

Домашнее задание 2

Дородный Дмитрий СКБ172

1 ноября 2019 г.

1 Гамма распределение

1.1 Моделирование выборок

Выборки были смоделированы для параметра размера $\lambda = 5$ и параметра формы $\alpha = 3$

моделирование величин - сткоки 14-29

$n = 5$

1.38245105 0.75961592 1.82626293 1.77897216 1.92653276
1.62528142 2.84655449 2.10705788 2.62381326 2.54317759
2.74942466 1.32689716 2.43751594 2.76166363 1.228536
1.84713679 1.42583819 1.6261669 0.62627088 1.85120437
2.81684131 3.37036355 1.76613648 1.47232742 1.42195465

$n = 10$

2.74163428 3.37852738 1.78534317 1.37522312 1.49144941 1.4413115 1.61537507
2.55302673 1.04220419 1.23404958
1.54541432 1.14491859 1.22165566 3.67987785 2.4321031 1.10791262 1.97661761
0.53736036 2.40116353 1.12709053
2.86784815 0.76976886 2.17355452 0.80347979 1.95227141 2.08129196 2.08289067
0.98618507 1.47620408 0.61080038
1.61894207 1.59225269 2.97007383 2.09644034 2.67073812 2.41635192 1.81063309
2.28062268 2.13871284 0.93471733
1.73634482 1.06425248 2.33830444 0.99911264 1.49462839 1.00887335 1.23506747
1.78145763 1.80447224 2.15576202

1.2 Эмпирическая функция

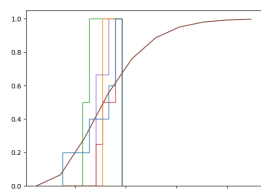
Эмпирическая ф-ция моделируется как кумулятивная гистограмма частот, что является по определению графиком эмпирической ф-ции, т.к. в такой гистограмме столбики складываются вправо

Для генерации "реальной" ф-ции плотности использовалась библиотечная ф-ция с табличной реализацией (ссылка ниже), т.к. PDF гамма-распределения

не представим в элементарных ф-циях.

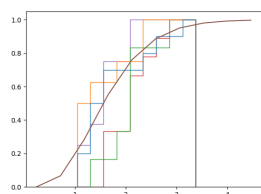
построение графиков ст.39-43, верхняя граница ст. 17-22

$n = 5$



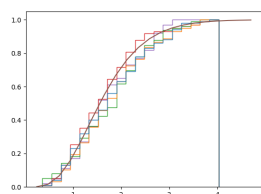
2.086938566369123 1.3669736043432497 1.1527012811563848 2.6107476260119777
 1.5196573270788036 1.9975423817082492 1.1915598867384922 2.135392750272433
 2.0434663867216583 1.9445253577579908

$n = 10$



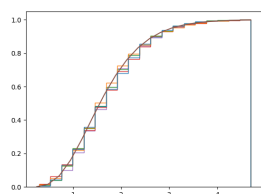
2.304654727023136 2.6087585161558104 1.7862746849457543 2.3142748971402787
 2.876398058448576 1.748418163718755 2.680765202962352 1.294437607296349
 1.5449616347844821 1.4074785675567905

$n = 100$



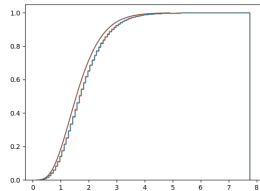
2.4118774476249825 2.557657014440135 3.2318880030866466 2.4928459236134386
 2.7447061412089067 3.0020626746180716 2.593976716173942 3.440602979790067
 2.8157288305381125 2.835586700574109

$n = 1000$



4.368025344787662 3.6458193186285026 4.17377678014042 3.9059825895633544
 4.40492301653959 4.158756791755123 4.648819042792786 3.8218825939117607
 4.1557098948238735 4.0584819980189035

