Matthias Maile
Roman Surma

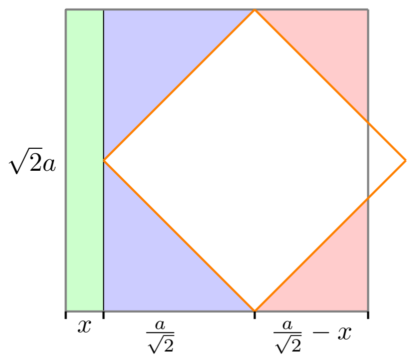
17. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für die Feldenergie betrachten wir das E-Feld im Kondensator. Da wo sich das Dielektrikum befindet, ist das Feld $\frac{U}{de_r}$, im restlichen Bereich $\frac{U}{d}$.

$$E(\vec{r}, x) = \begin{cases} \frac{U}{e_r d} & \text{für } \vec{r} \in A(x) \\ \frac{U}{d} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $A(x)$ die freie Fläche, welche natürlich von der Auslenkung x abhängt.
Diesen Zusammenhang löst man am einfachsten grafisch:



Dann folgt $A(x)$:

$$\begin{aligned} A(x) = A_1(x) + A_2(x) + A_3(x) &= x \cdot \sqrt{2}a + \frac{a^2}{2} + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x\right)^2 \\ &= x \cdot \sqrt{2}a + \frac{a^2}{2} + x^2 - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}x + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= x^2 + a^2 \end{aligned}$$

Die elektrische Feldenergie ist gegeben durch

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2(\vec{r}) d^3 r$$

Die Energie des E-Feldes ermitteln wir durch Aufteilung des Bereiches mit und ohne Dielektrikum.
Dadurch erhalten wir zwei Bereiche, für die das E-Feld homogen ist. Dank der Homogenität müssen wir nicht mehr integrieren sondern können mit dem Volumen multiplizieren:

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2(\vec{r}) d^3 r \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\left(\frac{U}{\epsilon_r d}\right)^2 \cdot d \cdot A(x) + \frac{U^2}{d^2} \cdot d \cdot 2a^2 - \frac{U^2}{d^2} \cdot d \cdot A(x) \right) \\ &= \frac{\epsilon_0 U^2}{2d} \left(\frac{A(x)}{\epsilon_r^2} + 2a^2 - A(x) \right) \\ &= \frac{\epsilon_0 U^2}{2d} A(x) \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_r^2} - 1 \right) + \frac{\epsilon_0 U^2 a^2}{d} \end{aligned}$$

Mit der Gleichung $F = -\vec{\nabla} W$ lässt sich die rückstellende Kraft bestimmen:

$$\begin{aligned} F = -\vec{\nabla} W &= -\partial_x \left(\frac{\epsilon_0 U^2}{2d} A(x) \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_r^2} - 1 \right) + \frac{\epsilon_0 U^2 a^2}{d} \right) \cdot \hat{x} \\ &= -\frac{\epsilon_0 U^2}{d} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_r^2} - 1 \right) \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

b) Mit dem Ergebnis für die rückstellende Kraft aus a) können wir die DGL aufstellen:

$$\begin{aligned} F = m\ddot{x} = -\frac{\epsilon_0 U^2}{d} \cdot \frac{1 - \epsilon_r^2}{\epsilon_r^2} \cdot x \\ \Leftrightarrow -\frac{\epsilon_0 U^2}{dm} \cdot \frac{1 - \epsilon_r^2}{\epsilon_r^2} \cdot x + \ddot{x} = 0 \end{aligned}$$

Diese besitzt eine uns bekannte Form mit der Lösung

$$x(t) = \alpha \cdot \exp \left(\underbrace{\sqrt{-\frac{\epsilon_0 U^2}{dm} \cdot \frac{1 - \epsilon_r^2}{\epsilon_r^2}}}_{\omega=} \cdot i \cdot t \right)$$

Die Oszillation hat die Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\epsilon_r^2 \cdot d \cdot m}{\epsilon_0 \cdot U^2 \cdot (1 - \epsilon_r^2)}}$$

Aufgabe 2

2)

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \vec{E}\, d^3r = \int \frac{\rho}{\epsilon_0}\, d^3r$$

$$\int_V \vec{\nabla} \vec{E}\, d^3r = \int_{O(r)} \vec{E}\, d\vec{A} = \int_0^l \int_0^{2\pi} E(r) \cdot r \; d\varphi\, dz = 2\pi l r E(r)$$

rechte Seite: $\displaystyle \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\, d^3r = \frac{Q}{\epsilon_0}$ für $r_i < r < r_a$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi l r \epsilon_0} \qquad r_i < r < r_a$$

$$\phi(r) = \int -E(r) = \int \frac{Q}{2\pi l r \epsilon_0}\, dr$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln(r) + c$$

