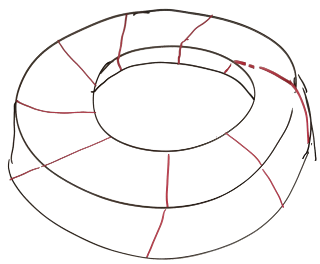
Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

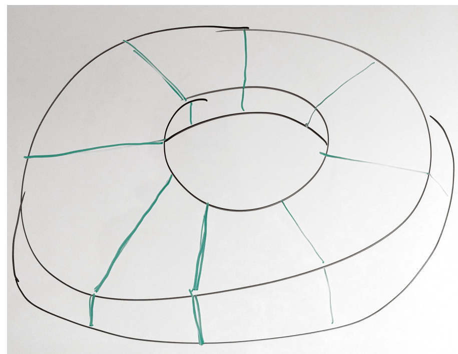
18. Übungsblatt

Aufgabe 1

a)



(a) Nicht idealisierte Toroidspule



(b) Idealisierte Toroidspule

b) Mit der Idealisierung, dass die einzelnen Windungen geschlossene Leiterschleifen darstellen, erhalten wir das Feld im Inneren Bereich der Toroidspule mit dem Ampereschen Gesetz.
Der weg stellt dabei eine Umrundung im Torus dar. Aufgrund der Symmetrie kann das B-Feld als annähernd konstant angenommen werden.
Die Fläche innerhalb dieser Umrundung wird natürlich N mal vom Leiter durchstoßen, d.h. $I_{\text{enc}} = NI$:

$$\begin{aligned}\text{Amperesches Gesetz } \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I_{\text{enc}} \\ \Rightarrow B_i \cdot l &= \mu_0 I_{\text{enc}} \\ &= \mu_0 NI \\ B_i(r) &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\end{aligned}$$

c) Der Magnetische Fluß folgt aus dem Ergebniss aus b):

$$\begin{aligned}\phi &= \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_0^h \int_{R_1}^{R_2} B(r)\ drdz \\ &= h \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} dr \\ &= h \cdot \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Biot-Savar'sches Gesetz:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Zur einfacheren Berechnung teilen wir den Draht in die zwei geraden Segmente (welche aufgrund der Symmetrie das Gleiche Feld am Punkt P besitzen) und in das Halbkreissegment auf.
Zur Verinfachung wird das Koordinatensystem so gelegt, dass der Punkt P im Urspung liegt.
Berechnung des Halbkreissegements:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{HK}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\varphi \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot r' \cdot \delta(z') \cdot \delta(r' - R) \cdot \Theta(\pi - \varphi')\ d\varphi' dz' d\rho' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\vec{e}_\varphi \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3} \cdot R\ d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\rho}{R^2} \cdot R\ d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\vec{e}_z}{R}\ d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0\ I}{4R} \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Die Berechnung des geraden Leiterelements erfolgt mit der Formel für das Magnetfeld des endlichen Leiters, in Abhängigkeit von den Winkeln an den Enden:

$$\begin{aligned}
B_{ger}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0\ I}{4\pi R} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \\
&= \frac{\mu_0\ I}{4\pi R} \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) \\
&= \frac{\mu_0\ I}{4\pi R}
\end{aligned}$$

Das Magnetfeld folgt dann:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_{HK}(\mathbf{r}) + 2\ \mathbf{B}_{ger}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0\ I}{4R}\vec{e}_z + \frac{\mu_0\ I}{2\pi R}\vec{e}_z = \frac{\pi + 2}{4\pi R}\mu_0\ I\ \vec{e}_z$$

Aufgabe 3

Das magnetische Feld kann mit dem Biot-Savart Gesetz ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\varphi \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \delta(R - \rho') \cdot \delta(z') \cdot \rho' \; d\rho' \; dz' \; d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\varphi \times (z \; \vec{e}_z - r' \vec{e}_\rho)}{\left(R^2 + z^2\right)^{1.5}} \cdot R \; d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^{2\pi} \frac{z \; \vec{e}_\rho + R \; \vec{e}_z}{\left(R^2 + z^2\right)^{1.5}} \cdot R \; d\varphi'
\end{aligned}$$

