PGR - Vertex Shader transformace

Tomáš Milet

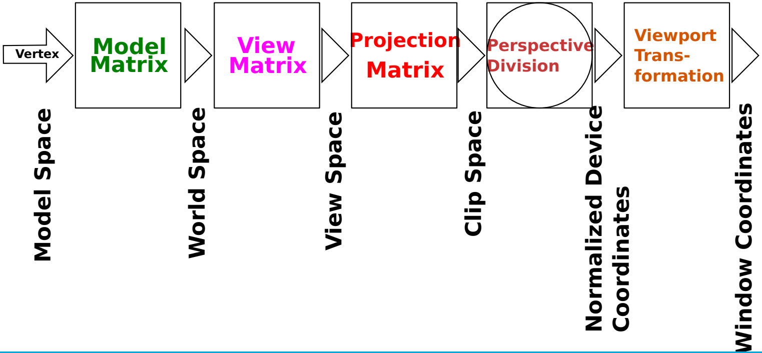
Brno University of Technology, Faculty of Information Technology
Božetěchova 1/2. 612 66 Brno - Královo Pole

imilet@fit.vutbr.cz

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

14. října 2021

- Model je namodelovaný v tzn. model space prostoru
- Vrcholy modelu se po vynásobení modelovou maticí přesunou do world space prostoru - prostoru scény
- Celá scéna se poté transformuje pomocí view matice tak, aby to simulovalo pohled z kamery
- Následuje projekce do clip space pomocí projekční matice
- Výstup vertex shaderu by měl být v clip space



Vektorový prostor

Vektorový prostor

Vektory $\mathbf{v}(V, +, -)$

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$$

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$

Skaláry $a(S, +, -, *, ^{-1})$

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

$$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$

Vektorový prostor

$$\text{Vektory } \mathbf{v}(V, +, -) \qquad \text{Skaláry } a(S, +, -, *, ^{-1})$$

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v} \qquad 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v} \qquad (a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$

Lineární kombinace

Vektorový prostor

$$\text{Vektory } \mathbf{v}(V, +, -) \qquad \text{Skaláry } a(S, +, -, *, ^{-1})$$

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v} \qquad 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v} \qquad (a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$

Lineární kombinace

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

Vektorový prostor

Vektory $\mathbf{v}(V, +, -)$

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$$

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$

Skaláry $a(S, +, -, *, ^{-1})$

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

$$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$

Lineární kombinace

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

- Lineární (ne)závislost
- Dimenze
- Báze

f zachovává lineární kombinaci :

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_n f(\mathbf{v}_n)$$

Lineární transformace

f zachovává lineární kombinaci :

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_n f(\mathbf{v}_n)$$

Transformujeme $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$

$$\mathbf{v} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \qquad \hat{\mathbf{x}} = (1, 0, 0)^T, \ldots$$
$$f(\mathbf{v}) = xf(\hat{\mathbf{x}}) + yf(\hat{\mathbf{y}}) + zf(\hat{\mathbf{z}})$$

($\hat{\mathbf{v}}$ je normalizovaný vektor)

Lineární transformace

f zachovává lineární kombinaci :

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + a_n f(\mathbf{v}_n)$$

Transformujeme $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$

$$\mathbf{v} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \qquad \hat{\mathbf{x}} = (1, 0, 0)^T, \dots$$
$$f(\mathbf{v}) = xf(\hat{\mathbf{x}}) + yf(\hat{\mathbf{y}}) + zf(\hat{\mathbf{z}})$$

($\hat{\mathbf{v}}$ je normalizovaný vektor)

$$f(\mathbf{v})_{x,y,z} = xf(\hat{\mathbf{x}})_{x,y,z} + yf(\hat{\mathbf{y}})_{x,y,z} + zf(\hat{\mathbf{z}})_{x,y,z}$$

Lineární transformace

f zachovává lineární kombinaci :

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_n f(\mathbf{v}_n)$$

Transformujeme $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$

$$\mathbf{v} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \qquad \hat{\mathbf{x}} = (1,0,0)^T, \ldots$$
$$f(\mathbf{v}) = xf(\hat{\mathbf{x}}) + yf(\hat{\mathbf{y}}) + zf(\hat{\mathbf{z}})$$

($\hat{\mathbf{v}}$ je normalizovaný vektor)

$$f(\mathbf{v})_{x,y,z} = xf(\hat{\mathbf{x}})_{x,y,z} + yf(\hat{\mathbf{y}})_{x,y,z} + zf(\hat{\mathbf{z}})_{x,y,z}$$

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} f(\hat{\mathbf{x}})_x & f(\hat{\mathbf{y}})_x & f(\hat{\mathbf{z}})_x \\ f(\hat{\mathbf{x}})_y & f(\hat{\mathbf{y}})_y & f(\hat{\mathbf{z}})_y \\ f(\hat{\mathbf{x}})_z & f(\hat{\mathbf{y}})_z & f(\hat{\mathbf{z}})_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Lineární transformace

f zachovává lineární kombinaci :