$n = 100000$



6.769832463154027 6.580503827453296 6.4483456876774925 6.363183080803804
 6.6475989157297235 6.44427773403849 6.050920938117622 5.6278470137653605
 6.311619713195477 6.078489927648575

1.3 Вариационный ряд

Вариационный ряд ст. 33

$n = 5$

0.7596159236356548 1.3824510547514095 1.7789721601040895 1.8262629302830156
 1.926532755925533
 1.6252814243815563 2.107057883968249 2.5431775871192537 2.623813260655954
 2.846554490004778
 1.228536001026623 1.3268971629259743 2.437515943389872 2.749424659094659
 2.7616636292201378
 0.6262708789477047 1.4258381918896417 1.6261669012787718 1.8471367862702124
 1.851204368267497
 1.421954650356112 1.4723274173966165 1.7661364829554624 2.8168413111200485
 3.3703635496476325

$n = 10$

1.0422041939043616 1.2340495833284817 1.3752231182676335 1.441311497109536
 1.491449406922243 1.6153750692350979 1.7853431678248022 2.553026730627554
 2.7416342803700147 3.3785273784351326
 0.5373603581470098 1.1079126158905854 1.1270905275942569 1.1449185883692454
 1.2216556613228162 1.5454143167175056 1.976617606885336 2.4011635252125947
 2.4321031007428506 3.6798778452907697
 0.610800380972591 0.769768862279322 0.8034797868421935 0.9861850714474624
 1.47620408148033 1.952271413336001 2.0812919550073707 2.082890667731276
 2.173554522041856 2.867848149754313
 0.9347173273804482 1.5922526934893784 1.6189420743375866 1.8106330933864792
 2.096440336613463 2.138712844399836 2.2806226787438115 2.4163519213168874
 2.6707381156732537 2.9700738250415712
 0.9991126423284176 1.008873353760097 1.0642524812948537 1.2350674695725372
 1.4946283866881966 1.7363448213826564 1.7814576264975832 1.804472235477527

2.155762015757073 2.3383044401842583

1.4 Квантили

Столбики - это 0.1, 0.5 и 0.7 квантили соответственно

квантили ст.35

$n = 5$

1.0710334891935323, 1.8026175451935527, 1.8763978431042743
1.8661696541749027, 2.583495423887604, 2.7351838753303657
1.2777165819762986, 2.5934703012422657, 2.7555441441573985
1.0260545354186732, 1.7366518437744922, 1.8491705772688547
1.4471410338763642, 2.2914888970377554, 3.0936024303838403

$n = 10$

1.3046363507980576, 1.70035911852995, 2.6473305054987843
1.1175015717424213, 1.7610159618014207, 2.416633312977723
0.7866243245607577, 2.016781684171686, 2.128222594886566
1.6055973839134825, 2.209667761571824, 2.5435450184950703
1.0365629175274753, 1.7589012239401198, 1.9801171256173

$n = 100$

0.9198394754557402, 1.7767947274352363, 2.351525566123188
0.874981774496076, 1.7879222646879134, 2.2591388479824133
0.8225556242012182, 1.9538669309621564, 2.30569583712383
0.9025129552638944, 1.6970687741194297, 2.097303728582295
0.9925652275588395, 1.6937479980004106, 2.2731050343544226

$n = 1000$

0.92375630046113, 1.7411577814902053, 2.2056980159621995
0.9194547764250708, 1.6886303914204221, 2.113046494317264
0.9323780656444685, 1.7416580504291237, 2.152074342052212
0.8906502958447419, 1.764345088216578, 2.1772774402606885
0.9973032703762388, 1.760022878668758, 2.1464740130929005

$n = 100000$

0.9279014204892284, 1.7189124658217474, 2.1498341548937008
0.9314011084505125, 1.7253014145906993, 2.152467515001936
0.9279174355250105, 1.7198991629725708, 2.1471202770214632
0.9277047546173129, 1.7255449913196645, 2.153169425109314
0.9285545822531064, 1.7258997260679867, 2.1449745580197197

