon_0} - q_2 \end{aligned}$$

Aus θ_1 folgt zuletzt:

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{m g \cdot r_1^2} \\ \tan \theta_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\sqrt{\tan \theta_2 \cdot m g r_2^2 \cdot 16\pi\epsilon_0} - q_2 \right) q_2}{m g \cdot r_1^2} \\ 0 &= q_2^2 - q_2 \sqrt{\tan \theta_2 \cdot m g r_2^2 \cdot 16\pi\epsilon_0} + \tan \theta_1 \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot m g r_1^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) E-Feld außerhalb einer geladenen Hohlkugel (Flächenladungsdichte σ):

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{Kugel}}{r^2} \hat{r}$$

Das Feld nah an der Kugel ($r = R_{Kugel}$) ist also:

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{Kugel}}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Damit die Durchschlagsfeldstärke nicht erreicht wird muss darf σ nicht höher als $2.656 \cdot 10^{-5} \frac{C}{m^2}$ sein:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} < 3 \cdot 10^6 \frac{V}{m} \Leftrightarrow \sigma < \epsilon_0 \cdot 3 \cdot 10^6 \frac{V}{m} = 2.656 \cdot 10^{-5} \frac{C}{m^2}$$

b) Definition der Spannung

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Fuer das E-Feld eines langen Stabes bei Distanz r :

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \hat{e}_r$$

Da die Spannung größer als $3 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$ sein soll, ist der Maximale Abstand:

$$\begin{aligned} U_{0,r} &= \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot dr \\ &= \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Nabla in Kugelkoordinaten:

$$\nabla = \hat{e}_r \cdot \partial_r + \hat{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \partial_\theta + \hat{e}_\phi \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi$$

Die Divergenz eines Radialfeldes $\vec{E}(\vec{r}) = \alpha r^\beta \hat{e}_r$ lautet dadurch:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \left(\hat{e}_r \partial_r + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \right) \cdot \alpha r^\beta \hat{e}_r \\ &= \left(\hat{e}_r * \partial_r (\alpha r^\beta \hat{e}_r) + \hat{e}_\theta * \frac{1}{r} \partial_\theta (\alpha r^\beta \hat{e}_r) + \hat{e}_\phi * \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi (\alpha r^\beta \hat{e}_r) \right) \\ &= \left(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r \cdot \alpha \beta r^{\beta-1} + \frac{1}{r} \cdot \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta \alpha r^\beta + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi \cdot \alpha r^\beta \right) \\ &= \left(\alpha \beta r^{\beta-1} + \frac{1}{r} \alpha r^\beta + \frac{1}{r \sin \theta} \alpha r^\beta \right) \\ &= (\alpha \beta r^{\beta-1} + \alpha r^{\beta-1} + \alpha r^{\beta-1}) \\ &= \alpha(\beta + 2) r^{\beta-1} \end{aligned}$$

Da $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 1$ für alle r erfüllt sein soll, muss die Gleichung unabhängig von r sein:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta + 2) r^{\beta-1} &\stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \beta = 1 \text{ damit Gleichung unabhängig von } r \text{ ist} \\ \Leftrightarrow \alpha * 3 &= 1 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{3} r \hat{e}_r \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} V_{Kugel} &= \iiint dV = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \stackrel{\text{Satz v. Gauß}}{=} \iint \vec{E}(\vec{r}) dA \\ &= \iint \frac{1}{3} R \hat{e}_r dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R}{3} \hat{e}_r \cdot \hat{n} * R^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta d\varphi \\ &= \frac{R^2}{3} * 4\pi \\ &= \frac{4}{3} * \pi * R^3 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y^3 \\ x^2 \\ z \end{pmatrix}$$