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_n f(\mathbf{v}_n)$$

Transformujeme $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$

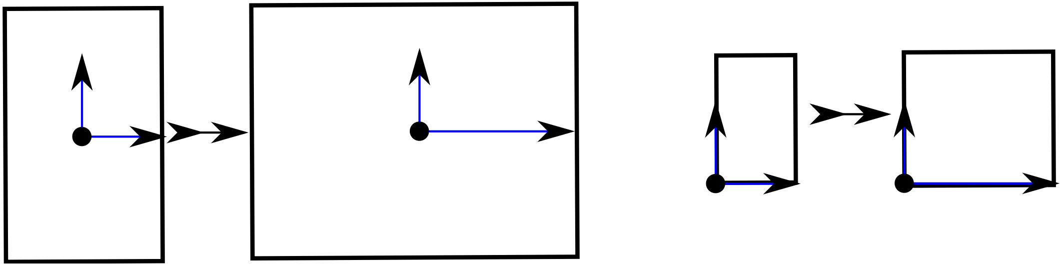
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \\ f(\mathbf{v}) &= xf(\hat{\mathbf{x}}) + yf(\hat{\mathbf{y}}) + zf(\hat{\mathbf{z}}) \end{aligned} \qquad \hat{\mathbf{x}} = (1,0,0)^T, \ldots$$

($\hat{\mathbf{v}}$ je normalizovaný vektor)

$$f(\mathbf{v})_{x,y,z} = xf(\hat{\mathbf{x}})_{x,y,z} + yf(\hat{\mathbf{y}})_{x,y,z} + zf(\hat{\mathbf{z}})_{x,y,z}$$

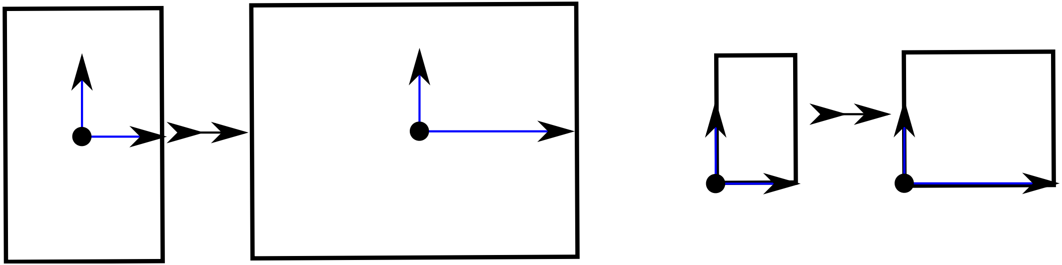
$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} f(\hat{\mathbf{x}})_x & f(\hat{\mathbf{y}})_x & f(\hat{\mathbf{z}})_x \\ f(\hat{\mathbf{x}})_y & f(\hat{\mathbf{y}})_y & f(\hat{\mathbf{z}})_y \\ f(\hat{\mathbf{x}})_z & f(\hat{\mathbf{y}})_z & f(\hat{\mathbf{z}})_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

!!! Transformujeme mezi bázemi. Aspoň jedna musí být zdokumentovaná.



$(1, 0, 0) \rightarrow (x, 0, 0)$ $(0, 1, 0) \rightarrow (0, y, 0)$ $(0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, z)$

Měřítko - Scale



$(1,0,0) \to (x,0,0)$ $(0,1,0) \to (0,y,0)$ $(0,0,1) \to (0,0,z)$

$$S(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$
$$S(x,y,z)^{-1} = S(x^{-1}, y^{-1}, z^{-1})$$
$$\det S(x,y,z) = xyz$$

Elementární rotace

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eulerovy úhly α, β, γ

$$R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \neq R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha)$$

:(Nepraktické, neintuitivní, moc kombinací.

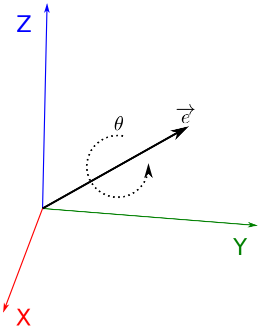
:(První otočení otáčí další osy $\rightarrow$ špatně se skládají.

Lepší reprezentace rotací

Osa rotace $\hat{\mathbf{e}} = (x, y, z)$ a úhel θ

$$R((x,y,z),\theta) = \begin{pmatrix} x^2(1-c)+c & xy(1-c)-zs & xz(1-c)+ys \\ yx(1-c)+zs & y^2(1-c)+c & yz(1-c)+xs \\ zx(1-c)-ys & zy(1-c)+xs & z^2(1-c)+c \end{pmatrix}$$

$$c = \cos\theta, s = \sin\theta$$



Rodriguezův vzorec :

Special Orthogonal Group $SO(3)$

$$\det R(\mathbf{e}, \theta) = 1$$

?

$$R(\mathbf{e}, \theta)^{-1} = R(\mathbf{e}, \theta)^T = R(\mathbf{e}, -\theta)$$

$$R(\mathbf{e}_1, \theta_1) \cdots R(\mathbf{e}_n, \theta_n) = R(\dots)$$

Special Orthogonal Group $SO(3)$

$$\det R(\mathbf{e}, \theta) = 1$$

?

$$R(\mathbf{e}, \theta)^{-1} = R(\mathbf{e}, \theta)^T = R(\mathbf{e}, -\theta)$$

$$R(\mathbf{e}_1, \theta_1) \cdots R(\mathbf{e}_n, \theta_n) = R(\dots)$$

Orthogonal Group $O(3)$

$$\det F(\dots) = \pm 1$$

?

