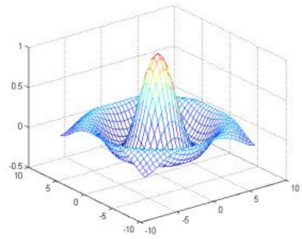
2020 年高斯杯数学建模联赛



基于蒙特卡洛方法的上证50ETF期权定价研究

摘要

本文以上交所提供的上证 50ETF 期权数据为研究对象，使用蒙特卡罗方法建立科学的期权的定价模型。

首先根据期权定价公式

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt}\right]$$

找出来所有的影响因因素，根据其中含有的变量对我们的原始数据进行筛选整理。以四所中间商 10002565.SH，10002566.SH，10002567.SH，10002568.SH 的报价为基础，对 4 张表中初始价格，到期价格，持有周期，无风险收益率进行整合，另外算出价格波动率。同时判断出 4 只里两只是看跌期权，两只是看涨期权，并在模型中分类设计：做多看涨期权和做多看跌期权两种收益情况。

然后选择用蒙特卡洛的方法来模拟多次价格走势，4 所中间商价格表下各自发掘了 10000 种股票走势的可能，为了让我们的运算速度更快，我们将定价公式 log 化。用初始价格和我们的行权价格作差，讨论看涨期权时挑出正值的结果，求和后平均，得到利润的平均值；讨论看跌期权时则反之。获得利润均值后，用公式

$$c = E(C_T)e^{-r(T-t)}$$

算出真实的期权价值。

最后我们通过大幅度提高随机次数，达到所需的精度，用 MSE 大小和灰色关联度来对比检查我们的蒙特卡洛计算平均结果和实际的期权价格之间是否有较小误差。

们发现蒙特卡罗方法模拟计算出来的价格趋势图和合约价格趋势图非常相似，MSE 较小，说明误差较小，是个成功的模型。

关键词：期权定价；ETF 期权；蒙特卡洛法；灰色关联分析。

一、问题重述

期权是可以交易的权力，拥有明确的价格是交易的前提，所以期权的定价对于买者，卖着以及中间商都十分重要。期权使消费者更好的控制风险，比如对期权买方来说，不论未来的价格变动到什么位置，其可能面临的最大损失只不过是权利金和手续费而已，而同时卖方也有机会在卖出后获得一份权利金。由于我国金融市场仍处于初步发展阶段，需要探索更多期权定价的工具，帮助投资者们作出更好的选择。

蒙特卡洛建模简单直接且合理，而且没有把波动率当成常数来处理，更符合实际情况；并且原始数据中只需研究上证 300 和 500，6 月 2 日到 7 月 22 日的欧式期权定价，不需要考虑复杂的其他的标的物的相关性，蒙特卡洛的方法更适合普通投资者。

以下是我们建模中讨论的问题：

问题 1，对上交所的数据进行探索性数据分析

问题 2，分析导致模型产生的数据和实际期权定价结果差异的因素

二、问题分析

期权合约无论是看涨还是看跌，本质而言，都规避了风险，但从另一个角度看，可以把这份对风险的规避理解为一份现金流，以看涨期权为例，若到期日看涨期权的标的资产的价格高于行权价，那么期权合约的持有者便获得了这份差额的现金流。因此，基于这个思路，期权的定价与其他证券产品如股票、债券类似，均是对未来现金流的折现。因而，对期权产品的合理定价，即转化为了对期权合约带来的未来现金流的合理估计，即对其标资产价格的合理估计；但是仅仅对未来现金流的预测是不够的，仍需要对折现率进行选择。因而，综合而言，对期权合约的合理定价，转化为了，对标的资产价格的合理变动，以及对折现率选取的两方面问题。

三、基本假设

为了简化问题，做出如下合理假设：

（1） 标的资产价格对数服从标准布朗运动。

（2） 市场不存在套利条件，即现金流的折现率为无风险利率：0.015.

