Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

16. Übungsblatt

Aufgabe 1: Eine geladene Linie

a) Die dreidimensionale Linienladungsdichte ρ lautet:

$$\rho(\vec{r}) = \sigma \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \Theta\left(z + \frac{a}{2}\right) \cdot \Theta\left(\frac{a}{2} - z\right) \qquad \text{mit } \sigma \text{ als Linienladungsdichte } \sigma = \frac{Q}{a}$$

b) Aus der Multipolentwicklung folgt:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma \cdot \delta(x') \cdot \delta(y') \cdot \Theta\left(z' + \frac{a}{2}\right) \cdot \Theta\left(\frac{a}{2} - z'\right)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\, dx'dy'dz' \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}}\, dz' \\
\overset{\substack{r^2 := x^2+y^2 \\ u := z-z'}}{\Rightarrow} &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{z+\frac{a}{2}}^{z-\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2+u^2}}\, du \\
&= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{z+\frac{a}{2}}^{z-\frac{a}{2}} \frac{1}{u + \sqrt{r^2+u^2}} \frac{u + \sqrt{r^2+u^2}}{\sqrt{r^2+u^2}}\, du \\
&= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{z+\frac{a}{2}}^{z-\frac{a}{2}} \frac{1}{u + \sqrt{r^2+u^2}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{r^2+u^2}}\right) du \\
v := u + \sqrt{r^2+u^2} \quad du = \frac{dv}{1 + \frac{u}{\sqrt{r^2+u^2}}} \Rightarrow &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{v}\, dv \\
&= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{z + \frac{a}{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2}}{z - \frac{a}{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2}}\right)
\end{aligned}$$

c)

1. $x = y = 0,\ z \to \frac{a}{2}$

$$\phi(z \to \frac{a}{2}) = \lim_{z \to \frac{a}{2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{z + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(z + \frac{a}{2}\right)^2}}{z - \frac{a}{2} + \sqrt{\left(z - \frac{a}{2}\right)^2}}\right) = \lim_{z \to \frac{a}{2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{2z + a}{2z - a}\right)$$

2. $\vec{r} \in x$-Achse

$$\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{\frac{a}{2} + \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}}{-\frac{a}{2} + \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a^2}{4}\right)^2}\right)$$

3. $r_z = 0,\ r \gg \frac{a}{2}$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{\frac{a}{2} + \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}}{-\frac{a}{2} + \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}}\right) \overset{r \gg \frac{a}{2}}{\approx} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{r + \frac{a}{2}}{r - \frac{a}{2}}\right)$$

Aufgabe 2: Ladungsverteilung und Multipolmomente

a)

$$\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta(x)\delta(y) \cdot (\delta(z+a) + \delta(z-a) - 2\delta(z))$$

b)

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r' &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q\cdot\delta(x')\delta(y')\cdot(\delta(z'+a)+\delta(z'-a)-2\delta(z'))}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\ dx'dy'dz' \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(z'+a)+\delta(z'-a)-2\delta(z')}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}\ dz' \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right] \\
r := \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+a)^2}}-\frac{2}{\sqrt{r^2+z^2}}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z-a}{r}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z+a}{r}\right)^2}}-\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}}\right] \\
\text{Taylor} \Rightarrow &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} * [1+\frac{1}{2}\left(\frac{z-a}{r}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{z-a}{r}\right)^4+\cdots \\
&\quad +1+\frac{1}{2}\left(\frac{z+a}{r}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{z+a}{r}\right)^4+\cdots \\
&\quad -2-\frac{2}{2}\left(\frac{z}{r}\right)^2 \qquad -\frac{6}{8}\left(\frac{z}{r}\right)^4 \qquad +\cdots] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\underbrace{\frac{1+1-2}{r}}_{0}+\underbrace{\frac{(z-a)^2+(z+a)^2-2z^2}{2r^3}}_{\frac{a^2}{r^3}}+\underbrace{\frac{3(z-a)^4+3(z+a)^4-6z^4}{8r^5}}_{\frac{9a^2z^2+a^4}{4r^5}}+\cdots\right] \\
&= \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{z^2+a^2}{4r^5}\right)
\end{aligned}$$

