Домашнее задание 2

Дородный Дмитрий СКБ172

29 ноября 2019 г.

1 Выборочные параметры гамма распределения

1.1 Среднее

$n = 5$
1.5347669649399405
2.3491769292259583
2.1008074791314533
1.4753234253307657
2.169524682295174
$n = 10$
1.8658144426024859
1.7174114146172967
1.5804294890892716
2.0529484910382716
1.5618275472943202
$n = 100$
1.8649278395910727
1.8738914739161228
1.857848588108383
1.7472555234336091
1.819507390440628
$n = 1000$
1.8289513166182283
1.8283098801483793
1.8270410227193483
1.8419531041895907
1.8590485014532596
$n = 100000$
1.8311972822426574
1.8335242753693608
1.8308286621614094

1.835731725896399
1.8309061696106745

1.2 Дисперсия

$n = 5$
0.23053644586867433
0.23577303544527065
0.582650599050293
0.2564061069301132
0.7671749553748675
$n = 10$
0.5817010562701092
0.8458173702765012
0.5795369374952812
0.3472986030370286
0.23050220440787564
$n = 100$
0.6630279792834235
0.6692420766088472
0.647389736532902
0.605986871976679
0.4975958159548518
$n = 1000$
0.5645693527393755
0.6489606080027915
0.5723812739602663
0.6194120726047417
0.5912413435448197
$n = 100000$
0.6134870775593995
0.6088265760784073
0.615135300581969
0.6175677809038261
0.6054965047736618

1.3 Оценка параметров гамма распределения

$M = \frac{\alpha}{\lambda}, D = \frac{\alpha}{\lambda^2}$, решая систему и по методу моментов получаем: $\lambda^* = \frac{\bar{X^*}}{S_x^2}, \alpha^* = \frac{\bar{X^*}^2}{S_x^2}$, где $S_x^2, \bar{X}^*$ - выборочная дисперсия и выборочное среднее соответственно. Тащемта, гамма распределение принадлежит экспоненциальному семейству, так как можно представить в форме
$f(x, \theta) = exp(A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x)$
$f(x|\alpha, \lambda) = \frac{x^{\lambda-1}e^{\frac{-x}{\alpha}}}{\Gamma(\lambda)\alpha^\lambda}$
$\Gamma(\theta, \lambda) = \frac{x^{\lambda-1}e^{\frac{-x}{\theta}}}{\Gamma(\lambda)\theta^\lambda} = exp(\frac{-x}{\theta} - \lambda ln(\theta) + (\lambda - 1)ln(x)) + \Gamma(\lambda).$

$A(\theta) = \frac{1}{\theta}$
$B(x) = -x$
$C(\theta) = \lambda ln(\theta)$
$D(x) = (\lambda - 1) ln(x)$
Получаем распредление из эксп. семейства, тогда оцениваемый параметр:
$\tau(\theta) = -\frac{C'(\theta)}{A'(\theta)} = \frac{\lambda}{\theta}\frac{\theta^2}{-1} = \lambda\theta$
Лишняя λ, домножим и разделим первый член на λ:
$A(\theta) = \frac{\lambda}{\theta}, B(x) = \frac{-x}{\lambda}$
Теперь $\tau(\theta) = -\frac{C'(\theta)}{A'(\theta)} = \frac{\lambda}{\theta}\frac{\theta^2}{-\lambda} = \theta$
Оценка параметра:
$T^* = T^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}X_i = \frac{1}{\lambda}\bar{X}$, которая является эффективной, как оценка экспоненциальной модели. Проверим несмещенность:
$ET^* = E\frac{\bar{X}}{lambda} = \frac{1}{\lambda}E\bar{X} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{n}E\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{n\lambda\theta}{n\lambda} = \theta = \tau(\theta)$
Мат. ожидание оценки параметра равно самому параметру, следовательно, оценка несмещенная.
Т.к. оценка эффективная, то можно определить ее дисперсию как:
$D_\theta T = \frac{\tau'(\theta)}{nA'(\theta)} = \frac{\theta^2}{\lambda n}$
Очевидно, что дисперсия стремится к нулю с ростом n, следовательно, оценка состоятельная.
Полученная оценка эффективная, значит она так же оптимальна (т.к. не будет лучше, чем нижняя граница в неравенстве Рао-Крамера)

2 Выборочные параметры распределения Бореля-Таннера

2.1 Среднее

$n = 5$
7.2
5.8
5.6
6.0
8.4
$n = 10$
6.7
6.7
7.3
7.2
5.8
$n = 100$
6.75
6.58
6.78
6.76

6.62

$n = 1000$

6.622
6.727
6.634
6.733
6.761

$n = 100000$

6.66641
6.66666
6.67107
6.67369
6.66809

2.2 Дисперсия

$n = 5$

12.2
4.199999999999999
3.3
1.5
6.3

$n = 10$

5.788888888888889
3.3444444444444446
11.566666666666668
12.400000000000002
2.6222222222222222

$n = 100$

11.058080808080808
6.2056565656565645
7.971313131313131
9.456969696969697
8.076363636363636

$n = 1000$

7.542658658658659
6.895366366366367
7.095139139139139
7.9436546546546545
8.00188088088088

$n = 100000$

7.438962101521015
7.3807982523825215
7.366628721387214
7.4863466473664735
7.444580197701977

2.3 Оценки для распределения Бореля-Таннера

Функция правдоподобия для данного распределния содержит несокращающиеся произведения факториалов и переменных, и это так же не является распределением экспоненциальног осемейства, т.к. в функции распределения сумма составных функций в экспоненциальной форме - следовательно не получится представить в виде, подходящеи для распределения экспоненциального семейства. Воспользуемся методом моментов: возьмем 1й момент и 2й центральный момент

$m_1 = \bar{x} = \frac{r}{1-\alpha}$

$m_2 = S_x^2 = \frac{r}{(1-\alpha)^3}$

Вначале, найдем оценку для параметра r:

$r = -\frac{m_1^2 - m_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{m_1 + 4m_2}}{2m_2}$

$r = -\frac{m_1^2 - m_1^2 \sqrt{1 + 4\frac{m_2}{m_1}}}{2m_2}$

$r = -\frac{1 - \sqrt{1 + 4m_1 \frac{m_2}{m_1^2}}}{2\frac{m_2}{m_1^2}}$

$\frac{m_2}{m_1^2} = \frac{S_x^2}{\bar{x}^2}$ - коэффициент вариации v

$r = \frac{\sqrt{1+4\bar{x}v} - 1}{2v}$

Т.к. r - принимает целые значения (кол-во человек в начале очереди), так что надо прибавить 0.5 и взять целую часть:

$r = [\frac{\sqrt{1+4\bar{x}v} - 1}{2v} + 0.5]$

Выразим второй параметр:

$\alpha = 1 - \frac{r}{\bar{x}}$