Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

21. Übungsblatt

Aufgabe 1

a)

$$
\begin{aligned}
Z_{AB} &= Z_C + Z_{LR} \\
&= \frac{i\omega C}{+}\frac{i\omega LR}{i\omega L + R} \\
&= \frac{i\omega L + R + i\omega C(i\omega LR)}{i\omega C(i\omega L + R)} \\
&= \frac{R - \omega^2 LCR + i\omega L}{i\omega CR - \omega^2 LC}
\end{aligned}
$$

Für die relle Impedanz:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}(Z_{AB}) &= \frac{\omega L(-\omega^2 LC) - (R - \omega^2 LCR)\cdot \omega CR}{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC)^2} \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow 0 &= \omega L(-\omega^2 LC) - (R - \omega^2 LCR)\cdot \omega CR \\
&= -\omega^3 L^2 C - \omega CR^2 + \omega^3 LC^2 R^2 \\
\Rightarrow 0 &= -\omega^2 L^2 C - CR^2 + \omega^2 LC^2 R^2 \\
\Leftrightarrow CR^2 &= -\omega^2 L^2 C + \omega^2 LC^2 R^2 \\
\Rightarrow \omega^2 &= \frac{CR^2}{L^2 C^2 R^2 - L^2 C} \\
\Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{R^2}{L^2 CR^2 - L^2}}
\end{aligned}
$$

b) Die an der LCR-Schaltung abfallende Spannung U_{AB} ist bestimmt durch

$$
U_{AB} = \frac{Z_{AB}}{R_i + Z_{AB}} U_0
$$

Dann lautet die elektrische Leistung der LCR-Schaltung:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{\Delta U^2}{Z_{AB}} \\
&= \frac{Z_{AB}^2}{(R_i + Z_{AB})^2}\frac{1}{Z_{AB}} U_0 \\
&= \frac{Z_{AB}}{(R_i + Z_{AB})^2} U_0
\end{aligned}
$$

Diese wird maximal für

$$
\begin{aligned}
d_{Z_{AB}} P &= U \frac{(R_i + Z_{AB})^2 - Z_{AB}\cdot 2\cdot (R_i + Z_{AB})}{(R_i + Z_{AB})^4} \overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow 0 &= R_i + Z_{AB} - 2Z_{AB} \\
\Rightarrow Z_{AB} &= R_i
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
R_i &= \frac{R - \omega^2 LCR + i\omega L}{i\omega CR - \omega^2 LC} \\
Z_{AB} \in \mathbb{R} \Rightarrow &= \frac{(R - \omega^2 LCR)(-\omega^2 LC) + \omega^2 LCR}{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC)^2} \\
&= \frac{\omega^4 L^2 C^2 R - \omega^2 LCR + \omega^2 LCR}{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC)^2} \\
&= \frac{\omega^4 L^2 C^2 R}{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC)^2} \\
&= \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \\
\Rightarrow 0 &= \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} - R_i \\
\Leftrightarrow 0 &= \omega^2 L^2 R - R_i R^2 - R_i \omega^2 L^2 \\
\Leftrightarrow 0 &= R^2 - \frac{\omega^2 L^2}{R_i} R + \omega^2 L^2
\end{aligned}
$$

Mit der pq-Formel erhalten wir eine Lösung:

$$
R = \frac{\omega^2 L^2}{2R_i} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega^2 L^2}{2R_i}\right)^2 - \omega^2 L^2}
$$

Aufgabe 2

Die Leistung des Heizlüfters hängt vom Spannungsabfall an diesem ab:

$$P_H = \frac{\Delta U^2}{R_2}$$

Der Spannungsabfall folgt aus den Kirchhoffschen Regeln:

$$\Delta U = U_H \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Dann können wir den benötigten Widerstand genau berechnen:

$$\begin{aligned}
P_H &= U_H^2 \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{1}{R_2} \\
&= U_H^2 \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} \\
\Leftrightarrow P_H (R_1 + R_2)^2 &= U_H^2 R_2 \\
\Leftrightarrow 0 &= P_H R_1^2 + 2 P_H R_1 R_2 + P_H R_2^2 - U_H^2 R_2 \\
\Leftrightarrow 0 &= R_2^2 + \left(2R_1 - \frac{U_H^2}{P_H} \right) R_2 + R_1^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Da die Leitung einen Widerstand besitzt, verrichtet der Strom an diesem Arbeit durch Aufheizen des Kabels.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R$$