Special Orthogonal Group $SO(3)$

$$\det R(\mathbf{e}, \theta) = 1$$

?

$$R(\mathbf{e}, \theta)^{-1} = R(\mathbf{e}, \theta)^T = R(\mathbf{e}, -\theta)$$

$$R(\mathbf{e}_1, \theta_1) \cdots R(\mathbf{e}_n, \theta_n) = R(\dots)$$

Orthogonal Group $O(3)$

$$\det F(\dots) = \pm 1$$

?

:) Rotace + "Scale-Zrcadlení

$$M(\hat{\mathbf{e}}) = S(-1)R(\hat{\mathbf{e}}, \pi)$$

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\mathbf{v})^{-1} = T(-\mathbf{v})$$

- Spolu s $SO(3)$ tvoří **Proper Rigid Transform**.
- Spolu s $O(3)$ tvoří **Rigid Transform**.
- Transformace pevného tělesa.

Asociativita

$$F_1 F_2 \cdots F_n \mathbf{x} = (F_1 F_2 \cdots F_n)\mathbf{x}$$

- Ve VS násobím jedinou maticí.
- Matice skládám při průchodu scénou.

Skládání transformací

Asociativita

$$F_1 F_2 \cdots F_n \mathbf{x} = (F_1 F_2 \cdots F_n)\mathbf{x}$$

- Ve VS násobím jedinou maticí.
- Matice skládám při průchodu scénou.

Inverzní transformace

$$(F_1 F_2 \cdots F_n)^{-1} = F_n^{-1} \cdots F_2^{-1} F_1^{-1}$$

- Při průchodu se dá složit i inverzní matice.

Vyjádření maticí 4×4

- Vektor $(x, y, z)^T \rightarrow (x, y, z, 0)^T$
- Bod $(x, y, z)^T \rightarrow (x, y, z, 1)^T$

!!! Tohle nejsou homogenní souřadnice!

Vyjádření maticí 4×4

- Vektor $(x, y, z)^T \rightarrow (x, y, z, 0)^T$
- Bod $(x, y, z)^T \rightarrow (x, y, z, 1)^T$

!!! Tohle nejsou homogenní souřadnice!

$$\begin{pmatrix} F & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F\mathbf{v} + \mathbf{t}w \\ \mathbf{0}^T\mathbf{v} + 1w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \times 1 \\ 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 \cdot 3 \times 1 + 3 \times 1 \cdot 1 \times 1 \\ 1 \times 3 \cdot 3 \times 1 + 1 \times 1 \cdot 1 \times 1 \end{pmatrix}$$

- Vektor $(x, y, z)^T \rightarrow (x, y, z, 0)^T$
- Bod $(x, y, z)^T \rightarrow (x, y, z, 1)^T$

!!! Tohle nejsou homogenní souřadnice!

$$\begin{pmatrix} F & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F\mathbf{v} + \mathbf{t}w \\ \mathbf{0}^T\mathbf{v} + 1w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \times 1 \\ 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 \cdot 3 \times 1 + 3 \times 1 \cdot 1 \times 1 \\ 1 \times 3 \cdot 3 \times 1 + 1 \times 1 \cdot 1 \times 1 \end{pmatrix}$$

Kombinace bodů a vektorů :

$$\begin{aligned} V + V &= V & \qquad 0 + 0 &= 0 \\ P - P &= V & 1 - 1 &= 0 \\ P \pm V &= P & 1 \pm 0 &= 1 \\ P + P &= ??? & 1 + 1 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 & \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} F_1 F_2 + \mathbf{t}_1 \mathbf{0}^T & F_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 1 \\ \mathbf{0}^T F_2 + 1 \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \mathbf{t}_1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 & \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} F_1 F_2 + \mathbf{t}_1 \mathbf{0}^T & F_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 1 \\ \mathbf{0}^T F_2 + 1 \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \mathbf{t}_1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 F_2 & F_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 & \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} F_1 F_2 + \mathbf{t}_1 \mathbf{0}^T & F_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 1 \\ \mathbf{0}^T F_2 + 1 \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \mathbf{t}_1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 F_2 & F_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Napřed F a pak $T(\mathbf{t})$:

$$\begin{pmatrix} F & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 & \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} F_1 F_2 + \mathbf{t}_1 \mathbf{0}^T & F_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 1 \\ \mathbf{0}^T F_2 + 1 \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \mathbf{t}_1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 F_2 & F_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Napřed F a pak $T(\mathbf{t})$:

$$\begin{pmatrix} F & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

$$(T(\mathbf{t})F)^{-1} = F^{-1} T(-\mathbf{v})$$

$$\begin{pmatrix} F & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} F^{-1} & -F^{-1}\mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Homogenní souřadnice

$\mathbf{RP}^N = \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$:

- N+1 souřadnic pro N-rozměrný prostor.
- ! Všechno jsou body.
- ! Ve 3D $(x, y, z, w)^T$ s aspoň jedním nenulovým prvkem.
- ! Každý bod má nekonečně mnoho reprezentací ($\mathbf{p} \equiv k * \mathbf{p}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

$\mathbf{RP}^N = \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$:

- N+1 souřadnic pro N-rozměrný prostor.
- ! Všechno jsou body.
- ! Ve 3D $(x, y, z, w)^T$ s aspoň jedním nenulovým prvkem.
- ! Každý bod má nekonečně mnoho reprezentací ($\mathbf{p} \equiv k * \mathbf{p}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

$(x, y, z, 0)$ jsou **ideální body** ležící v nekonečnu

- Leží ve směru vektoru (x, y, z)
- !!! A zároveň i opačným směrem ($\mathbf{p} \equiv -1\mathbf{p}$)
- !!! Nejsou to vektory, ty tu už nemáme.

