Etem Kalyon
Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Blatt 14

1) $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot 10^{-10}\,m$ $\quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot 10^{-10}\,m$

a) Richtung: $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 10^{-10}\,m$

$$\vec{F}_g = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r}_{12} = \gamma \cdot \frac{1{,}672 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot 9.109 \cdot 10^{-31}\,kg}{\left(\sqrt{(1 \cdot 10^{-10})^2 + (8 \cdot 10^{-10})^2 + (4 \cdot 10^{-10})^2}\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{F}_g| = 1.25489 \cdot 10^{-46}\,N$$

$$|\vec{F}_C| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = 2.8477 \cdot 10^{-10}\,N$$

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{2.8477 \cdot 10^{-10}\,N}{1{,}25489 \cdot 10^{-46}\,N} = 2.269 \cdot 10^{36}$$

Das Verhältnis bleibt gleich, da beide Kräfte $\sim$ zu $\frac{1}{r^2}$ abnehmen

Aufgabe 2

2) a) $E = \frac{F}{q}$ $\qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$ $\qquad$ da $E = \frac{Q}{\varepsilon}$ & $A = 4\pi r^2$

$$\Rightarrow Q = E \cdot 4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2 = 677203{,}99\ \mathrm{C}$$

b) ~~$\sigma = \frac{Q}{A}$~~ $\qquad$ ~~$Q = E \cdot 4\pi\varepsilon_0$~~

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{677204\ \mathrm{C}}{4\pi \cdot (6370000\ \mathrm{m})^2} = 1{,}328 \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

c) Vertikal nach unten gerichtet : → Erde ist negativ geladen

Kugel hat Ladung $+100\,\mu\mathrm{C}$ → müsste sehr schnell fallen

$$a_c = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2}}{m} = 0{.}149\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$s = \frac{1}{2} a t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$

Kugel ohne Ladung: $t = \sqrt{\frac{4}{9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0.63855\ \mathrm{s}$

mit Ladung : $t = \sqrt{\frac{4}{9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 0.149\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0.6337246\ \mathrm{s}$

$$\Rightarrow \Delta t = 4.8254 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}$$

Aufgabe 3

Die Coulomb- und die Gewichtskraft sind definiert als:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad F_G = m * g$$

Wir definieren $q_3 = \frac{q_1+q_2}{2}$, die Ladung beider Kugeln nach dem Ladungsausgleich. Aus den trigonometrischen Identitäten folgt das Verhältniss von F_C und F_G:

$$\tan\theta = \frac{F_C}{F_G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{mg\cdot r^2}$$

Für θ_2 lässt sich die das Verhältniss von q_1 und q_2 herleiten:

$$\begin{aligned}
\tan\theta_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3^2}{mg\cdot r_2^2}\\
\Leftrightarrow q_3^2 &= \tan\theta_2 \cdot mgr_2^2 * 4\pi\epsilon_0\\
\Leftrightarrow q_3 = \frac{q_1+q_2}{2} &= \sqrt{\tan\theta_2 \cdot mgr_2^2 * 4\pi\epsilon_0}\\
\Leftrightarrow q_1 &= \sqrt{\tan\theta_2 \cdot mgr_2^2 * 16\pi\epsilon_0} - q_2
\end{aligned}$$

Aus θ_1 folgt zuletzt:

$$\begin{aligned}
\tan\theta_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{mg\cdot r_1^2}\\
\tan\theta_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(\sqrt{\tan\theta_2 \cdot mgr_2^2 * 16\pi\epsilon_0} - q_2\right) q_2}{mg\cdot r_1^2}\\
0 &= q_2^2 - q_2\sqrt{\tan\theta_2 \cdot mgr_2^2 * 16\pi\epsilon_0} + \tan\theta_1 * 4\pi\epsilon_0 * mgr_1^2
\end{aligned}$$

4) a) $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$

$E(r) \cdot 4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2 = Q$

$\Rightarrow 3 \cdot 10^6 \frac{V}{m} \cdot 4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 0{,}2^2 m = 1.335 \cdot 10^{-5} C$

b) E-Feld breitet sich nun noch in eine Ebene aus

: $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{E}$

$\Leftrightarrow r = 2.996 \text{ m}$

Aufgabe 5

a) Nabla in Kugelkoordinaten:

$$\nabla = \hat{e}_r \cdot \partial_r + \hat{e}_\theta \cdot \frac{1}{r}\partial_\theta + \hat{e}_\phi \cdot \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi$$