（3） 不考虑标的资产的股息，以及购买期权合约的相关费用。

四、符号说明

符号	说明
S_T	T 时刻标的资产的价格
σ	年化标的资产的历史波动率
ε	服从标准正态分布的随机数
r	年化无风险收益率
$\Delta t, dt\ or\ T-t$	年化的时间间隔
C_T / P_T	期权合约到期收益
c	期权合约价值

K	行权价格

五、模型建立与求解

5.1 模型建立极其求解

在具体建立模型之前，我们先对期权合约的收益进行说明：

对于看涨期权，当标的资产价格S_T大于行权价格K时，则买家将行权，获得价差所带来的收益，当标的资产价格S_T小于或者等于行权价格K时，买家将不行权，因此不产生任何的收益；对于看跌期权而言，情况相反。综合而言，期权合约的收益可由式（1）、（2）表示，其中（1）为看涨期权，（2）为看跌期权。

$$C_T = Max\,(S_T - K, 0) \tag{1}$$

$$P_T = Max\,(K - S_T, 0) \tag{2}$$

我们的模型为标的资产价格的对数服从标准布朗运动的偏微分方程模型，以及无限连续复利的贴现模型。如方程（1）、（2）所示。

$$dlnS\ = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt} \tag{3}$$

$$c = E(C_T)e^{-r(T-r)} \tag{4}$$

为了满足对模型后有效性的检验，首先我们筛选出样本数据满足我们有效性检验的合约编号从 10002565.SH 至 10002568.SH 的四份期权合约进行研究和分析。随后，我们采用标的资产前 1 个月的日平均波动率来计算标的资产的年化波动率。接着我们便进行蒙特卡洛过程。蒙特卡洛过程即模拟（3）式中标的资产的价格随着时间的变化，最终得到期权合约到期日的标的资产价格，从而计算出期权合约的收益；对于每份期权合约的标的资产，我们设定蒙特卡洛模拟次数为 10000 次来尽可能地使标的资产的价格在满足标准布朗运动的假设下接近其真实的分布状态，图一可视化了这个过程。最后，我们计算出由蒙特卡洛模拟得到的每份期权合约的平均收益即预期收益，再结合（4）式得到期权合约的定价。

然后我们计算 MSE，根据数据分析我们发现 MSE 的结果越趋近于 0，拟合效果越好。而根据公式计算，MSE 的结果为：8.4987e-05。

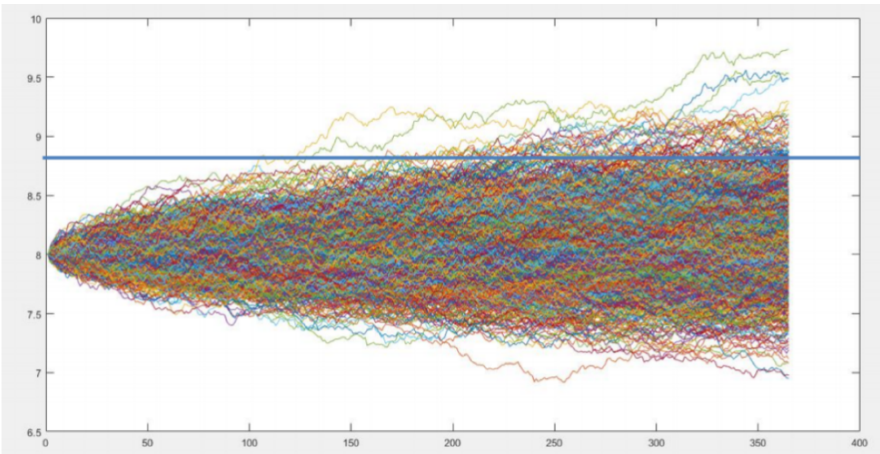


图 1 标的资产价格蒙特卡洛过程[1]

5.2 模型结果及评价

我们对四份期权合约从 2020 年 6 月 2 日至 2020 年 7 月 22 日的每日的期权价格都进行了上述的蒙特卡洛数值定价。其结果如图 2 所示。总体而言，蒙特卡洛过程计算出的期权合约的价格和其真实的市场价格的相近程度是非常高的，从数值的大小以及期权价格的变化趋势而言均是如此。为了进一步检验模型的定价效果，我们对四份合约的真实价格和蒙

[1]图1的作用仅为了展现蒙特卡洛过程，参数与四份期权合约的参数不同

特卡洛模拟出的价格进行了灰色关联分析并且计算了 MSE 的大小。

灰色关联分析结果如表 1 所示，证明了该模型在期权定价的表现是非常不错的。

期权合约	10002565.SH	10002566.SH	10002567.SH	10002568.SH
灰色关联分析结果	0.6171	0.7129	0.7368	0.6080