Projektivní prostor

- Každý bod v $\mathbb{R}^3$ je přímka skrz počátek v $\mathbb{R}^4$.
- $k\mathbf{p}$ je pohyb po té přímce.
- Počátkem procházejí všechny přímky, proto jsme ho odstranili.
- Perspektivní dělení počítá průsečík s rovinou $w = 1$.

Projektivní prostor

- Každý bod v $\mathbb{R}^3$ je přímka skrz počátek v $\mathbb{R}^4$.
- $k\mathbf{p}$ je pohyb po té přímce.
- Počátkem procházejí všechny přímky, proto jsme ho odstranili.
- Perspektivní dělení počítá průsečík s rovinou $w = 1$.

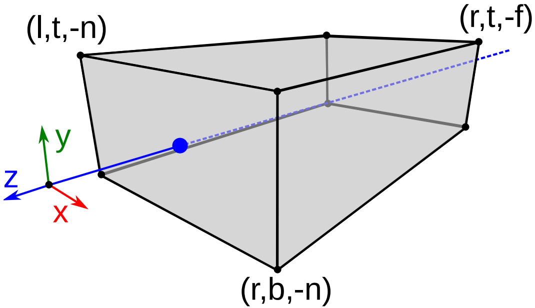
Projektivní rovina $\mathbf{RP}^2$

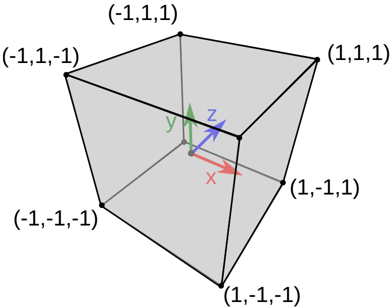
- Body (x, y, z) bez $(0, 0, 0)$.
- Perspektivní dělení $(x, y, z) \to (x/z, y/z)$ promítá na rovinu $z = 1$.

Projekce

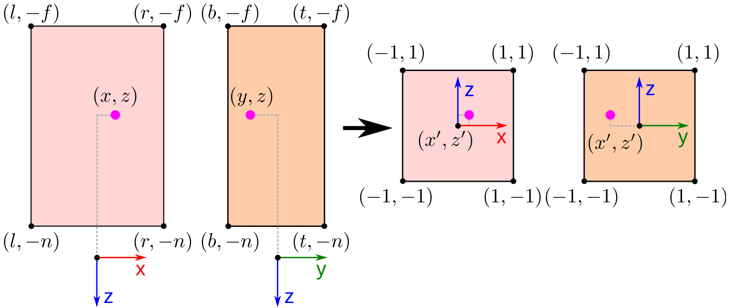
Ortogonální projekce

U ortogonální projekce je tvar pohledového tělesa kvádr. Kvádr má 6 parametrů: l (left),r (right),b (bottom),t (top),n (near),f (far). Kvádr je umístěn relativně ke středu souřadného systému.





Ortogonální projekce



Ortogonální projekce

$$\begin{aligned} x &\in [l, r] \\ x - l &\in [0, r - l] \\ \frac{x - l}{r - l} &\in [0, 1] \\ 2\frac{x - l}{r - l} &\in [0, 2] \\ 2\frac{x - l}{r - l} - 1 &\in [-1, 1] \\ 2\frac{x - l}{r - l} - \frac{r - l}{r - l} &= x' \\ \frac{2}{r - l}x - \frac{r + l}{r - l} &= x' \end{aligned}$$

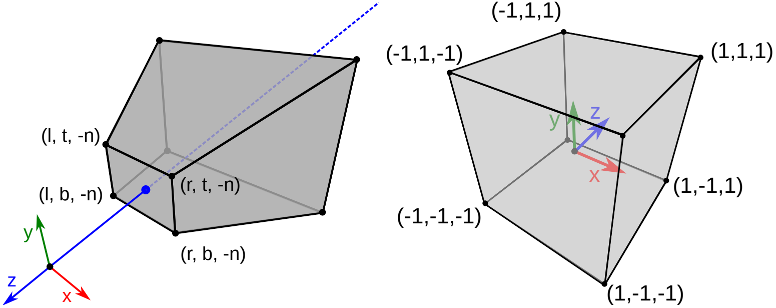
$$\begin{aligned} y &\in [b, t] \\ y - b &\in [0, t - b] \\ \frac{y - b}{t - b} &\in [0, 1] \\ 2\frac{y - b}{t - b} &\in [0, 2] \\ 2\frac{y - b}{t - b} - 1 &\in [-1, 1] \\ 2\frac{y - b}{t - b} - \frac{t - b}{t - b} &= y' \\ \frac{2}{t - b}y - \frac{t + b}{t - b} &= y' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &\in [-n, -f] \\ z + n &\in [0, n - f] \\ \frac{z + n}{n - f} &\in [0, 1] \\ 2\frac{z + n}{n - f} &\in [0, 2] \\ 2\frac{z + n}{n - f} - 1 &\in [-1, 1] \\ 2\frac{z + n}{n - f} - \frac{n - f}{n - f} &= z' \\ \frac{-2}{f - n}z + \frac{f + n}{f - n} &= z' \end{aligned}$$