Dieser ist proportional zum Quadrat der Stromstärke I, d.h. diese sollte minimiert werden. Dafür muss die Spannung U angehoben werden. b)

$$P = I^2 \cdot R = 500^2\ A^2 \cdot 0.2\ k\Omega = 5 \cdot 10^4\ W$$

Aufgabe 4

a) Mit der 4. Maxwellgleichung wissen wir, dass

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_V)$$

und diese Gleichung auch für alle Flächen erfüllt sein muss.
Wenn wir als uns eine Fläche denken, wo der Leiter komplett durch die Fläche durchstößt, also kein Verschiebungsstrom existiert, so muss gelten:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I.$$

Genauso kann man aber auch eine Fläche wählen, die, am Leiter vorbei, durch den Raum des Kondensators verläuft. Durch diese Fläche fließt dann kein Strom, sondern nur ein Verschibungsstrom. Da wir aber den Rand gleich ließen, können wir für I_V schreiben:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 I_V \ \Rightarrow\ I_V = I = 2\ A$$

b) Das elektrische Feld des Plattenkondensators ist gegeben durch

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}$$

mit σ als Flächenladungsdichte $\frac{Q}{A}$.
Dann lautet die Ableitung des $\vec{E}$-Feldes nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
\partial_t E(t) &= \partial_t \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\
&= \partial_t \frac{Q}{A \cdot \epsilon_0} \\
&= \frac{I}{A \cdot \epsilon_0} \\
&= \frac{2\ A}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

c) Der Verschiebungsstrom $\tilde{I}_V$, der durch die Fläche A' fließt, lässt sich dann bestimmen:

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_V &= \epsilon_0 \partial_t \int_{A'} \vec{E} \cdot d\vec{A}' \quad \vec{E} \text{ homogen} \\
&= \epsilon_0 \partial_t E \cdot A' \\
&= \epsilon_0 A' \frac{I}{\epsilon_0 A} \\
&= \frac{A'}{A} I \\
&= \frac{I}{4}
\end{aligned}$$

d) Aus der 4. Maxwell-Gleichung folgt dann das Megnetfeld am Rand der der Fläche A':

$$\oint_{A'} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_V) = \mu_0 I_V = \mu_0 \frac{I}{4}$$

Aufgabe 5

a)

1. Mit Gaußschem Satz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\ dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\ dV \Rightarrow \oint_{\partial_V} \vec{E}\ d\vec{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\ dV = \frac{q_{\text{enq}}}{\epsilon_0}$$

2. Ebenfalls mit Gaußschem Satz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\ dV = 0 \Rightarrow \oint_{\partial_V} \vec{B}\ d\vec{A} = 0$$

3. Mit Satz von Stokes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \Rightarrow \int_A \vec{\nabla} \times \vec{E}\ d\vec{A} = \int_A -\partial_t \vec{B}\ d\vec{A} \Rightarrow \oint_{\partial_A} \vec{E}\ d\vec{r} = -\partial_t \int_A \vec{B}\ \vec{dA} = -\partial_t \phi$$

4.

b) Aus der 4. Maxwell-Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \\ \Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)}_{=0} &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\partial_t \vec{E}\right) \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}} &= -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}{\epsilon_0} \qquad (5.1) \end{aligned}$$

Ausgehend von (5.1) und der Kontinuitätsgleichung lässt sich dann zeigen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(0) + \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}}\ dt \\ (5.1) \Rightarrow \quad &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} - \int_0^t \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}{\epsilon_0}\ dt \\ (\text{Kontinuität}) \Rightarrow \quad &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \int_0^t \frac{\partial_t \rho}{\epsilon_0}\ dt \\ &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \frac{\rho(t)}{\epsilon_0}\Big|_0^t \\ &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \frac{\rho(t)}{\epsilon_0}\Big|_0^t \\ &= \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} + \frac{\rho(t)}{\epsilon_0} - \frac{\rho(0)}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\rho(t)}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Mit der 2. und 3. Maxwellgleichug lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0) + \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{B}}(t)\ dt \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0) - \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times E(t)\right)\ dt \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$