

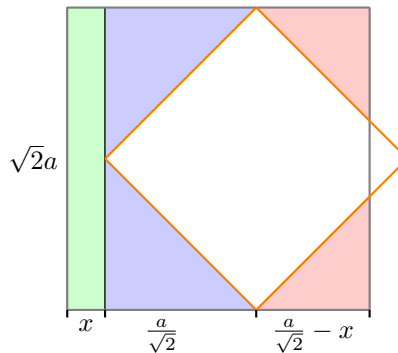
17. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für die Feldenergie betrachten wir das E -Feld im Kondensator. Da wo sich das Dielektrikum befindet, ist das Feld im gesamten Bereich 0, für die freien Stellen haben wir ein homogenes E -Feld mit dem Betrag $\frac{u}{d}$:

$$E(\vec{r}, x) = \begin{cases} \frac{u}{d} & \text{für } \vec{r} \in A(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $A(x)$ die freie Fläche, welche natürlich von der Auslenkung x abhängt. Diesen Zusammenhang löst man am einfachsten grafisch:



Dann folgt $A(x)$:

$$\begin{aligned} A(x) &= A_1(x) + A_2(x) + A_3(x) = x \cdot \sqrt{2}a + \frac{a^2}{2} + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x \right)^2 \\ &= x \cdot \sqrt{2}a + \frac{a^2}{2} + x^2 - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}x + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= x^2 + a^2 \end{aligned}$$

Die elektrische Feldenergie ist gegeben durch

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2(\vec{r}) d^3r$$

Da das E -Feld homogen ist, lässt sich dieses Integral auch als Produkt mit dem Volumen darstellen:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2(\vec{r}) d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\vec{r}) \cdot V_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\vec{r}) \cdot A(x)d = \frac{u\epsilon_0}{2} \cdot (x^2 + a^2)$$

Daraus folgt die rückstellende Kraft:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W = -\partial_x W_x = -\frac{\epsilon_0 u^2 x}{d} \hat{x}$$

b) Mit dem Ergebnis für die rückstellende Kraft aus a) können wir die DGL aufstellen:

$$F = m\ddot{x} = -\frac{\epsilon_0 u^2 x}{d}$$

$$\frac{\epsilon_0 u^2 x}{m \cdot d} + \ddot{x} = 0$$

Diese besitzt eine uns bekannte Form mit der Lösung

$$x(t) = \alpha \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{\epsilon_0 u^2 x}{m \cdot d}} \cdot i \cdot t\right)$$

Aufgabe 2

Aufgabe 3

a) Mit der Formel für den elektrischen Widerstand können wir das Volumen der Konstruktion ermitteln:

$$R = \rho_r \cdot \frac{l}{A}, \quad V = 6 \cdot l \cdot A$$

$$\Rightarrow A = \frac{\rho_r \cdot l}{R} \quad (1) \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow} V = 6 \frac{\rho_r \cdot l^2}{R}$$

Damit folgt das Gewicht:

$$m = \rho \cdot V = \frac{6 \cdot \rho \cdot \rho_r \cdot l^2}{R}$$

Und der Preis:

$$\text{Preis} = k \cdot m = 120.30 \text{ Euro}$$

Aufgabe 4

a) Die Gesamtkapazität der Schaltung lautet

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 + C_2}$$

Dann können wir durch die Bedingung $C_{ges} = C_2$ bestimmen:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 + C_2}$$

$$= \frac{C_1 + C_2 + C_1}{C_1(C_1 + C_2)}$$

$$\Leftrightarrow C_2 = \frac{C_1(C_1 + C_2)}{2C_1 + C_2}$$

$$\Leftrightarrow C_2^2 + 2C_1C_2 = C_1^2 + C_1C_2$$

$$\Leftrightarrow 0 = C_1^2 - C_1C_2 - C_2^2$$

Mit der pq -Formel erhalten wir C_1 :

$$C_1 = \frac{C_2}{2} \pm \sqrt{\frac{C_2^2}{4} + C_2^2}$$

$$= \frac{C_2}{2} \pm \sqrt{1.25} \cdot C_2$$

$$C_1 \geq 0 \Rightarrow = \frac{C_2}{2} + \frac{5}{4}C_2 = \frac{7}{4}C_2$$

Aufgabe 5