$R_i < r < R_a$: $\displaystyle \phi(r) = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_a}{r}\right)$

mit $C = \frac{Q}{U}$ und $Q_{ges} = \frac{Q}{\epsilon_r}$ folgt:

$$C = \frac{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$$

b) $r_i = 10^{-3}\,m$, $r_a = 2 \cdot 10^{-3}\,m$, $\varepsilon_r = 26$, $C = 1 \cdot 10^{-6}\,F$

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \cdot l \quad \Leftrightarrow \quad l = \frac{C \cdot \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \approx 479\,m \; ?$$

Nein so eine [illegible] nicht in meinen PC!

ii) $U = 10\,V$ $\quad C = \frac{Q}{U}$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{C \cdot U}{2\pi l \cdot r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \qquad r \to r_i$$

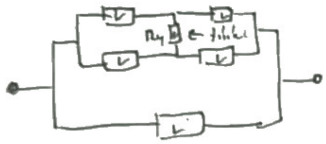
$$E(r_i) = \frac{C \cdot U}{2\pi l \cdot r_i \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = 375114.5 \; \frac{N}{C}$$

c) $$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{R_a}{r_i}\right)} \cdot \left(\frac{1}{1 + \alpha \cdot V}\right)$$

$$\lim_{\alpha \to 0} : \; C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \cdot 1$$

Aufgabe 3

3) a)



R_4 ist irrelevant, da dort kein Strom fließt.

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$

$$\Rightarrow r = 2 \cdot R_{ges} \qquad \Rightarrow r = 2\,m\Omega$$

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \rho \cdot \frac{l}{A} \qquad l = 3\,cm \qquad \rho = 2{,}2 \cdot 10^{-8}\,\Omega m$$

$$\Rightarrow A = \rho_R \cdot \frac{l}{R} \qquad R = 2R_{ges}$$

$$\Rightarrow A = 2{,}2 \cdot 10^{-8}\,\Omega m \cdot \frac{0{,}03\,m}{2 \cdot 10^{-3}\,\Omega} = 3.3 \cdot 10^{-7}\,m^2 = 3.3 \cdot 10^{-3}\,cm^2$$

$$V = A \cdot l \qquad \rho = \frac{m}{V}$$

$$m = \rho \cdot A \cdot l = 20\,g\,cm^{-3} \cdot 3.3 \cdot 10^{-3}\,cm^2 \cdot 3\,cm = 0.198\,g$$

$\Rightarrow$ Eine Kante hat ein Gewicht von 0,198 g

$$m_{ges} = 6 \cdot m_{Kante} = 6 \cdot 0{,}198\,g = 1.188\,g$$

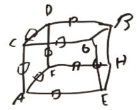
$$K = 50.63\,€/g \cdot 1.188\,g = 60.15\,€$$

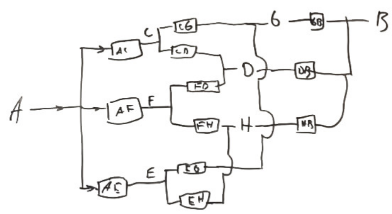
HöMa: DO 12 Uhr

Num: DO 10 Uhr

Phy: FR: 10 Uhr (oder DO)

ELWA: MO: 10 Uhr





$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{R_{AC}} + \frac{1}{R_{AF}} + \frac{1}{R_{AE}}$$

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{AF + \frac{1}{FD+DB} + \frac{1}{FH+HB}} + \frac{1}{AE + \frac{1}{EG+GB} + \frac{1}{EH+HB}} + \frac{1}{AC + \frac{1}{CG+GB} + \frac{1}{CD+DB}}$$

Alle Widerstände gleich

$$\Rightarrow R_{ges} = \frac{1}{R + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} + \frac{1}{R + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} + \frac{1}{R + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = \frac{3}{R + \frac{1}{R}} = \frac{3}{\frac{R+1}{R}} = \frac{3R}{R+1}$$

b) $R_{ges} = \frac{3R}{R+1}$ $R_{ges} = 1\,m\Omega$

$\Rightarrow 1\,m\Omega = \frac{3R}{R+1}$ $\Leftrightarrow R+1 = 3R$ $\Leftrightarrow R = \frac{1}{2}\,m\Omega$

$A = \rho_R \cdot \frac{l}{R} = 1.32 \cdot 10^{-6}\,m^2 = 1.32 \cdot 10^{-2}\,cm^2$

