Matthias Maile
Roman Surma

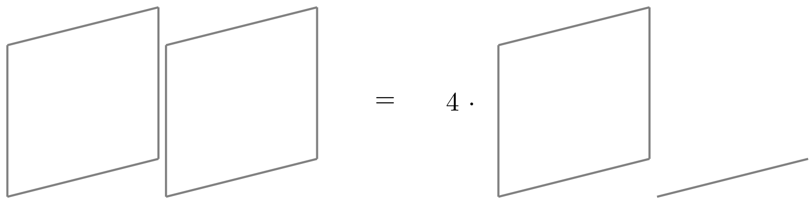
Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

20. Übungsblatt

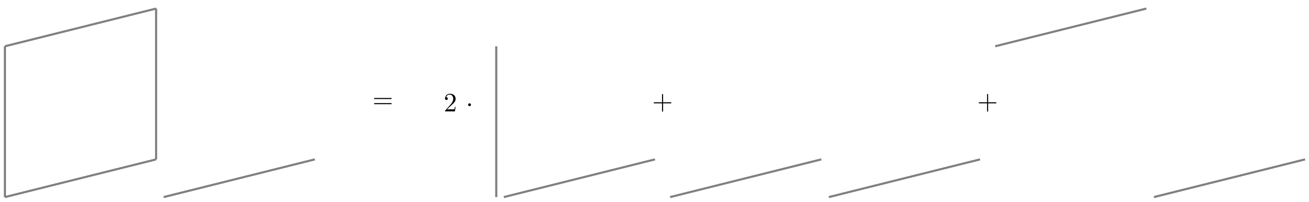
1 Aufgabe 1

Aufgabe 2

Für eine einfachere Rechnung werden zuerst einige Verinfachungen gemacht.
Aus der Symetrie folgt, dass der Induktions-Effekt auf eine Schleife der vierfache des Effekts auf eine Kante der Schleife sein muss:



Dieses Integral entlang des gesamten Quadrats lässt sich weiter aufteilen:



Dabei fällte schon direkt auf, dass der “senkrechte“ Teil keinen Einfluss auf die Leitung besitzt, da das Skalarprodukt der Vektoren entlang der Leitungen 0 ist (aufgrund der Rechtwinkligkeit):

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \int_{l'} \underbrace{d\vec{x} \cdot d\vec{y}}_{0} \frac{}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0$$

Damit verbleiben nur die Integrale entlang der parallelen Leitungen, welches erstmal für eine algemeine Distanz d zwischen den Leitern gelöst wird:

$$\begin{aligned}
L_{\text{parallel}} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \int_{l'} \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}{\sqrt{d^2 + (x-y)^2}} \; dxdy \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{d} \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-y}{d}\right)^2}} \; dxdy \\
\text{Substitution: } \substack{u = \frac{x-y}{d} \\ dx = d \cdot du} \Rightarrow &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \int_{-\frac{y}{d}}^{\frac{l-y}{d}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \; du \; dy \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \left[\operatorname{arsinh} u\right]_{-\frac{y}{d}}^{\frac{l-y}{d}} \; dy \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{l-y}{d}\right) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{-y}{d}\right) \right) \; dy \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\int_0^l \operatorname{arsinh}\left(\frac{l-y}{d}\right) \; dy}_{\text{Int}_1 :=} - \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\int_0^l \operatorname{arsinh}\left(\frac{-y}{d}\right) \; dy}_{\text{Int}_2 :=}
\end{aligned}$$

Das Integral des arsinh ist gegeben durch

$$\int \operatorname{arsinh}(ax) \; dx = x \; arsinh(ax) - \frac{\sqrt{a^2x^2+1}}{a} + C$$

Dann lässt sich der erste Teil des Integrals durch eine Substitution lösen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Int}_1 &= \int_0^l \operatorname{arsinh}\left(\frac{l-y}{d}\right)\ dy \qquad z := \frac{l-y}{d} \Rightarrow dy = -d \cdot dz \\
\Rightarrow &= \int_{\frac{l}{d}}^0 (-d) \cdot \operatorname{arsinh}(z)\ dz \\
&= (-d) \cdot \left[z\ arsinh(z) - \sqrt{z^2+1}\right]_{\frac{l}{d}}^0 \\
&= -d \cdot \left(-1 - \frac{l}{d}\operatorname{arsinh}\left(\frac{l}{d}\right) - \sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2 + 1}\right) \\
&= d + l\operatorname{arsinh}\left(\frac{l}{d}\right) - \sqrt{l^2+1}
\end{aligned}$$

Das zweite Integral folgt direkt aus der Formel für das Integral:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Int}_2 &= \int_0^l \operatorname{arsinh}\left(\frac{-y}{d}\right)\ dy \\
&= \left[y \cdot\ \operatorname{arsinh}\left(-\frac{y}{d}\right) + d\sqrt{\left(\frac{y}{d}\right)^2 + 1}\right]_0^l \\
&= l\operatorname{arsinh}\left(-\frac{l}{d}\right) + \sqrt{l^2+d^2} - d
\end{aligned}$$

