

## 16. Übungsblatt

---

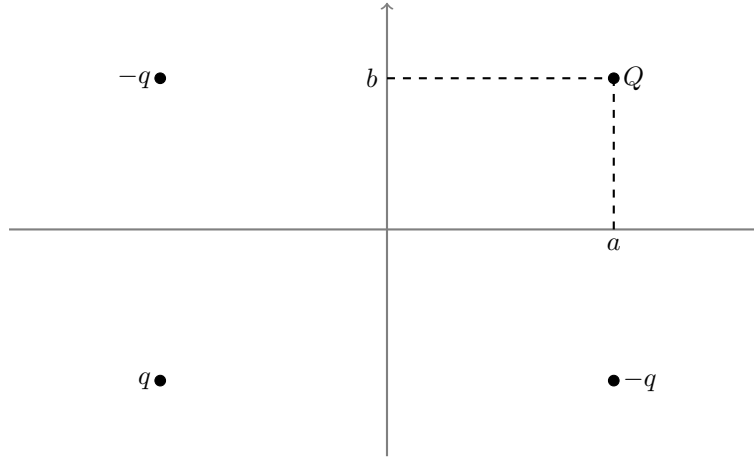
### Aufgabe 1: Eine geladene Linie

a) Die drei dimensionale Linienladungsdichte  $\rho$  lautet:

$$\rho(\vec{r}) = \sigma \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \Theta\left(z + \frac{a}{2}\right) \cdot \Theta\left(\frac{a}{2} - z\right) \quad \text{mit } \sigma \text{ als Linienladungsdichte } \sigma = \frac{Q}{a}$$

### Aufgabe 3: Spiegelladungen

Zum Erfüllen der Randbedingung setzen 3 weitere Ladungen in das System, die gegenüberliegende Ladung ist gleichnamig. Die Ladungen im 2. und im 4. Quadranten sind jedoch negativ geladen. Die Anordnung sieht dann wie folgt aus:



Durch die Multipolentwicklung können wir das elektrische Potential im Raum ermitteln:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{d(\vec{r}, \vec{q}_i)} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}}_{\text{Durch Ladung } Q} - \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}}}_{\text{Spiegelladung im 2. Quadrant}} + \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}}}_{\text{Spiegelladung im 3. Quadrant}} - \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}}}_{\text{Spiegelladung im 4. Quadrant}} \right]\end{aligned}$$

Die Randbedingung  $\phi = 0$  auf den Platten ist damit auch erfüllt:

$$\begin{aligned}\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + (0-b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + (0-b)^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + (0+b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + (0+b)^2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} \right] \\ &= 0 \\ \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{\sqrt{(0-a)^2 + (y-b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(0+a)^2 + (y-b)^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(0+a)^2 + (y+b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(0-a)^2 + (y+b)^2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{\sqrt{a^2 + (y-b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{a^2 + (y-b)^2}} + \frac{Q}{\sqrt{a^2 + (y+b)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{a^2 + (y+b)^2}} \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

## Aufgabe 4: Tankanzeige

a) Zur Berechnung des  $\vec{E}$ -Feldes Benutzen wir den Gaußschen Satz

$$\int \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{\text{enq}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

und nehmen das Feld mit der Idealisierung des idealen Platenkondensators, dass das  $\vec{E}$ -Feld nur radial verläuft

$$\vec{E} \parallel \hat{r} \perp \hat{z}.$$

Dann ergibt sich für  $\vec{E}$ :

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\vec{E}(r) \cdot \hat{n}}_{E(r)} dA(r) &= \frac{Q_{\text{enq}}}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ E(r) * A(r) &= \frac{Q_{\text{enq}}}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ E(r) * 2\pi r^2 &= \frac{Q_{\text{enq}}}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ E(r) * l * 2\pi r^2 &= \frac{\sigma_i * l * 2\pi * R_i^2}{\epsilon_r \epsilon_0} \quad \text{mit } \sigma_i \text{ als Flächenladungsdichte} \\ &\quad \text{des inneren Hohlzylinders} \\ E(r) &= \frac{\sigma_i R_i}{\epsilon_r \epsilon_0 r} = \frac{Q_i}{2\pi * l * \epsilon_r \epsilon_0 * r} \end{aligned}$$

Für die Spannung U bilden wir ein Wegintegral über mit den zwei Radien als Grenzen, da es sich um ein konservatives Kraftfeld handelt, ist es wegunabhängig, sodass wir einfach entlang des Radius integrieren können:

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_i}^{R_a} E(r) dr \\ &= \int_{R_i}^{R_a} \frac{Q_i}{2\pi * l * \epsilon_0 \epsilon_r * r} dr \\ &= \frac{Q}{2\pi * l * \epsilon_r \epsilon_0} \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right) \end{aligned}$$

Die Kapazität folgt dann aus der Formel  $C = \frac{Q}{U}$ :

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{U} = \frac{Q * 2\pi * l * \epsilon_r \epsilon_0}{Q \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right)} \\ &= \frac{2\pi * l * \epsilon_r \epsilon_0}{\ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right)} \end{aligned}$$