Работа над ошибками КР

Дородный Дмитрий СКБ172

2 декабря 2019 г.

1 №1

Оценка параметра θ в распределении Вейбулла с плотностью
$f(x,\theta) = \lambda(\frac{x}{\theta})^{\lambda-1}e^{-(\frac{x}{\theta})^{\lambda}}$
Используем метод моментов:
для начала посчитать математическое ожидание и дисперсию
$E = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x\lambda(\frac{x}{\theta})^{\lambda-1}e^{-(\frac{x}{\theta})^{\lambda}}dx$
Замена: $(\frac{x}{\theta})^{\lambda} = t$
$dt = \lambda(\frac{x}{\theta})^{\lambda-1}dx$
$x = \theta t^{\frac{1}{\lambda}}$
$E = \int_0^{\infty} \theta t^{\frac{1}{\lambda}}e^{-t}dt$
$E = \theta\Gamma(\frac{1}{\lambda}+1)$
$D = E(x^2) - (Ex)^2$
$E(x^2) = \int_0^{inf} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2\lambda(\frac{x}{\theta})^{\lambda-1}e^{-(\frac{x}{\theta})^{\lambda}}dx$
$E = \int_0^{\infty} \theta^2 t^{\frac{2}{\lambda}}e^{-t}dt$
$E = \theta^2\Gamma(\frac{2}{\lambda}+1)$
$D = \theta^2(\Gamma(\frac{2}{\lambda}+1) - (\Gamma(\frac{1}{\lambda}+1))^2)$
По методу моментов заменим на выборочные:
$\theta^* = \frac{\bar{x}}{\Gamma(\frac{1}{\lambda}+1)}$
Где λ оцениваится как решение уравнения
$1 + \frac{S_x^2}{\bar{x}^2} = \frac{\Gamma(\frac{2}{\lambda}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\lambda}+1)}$
Так же можно представить функцию плотности в виде:
$f(x,\theta) = exp(A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x))$
$f(x,\theta) = exp(\frac{1}{\theta^{\lambda}}x^{\lambda} - (\lambda-1)\ln(\theta) + (\lambda-1)\ln(x) + \ln(\lambda))$
И найти эффективную и оптимальную оценку из экспоненциального семейства.

2 №3

Найти информацию Фишера за n независимых наблюдений и найти нажнюю границу дисперсий несмещенных оценок для $\tau(\theta) = ln(\theta)$ в выборке из геометрического распределения: $P(\zeta = k) = (1-\theta)^k\theta$

$i(\theta) = E_\theta(\frac{\partial^2 \ln(P(k,\theta)}{\partial\theta^2})$
$\ln(P) = k\ln(1-\theta) + \ln\theta$
$\frac{\partial \ln P}{\partial\theta} = -k\frac{1}{1-\theta} + \frac{1}{\theta}$
$i(\theta) = E(-k\frac{1}{1-\theta} + \frac{1}{\theta})^2$

$i(\theta) = E(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2k}{\theta(1-\theta)} + \frac{k^2}{(1-\theta)^2})$
$i(\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{2}{\theta(1-\theta)}Ek + \frac{1}{\theta^2}E(k^2)$
$E(k^2) = Dk + (Ek)^2 = \frac{1-\theta}{\theta^2} + \frac{(1-\theta)^2}{\theta^2}$
$i(\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{2}{\theta(1-\theta)}\frac{(1-\theta)}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}(\frac{1-\theta}{\theta^2} + \frac{(1-\theta)^2}{\theta^2})$
$i(\theta) = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^2} + \frac{1}{(1-\theta)\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}$
$i(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)\theta^2}$

Т.к. функция два раза дифференцируема по θ, можно так же получить информацию Фишера как:
$i(\theta) = -E(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln(P))$
$i(\theta) = -E(\frac{-k}{(1-\theta^2)} - \frac{1}{\theta^2})$
$i(\theta) = \frac{Ek}{(1-\theta)^2} + \frac{1}{\theta^2}$
$i(\theta) = \frac{(1-\theta)}{(1-\theta)^2\theta} + \frac{1}{\theta^2}$
$i(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)\theta} + \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{(1-\theta)\theta^2}$
Что, как можно заметить, совпадает с результатом, полученным раньше.
Далее найдем нижнюю границу в неравенстве Рао-Крамера для параметра $\tau(\theta) = \ln(\theta)$:
$D_\theta T = \frac{(\tau'(\theta))^2}{ni(\theta)}$
$D_\theta T = \frac{1}{\theta^2}\frac{(1-\theta)\theta^2}{n}$
$D_\theta T = \frac{(1-\theta)}{n}$

3 №4

Найти оптимальную оценку для параметра e^{θ^2} из распределения $\frac{1}{\theta-a}$
т.к. носителем распределения является отрезок $[a,\theta]$, а плотности имеет вид $f(x,\theta) = Q(\theta)M(x), a \leq x \geq \theta$, найдем оптимальную оценку параметра как:
$\tau^* = \tau(X_n) + \frac{\tau'^{X_n}}{nf(X_n,X_n)}$ $\tau^* = e^{{X_n}^2} + \frac{2X_n e^{{X_n}^2}(X_n-a)}{n} = \frac{e^{{X_n}^2}(n+2(X_n-a)X_n)}{n}$