Реальные значения квантилей, полученные на библиотечной реализации гамма распределения:

Документация по ф-ции

достоверность ф-ции не вызывает сомнений (н-р тест Колмогорова-Смирнова)

0.1: 0.9296307982999752

0.5: 1.7234996790653043

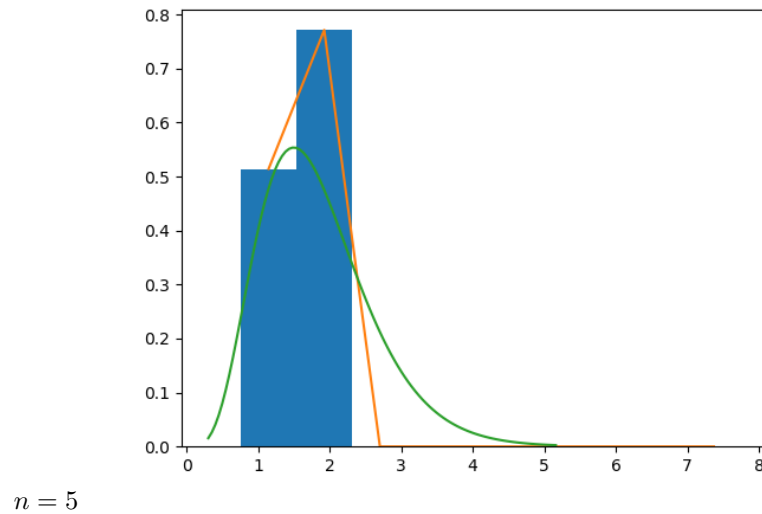
0.7: 2.1497780336300814

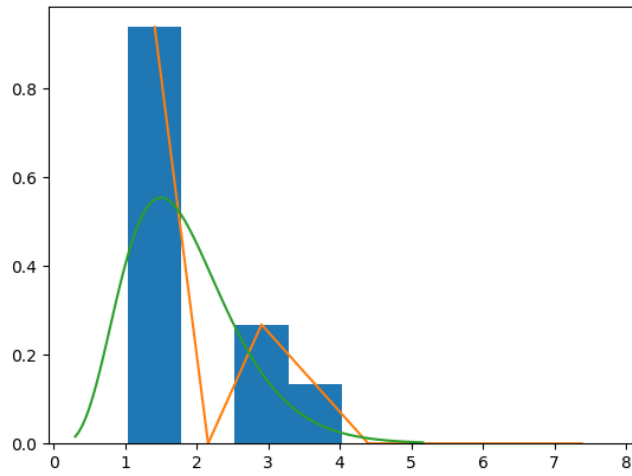
Можно заметить, что при увеличении размера моделируемой выборки квантили почти совпадают

1.5 Гистограмма и полигон частот

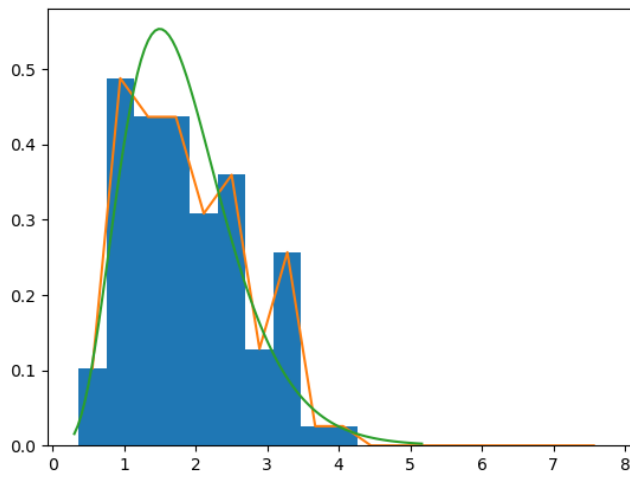
Зеленая линия - теоретическая плотность вероятности, оранжевая - полигон частот и синим цветом - гистограмма частот. Как видно, все три линии графика практически совпадают при большом объеме выборки.

