Etem Kalyon
Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Aufgabe 2

(a) Das Gaußsche Gesetz besagt:

$$\int \vec{E}\; d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Da $\vec{E}$ unabhängig vom Ort auf der Fläche A ist und parallel zum Normalenvektor liegt, kann der Betrag von $\vec{E}$ aus dem Integral gezogen werden.
$\vec{E}$ und $\hat{n}$ zeigen jedoch in verschiedene Richtungen; $\hat{n}$ von der Erde weg, das elektrische Feld richtung Erde. Daher entsteht ein negatives Vorzeichen.
Die Flächenladungsdichte σ lautet somit:

$$\int \vec{E}\; d\vec{A} = -|\vec{E}| \int d\vec{A} = -|\vec{E}| * A = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow \sigma = \frac{Q}{A} = -E * \epsilon_0 \approx -1.33 * 10^{-9} \frac{Q}{m^2}$$

(b) Wenn man die Ladungsdichte σ aus (a) mit der Fläche A multipliziert erhält man die Gesamtladung:

$$Q_{Gesamt} = \sigma * A = -EA\epsilon_0 = -\epsilon_0 * E * 4\pi r_E^2 \approx -6.77 * 10^5 C$$

(c) Die Kraft die auf eine Kugel wirkt ist die Summe aus Gewichtskraft und Coulomkraft. Aus dem zweiten newtonschen Axiom folgt dann die Beschleunigung.

$$F_{Gesamt} = F_G + F_{Co} = mg + E * q_{Kugel} \Rightarrow a = g + \frac{E * q_{Kugel}}{m}$$

Aus der Formel für den freien Fall können wir die benötigten Zeiten für den Fall bestimmen:

$$\Delta h = \frac{1}{2} a * (\Delta t)^2$$
$$\Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2 * \Delta h}{a}}$$

$$\Delta t_{ungeladen} = \sqrt{\frac{2 * \Delta h}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 2m}{10m/s^2}} \approx 0.6325s$$

$$\Delta t_{geladen} = \sqrt{\frac{2 * \Delta h}{g + \frac{E * q_{Kugel}}{m}}} = \sqrt{\frac{4m}{10m/s^2 + \frac{150N/C * 100\mu C}{0.1Kg}}} = \sqrt{\frac{4m}{10m/s^2 + 0.15m/s^2}} \approx 0.6278s$$

Die geladene Kugel erreicht die Erde ungefähr $0.0047s$ schneller als die Ungeladene.

Aufgabe 3

Die Coulomb- und die Gewichtskraft sind definiert als:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad F_G = m * g$$

Wir definieren $q_3 = \frac{q_1+q_2}{2}$, die Ladung beider Kugeln nach dem Ladungsausgleich. Aus den trigonometrischen Identitäten folgt das Verhältniss von F_C und F_G:

$$\tan\theta = \frac{F_C}{F_G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{mg \cdot r^2}$$

Für θ_2 lässt sich die das Verhältniss von q_1 und q_2 herleiten:

$$\begin{aligned}
\tan\theta_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3^2}{mg \cdot r_2^2} \\
\Leftrightarrow q_3^2 &= \tan\theta_2 \cdot mgr_2^2 * 4\pi\epsilon_0 \\
\Leftrightarrow q_3 = \frac{q_1+q_2}{2} &= \sqrt{\tan\theta_2 \cdot mgr_2^2 * 4\pi\epsilon_0} \\
\Leftrightarrow q_1 &= \sqrt{\tan\theta_2 \cdot mgr_2^2 * 16\pi\epsilon_0} - q_2
\end{aligned}$$

Aus θ_1 folgt zuletzt:

$$\begin{aligned}
\tan\theta_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{mg \cdot r_1^2} \\
\tan\theta_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(\sqrt{\tan\theta_2 \cdot mgr_2^2 * 16\pi\epsilon_0} - q_2\right) q_2}{mg \cdot r_1^2} \\
0 &= q_2^2 - q_2\sqrt{\tan\theta_2 \cdot mgr_2^2 * 16\pi\epsilon_0} + \tan\theta_1 * 4\pi\epsilon_0 * mgr_1^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Für $\vec{E} = 3 * 10^6 \frac{V}{m}$ folgt aus dem Gaußschem Gesetz:

$$\begin{aligned}
\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\
\Leftrightarrow Q_{max} &= \epsilon_0 * \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \\
\Leftrightarrow Q_{max} &= \epsilon_0 * E * A_{Kugel} \\
\Leftrightarrow Q_{max} &= \epsilon_0 * E * 4\pi * R_{Kugel}^2 =
\end{aligned}$$

b) Das E-Feld einer Linienladung mit Ladungsdichte λ, für $r \ll l$:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}\hat{r}$$