Dann lautet die Gegeninduktivität von zwei parallelen Leitern der Länge l mit Abstand d:

$$\begin{aligned}
L_{\text{parallel}} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\mathrm{Int}_1 - \mathrm{Int}_2\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(d + l\operatorname{arsinh}\left(\frac{l}{d}\right) - \sqrt{l^2+d^2} - \left(l\operatorname{arsinh}\left(-\frac{l}{d}\right) + \sqrt{l^2+d^2} - d\right)\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(d + l\operatorname{arsinh}\left(\frac{l}{d}\right) - \sqrt{l^2+d^2} + l\operatorname{arsinh}\left(\frac{l}{d}\right) - \sqrt{l^2+d^2} + d\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(2d + 2l\operatorname{arsinh}\left(\frac{l}{d}\right) - 2\sqrt{l^2+d^2}\right) \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi}\left(d + l\operatorname{arsinh}\left(\frac{l}{d}\right) - \sqrt{l^2+d^2}\right)
\end{aligned}$$

Für die Gesamtinduktivität muss dann (gemäß der Skizze) 4 mal (wegen 4 Kanten) der Anteil bei Distanz R und bei Distanz $\sqrt{R^2+l^2}$ genommen werden:

$$\begin{aligned}
L_{\text{ges}} &= 4 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\left(L_{\text{par}}(R) + L_{\text{par}}\left(\sqrt{R^2+l^2}\right)\right) \\
&= 2 \cdot \frac{\mu_0}{\pi}\left(R + l\operatorname{arsinh}\left(\frac{l}{R}\right) - \sqrt{l^2+R^2} + \sqrt{R^2+l^2} + l\operatorname{arsinh}\left(\frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}\right) - \sqrt{l^2+R^2+l^2}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{\mu_0}{\pi}\left(R + l\operatorname{arsinh}\left(\frac{l}{R}\right) + l\operatorname{arsinh}\left(\frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}\right) - \sqrt{R^2+2l^2}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Gesamtimpedanz der Schaltung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z_{\text{ges}}} &= \frac{1}{Z_{\text{R}}} + \frac{1}{Z_{\text{C}}} + \frac{1}{Z_{\text{L}}} \\
&= \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \\
&= \frac{i\omega L + R - \omega^2 LCR}{i\omega LR} \\
\Rightarrow Z_{\text{ges}} &= \frac{i\omega LR}{i\omega L + R - \omega^2 LCR}
\end{aligned}$$

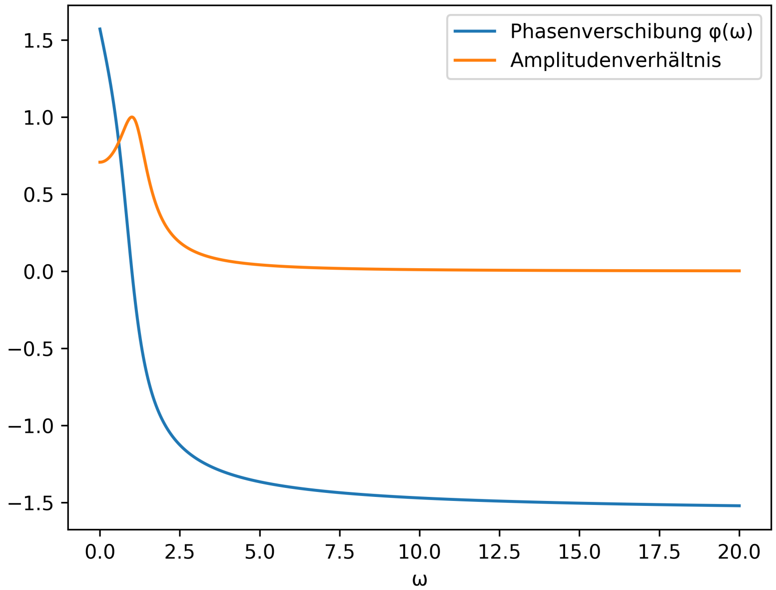
Das Amplitudenverhältnis ist der Betrag der Impedanz:

$$\begin{aligned}
\frac{U_0}{I_0} &= \left| \frac{iR\omega L}{i\omega L + R - \omega^2 LCR} \right| \\
&= \frac{|iR\omega L|}{|i\omega L + R - \omega^2 LCR|} \\
&= \frac{R\omega L}{|i\omega L + R(1 - \omega^2 LC)|} \\
&= \frac{R\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2(1 - \omega^2 LC)^2}} \\
&= \frac{RL}{\sqrt{L^2 + R^2(\frac{1}{\omega} - \omega LC)^2}}
\end{aligned}$$