реализация ст. 72-78

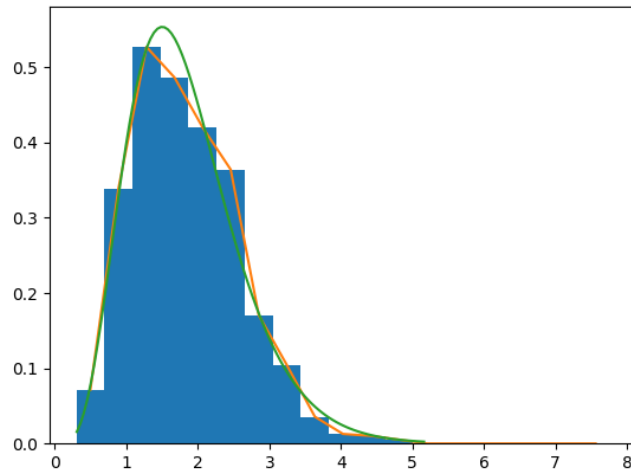




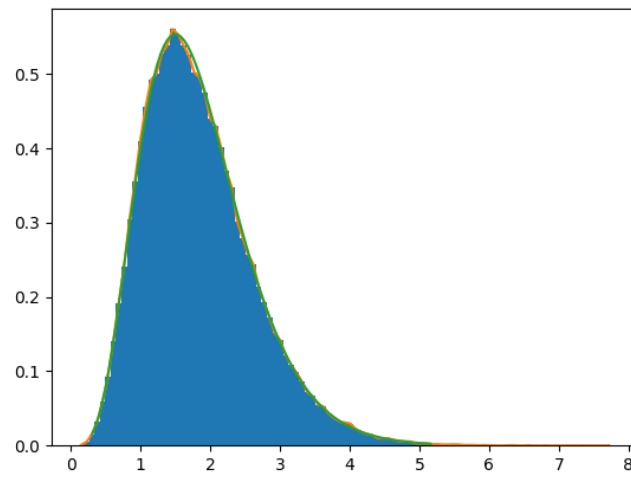
$n = 10$



$n = 100$



$n = 1000$



$n = 100000$

2 распределение Бореля-Таннера

2.1 Моделирование выборок

Выборки были смоделированы для параметра скорости обслуживания $\alpha = 0.4$ и начального кол-ва клиентов $r = 4$.

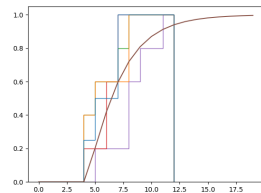
ф-ция моделирования ст. 12-20

$n = 5$
 4 5 13 7 7
 8 8 5 4 4
 4 8 5 7 4
 6 7 4 6 7
 5 12 9 8 8

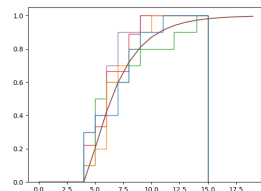
$n = 10$
 7 5 4 9 11 4 8 7 4 8
 4 5 6 6 6 7 10 9 6 8
 6 5 5 14 5 8 9 12 5 4
 8 6 9 6 8 16 6 5 4 4
 6 9 4 6 6 4 7 7 4 5