Das erste nicht-verschwindende Moment ist damit das Quadrupolmoment

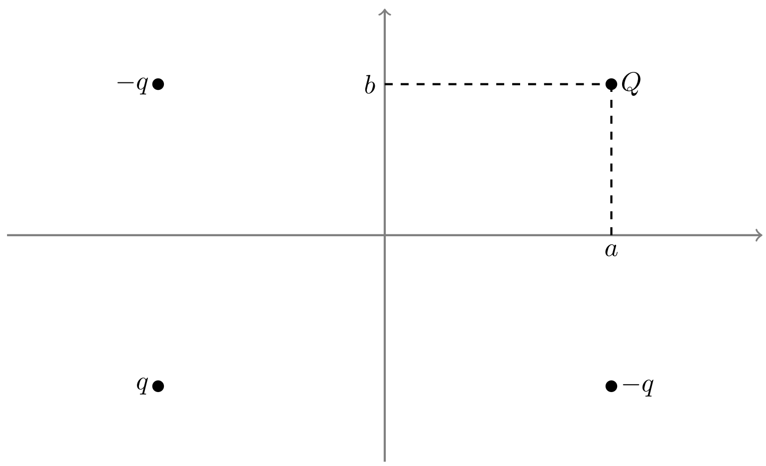
$$Q(\vec{e}_r) = qa^2$$

c) Aus dem Quadrupolmoment folgt das Potential:

$$\phi(r) = \frac{Q(\vec{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Aufgabe 3: Spiegelladungen

a) Zum Erfüllen der Randbedingung setzen 3 weitere Ladungen in das System, die gegenüberliegende Ladung ist gleichnamig. Die Ladungen im 2. und im 4. Quadranten sind jedoch negativ geladen. Die Anordnung sieht dann wie folgt aus:



Durch die Multipolentwicklung können wir das elektrische Potential im Raum ermitteln:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{d(\vec{r},\vec{q_i})}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}}_{\text{Durch Ladung } Q} - \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}}}_{\text{Spiegelladung im 2. Quadrant}} + \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}}}_{\text{Spiegelladung im 3. Quadrant}} - \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}}}_{\text{Spiegelladung im 4. Quadrant}}\right]$$

Die Randbedingung $\phi = 0$ auf den Platten ist damit auch erfüllt:

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2+(0-b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2+(0-b)^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2+(0+b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2+(0+b)^2}}\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2+b^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2+b^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}\right]$$
$$= 0$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{(0-a)^2+(y-b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(0+a)^2+(y-b)^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(0+a)^2+(y+b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(0-a)^2+(y+b)^2}}\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{a^2+(y-b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{a^2+(y-b)^2}} + \frac{Q}{\sqrt{a^2+(y+b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{a^2+(y+b)^2}}\right]$$
$$= 0$$

b) Für den Bewewis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass zwei Lösungen, ϕ_1 und ϕ_2 existieren. Die Differenz der Potentiale definieren wir als $\phi_0 = \phi_1 - \phi_2$.
Aus dem ersten Greenschen Satz folgt dann:

$$\int_V (\vec{\nabla}\phi_0)^2 \; d^3r + \underbrace{\int_V \phi_0 \cdot \Delta\phi_0 \; d^3r}_{\substack{\Delta\phi_0 \,=\, \Delta\phi_1 \,-\, \Delta\phi_2 \\ =\, -\frac{\rho}{\epsilon_0} \,+\, \frac{\rho}{\epsilon_0} \,=\, 0}} = \underbrace{\int_{\partial V} \phi_0 \cdot \partial_n \phi_0 \; d^2r}_{\substack{=0,\text{ wegen Dirichlet Rdb muss} \\ \phi_0(\vec{r})|_{r\in\partial V} \,=\, 0 \text{ gelten}}}$$

$$\int_V (\vec{\nabla}\phi_0)^2 \; d^3r + \qquad 0 \qquad = \qquad 0$$

In der 2. Zeile wird das $\vec{E}$-Feld des Differenzfeldes ϕ_0 quadriert und, muss also ≥ 0 sein.
Da über eine nicht negative Zahl integriert wird, muss der Wert des Integrals auch positiv sein. Aufgrund der Poisson-Gleichung und der Dirichlet-Randbedingung ist dieser aber 0, d.h. dass auch das $\vec{E}$-Feld im gesamten Raum 0 ist.

$$\int_V (\vec{\nabla}\phi_0)^2 \; d^3r = 0 \Rightarrow \int_V (\vec{E}(\vec{r}))^2 \; d^3r = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = 0, \text{ für } \vec{r} \in V$$

Dies stellt keine sinnvolle Lösung für die Poissongleichung dar, weshalb keine zwei Lösungen existieren können.