Die Phasenverschiebung φ ist das Argument von z:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arctan\left(\frac{Im\ Z}{Re\ Z}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{\omega R^2 L(1 - \omega^2 LC)}{R\omega^2 L^2}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{R(1 - \omega^2 LC)}{\omega L}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{R}{L}\left(\frac{1}{\omega} - \omega LC\right)\right)
\end{aligned}$$

b)



c) Die für die maximale Spannung gilt:

$$U_0^{\max} = \max|Z|\ I_0$$

Gesucht wird also ein Maximum von $|Z|$, bilde dazu die Ableitung und setze diese gleich 0:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\omega}|Z(\omega)| &= \frac{d}{d\omega}\frac{RL}{\sqrt{L^2 + R^2\left(\frac{1}{\omega} - \omega LC\right)^2}} \\
&= LR\ \frac{d}{d\omega}\left(L^2 + R^2\left(\frac{1}{\omega} - \omega LC\right)^2\right)^{-0.5} \\
&= LR\ (-0.5)\left(L^2 + R^2\left(\frac{1}{\omega} - \omega LC\right)^2\right)^{-1.5}\ \frac{d}{d\omega}\left(L^2 + R^2\left(\frac{1}{\omega} - \omega LC\right)^2\right) \\
&= LR\ (-0.5)\left(L^2 + R^2\left(\frac{1}{\omega} - \omega LC\right)^2\right)^{-1.5}\ 2R^2\left(\frac{1}{\omega} - \omega LC\right)\cdot\left(-\frac{1}{\omega^2} - LC\right) \\
&= LR^3\ \left(L^2 + R^2\left(\frac{1}{\omega} - \omega LC\right)^2\right)^{-1.5}\left(\frac{1}{\omega} - \omega LC\right)\cdot\left(\frac{1}{\omega^2} + LC\right) \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad L^2 + R^2\left(\frac{1}{\omega} - \omega LC\right)^2 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{\omega} - \omega LC = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{\omega^2} + LC = 0$$

Die linke und rechte Gleichung besitzen keine Lösung, die mittler liefert durch Umstellen

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Der Graph aus b) zeigt uns, dass es sich auch um ein Maximum handelt.
Damit benötigt man für die gegebenen Werte maximal

$$U_0^{\max} = |Z\left(\sqrt{LC}\right)|\ I_0 = R\ I_0 = 10^3 V.$$

Aufgabe 5

(a) Bei der Schaltung handelt es sich um einen Tiefpass.
Bei niedrigen Frequenzen verhält sich die Induktivität wie ein normales Kabel ($Z_L \approx 0$), erst bei hohen Frequenzen muss der Strom mehr gegen die Selbstinduktivität "ankämpfen".

$$V(\omega) = \frac{R_a}{Z_{\text{ges}}} = \frac{R_a}{R + R_a + i\omega L}$$

(b) Bei der Schaltung handelt es sich um einen Hochpass.
Bei niedrigen Frequenzen nähert sich das Verhalten der Schaltung der bei Gleichstrom an, wodurch die Impedanz des Kondensators gegen unendlich geht.

$$V(\omega) = \frac{R_a}{Z_{\text{ges}}} = \frac{R_a}{R + R_a + \frac{1}{i\omega c}}$$

(c) Die Schaltung ist ein Hochpass.
Bei niedrigen Frequenzen würde der meiste Strom nicht durch den Verbraucher, sondern durch die Induktivität laufen. Erst bei höheren Frequenzen steigt die Impedanz der Induktivität und mehr Strom fließt durch den Verbraucher.

$$Z_a = \frac{R_a\ Z_L}{R_a + Z_L} = \frac{R_a\ i\omega L}{R_a + i\omega L} \Rightarrow V(\omega) = \frac{Z_a}{Z_{\text{ges}}} = \frac{R_a\ i\omega L}{R_a + i\omega L} \frac{1}{R + \frac{R_a\ i\omega L}{R_a + i\omega L}} = \frac{\omega L - iR_a}{RR_a\omega L + \omega L - iR_a}$$

(d) Die Schaltung ist ein Tiefpass.
Das Verhalten ist das Umgekehrte zu der bei (c). Hier ist es jedoch so, dass bei niedrigen Frequenzen die Impedanz des Kondensators gegen unendlich geht und bei hohen Frequenzen durchlässig wird. Dadurch fließt bei tiefen Frequenzen viel Strom durch den Verbraucher, bei hohen wenig.

$$Z_a = \frac{R_a}{1 + R_a i\omega C} \Rightarrow V(\omega) = \frac{Z_a}{Z_{\text{ges}}} = \frac{R_a}{1 + R_a i\omega C} \frac{1}{R + \frac{R_a}{1 + R_a i\omega C}} = \frac{R_a}{R + R_a + RR_a i\omega C}$$

(e) Die Schaltung ist ein Bandpass.
Bei hohen Frequenzen "scheitert" der Strom an der Induktivität, bei niedrigen an dem Kondensator.

$$V(\omega) = \frac{Z_a}{Z_{\text{ges}}} = \frac{R_a}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R_a}$$

(f) Die Schaltung ist ein Sperrfilter.
Sehr hohe Frequenzen können einfach durch den Kondensator, niedrige durch die Induktivität. Frequenzen in einem mittleren Frequenzbereich werden jedoch nicht stark durchgelassen.

$$V(\omega) = \frac{Z_a}{Z_{\text{ges}}} = \frac{R_a}{R + \frac{L}{C} \frac{i\omega C}{1 - \omega^2 LC} + R_a}$$