Etem Kalyon
Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Aufgabe 2

a) Der Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten:

$$\Delta = \frac{1}{r}\partial_r^2 r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta \left(\sin\theta \partial_\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2$$

Aus der Ladungsverteilung ρ und der Poisson-Gleichung folgen:

$$\Delta\phi = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Die Ladungsverteilung besitzt eine Kugelsymmetrie, daher wird es sich auch bei dem Potential um eine größe handeln, die lediglich von der Distanz r abhängen wird.
Die partiellen Ableitung $\partial_\varphi \phi$ und $\partial_\theta \phi$ sind daher 0 und können vernachlässigt werden.
Für $r > R$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \Delta\phi = \frac{1}{r}\partial_r^2 \left(r * \phi\right)) &= \rho(r > R) = 0 \\ \Leftrightarrow \partial_r^2 \left(r * \phi\right)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial_r \left(r * \phi\right)) &= \alpha \\ \Leftrightarrow r * \phi &= \alpha * r + \beta \\ \Leftrightarrow \phi &= \alpha + \frac{\beta}{r} \end{aligned}$$

$r \leq R$ folgt analog:

$$\begin{aligned} \Delta\phi = \frac{1}{r}\partial_r^2 \left(r * \phi\right)) &= -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \\ \Leftrightarrow \partial_r^2 \left(r * \phi\right)) &= -\frac{r * \rho_0}{\epsilon_0} \\ \Leftrightarrow \partial_r \left(r * \phi\right)) &= -\frac{\rho_0}{2 * \epsilon_0} r^2 + \gamma \\ \Leftrightarrow r * \phi &= -\frac{\rho_0}{6 * \epsilon_0} r^3 + \gamma * r + \delta \\ \Leftrightarrow \phi &= -\frac{\rho_0}{6 * \epsilon_0} r^2 + \gamma + \frac{\delta}{r} \end{aligned}$$

Somit lautet das Potential ϕ:

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{6*\epsilon_0} r^2 + \gamma + \frac{\delta}{r} & \text{für } r \leq R \\ \alpha + \frac{\beta}{r} & \text{für } r > R \end{cases}$$

b) Für ein eindeutiges Potential benötigen wir (da wir 4 Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in der Gleichung haben) 4 Randbedingen:

1. ϕ endlich für $r \to 0$, damit wir ein für $r = 0$ ein eindeutiges Potential bestimmen können:

$$\phi(0) = \lim_{r\to 0} -\frac{\rho_0}{6 * \epsilon_0} r^2 + \gamma + \frac{\delta}{r} = \lim_{r\to 0} +\gamma + \frac{\delta}{r} \overset{!}{\neq} \infty \Rightarrow \delta = 0$$

2. $\lim_{r\to\infty} \phi(r) = 0$ ist eine sinnvolle Annahme, weil dadurch der "Referenzpunkt" des Potentials ∞ ist. Für ϕ folgt dann:

$$\lim_{r\to\infty} \phi(r) = \lim_{r\to\infty} \alpha + \frac{\beta}{r} = \alpha \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

3. Stetigkeit des Potentials bei $r = R$ ist notwendig, um keine Sprungstellen zu erhalten.

$$\limsup_{r\to R} \phi(r) \overset{!}{=} \liminf_{r\to R} \phi(r) \Rightarrow \frac{\beta}{R} = \frac{-\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} + \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\beta}{R} + \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} R^2$$

4. Stetigkeit der ersten Ableitung des Potentials:

$$\phi'(r) = \begin{cases} -\frac{\beta}{r^2} & \text{für } r > R \\ -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r & \text{für } r \leq R \end{cases}$$

$$\limsup_{r\to R} \phi'(r) \overset{!}{=} \liminf_{r\to R} \phi'(r) \Rightarrow \frac{-\beta}{R^2} = \frac{-\rho_0 R}{3\epsilon_0} \Rightarrow \beta = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0}$$

Wenn man den Wert für β aus 4. in bei γ einsetzt, erhalten wir unser eindeutiges Potential:

$$\gamma = \frac{\beta}{R} + \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} R^2 = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} = R^2 \frac{\rho_0}{2\epsilon_0}$$

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Aufgabe 5