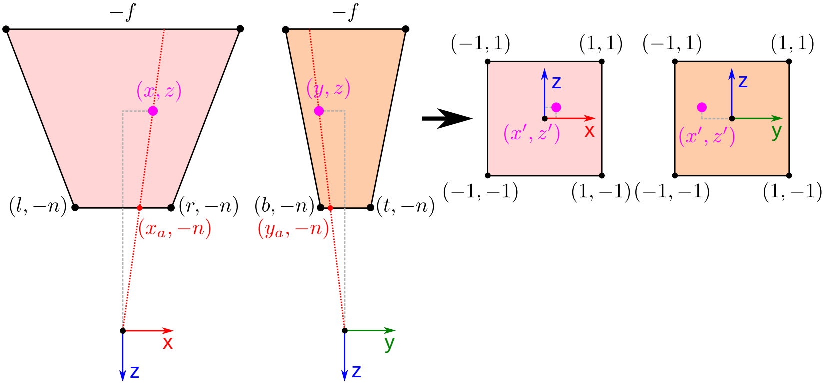
$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l}x - \frac{r+l}{r-l} \\ \frac{2}{t-b}y - \frac{t+b}{t-b} \\ \frac{-2}{f-n}z + \frac{f+n}{f-n} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & \frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

U perspektivní projekce je tvar pohledového tělesa komolý jehlan. Stejně jako u Ortogonální projekce má 6 parametrů: l (left),r (right),b (bottom),t (top),n (near),f (far). Jehlan je umístěn relativně ke středu systému.



Perspektivní projekce



$$\begin{aligned}
\frac{x_a}{-n} &= \frac{x}{z} \\
x_a &= \frac{-nx}{z} \\
x_a &\in [l, r] \\
x_a - l &\in [0, r - l] \\
\frac{x_a - l}{r - l} &\in [0, 1] \\
2\frac{x_a - l}{r - l} - 1 &\in [-1, 1] \\
\frac{2}{r - l}x_a - \frac{r + l}{r - l} &= x' \\
\frac{-2n}{r - l}\frac{x}{z} - \frac{r + l}{r - l} &= x'
\end{aligned}$$

$$\frac{-2n}{r - l}\frac{x}{z} - \frac{r + l}{r - l} = x' \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{y_a}{-n} &= \frac{y}{z} \\
y_a &= \frac{-ny}{z} \\
y_a &\in [b, t] \\
y_a - b &\in [0, t - b] \\
\frac{y_a - b}{t - b} &\in [0, 1] \\
2\frac{y_a - b}{t - b} - 1 &\in [-1, 1] \\
\frac{2}{t - b}y_a - \frac{t + b}{t - b} &= y' \\
\frac{-2n}{t - b}\frac{y}{z} - \frac{t + b}{t - b} &= y'
\end{aligned}$$

$$\frac{-2n}{t - b}\frac{y}{z} - \frac{t + b}{t - b} = y' \qquad (2)$$

Perspektivní projekce, problém se z

$$
\begin{aligned}
z &\in [-n, -f] \\
z + n &\in [0, n - f] \\
\frac{z+n}{n-f} &\in [0, 1] \\
2\frac{z+n}{n-f} - 1 &\in [-1, 1] \\
\frac{2}{n-f}z + \frac{n+f}{n-f} &= z'
\end{aligned}
$$

$$\frac{2}{n-f}z + \frac{n+f}{n-f} = z' \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z} &\in [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{f}] \\
\frac{1}{z} + \frac{1}{n} &\in [0, \frac{f-n}{nf}] \\
\frac{nf}{f-n}\frac{1}{z} + \frac{f}{f-n} &\in [0, 1] \\
\frac{2nf}{f-n}\frac{1}{z} + \frac{2f}{f-n} - 1 &\in [-1, 1]
\end{aligned}
$$

$$\frac{2nf}{f-n}\frac{1}{z} + \frac{f+n}{f-n} = z' \tag{4}$$

Perspektivní projekce

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \\ z \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & -\frac{2n}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2nf}{f-n} & \frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \cdot z \\ y' \cdot z \\ z' \cdot z \\ z \end{bmatrix} \tag{6}$$

Matice pro prohození z a w složky v homogenních souřadnicích:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & -\frac{2n}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2nf}{f-n} & \frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2n}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & -\frac{2n}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Perspektivní projekce

$$\begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x' \cdot z \\ -y' \cdot z \\ -z' \cdot z \\ -z \end{bmatrix} \tag{8}$$

Kvaterniony

- Kvaternion je rozšířením komplexních čísel do čtvrté dimenze.
- Kvaternion: $p = (a, b, c, d)$, a je skalární část, (b, c, d) je imaginární část.
- Kvaternion: $(0, b, c, d)$ se nazývá ryzí kvaternion.
- Kvaternion je sestrojen pomocí Cayley-Dickson konstrukce.

- Cayley-Dickson zobecňuje postup konstrukce hyperkomplexních čísel.
- Konstrukce produkuje algebry nad reálnými čísly.
- Každá má $2\times$ vyšší dimenzi.
- S vyšší dimenzí ztrácejí vlastnosti: komutativnost násobení, asociativitu, ...
- Konstrukce začíná $\mathbb{R}$.

