

# 19. Übungsblatt

---

## Aufgabe 1

a) Das elektrische Feld im Bereich des Kondensators folgt aus einem Wegintegral:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad U = - \int_0^d E \, dl \Rightarrow U = \frac{-\sigma d}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{-U}{d} \quad (1.1)$$

Die gesamte Kraft auf ein geladenes Teilchen in einem magnetischen und elektrischen Feld ist gegeben durch:

$$\vec{F}_{\text{ges}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Das stellen wir zu  $v$  um:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{ges}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) &\stackrel{!}{=} \vec{0} \\ E &= vB \\ v &= \frac{E}{B} \\ (1.1) \Rightarrow v &= \frac{U}{d \cdot B} \approx \frac{2}{3}c \end{aligned}$$

e) Im Zyklotron werden die Teilchen "nach links" abgelenkt (in Bewegungsrichtung betrachtet). Obwohl im Bereich des Kondensator die Richtung des magnetischen Feldes die gleiche ist, werden die Teilchen in die andere Richtung gelenkt.

## Aufgabe 2

a)

$$(i) \quad \epsilon_{ijk} = \alpha \epsilon_{jki} = \alpha \epsilon_{ikj} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$(ii) \quad \epsilon_{ijk} = \alpha \epsilon_{jik} = -\alpha \epsilon_{ijk} \Rightarrow \alpha = -1$$

$$(iii) \quad \epsilon_{iik} = \alpha \epsilon_{ijk} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

b) Zur besseren Lesbarkeit wird Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

$$(i) \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk}^2 = \begin{cases} 1 & \text{für Permutationen von } 1,2,3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

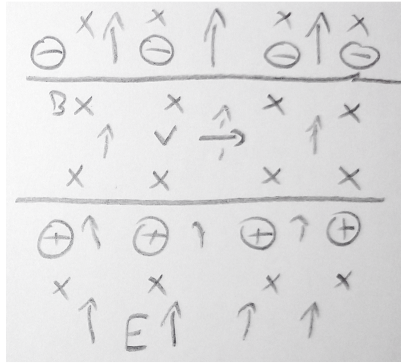
$$(ii) \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = m \wedge j = n \\ -1 & \text{für } i = n \wedge j = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c)

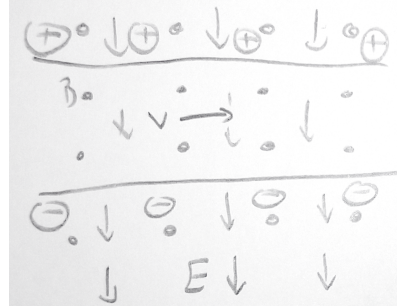
$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \epsilon_{ijk} \hat{i} \cdot a_j \cdot (\vec{b} \times \vec{c})_k \\ &= \epsilon_{ijk} \hat{i} \cdot a_j \cdot \epsilon_{kmn} \cdot b_m \cdot c_n \\ b)(ii) \Rightarrow &= \hat{i} \cdot b_i a_j c_j - \hat{i} \cdot c_i a_j b_j \\ &= \vec{b} \cdot a_j c_j - \vec{c} \cdot a_j b_j \\ &= \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

## Aufgabe 3

a) Für die Konfiguration der Richtung von  $E$ - und  $B$ -Feld existieren zwei Möglichkeiten:



(a) E-Feld nach oben gerichtet,  
B-Feld "ins Papier"



(b) E-Feld nach unten gerichtet,  
B-Feld "zum Leser"

b) Wenn man den Spalt klein genug macht, so darf die Geschwindigkeit in  $y$ -Richtung nicht stark gewesen sein. Damit können wir die Lorentzkraft als konstant annehmen und die auf das Teilchen wirkende Kraft ist ebenfalls konstant:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q(E + vB) \cdot \vec{e}_y$$

Dann können wir für die Koordinaten des Teilchens schreiben ( $t_1$  ist der Zeitpunkt bei dem das Teilchen den Spalt erreicht):

$$x(t) = v \cdot t \Rightarrow t_1 = \frac{L}{v}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{q(E + vB)}{2m}t^2$$

$$\Rightarrow y(t_1) = \frac{q(E + vB)}{2m} \frac{L^2}{v^2}$$

Wenn der Spalt in  $y$ -Richtung von  $-a$  bis  $a$  geht erhalten wir die zwei Intervallgrenzen  $v_1$  und  $v_2$ :