Da sich der Magnetische Dipol auf der z-Achse befindet, verschwindet der $\vec{e}_\rho$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \; \vec{e}_z}{\left(R^2 + z^2\right)^{1.5}} \; d\varphi' \\
&= \frac{\mu_0 \; I}{2} \frac{R^2 \; \vec{e}_z}{\left(R^2 + z^2\right)^{1.5}}
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Kraft auf ein magnetisches Dipol m:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= m_z \; \partial_z B_z \; \vec{e}_z \\
&= m_z \; \frac{R^2 \; \mu_0 \; I}{2} \; \partial_z \left(R^2 + z^2\right)^{-1.5} \vec{e}_z \\
&= m_z \; \frac{R^2 \; \mu_0 \; I}{2} \; (-1.5) \left(R^2 + z^2\right)^{-2.5} \cdot 2z \; \vec{e}_z \\
&= \frac{-1.5z \cdot m_z \; R^2 \; \mu_0 \; I}{(R^2 + z^2)^{2.5}} \; \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Für kleine Auslenkungen, also $z \ll R$ vereinfacht sich die Kraft:

$$\begin{aligned}
z \ll R \Rightarrow R^2 + z^2 \approx R^2 \Rightarrow \mathbf{F} &= \frac{-1.5z \cdot m_z \; R^2 \; \mu_0 \; I}{R^5} \; \vec{e}_z \\
&= \frac{-1.5z \cdot m_z \; \mu_0 \; I}{R^3} \; \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Schreibt man diesen Ausdruck als Differentialgleichung erhalten wir den harmonischen Oszillator:

$$F_z = M\ddot{z} = \frac{-1.5z \cdot m_z \; \mu_0 \; I}{R^3} \Rightarrow \ddot{z} + \underbrace{\frac{1.5 \cdot m_z \; \mu_0 \; I}{M \cdot R^3}}_{\omega^2} \; z = 0$$

Mit der uns schon bekannten Lösung:

$$z(t) = z(0) \cos(\omega t) + \dot{z}(0) \sin(\omega t)$$

Aufgabe 4

$$\vec{B}(\vec{r}) = B\vec{e}_z,\ B = const. \tag{4.1}$$

a) gesucht sei ein $\vec{A}$, sodass

$$\text{rot}\vec{A} = \vec{B}$$

Mit dem Ansatz

$$\vec{A} = M \cdot \vec{r}, \quad \vec{r} = (x, y, z)^T,\ M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

sind die Einträge von M die partiellen Ableitungen von $\vec{A}$:

$$M_{ij} = \partial_j A_i \tag{4.2}$$

Aus der Vorraussetzung rot$\vec{A} = \vec{B}$ folgen die Bedinungen für M:

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} M_{3,2} - M_{2,3} \\ M_{1,3} - M_{3,1} \\ M_{2,1} - M_{1,2} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ M_{3,2} = M_{2,3},\ M_{1,3} = M_{3,1},\ M_{2,1} = M_{1,2} + B \tag{4.3}$$

Daraus folgt dann die Matrix M (mit den Freiheitsgraden α, ...):

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta + B & \delta & \epsilon \\ \gamma & \epsilon & \zeta \end{pmatrix}$$

Das einfachste Vektorfeld für $\vec{A}$ wäre das wo alle Freiheitsgrade auf 0 gesetzt werden:

$$\vec{A}_0 = M_0 \cdot \vec{r} = M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) A_1 und A_2 seien zwei linear unabhängige Lösungen von (4.1). Dann lässt sich für eine Linearkombination

$$\vec{A}' = \alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2 \quad (\text{mit } \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$$

zeigen:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A}' &= \vec{\nabla} \times \left(\alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2\right) \\
&= \vec{\nabla} \times (\alpha_1 M_1 \cdot \vec{r} + \alpha_2 M_2 \cdot \vec{r}) \\
&= \vec{\nabla} \times ((\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) \cdot \vec{r}) \\
&= \vec{\nabla} \times \left(\sum_{ij} x_i (\alpha_1\ M_{1,ij} + \alpha_2\ M_{2,ij}) \right) \\
&= \sum_{mnij} \epsilon_{mni}\ \underbrace{\partial_{x_n} x_i (\alpha_1\ M_{1,ij} + \alpha_2\ M_{2,ij})}_{(4.2)\Rightarrow\ =\alpha_1 M_{1,in} + \alpha_2 M_{2,in}} \cdot \hat{x}_m \\
&= \sum_{mni} \epsilon_{mni}\ (\alpha_1 M_{1,in} + \alpha_2 M_{2,in}) \cdot \hat{x}_m \\
(4.3) \Rightarrow\ &= \sum_{ni} \epsilon_{3ni}\ (\alpha_1 M_{1,in} + \alpha_2 M_{2,in}) \cdot \hat{x}_3 \\
&= (\alpha_1 (M_{1,21} - M_{1,12}) + \alpha_2 (M_{2,21} - M_{2,12}))\, \vec{e}_z \\
(4.3) \Rightarrow\ &= (\alpha_1 B + \alpha_2 B)\, \vec{e}_z \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2)\, B\vec{e}_z \\
&= B\vec{e}_z
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A}'' &= \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\phi) \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi)}_{=0} \\ &= \vec{B}\end{aligned}$$