- Dvojici reálných čísel (a, b), lze uvažovat jako komplexní číslo.
- Pro dvojici komplexních čísel $p = (a, b)$, $q = (c, d)$ jsou definovány operace:

$$
\begin{aligned}
p + q &= (a, b) + (c, d) = (a + b, b + d) \\
k \cdot p &= k \cdot (a, b) = (ka, kb), k \in \mathbb{R} \\
p \cdot q &= (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \\
p^* &= (a, b)^* = (a, -b)
\end{aligned}
$$

- Dvojici komplexních čísel (p, q) si můžeme představit jako dvojici dvojic reálných čísel.
- Dvojice dvojic reálných čísel $((a, b), (c, d))$ označujeme jako kvaternion.
- Pro dva kvaterniony $p = (a, b), q = (c, d)$ jsou operace násobení a konjugace definovány odlišně:

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (a, b) \cdot (c, d) = (ac - d^* b, da + bc^*) \\ p^* &= (a, b)^* = (a^*, -b) \end{aligned}$$

- Dvě hyperkomplexní čísla $p = (a, b), q = (c, d)$ jsou složena z hyperkomplexních komponent, které jsou v nižší dimenzi.
- Násobení a konjugace jsou definovány následovně:

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (a, b) \cdot (c, d) = (ac - d^* b, da + bc^*) \\ p^* &= (a, b)^* = (a^*, -b) \end{aligned}$$

- V případě, že konjugujeme reálné číslo: $a^* = a, a \in \mathbb{R}$.
- Postupnou konstrukcí z reálných čísel vznikají nejprve komplexní čísla, pak kvaterniony, oktoniony, ...
- Každý s dimenzí $2\times$ větší než předcházející.

- U komplexních čísel používáme symbol i pro označení komplexní části.
- U kvaternionů zkonstruovaných pomocí Cayley-Dickson konstrukce $p = ((a, b), (c, d))$ označíme komponenty následovně:

$$\begin{aligned} p &= ((a, b), (c, d)) \\ p &= ((a, bi), (c, di)j) \\ p &= ((a, bi, (cj, dij)) \\ p &= a + bi + cj + dij \end{aligned}$$

- Pokud označíme součin $ij = k$ vznikne hyperkomplexní číslo: $a + bi + cj + dk$.
- Další značení je pomocí skaláru a vektoru: $p = (s, \vec{v})$.

Sčítání kvaternionů

- Kvaterniony $p = ((a, b), (c, d)), q = ((x, y), (z, w))$ se sčítají po složkách:

$$\begin{aligned} p + q &= ((a, b), (c, d)) + ((x, y), (z, w)) \\ p + q &= ((a, b) + (x, y), (c, d) + (z, w)) \\ p + q &= ((a + x, b + y), (c + z, d + w)) \end{aligned}$$

- Sčítání kvaternionů je komutativní a asociativní.
- Kvaternion $((0, 0), (0, 0))$ představuje neutrální prvek ke sčítání.

Konjugace kvaternionu

- Konjugace kvaternionu $p = ((a, b), (c, d))$:

$$
\begin{aligned}
p^* &= ((a, b), (c, d))^* \\
p^* &= ((a, b)^*, -(c, d)) \\
p^* &= ((a^*, -b), (-c, -d)) \\
p^* &= ((a, -b), (-c, -d))
\end{aligned}
$$

- Při vektorovém zápisu $p = (s, \vec{v})$, $p^* = (s, -\vec{v})$.
- Pro konjugaci součinu kvaternionů platí: $(p \cdot q)^* = q^* \cdot p^*$.

- Násobení kvaternionů není komutativní $p \cdot q \neq q \cdot p$.
- Násobení kvaternionů je asociativní $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$.
- Násobení kvaternionů podle Cayley-Dickson konstrukce:

$$
\begin{aligned}
p \cdot q &= ((a, b), (c, d)) \cdot ((x, y), (z, w)) \\
p \cdot q &= ((a, b) \cdot (x, y) - (z, w)^* \cdot (c, d), (z, w) \cdot (a, b) + (c, d) \cdot (x, y)^*) \\
p \cdot q &= ((a, b) \cdot (x, y) - (z^*, -w) \cdot (c, d), (z, w) \cdot (a, b) + (c, d) \cdot (x^*, -y)) \\
p \cdot q &= ((a, b) \cdot (x, y) - (z, -w) \cdot (c, d), (z, w) \cdot (a, b) + (c, d) \cdot (x, -y)) \\
p \cdot q &= ((ax - y^* b, ya + bx^*) - (zc + d^* w, dz - wc^*), (za - b^* w, bz + wa^*) + (cx + y^* d, -yc + dx^*)) \\
p \cdot q &= ((ax - yb, ya + bx) - (zc + dw, dz - wc), (za - bw, bz + wa) + (cx + yd, -yc + dx)) \\
p \cdot q &= ((ax - by - cz - dw, ay + bx + cw - dz), (az - bw + cx + dy, aw + bz - cy + dx))
\end{aligned}
$$

Násobení kvaternionů

- Kvaterniony ve tvaru: $p = a + bi + cj + dk$, $q = x + yi + zj + wk$ mohou být násobeny po složkách při dodržení rovnosti:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

- Z rovnosti plynout další pravidla:

$$\begin{aligned} ijk &= -1 \\ iijk &= -i \\ -jk &= -i \\ jk &= i \end{aligned}$$