$m = \rho \cdot A \cdot l = 0{,}792\,g$

$m_{ges} = 0{,}792\,g \cdot 12 = 9.504\,g$

$\Rightarrow K = 50.63\,€/g \cdot 9.504\,g = 481.188\,€$

c) für $l = 1m$:

$A = 2.2 \cdot 10^{-8}\,\Omega m \cdot \frac{1m}{1\Omega} = 2.2 \cdot 10^{-8}\,m^2 = 22 \cdot 10^{-4}\,cm^2$

$K = 50.63\,€/g \cdot 20\,g\,cm^{-3} \cdot \overset{100\,cm}{\cancel{1m}} \cdot 2.2 \cdot 10^{-4}\,cm^2 = \cancel{2.25 \cdot 10^{-5}\,€} = 22.28\,€$

$\Rightarrow$ je dünner der Draht, desto höher der Widerstand

Aufgabe 4

a) Die Gesamtkapzität der Schaltung lautet

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 + C_2}$$

Dann können wir durch die Bedingung $C_{ges} = C_2$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_2} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 + C_2} \\
&= \frac{C_1 + C_2 + C_1}{C_1(C_1 + C_2)} \\
\Leftrightarrow C_2 &= \frac{C_1(C_1 + C_2)}{2C_1 + C_2} \\
\Leftrightarrow C_2^2 + 2C_1C_2 &= C_1^2 + C_1C_2 \\
\Leftrightarrow 0 &= C_1^2 - C_1C_2 - C_2^2
\end{aligned}$$

Mit der pq-Formel erhalten wir C_1:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{C_2}{2} \pm \sqrt{\frac{C_2^2}{4} + C_2^2} \\
&= \frac{C_2}{2} \pm \sqrt{1.25} \cdot C_2
\end{aligned}$$

b) Da die Schaltung unendlich lang ist betrachten wir nur den Teil, der immer wiederholt wird. Dabei lässt sich die Schaltung auf 3 Kondensatoren vereinfachen, die dann wie in a) aussieht. Da aber statt C_2 die selbe Schaltung nochmal eingesetzt werden müsste, also auch wieder die Kapazität der Gesamtschaltung vorliegt, erhalten wir die selbe Gleichung:

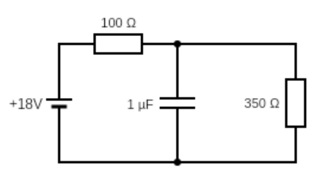
$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 + C_{\text{ges}}}$$

Da wir das Verhältnis zwischen C_1 und C_{ges} aus a) kennen können wir durch umstellen C_{ges} ermitteln:

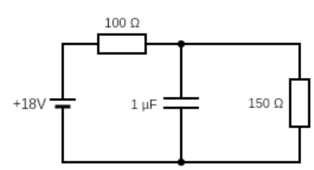
$$C_1 = C_{\text{ges}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1.25}\right) \Rightarrow C_{\text{ges}} = \frac{C_1}{\frac{1}{2} + \sqrt{1.25}}$$

Aufgabe 5

a) Die Schaltung vereinfacht sich zu den zwei Zeitintervallen:



(a) Für $t < 0$



(b) Für $t \geq 0$

Wenn wir die Schaltungen als Spannungsteiler betrachten erhalten wir U_C für $t < 0$ und $t \to \infty$:

$$\begin{aligned}
U_C(t < 0) &= \frac{350\Omega}{100\Omega + 350\Omega}\, U_q \\
&= \frac{350}{450}\, U_q \\
&= 14V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_C(t \to \infty) &= \frac{150\Omega}{100\Omega + 150\Omega}\, U_q \\
&= \frac{150}{350}\, U_q \\
&= 10.8V
\end{aligned}$$

D.h. wenn bei $t = 0$ der Schalter geschlossen wird, ist auf den Kondensatorplatten ein Potential von $14V$, während von der Spannungsquelle nur noch $10.8V$ wirken.
Die 'wirkende' Potentialdifferenz des Kondensators für $t = 0$ lautet somit

$$U_{\text{Cap}}(0) = 14V - 10.8V = 3.2V$$

Da sich der Kondensator am Widerstand $R_3 = 150\Omega$ entlädt lautet die die Potentialdifferenz die aus dem Kondensator folgt:

$$U_{\text{Cap}}(t) = U_{\text{Cap}}(0) \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} = U_{\text{Cap}}(0) \cdot e^{\frac{-t}{R_3 C}} = 3.2V \cdot \exp\left(\frac{-t}{150\Omega\mu F}\right)$$