d) Die Differenz lässt sich auch umschreiben:

$$\vec{A}' - \vec{A} = M' \cdot \vec{r} - M \cot r = (M' - M) \cdot r$$

Für diese Differenzmatrix $D := M' - M$ können wir bestimmen:

$$D_{21} = M'_{21} - M_{21} = M'_{12} + B - M_{12} - B = M'_{12} - M_{12}$$

da sich die Differenz bei M_{21} und M_{12} jetzt auslöscht, kann man für die Differenzmatrix $D := M' - M$ schreiben:

$$D_{ij} = D_{ji} \text{ für alle } j, i.$$

Damit extistiert ein "Differenzfeld":

$$\vec{d} := D \cdot r = \begin{pmatrix} D_{11} \cdot x + D_{12} \cdot y + D_{13} \cdot z \\ D_{12} \cdot x + D_{22} \cdot y + D_{23} \cdot z \\ D_{13} \cdot x + D_{23} \cdot y + D_{33} \cdot z \end{pmatrix}$$

Zu diesem Feld existiert immer ein Potential U:

$$\begin{aligned} U &= \int d_x \; dx = \frac{D_{11}}{2} \cdot x^2 + D_{12} \cdot yx + D_{13} \cdot zx + C_1 \\ U &= \int d_y \; dy = D_{12} \cdot xy + \frac{D_{22}}{2} \cdot y^2 + D_{23} \cdot zy + C_2 \\ U &= \int d_z \; dz = D_{13} \cdot xz + D_{23} \cdot yz + \frac{D_{33}}{2} \cdot z^2 + C_3 \\ \Rightarrow U &= \frac{D_{11}}{2} \cdot x^2 + \frac{D_{22}}{2} \cdot y^2 + \frac{D_{33}}{2} \cdot z^2 + D_{12} \cdot yx + D_{13} \cdot zx + D_{23} \cdot yz \end{aligned}$$

e) Die Eichfreiheit beim Vektorpotential gibt Möglichkeiten für Randbedinungen beim berechnen.

Ich beim Kreuzprodukt ausrechnen

Aufgabe 5

Wir können die geknickte Fläche aufteilen in zwei flache Leiterschleifen, wo das Dipolmoment gegeben ist durch

$$\vec{m} = I \cdot A \cdot \hat{n}.$$

Das kombinierte Dipolmoment entspricht dann der vektoriellen Summe

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 = Iw^2\vec{e}_z + Iw^2\vec{e}_z$$

Entlang der x-Achse verlaufen die zwei Ströme gegenläufig, sodass der Gesamtstrom an der Stelle 0 ist (ensprechend der Randbedingung).

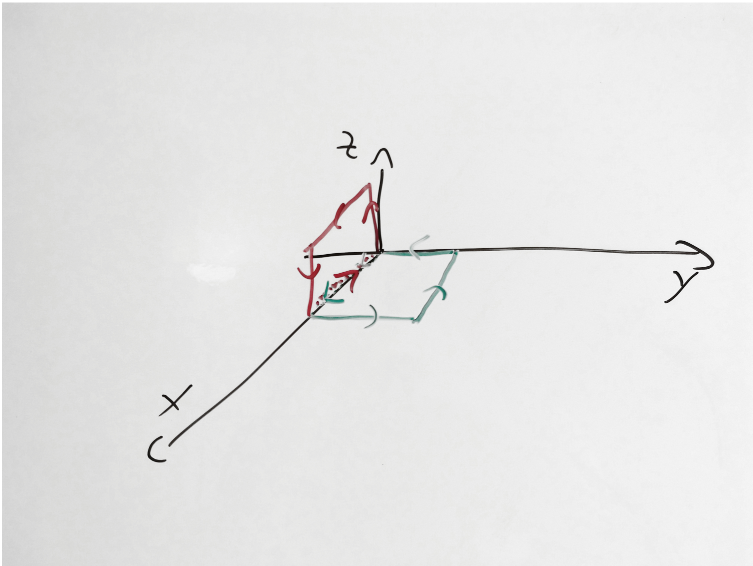


Figure 2: Aufteilung in zwei Schleifen