Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

22. Übungsblatt

Aufgabe 1

a)

Aufgabe 2

a) Das Dipolmoment und seine Ableiutungen lauten:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \qquad \dot{\vec{p}}(t) = -i\omega\ \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \qquad \ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2\ \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$$

Dann lässt sich für die Divergenz des Vektorpotentials zeigen:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \\
&= \vec{\nabla} \cdot \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi r} \vec{p}_0 \exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right) \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{p}_0 \frac{\exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r} \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{p}_0}_{=0} + \vec{p}_0 \cdot \vec{\nabla} \frac{\exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r} \right) \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi} \left(\vec{p}_0 \cdot \vec{\nabla} \frac{\exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r} \right) \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\ \vec{e}_r \cdot \vec{p}_0 \cdot \partial_r \frac{\exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r} \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\ \vec{e}_r \cdot \vec{p}_0 \cdot \frac{r \frac{i\omega}{c} \exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right) - \exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r^2} \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\ \vec{r} \cdot \left(\frac{\vec{p}_0 i\omega \exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{cr^2} - \frac{\vec{p}_0 \exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r^3} \right) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\ \vec{r} \cdot \left(\underbrace{\frac{-\omega^2 \vec{p}_0 \exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{cr^2}}_{\frac{\ddot{\vec{p}}(t-r/c)}{cr^2}} - \underbrace{\frac{i\omega\vec{p}_0 \exp\left(i\omega \frac{r}{c} - i\omega t \right)}{r^3}}_{-\frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{r^3}} \right) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\ \vec{r} \cdot \left(\frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} \right) \\
&= -\frac{\mu_0\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0}\ \vec{r} \cdot \left(\frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} \right) \\
&= -\frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \vec{r} \cdot \left(\frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} \right) \\
&\stackrel{!}{=} -\frac{1}{c^2} \dot{\phi}(\vec{r}, t) \\
\Rightarrow\ \dot{\phi}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \vec{r} \cdot \left(\frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} \right) \\
\Rightarrow\ \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \vec{r} \cdot \left(\frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} + \frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} \right) + const.
\end{aligned}$$