2.2 Эмпирическая функция

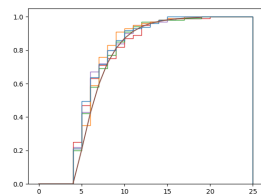
$n = 5$



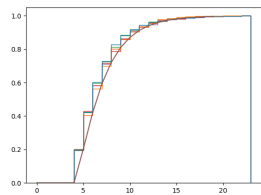
8 8 9 7 4 3 4 3 4 5
 $n = 10$



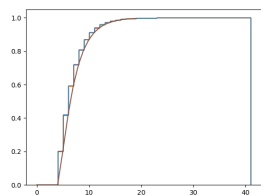
5 6 12 5 8 9 4 8 8 12
 $n = 100$



19 15 20 19 12 10 14 15 12 14
 $n = 1000$



17 18 17 18 16 18 19 18 19 18
 $n = 100000$



31 31 33 31 28 30 30 30 32 36

2.3 Вариационный ряд

$n = 5$
 4 5 7 7 13
 4 4 5 8 8
 4 4 5 7 8
 4 6 6 7 7
 5 8 8 9 12

$n = 10$
 4 4 4 5 7 7 8 8 9 11
 4 5 6 6 6 6 7 8 9 10
 4 5 5 5 5 6 8 9 12 14
 4 4 5 6 6 6 8 8 9 16
 4 4 4 5 6 6 6 7 7 9

2.4 Квантили

В столбиках 0.1, 0.5 и 0.7 квантили соответственно

$n = 5$
 4.5, 7.0, 10.0
 4.0, 6.5, 8.0
 4.0, 6.0, 7.5
 5.0, 6.5, 7.0
 6.5, 8.5, 10.5

$n = 10$
4.0, 7.5, 8.5
5.5, 6.5, 8.5
5.0, 7.0, 10.5
4.5, 7.0, 8.5
4.0, 6.0, 7.0

$n = 100$
4.0, 6.0, 7.5
4.0, 6.0, 7.0
4.0, 6.0, 8.0
4.0, 6.0, 7.5
4.0, 6.0, 7.0

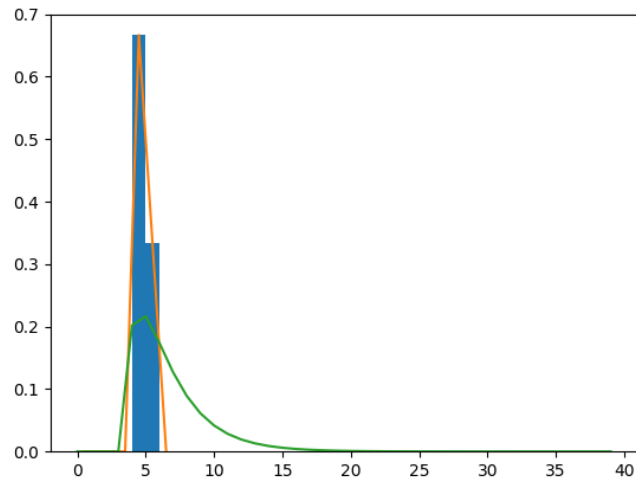
$n = 1000$
4.0, 6.0, 7.0
4.0, 6.0, 8.0
4.0, 6.0, 7.0
4.0, 6.0, 7.0
4.0, 6.0, 7.0

$n = 100000$
4.0, 6.0, 7.0
4.0, 6.0, 7.0
4.0, 6.0, 7.0
4.0, 6.0, 7.0
4.0, 6.0, 7.0

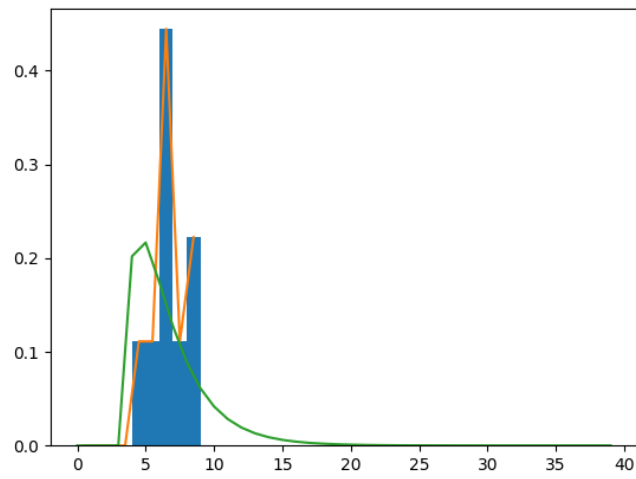
Теоретически посчитанные квантили для тех же параметров:
4 6 7