表 1 灰色关联分析结果

MSE 的结果如表 2 所示，MSE 从误差的角度也说明了模型的拟合效果是非常出色的。

期权合约	10002565.SH	10002566.SH	10002567.SH	10002568.SH
MSE 结果	0.0001	0.0005	0.0001	0.0013

表 2 MSE 结果

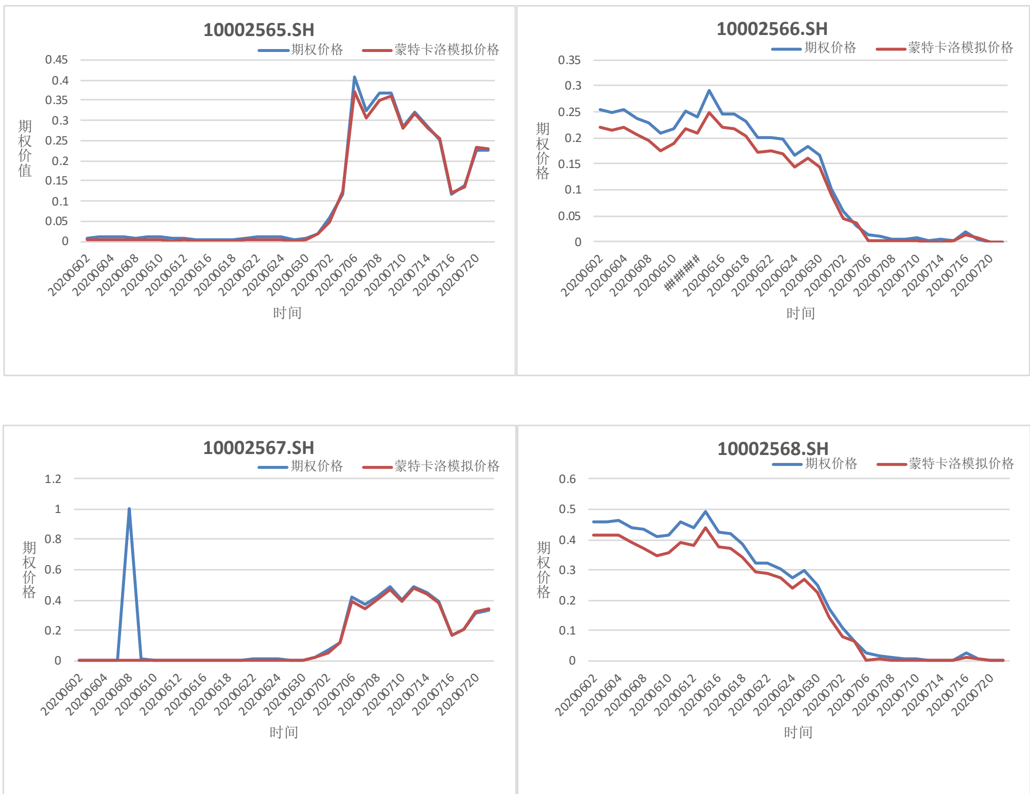


图 2 蒙特卡洛方法拟合结果

六、模型评价及推广

6.1模型优点

首先本文利用蒙特卡罗模拟方法对上证 50ETF 期权市场价格进行研究，进而对比分析上证 50ETF 期权的理论价值和实际价格，从而判断这种定价方法在我国证券市场期权定价中的有效性。该分析不仅能够为投资者积累相当的理论经验，有助于投资者理性投资，还能为做市商开展做市业务提供指引，为做市商维持市场流动性提供保障[2]。