- Z rovnosti $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ můžeme pomocí násobení i, j, k postupně obdržet tabulku:

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

- Kvaterniony ve tvaru $p = (s_1, \vec{u}), q = (s_2, \vec{v})$ lze vynásobit s pomocí skalárního a vektorového součinu:

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (s_1, \vec{u}), q = (s_2, \vec{v}) \\ p \cdot q &= (s_1 s_2 - \vec{u} \cdot \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} + s_1 \cdot \vec{v} + s_2 \cdot \vec{u}) \end{aligned}$$

- Norma kvaternionů $q = ((a,b),(c,d))$ je definována jako odmocnina ze součinu kvaternionu q a konjugovaného kvaternionu q^*:

$$
\begin{aligned}
||q|| &= \sqrt{q \cdot q^*} \\
||q|| &= \sqrt{((a,b),(c,d)) \cdot ((a,b),(c,d))^*} \\
||q|| &= \sqrt{((a,b),(c,d)) \cdot ((a,-b),(-c,-d))} \\
||q|| &= \sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2, 0, (0,0))} \\
||q|| &= (\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}, 0, (0,0)) \\
||q|| &= \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}
\end{aligned}
$$

- Kvaterniony $p = (s_1, \vec{u}), q = (s_2, \vec{v})$ jsou rovnoběžné v případě, že vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou na sebe rovnoběžné.
- Kvaterniony p, q jsou na sebe kolmé v případě, že vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou na sebe kolmé.
- Součin $p \cdot q$ dvou ryzích kvaternionů $p = (0, \vec{u}), q = (0, \vec{v})$ je ryzí kvaternion $(0, \vec{u} \times \vec{v})$ jenom v případě, že jsou vektory $\vec{u}, \vec{v}$ na sebe kolmé.
- Kvaternion $p = (0, (0, 0, 0))$ je nulový kvaternion.
- Neutrální prvek vůči násobení je kvaternion $e = (1, (0, 0, 0))$. Pro jakýkoliv kvaternion p platí: $e \cdot p = p \cdot e = p$.
- Inverzní kvaternion ke kvaternionu p vůči operaci násobení, je takový kvaternion p^{-1}, pro který platí: $p \cdot p^{-1} = p^{-1} \cdot p = e$. Součin kvaternionu a jeho konjugace: $p \cdot p^* = ||p||^2$. Odtud $p \cdot \frac{p^*}{||p||^2} = e, p^{-1} = \frac{p^*}{||p||^2}$.

Rotace - Eulerovy úhly

- Rotace v 3D může být reprezentována pomocí tří úhlů - Eulerovy úhly.
- Eulerovy úhly α, β, γ jsou použity pro tři na sebe kolmé osy.
- Eulerovy úhly jsou blízké Kardanově závěsu.
- Kardanův závěs v určité pozici ztrácí stupeň volnosti "Gimbal lock".
- Kvaterniony tímto jevem netrpí.

- Kvaternion reprezentuje rotaci jako rotaci kolem určité osy o určitý úhel.
- Pro rotaci pomocí kvaternionů se používají jednotkové kvaterniony $||p|| = 1$.
- Jakýkoliv jednotkový kvaternion může být zapsán jako $(cos(\alpha), sin(\alpha) \cdot \vec{v})$.
- Úhel nabývá hodnot $\alpha \in [0, \pi]$ a vektor $|\vec{v}| = 1$ je jednotkový.
- Vektor $\vec{v}$ reprezentuje osu otáčení a úhel α reprezentuje úhel natočení.
- Pro úhel $\alpha = 0, \pi$ je kvaternion ve formě $((\pm 1, 0), (0, 0))$, což je neutrální prvek.

- Bod $r = (r_1, r_2, r_3)$, který chceme rotovat převedeme na ryzí kvaternion: $p = ((0, r_1), (r_2, r_3))$.
- Osu, reprezentovanou pomocí jednotkového vektoru $\vec{v}$, a úhel α, převedeme na jednotkový kvaternion: $q = (cos(\frac{\alpha}{2}), sin(\frac{\alpha}{2}) \cdot \vec{v})$.
- Rotace bodu r kolem osy v o úhel α:

$$q \cdot p \cdot q^* = p'$$

- p' představuje rotovaný bod.

- Kvaternion: $p = ((0, r_1), (r_2, r_3))$ reprezentuje bod, který chceme rotovat.
- Jednotkové kvaterniony: q, t reprezentují dvě rotace.
- Aplikování rotací:

$$
\begin{aligned}
p' &= t \cdot (q \cdot p \cdot q^*) \cdot t^* \\
p' &= t \cdot q \cdot p \cdot q^* \cdot t^* \\
p' &= (t \cdot q) \cdot p \cdot (q^* \cdot t^*) \\
p' &= (t \cdot q) \cdot p \cdot (t \cdot q)^* \\
p' &= s \cdot p \cdot s^*
\end{aligned}
$$

- Složení rotací q, t vznikne kvaternion $s = q \cdot t$, který reprezentuje obě rotace.