Die Divergenz eines Radialfeldes $\vec{E}(\vec{r}) = \alpha r^\beta \hat{e}_r$ lautet dadurch:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \left(\hat{e}_r\partial_r + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \hat{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\right) \cdot \alpha r^\beta \hat{e}_r \\
&= \left(\hat{e}_r * \partial_r(\alpha r^\beta \hat{e}_r) + \hat{e}_\theta * \frac{1}{r}\partial_\theta(\alpha r^\beta \hat{e}_r) + \hat{e}_\phi * \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi(\alpha r^\beta \hat{e}_r)\right) \\
&= \left(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r \cdot \alpha\beta r^{\beta-1} + \frac{1}{r} \cdot \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta \alpha r^\beta + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi \cdot \alpha r^\beta\right) \\
&= \left(\alpha\beta r^{\beta-1} + \frac{1}{r}\alpha r^\beta + \frac{1}{r\sin\theta}\alpha r^\beta\right) \\
&= \left(\alpha\beta r^{\beta-1} + \alpha r^{\beta-1} + \alpha r^{\beta-1}\right) \\
&= \alpha(\beta+2)r^{\beta-1}
\end{aligned}$$

Da $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 1$ für alle r erfüllt sein soll, muss die Gleichung unabhängig von r sein:

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta+2)r^{\beta-1} &\stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \beta = 1 \text{ damit Gleichung unabhängig von r ist} \\
\Leftrightarrow \alpha * 3 &= 1 \\
\Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{3} \\
\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{3} r \hat{e}_r
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
V_{Kugel} &= \iiint dV = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \stackrel{\text{Satz v. Gauß}}{=} \iint \vec{E}(\vec{r}) dA \\
&= \iint \frac{1}{3} R \hat{e}_r dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R}{3}\ \hat{e}_r \cdot \hat{n} * R^2 \sin\theta\ d\theta d\varphi \\
&= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta d\varphi \\
&= \frac{R^2}{3} * 4\pi \\
&= \frac{4}{3} * \pi * R^3
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y^3 \\ x^2 \\ z \end{pmatrix}$$

Das Linienintegral in den Teil entlang der x-Achse r_1 und entlang der Kreislinie r_2 aufteilt werden. Die Parametrisierung lautet dann:

$$r_1 = R * \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1] \qquad r_2 = \overline{\gamma}(t) = R * \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi]$$

Daraus folgt dann das Linienintegral:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} &= \int_{r_1} \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_1 + \int_{r_2} \vec{F}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_2 \\
&= \int_{-1}^{1} \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} dt + \int_0^{\pi} \vec{F}(\vec{r}_2) \cdot \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} dt \\
&= \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 0 \\ (R * t)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} R^3 * \sin^3(t) \\ R^2 * \cos^2(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R * \sin(t) \\ R * \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_{-1}^{1} 0 \; dt + \int_0^{\pi} \left(-R^4 * \sin^4(t) + R^3 * \cos^3(t)\right) dt \\
&= -R^4 \int_0^{\pi} \sin^4(t) dt + R^3 \underbrace{\int_0^{\pi} \cos^3(t) dt}_{=0} \\
&= -R^4 \int_0^{\pi} \sin^4(t) dt = -R^4 * \pi * \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Das Flächen-Integral kann ueber eine Umformung in Zylinderkoodinaten vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
\iint_A \vec{\nabla} \times \vec{F} d\vec{A} &= \iint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_z \; dA \\
&= \iint_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x - 3y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA \\
&= \iint_A \left(2x - 3y^2\right) dA \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{R} \left(2 * \rho * \cos\varphi - 3 * (\rho \sin\varphi)^2\right) * \rho \; d\rho d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{3} R^3 \cos\varphi - \frac{3}{4} R^4 \sin^2\varphi\right) d\varphi \\
&= \underbrace{\int_0^{\pi} \left(\frac{2}{3} R^3 \cos\varphi\right) d\varphi}_{=0} - \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4} R^4 \sin^2\varphi\right) d\varphi \\
&= -R^4 \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi = -R^4 * \pi * \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Die Lösung der Integrale über $\sin^n(t)$ folgt aus der Redduktionsformel.