Zusammen mit der Spannungsquelle existiert die Potentialdifferenz $U_C(t)$:

$$U_C = 10.8V + U_{\text{Cap}}(t) = 10.8V + 3.2V \cdot \exp\left(-\frac{2t}{3s} \cdot 10^4\right)$$

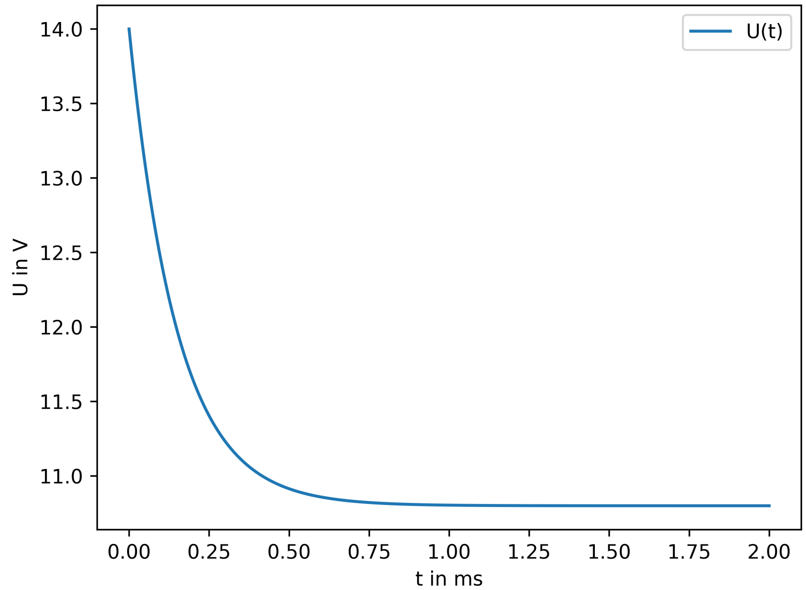
Den Eingangstromfluß berechnen wir mit dem Ohmschen Gesetz:

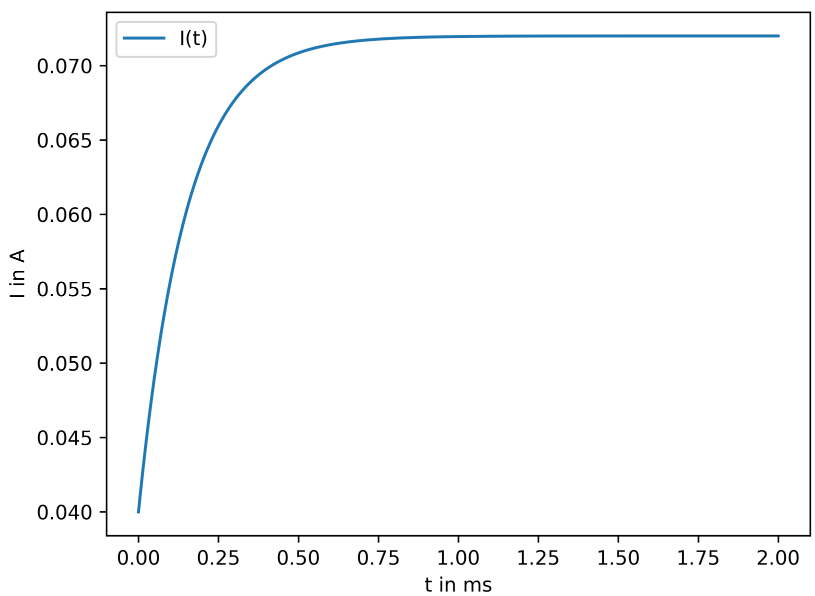
$$\begin{aligned} I_1(t < 0) &= \frac{U_q}{450\Omega} \\ &= \frac{18V}{450\Omega} \\ &\approx 0.04A \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} I_1(t \to \infty) &= \frac{U_q}{250\Omega} \\ &= \frac{18V}{250\Omega} \\ &\approx 0.072A \end{aligned}$$

Allgemein hängt der Strom $I_1(t)$ vom Widerstand R_1 und der Potentialdifferenz an diesem ab. Damit folgt $I_1(t)$:

$$I_1(t) = \frac{U_q - U_{\text{C}}(t)}{R_1} = \frac{18V - 10.8V - 3.2V \cdot \exp\left(-\frac{2t}{3s} \cdot 10^4\right)}{100\Omega} = 0.072A - 0.032A \cdot \exp\left(-\frac{2t}{3s} \cdot 10^4\right)$$

b)


U(t)
U in V
t in ms
14.0
13.5
13.0
12.5
12.0
11.5
11.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00


I(t)
I in A
t in ms
0.070
0.065
0.060
0.055
0.050
0.045
0.040
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00