$$v_1 : y(t_1) = \frac{q(E + v_1 B)}{2m} \frac{L^2}{v_1^2} \stackrel{!}{=} a$$

$$\Rightarrow 0 = a - \frac{qEL^2}{2mv_1^2} - \frac{qBL^2}{2mv_1}$$

$$= av_1^2 - \frac{qBL^2}{2m}v_1 - \frac{qEL^2}{2m}$$

$$= v_1^2 - \frac{qBL^2}{2ma}v_1 - \frac{qEL^2}{2ma}$$

$$v_2 : y(t_1) = \frac{q(E + v_2 B)}{2m} \frac{L^2}{v_2^2} \stackrel{!}{=} -a$$

$$\Rightarrow 0 = a + \frac{qEL^2}{2mv_2^2} + \frac{qBL^2}{2mv_2}$$

$$= av_2^2 + \frac{qBL^2}{2m}v_2 + \frac{qEL^2}{2m}$$

$$= v_2^2 + \frac{qBL^2}{2ma}v_2 + \frac{qEL^2}{2ma}$$

Mit der  $pq$ -Formel erhalten wir die Lösungen für  $v_1$  und  $v_2$  (wobei der -Teil eine negative Geschwindigkeit erzeugt und ignoriert werden kann)

$$v_1 = \frac{qBL^2}{4ma} \pm \sqrt{\left(\frac{qBL^2}{4ma}\right)^2 + \frac{qEL^2}{2ma}} \quad v_2 = -\frac{qBL^2}{4ma} \pm \sqrt{\left(\frac{qBL^2}{4ma}\right)^2 - \frac{qEL^2}{2ma}}$$

c) Die Gesamtkraft auf ein geladenes Teilchen im Wienfilter (Summe aus Coulomb- und Lorentzkraft) lautet:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Mit dem 3. Newtonschen Axiom können wir die DGL aufstellen:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \cdot \dot{\vec{v}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= Eq \vec{e}_y + Bq (\vec{v} \times \vec{e}_z) \\ &= Eq \vec{e}_y + Bq \cdot \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man erhält ein System aus 3 Gleichungen:

$$\dot{v}_x = \frac{qB}{m} v_y \quad (3.1)$$

$$\dot{v}_y = \frac{Eq}{m} - \frac{qB}{m} v_x \quad (3.2)$$

$$\dot{v}_z = 0 \quad (3.3)$$

Durch Ableiten der ersten und einsetzen in die zweite Gleichung bringt uns  $v_x(t)$ :

$$\begin{aligned} (3.1) \xRightarrow{\frac{d}{dt}} \ddot{v}_x &= \frac{qB}{m} \dot{v}_y \Rightarrow \dot{v}_y = \frac{m}{qB} \ddot{v}_x \\ \text{Einsetzen in (3.2)} \Rightarrow \frac{m}{qB} \ddot{v}_x &= \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m} v_x \\ \ddot{v}_x + \underbrace{\left(\frac{qB}{m}\right)^2}_{=\omega^2} v_x &= \frac{qE}{m} \frac{qB}{m} \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz  $v_x(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) + \gamma$  erhalten wir mit den Randbedingungen:

- $\alpha = 0$ , da bei  $t = 0$  keine Kraft in  $x$ -Richtung wirkt
- $\gamma$  mit der partikulären Lösung:

$$\omega^2 \cdot \gamma = \frac{q^2 E B}{m^2} \Rightarrow \gamma = \frac{E}{B}$$

- $\beta$  folgt aus der Rdb  $v_x(0) = v_0$ :

$$v_x(0) = \beta \cos(0) + \frac{E}{B} = \beta + \frac{E}{B} \stackrel{!}{=} v_0 \Rightarrow \beta = v_0 - \frac{E}{B}$$

Damit lautet die Lösung der  $x$ -Koordinate:

$$v_x(t) = \left(v_0 - \frac{E}{B}\right) \cos(\omega t) + \frac{E}{B}$$

Wenn man die Lösung für  $v_x$  in (3.2) erhält man durch integrieren eine Lösung für  $v_y$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_y &= \frac{Eq}{m} - \frac{qB}{m} v_x \\
 &= \frac{Eq}{m} - \frac{qB}{m} \left( \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) \cos(\omega t) + \frac{E}{B} \right) \\
 &= \frac{Eq}{m} - \frac{qB}{m} \frac{E}{B} - \frac{qB}{m} \left( \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) \cos(\omega t) \right) \\
 &= -\frac{qB}{m} \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

Mit  $\omega$  als Zyklotron(-kreis-)frequenz

$$\omega = \frac{qB}{m} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$$

## Aufgabe 4

a) Da sich die induzierte Spannung proportional zur Fläche der Spule und Menge an Windungen verhält, sollte die Fläche mit der größtem Fläche pro Umfang gewählt werden, was die kreisförmige Spule ist.

## Aufgabe 5