

18. Übungsblatt

Aufgabe 2

Biot-Savar'sches Gesetz:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Zur einfacheren Berechnung teilen wir den Draht in die zwei geraden Segmente (welche aufgrund der Symmetrie das Gleiche Feld am Punkt P besitzen) und in das Halbkreissegment auf.

Zur Verinfachung wird das Koordinatensystem so gelegt, dass der Punkt P im Ursprung liegt.

Berechnung des Halbkreissegments:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{HK}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\varphi \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{r}' \cdot \delta(z') \cdot \delta(r' - R) \cdot \Theta(\pi - \varphi') \, d\varphi' dz' d\rho' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\vec{e}_\varphi \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3} \cdot R \, d\varphi' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\rho}{R^2} \cdot R \, d\varphi' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\vec{e}_z}{R} \, d\varphi' \\ &= \frac{\mu_0}{4R} I \vec{e}_z \end{aligned}$$

Die Berechnung des geraden Leiterelements erfolgt mit der Formel für das Magnetfeld des endlichen Leiters, in Abhängigkeit von den Winkeln an den Enden:

$$\begin{aligned} B_{ger}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi R} I (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R} I \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R} I \end{aligned}$$

Das Magnetfeld folgt dann:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_{HK}(\mathbf{r}) + 2 \mathbf{B}_{ger}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4R} I \vec{e}_z + \frac{\mu_0}{2\pi R} I \vec{e}_z = \frac{\pi + 2}{4\pi R} \mu_0 I \vec{e}_z$$

Aufgabe 3

Das magnetische Feld kann mit dem Biot-Savart Gesetz ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\varphi \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \delta(R - \rho') \cdot \delta(z') \cdot \rho' d\rho' dz' d\varphi' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\varphi \times (z \vec{e}_z - r' \vec{e}_\rho)}{(R^2 + z^2)^{1.5}} \cdot R d\varphi' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^{2\pi} \frac{z \vec{e}_\rho + R \vec{e}_z}{(R^2 + z^2)^{1.5}} \cdot R d\varphi'
 \end{aligned}$$

Da sich der Magnetische Dipol auf der z -Achse befindet, verschwindet der \vec{e}_ρ .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \vec{e}_z}{(R^2 + z^2)^{1.5}} d\varphi' \\
 &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2 \vec{e}_z}{(R^2 + z^2)^{1.5}}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Kraft auf ein magnetisches Dipol m :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= m_z \partial_z B_z \vec{e}_z \\
 &= m_z \frac{R^2 \mu_0 I}{2} \partial_z (R^2 + z^2)^{-1.5} \vec{e}_z \\
 &= m_z \frac{R^2 \mu_0 I}{2} (-1.5) (R^2 + z^2)^{-2.5} \cdot 2z \vec{e}_z \\
 &= \frac{-1.5z \cdot m_z R^2 \mu_0 I}{(R^2 + z^2)^{2.5}} \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Für kleine Auslenkungen, also $z \ll R$ vereinfacht sich die Kraft:

$$\begin{aligned}
 z \ll R \Rightarrow R^2 + z^2 \approx R^2 \Rightarrow \mathbf{F} &= \frac{-1.5z \cdot m_z R^2 \mu_0 I}{R^5} \vec{e}_z \\
 &= \frac{-1.5z \cdot m_z \mu_0 I}{R^3} \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Schreibt man diesen Ausdruck als Differentialgleichung erhalten wir den harmonischen Oszillator:

$$F_z = M\ddot{z} = \frac{-1.5z \cdot m_z \mu_0 I}{R^3} \Rightarrow \ddot{z} + \underbrace{\frac{1.5 \cdot m_z \mu_0 I}{M \cdot R^3}}_{\omega^2} z = 0$$

Mit der uns schon bekannten Lösung:

$$z(t) = z(0) \cos(\omega t) + \dot{z}(0) \sin(\omega t)$$

Aufgabe 4

$$\vec{B}(\vec{r}) = B\vec{e}_z, \quad B = \text{const.}$$

a) gesucht sei ein \vec{A} , sodass

$$\text{rot}\vec{A} = \vec{B}$$

Mit dem Ansatz

$$\vec{A} = M \cdot \vec{r}, \quad \vec{r} = (x, y, z)^T, \quad M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

sind die Einträge von M die partiellen Ableitungen von \vec{A} :

$$M_{ij} = \partial_j A_i$$

Aus der Voraussetzung $\text{rot}\vec{A} = \vec{B}$ folgen die Bedingungen für M :

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} M_{3,2} - M_{2,3} \\ M_{1,3} - M_{3,1} \\ M_{2,1} - M_{1,2} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \Rightarrow M_{3,2} = M_{2,3}, \quad M_{1,3} = M_{3,1}, \quad M_{2,1} = M_{1,2} + B$$

Daraus folgt dann die Matrix M (mit den Freiheitsgraden α, \dots):

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta + B & \delta & \epsilon \\ \gamma & \epsilon & \zeta \end{pmatrix}$$

Das einfachste Vektorfeld für \vec{A} wäre das wo alle Freiheitsgrade auf 0 gesetzt werden:

$$\vec{A}_0 = M_0 \cdot \vec{r} = M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Wir wählen zwei Lösungen \vec{A}_1 und \vec{A}_2 :

$$\vec{A}_1 = M_1 \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$