Matthias Maile
Roman Surma

Physik II - Gruppe 2
Sommersemester 2020

22. Übungsblatt

Aufgabe 1

a)
c)

$$\begin{aligned}
\Box E(x,t) &= \Box E_0 \int_{\mathbb{R}} F(k) e^{i(\omega t - kx)}\ dk \\
&= \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) E_0 \int_{\mathbb{R}} F(k) e^{i(\omega t - kx)}\ dk \\
&= \left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) E_0 \int_{\mathbb{R}} F(k) e^{i(\omega t - kx)}\ dk \\
&= E_0 \int_{\mathbb{R}} F(k) \left(\partial_x^2 e^{i(\omega t - kx)} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 e^{i(\omega t - kx)}\right)\ dk \\
&= E_0 \int_{\mathbb{R}} F(k) e^{i(\omega t - kx)} \left(-k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2\right)\ dk \\
c = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad &= E_0 \int_{\mathbb{R}} F(k) e^{i(\omega t - kx)} \left(-k^2 + \frac{k^2}{\omega^2}\omega^2\right)\ dk \\
&= E_0 \int_{\mathbb{R}} F(k) e^{i(\omega t - kx)} (k^2 - k^2)\ dk \\
&= E_0 \int_{\mathbb{R}} 0\ dk \\
&= 0
\end{aligned}$$

d) Mit der Definiton des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

lässt sich zeigen, dass Kugelwellen eine Lösung der Wellengleichung darstellen:

$$\begin{aligned}
\Box \vec{E}(r,t) &= \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\left(\frac{1}{r}\vec{f}(r \pm ct)\right) \\
&= \Delta\left(\frac{1}{r}\vec{f}(r \pm ct)\right) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\left(\frac{1}{r}\vec{f}(r \pm ct)\right) \\
&= \Delta\left(\frac{1}{r}\vec{f}(r \pm ct)\right) \mp \frac{1}{rc}\partial_t\left(\dot{\vec{f}}(r \pm ct)\right) \\
&= \Delta\left(\frac{1}{r}\vec{f}(r \pm ct)\right) - \frac{1}{r}\ddot{\vec{f}}(r \pm ct) \\
&= \frac{1}{r}\partial_r^2\left(\vec{f}(r \pm ct)\right) - \frac{1}{r}\ddot{\vec{f}}(r \pm ct) \\
&= \frac{1}{r}\ddot{\vec{f}}(r \pm ct) - \frac{1}{r}\ddot{\vec{f}}(r \pm ct) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Das Dipolmoment und seine Ableiutungen lauten:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \qquad \dot{\vec{p}}(t) = -i\omega\ \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \qquad \ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2\ \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \qquad \text{mit } \vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_z$$

Dann lässt sich für die Divergenz des Vektorpotentials zeigen:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) &= \vec{\nabla}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \\
&= \vec{\nabla}\cdot\frac{-i\omega\mu_0}{4\pi r}\vec{p}_0 \exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right) \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{p}_0\frac{\exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right)}{r} \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\ \left(\frac{\exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right)}{r}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{p}_0}_{=0}+\vec{p}_0\cdot\vec{\nabla}\frac{\exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right)}{r}\right) \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\ \left(\vec{p}_0\cdot\vec{\nabla}\frac{\exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right)}{r}\right) \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\ \vec{e}_r\cdot\vec{p}_0\cdot\partial_r\frac{\exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right)}{r} \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\ \vec{e}_r\cdot\vec{p}_0\cdot\frac{r\frac{i\omega}{c}\exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right)-\exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right)}{r^2} \\
&= \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\ \vec{r}\cdot\left(\frac{\vec{p}_0 i\omega\exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right)}{cr^2}-\frac{\vec{p}_0\exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right)}{r^3}\right) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\ \vec{r}\cdot\left(\underbrace{\frac{-\omega^2\vec{p}_0\exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right)}{cr^2}}_{\frac{\ddot{\vec{p}}(t-r/c)}{cr^2}}-\underbrace{\frac{i\omega\vec{p}_0\exp\left(i\omega\frac{r}{c}-i\omega t\right)}{r^3}}_{-\frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{r^3}}\right) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\ \vec{r}\cdot\left(\frac{\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}+\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}\right) \\
&= -\frac{\mu_0\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0}\ \vec{r}\cdot\left(\frac{\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}+\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}\right) \\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \vec{r}\cdot\left(\frac{\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}+\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}\right) \\
&\overset{!}{=} -\frac{1}{c^2}\dot{\phi}(\vec{r},t) \\
\Rightarrow\ \dot{\phi}(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \vec{r}\cdot\left(\frac{\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}+\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}\right) \\
\Rightarrow\ \phi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \vec{r}\cdot\left(\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}+\frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}\right)+const.
\end{aligned}$$