Aufgabe 4: Tankanzeige

a) Zur Berechnung des $\vec{E}$-Feldes Benutzen wir den Gaußschen Satz

$$\int \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{\text{enq}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

und nehmen das Feld mit der Idealisierung des idealen Platenkondensators, dass das $\vec{E}$-Feld nur radial verläuft

$$\vec{E} \parallel \hat{r} \perp \hat{z}.$$

Dann ergibt sich für $\vec{E}$:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\vec{E}(r) \cdot \hat{n}}_{E(r)} \; dA(r) &= \frac{Q_{\text{enq}}}{\epsilon_r \epsilon_0} \\
E(r) * A(r) &= \frac{Q_{\text{enq}}}{\epsilon_r \epsilon_0} \\
E(r) * 2\pi r^2 &= \frac{Q_{\text{enq}}}{\epsilon_r \epsilon_0} \\
E(r) * l * 2\pi r^2 &= \frac{\sigma_i * l * 2\pi * R_i^2}{\epsilon_r \epsilon_0} \qquad \text{mit } \sigma_i \text{ als Flächenladungsdichte des inneren Hohlzylinders} \\
E(r) &= \frac{\sigma_i R_i}{\epsilon_r \epsilon_0 r} = \frac{Q_i}{2\pi * l * \epsilon_r \epsilon_0 * r}
\end{aligned}$$

b) Für die Spannung U bilden wir ein Wegintegral über mit den zwei Radien als Grenzen, da es sich um ein konservatives Kraftfeld handelt, ist es wegunabhängig, sodass wir einfach entlang des Radius integrieren können:

$$\begin{aligned}
U &= \int_{R_i}^{R_a} E(r) dr \\
&= \int_{R_i}^{R_a} \frac{Q_i}{2\pi * l * \epsilon_0 \epsilon_r * r} dr \\
&= \frac{Q}{2\pi * l * \epsilon_r \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)
\end{aligned}$$

Die Kapazität folgt dann aus der Formel $C = \frac{Q}{U}$:

$$\begin{aligned}
C = \frac{Q}{U} &= \frac{Q * 2\pi * l * \epsilon_r \epsilon_0}{Q \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \\
&= \frac{2\pi * l * \epsilon_r \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}
\end{aligned}$$

c) Bei befüllen des Kondensators kann der Kondensator in zweite Teile geteilt werden; unter der Annahme, dass sich die Felder des gefüllten Teils und des Hohlteils nicht beeinflussen lautet die Kapazität:

$$\begin{aligned}
C(h) &= C_{\text{Benzin}}(h) + C_{\text{Luft}}(h) \\
&= \frac{2\pi * h * \epsilon_{\text{Benzin}} \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} + \frac{2\pi * (l-h)\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \\
&= 2\pi\epsilon_0 \frac{h(\epsilon_{\text{Benzin}} - 1) + l}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Greensche Funktion

Sei D ein n-dimensionaler Differentialoperator und G eine Greensche Funktion, sodass gilt:

$$DG(\vec{x}) = \delta^{(n)}(\vec{x}), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

a) Eine partikuläre Lösung $f_p(\vec{x})$ der Differentialgleichung

$$Df(\vec{x}) = J(\vec{x})$$

mit Inhomogenität $J(\vec{x})$ kann durch Faltung der Inhomogenität mit der Greenschen Funktion erzeugt werden:

$$\begin{aligned}
Df_p(\vec{x}) &= J(\vec{x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} J(\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}')d^n x' \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} J(\vec{x}')DG(\vec{x}-\vec{x}')d^n x' \\
&= D\int_{\mathbb{R}^n} J(\vec{x}')G(\vec{x}-\vec{x}')d^n x' \\
\Rightarrow f_p(\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} J(\vec{x}')G(\vec{x}-\vec{x}')d^n x'
\end{aligned}$$

b) Die Heaviside (Theta-Funktion)

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

c) 1.

$$\rho(r) = Q \cdot \delta^3(\vec{r}) = Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$$

2.

$$\begin{aligned}
\int \vec{E}\; d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enq}}}{\epsilon_0} &= \frac{Q}{\epsilon_0}\int \delta^3(\vec{r}')d^3\vec{r}' \\
E \cdot 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\
E &= \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}
\end{aligned}$$

Da wir uns in einem Radialfeld befinden:

$$\begin{aligned}
-\nabla\phi = -\partial_r\phi &= E(r) \\
\Leftrightarrow \phi &= -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi r'^2 \epsilon_0}dr' \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \cdot G(\vec{r}-\vec{r}')\; d^3 r' \\
-\frac{Q}{4\pi r} &= \int_{\mathbb{R}^3} Q \cdot \delta^3(\vec{r}') \cdot G(\vec{r}-\vec{r}')\; d^3 r' \\
G(r) &= -\frac{1}{4\pi r}
\end{aligned}$$

4.

$$
\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}')G(\vec{r}-\vec{r}')d^3r' \\
&\overset{(3.)}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}') \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'
\end{aligned}
$$