Převod kvaternionu na rotační matici

- Převod jednotkového kvaternionu $(\cos(\frac{\alpha}{2}), \sin(\frac{\alpha}{2})\vec{v})$ na rotační matici:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) + v_x^2(1-\cos(\alpha)) & v_x v_y(1-\cos(\alpha)) - v_z\sin(\alpha) & v_x v_z(1-\cos(\alpha)) + v_y\sin(\alpha) \\ v_y v_x(1-\cos(\alpha)) + v_z\sin(\alpha) & \cos(\alpha) + v_y^2(1-\cos(\alpha)) & v_y v_z(1-\cos(\alpha)) - v_x\sin(\alpha) \\ v_z v_x(1-\cos(\alpha)) - v_y\sin(\alpha) & v_z v_y(1-\cos(\alpha)) + v_x\sin(\alpha) & \cos(\alpha) + v_z^2(1-\cos(\alpha)) \end{bmatrix}$$

Duální kvaterniony

Úvod

- Matice lze použí pro mnoho druhů transformací: rotace, posuny, měřítko, projekci, ...
- Kvaternion lze použí pro rotace, posun je potřeba udělat separátně
- Eulerovy úhly lze použí pro rotace, posun je potřeba udělat separátně
- Úhel+osa lze použít pro rotace, posun je potřeba udělat separátně
- Duální kvaternion: umožňují rotace a posun
- Vhodné pro pohyb rigidních těles: posuny+rotace
- Jednotná reprezentace
- Kombinuje koncept kvaternionů a duálních čísel

- Podobné komplexním číslům.
- Komplexní číslo: $c = r + b \cdot i$, r reálná část, b imaginární část, $i^2 = -1$.
- Duální číslo: $z = r + d \cdot \epsilon$, r reálná část, d duální část, $\epsilon^2 = 0, \epsilon \neq 0$
- ϵ je duální operátor.
- Sčítání: $(r_a + d_a \cdot \epsilon) + (r_b + d_b \cdot \epsilon) = (r_a + r_b) + (d_a + d_b) \cdot \epsilon$
- Násobení: $(r_a + d_a \cdot \epsilon) \cdot (r_b + d_b \cdot \epsilon) = r_a \cdot r_b + (r_a \cdot d_b + d_a \cdot r_b) \cdot \epsilon$
- Dělení: podobně jako komplexní čísla - pomocí sdružených čísel $(r + d \cdot \epsilon)^* = (r - d \cdot \epsilon)$

Duální kvaterniony

- Duální kvaterniony: dva kvaterniony, jeden reálný a druhý duální.
- $\mathbf{q} = \mathbf{q}_r + \mathbf{q}_d \cdot \epsilon$
- Násobení skalárem: $s \cdot \mathbf{q} = s \cdot \mathbf{q}_r + s \cdot \mathbf{q}_d \cdot \epsilon$
- Sčítání: $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = (\mathbf{q}_{r1} + \mathbf{q}_{r2}) + (\mathbf{q}_{d1} + \mathbf{q}_{d2}) \cdot \epsilon$
- Násobení: $\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = (\mathbf{q}_{r1} \cdot \mathbf{q}_{r2}) + (\mathbf{q}_{r1} \cdot \mathbf{q}_{d2} + \mathbf{q}_{d1} \cdot \mathbf{q}_{r2}) \cdot \epsilon$
- Konjugace: $\mathbf{q}^* = \mathbf{q}_r^* + \mathbf{q}_d^* \cdot \epsilon$
- Velikost: $\|\mathbf{q}\| = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^*$
- Podmínky: $\|\mathbf{q}\| = 1$, $\mathbf{q}_r^* \cdot \mathbf{q}_d + \mathbf{q}_d^* \cdot \mathbf{q}_r = 0$
- Pokud jsou podmínky splněny, duální kvaterniony reprezentují libovolnou rotaci a posun.

- Reálný kvaternion reprezentuje rotaci: $\mathbf{q}_r = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}$ je kvaternion reprezentující rotaci.
- Duální kvaternion reprezentuje polovinu rotace a posunu: $\mathbf{q}_d = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}$.
- $\mathbf{t}$ je kvaternion $\mathbf{t} = (0, \mathbf{t}_x, \mathbf{t}_y, \mathbf{t}_z)$.
- Čistá rotace: $\mathbf{q}_r = \left(cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \mathbf{n}_x \cdot sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \mathbf{n}_y \cdot sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \mathbf{n}_z \cdot sin\left(\frac{\phi}{2}\right), 0, 0, 0, 0\right)$
- Čistý posun: $\mathbf{q}_t = \left(1, 0, 0, 0, 0, \frac{\mathbf{t}_x}{2}, \frac{\mathbf{t}_y}{2}, \frac{\mathbf{t}_z}{2}\right)$
- Rotace pak transformace: $\mathbf{q} = \mathbf{q}_t \times \mathbf{q}_r$
- Transformování bodu: $\mathbf{p}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^*$

Vlastnosti

- Kombinování matic 4x4: 64 násobení, 48 sčítání
- Kombinování matic 4x3: 48 násobání, 32 sčítání
- Kombinování duálních kvaternionů: 42 násobení, 38 sčítání
- Je nutné zachovat jednotkové velikosti a pořadí (stejné jako u matic)
- Je možné interpolovat (stejně jako kvaterniony)
- Nejsou singularity (gimbal lock)
- Jednotná reprezentace
- Nejkratší cesta interpolace
- Další čtení: **Ben Kenwright: A Beginners Guide to Dual-Quaternions**

References

- `http://www.opengl.org/sdk/docs/`
- `http://www.opengl.org/documentation/glsl/`
- `http://www.opengl.org/registry/`

Thank you for your attention! Questions?