2.5 Гистограмма и полигон частот

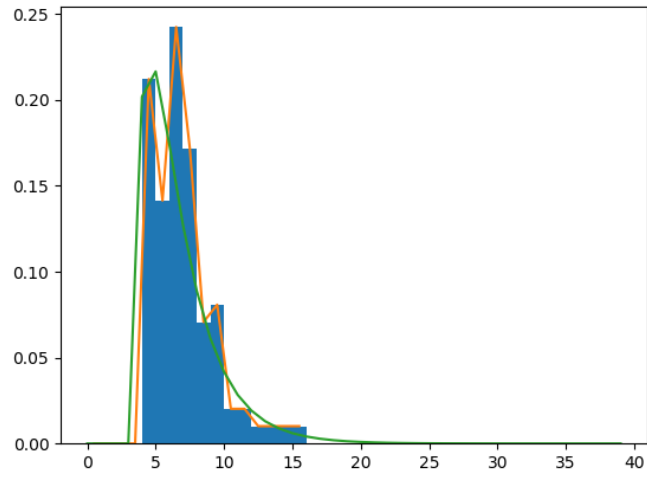
Зеленая линия - теоретическая плотность вероятности, оранжевая - полигон частот и синим цветом - гистограмма частот. Как видно, все три линии графика практически совпадают при большом объеме выборки.



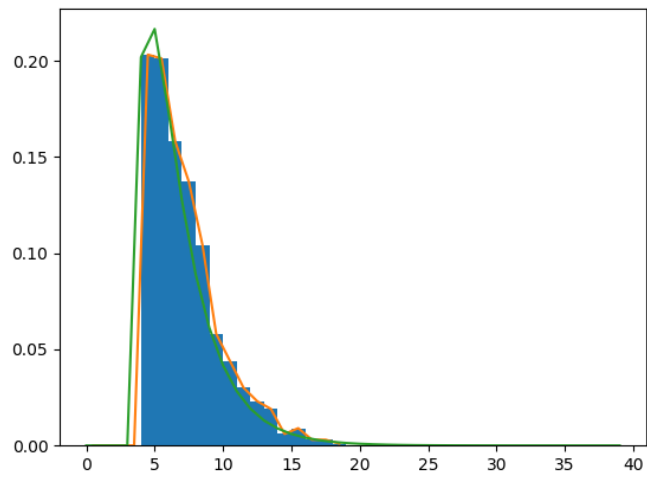
$n = 5$



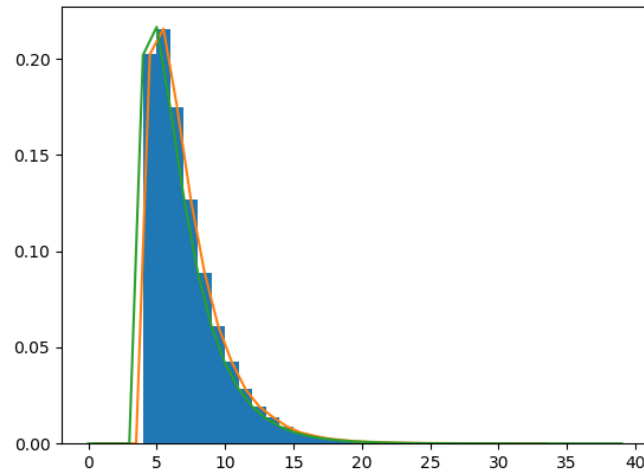
$n = 10$



$n = 100$



$n = 1000$



$n = 100000$

Для распределения бореля-таннера использовались аналогичные ф-ции, кроме генерации эмпирической. Для нее была написана следующая ф-ция:
[ст. 22-24](#)