b) Das $\vec{E}$-Feld in der Elektrodynamik ist gegeben durch

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$$

Die zeitliche Ableitung von $\vec{A}$ lautet

$$\partial_t A = \partial_t \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{-\omega^2\mu_0}{4\pi r}\vec{p}_0 \exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right)$$

aus $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ folgt, dass

$$\partial_t A = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^2}{c^2 r}\vec{p}_0 \exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right) \tag{2.1}$$

Für $\vec{\nabla}\phi$ lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\phi &= \vec{\nabla}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \vec{r}\cdot\left(\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2} + \frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}\right) \\
&= \vec{\nabla}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \underbrace{(\vec{e}_r\cdot\vec{p}_0)}_{p_0\cos\theta}\ \underbrace{\left(\frac{\exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right)}{r^2} - \frac{i\omega\exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right)}{cr}\right)}_{\alpha:=} \\
&= \vec{\nabla}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ p_0\cos\theta\cdot\alpha \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\vec{e}_r\partial_r\left(p_0\cos\theta\cdot\alpha\right) + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta\left(p_0\cos\theta\cdot\alpha\right) + \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}\underbrace{\partial_\phi\left(p_0\cos\theta\cdot\alpha\right)}_{0}\right) \\
&= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\vec{e}_r\cdot\cos\theta\cdot\partial_r\alpha + \frac{\vec{e}_\theta\cdot\alpha}{r}\partial_\theta\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

Die Nebenrechnung für $\partial_r\alpha$:

$$\begin{aligned}
\partial_r\alpha &= \partial_r\left(\exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right)\cdot\left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\omega}{cr}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right)\cdot\left(\frac{2i\omega}{cr^2} + \frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{2}{r^3}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0}\exp(\ldots)\left(\vec{e}_r\cdot\cos\theta\cdot\left(\frac{2i\omega}{cr^2} + \frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{2}{r^3}\right) + \vec{e}_\theta\cdot\sin\theta\cdot\left(\frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{cr^2}\right)\right)$$

Mit der Eigenschaft $\vec{e}_z = \vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta$ lässt sich der Ausdruck (2.1) für $\partial_t\vec{A}$ umschreiben:

$$\begin{aligned}
\partial_t\vec{A} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{\omega^2}{c^2 r}\ \vec{p}_0\exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{\omega^2}{c^2 r}\ p_0\cdot\vec{e}_z\exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right) \\
&= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0}\ \exp(\ldots)\ \frac{\omega^2}{c^2 r}\left(\vec{e}_\theta\sin\theta - \vec{e}_r\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

Dann lauten die Kompenenten des $\vec{E}$-Feldes:

$$\begin{aligned}
E_r &= -\left(\vec{\nabla}\phi\right)_r - \left(\partial_t \vec{A}\right)_r \\
&= -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right) \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{2i\omega}{cr^2} + \frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{2}{r^3} - \frac{\omega^2}{c^2 r}\right) \\
&= \frac{p_0}{2\pi\epsilon_0} \exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right) \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{cr^2}\right) \\
E_\theta &= -\left(\vec{\nabla}\phi\right)_\theta - \left(\partial_t \vec{A}\right)_\theta \\
&= -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \exp\left(\frac{i\omega r}{c} - i\omega t\right) \cdot \sin\theta \cdot \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{i\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3}\right)
\end{aligned}$$