Durch umstellen erhalten wir den Radius der ionisierten Luft (der Bereich wo $E \geq 3 * 10^6 \frac{V}{m}$:

$$r_{max} = \frac{\lambda}{E * 2\pi\epsilon_0} = \frac{10^3 \frac{C}{m}}{3 * 10^6 \frac{V}{m} * 2\pi\epsilon_0} \approx 5.99m$$

Aufgabe 5

a) Nabla in Kugelkoordinaten:

$$\nabla = \hat{e}_r \cdot \partial_r + \hat{e}_\theta \cdot \frac{1}{r}\partial_\theta + \hat{e}_\phi \cdot \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi$$

Die Divergenz eines Radialfeldes $\vec{E}(\vec{r}) = \alpha r^\beta \hat{e}_r$ lautet dadurch:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \left(\hat{e}_r\partial_r + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\partial_\theta + \hat{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\right) \cdot \alpha r^\beta \hat{e}_r \\
&= \left(\hat{e}_r * \partial_r(\alpha r^\beta \hat{e}_r) + \hat{e}_\theta * \frac{1}{r}\partial_\theta(\alpha r^\beta \hat{e}_r) + \hat{e}_\phi * \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi(\alpha r^\beta \hat{e}_r)\right) \\
&= \left(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r \cdot \alpha\beta r^{\beta-1} + \frac{1}{r} \cdot \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta \alpha r^\beta + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi \cdot \alpha r^\beta\right) \\
&= \left(\alpha\beta r^{\beta-1} + \frac{1}{r}\alpha r^\beta + \frac{1}{r\sin\theta}\alpha r^\beta\right) \\
&= \left(\alpha\beta r^{\beta-1} + \alpha r^{\beta-1} + \alpha r^{\beta-1}\right) \\
&= \alpha(\beta+2)r^{\beta-1}
\end{aligned}$$

Da $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 1$ für alle r erfüllt sein soll, muss die Gleichung unabhängig von r sein:

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta+2)r^{\beta-1} &\overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \beta = 1 \text{ damit Gleichung unabhängig von r ist} \\
\Leftrightarrow \alpha * 3 &= 1 \\
\Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{3} \\
\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{3} r \hat{e}_r
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
V_{Kugel} &= \iiint dV = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \overset{\text{Satz v. Gauß}}{=} \iint \vec{E}(\vec{r}) dA \\
&= \iint \frac{1}{3} R \hat{e}_r dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R}{3}\ \hat{e}_r \cdot \hat{n} * R^2 \sin\theta\ d\theta d\varphi \\
&= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta d\varphi \\
&= \frac{R^2}{3} * 4\pi \\
&= \frac{4}{3} * \pi * R^3
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y^3 \\ x^2 \\ z \end{pmatrix}$$

Das Linienintegral in den Teil entlang der x-Achse r_1 und entlang der Kreislinie r_2 aufteilt werden. Die Parametrisierung lautet dann:

$$r_1 = R * \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1] \qquad r_2 = \overline{\gamma}(t) = R * \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi]$$

Daraus folgt dann das Linienintegral:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} &= \int_{r_1} \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_1 + \int_{r_2} \vec{F}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_2 \\
&= \int_{-1}^{1} \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} dt + \int_0^{\pi} \vec{F}(\vec{r}_2) \cdot \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} dt \\
&= \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 0 \\ (R * t)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} R^3 * \sin^3(t) \\ R^2 * \cos^2(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R * \sin(t) \\ R * \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_{-1}^{1} 0 \; dt + \int_0^{\pi} \left(-R^4 * \sin^4(t) + R^3 * \cos^3(t) \right) dt \\
&= -R^4 \int_0^{\pi} \sin^4(t) dt + R^3 \underbrace{\int_0^{\pi} \cos^3(t) dt}_{=0} \\
&= -R^4 \int_0^{\pi} \sin^4(t) dt = -R^4 * \pi * \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Das Flächen-Integral kann ueber eine Umformung in Zylinderkoodinaten vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
\iint_A \vec{\nabla} \times \vec{F} d\vec{A} &= \iint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right) \cdot \vec{e}_z \; dA \\
&= \iint_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x - 3y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA \\
&= \iint_A \left(2x - 3y^2 \right) dA \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{R} \left(2 * \rho * \cos\varphi - 3 * (\rho \sin\varphi)^2 \right) * \rho \; d\rho d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{3} R^3 \cos\varphi - \frac{3}{4} R^4 \sin^2\varphi \right) d\varphi \\
&= \underbrace{\int_0^{\pi} \left(\frac{2}{3} R^3 \cos\varphi \right) d\varphi}_{=0} - \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4} R^4 \sin^2\varphi \right) d\varphi \\
&= -R^4 \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi = -R^4 * \pi * \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Die Lösung der Integrale über $\sin^n(t)$ folgt aus der Redduktionsformel.