其次在判断该模型的有效性时除了折线图的直观可视化比较，我们还将蒙特卡罗模拟出的定价与真实定价进行了灰色关联分析，进而判断期权定价模型的准确性。

6.2模型缺点

期权的理论价值是由行权方式，行权价格，标的资产的波动率，到期期限等综合因素决定的。由于在实际的交易过程中，存在股息，分红等其他因素，而这些因素也同样影响

着期权的价值。在本文的研究过程中，为了简化多资产期权的定价研究，我们假设其标的资产不分红，不派息，而这一点与现实交易是不相符的，有待改进[1]。

同时我们还假设无风险收益率不变，为0.015。但是在实际的金融市场中，无风险收益率并不是常数，而是一个随机过程，这一因素对期权定价模型的影响比较大。

而蒙特卡罗法的缺点也显而易见：模拟次数过多、运行速度缓慢，且较难处理提前行权的衍生证券，例如美式期权。

6.3 推广与改进

在进行期权定价时采用蒙特卡罗模拟方法的主要优点在于：既可用于当收益仅依赖于S_0（初始价格）和S_T（到期日价格）的情形，又可用于收益依赖于标的变量 S 路径的情形（例如，该方法可用于收益依赖于 S在 0 和 T 之间的平均值的情形）。然而期权提供的收益不仅仅只是发生在期末，也有可能在剩余期限内的某个时刻。任何关于 S 的随机过程均可采用这一方法。同时这里所描述的过程也可适用于收益与若干标的变量有关的情形[1]。此外，蒙特卡罗模拟适用于各种形态复杂的奇异期权，如亚式期权、障碍期权与回望期权我们可以将上证50ETF的期权定价模型推广到黄金、原油、农产品等其他期货品种，但是由于上证50ETF可以做空的特殊性，我们要注意公式的适用情形。对于无风险收益率为常数的缺点，我们可以参考Vasicek在1997年提出的Vasicek模型，COX、Ingersoll、Ross提出的CIR模型等。或者可以使用合约期间每日的上海Shibor（上海银行间同业拆放利率）作为无风险利率的参考值[3]。考虑到蒙特考罗数值模拟方法在运算次数、运算效率和运算精确度几个方面的矛盾，可以用到对偶变量法和拟蒙特卡罗方法等方法来缓解这个矛盾并且给出更为理想的结果[4]。

对偶变量法的基本思路是：在计算期权价值的时候同时计算两个值，一个是按照上述的方法计算的常规的数值；另一个则是改变公式中标准正态分布样本的符号（例如第一个值用的是 N，那么第二个就用 - N），再按上述方法计算得出的。那么计算出来的两个值一个比真实价格高，另一个比真实价格低，然后计算两个值得平均值，以此来作为期权的价格[5]。对于蒙特卡罗模拟次数过多、运行速度缓慢的缺点,某些情形下采用拟蒙特卡罗方法可以改进蒙特卡罗方法的计算效率,拟蒙特卡罗方法的误差收敛速率更快,有着较高的估计精度。拟蒙特卡罗方法最新的发展方向是随机化拟蒙特卡罗和低有效维技这两种方法均致力于改进拟蒙特卡罗方法的估计效果最主要的两种降低有效维的技术是布朗桥与主成分[4]。

将方差减少技术与拟蒙特卡罗方法结合是另外一个研究方向,目前已有研究表明某些方差减少技术,如控制变量技术可以改进拟蒙特卡罗估计的效果,但对偶变量与分层抽样技术应用于拟蒙特卡罗方法则无丝毫改进。用蒙特卡罗方法为美式期权定价也是一个重要的研究方向。目前被普遍接受的美式期权定价的最小二乘蒙特卡罗模拟方法是由Longstaff和Schwartz在2001年提出的[4]。

七、参考文献

[1] 陈守涛王过京上证50ETF期权定价研究——基于多资产蒙特卡罗模拟苏州大学硕士专业学位论文 2015

[2] 方艳张元玺明哲上证 50ETF 期权定价有效性的研究: 基于 B-S-M 模型和蒙特卡罗模拟中图分类号: F830.9 文章标识码: A 文章编号: 1007-3221(2017) 08-0157-10 doi: 10.12005 /orms.2017.0199

[3] 何晓静尹居良期权定价的蒙特卡罗数值计算方法研究暨南大学理学、概率论与数理统计硕士学位论文

[4] 李亚妮刘新平蒙特卡罗方法及其在期权定价中的应用陕西师范大学应用数学硕士学位论文2007.5

[5] 管卢山刘国祥上证50ETF期权定价研究南京师范大学应用统计硕士学位论文2018

附录-期权合约波动率代码、蒙特卡洛过程代码及灰色关联分析代码

```
%计算波动率
%导入需要计算的数据
load('stock.mat')

%计算两个指标每天的波动率，第一列为上证50，第二列为沪深300，第三列为ID用来标注
df1 = x(:,[1,3]);%上证50
df2 = x(:,[2,3]);%沪深300

%需要计算的范围(时间需要为244-278表示的是06-02到07-22)
dates = 244:278;
%计算每一天的波动率
%新建存储波动率的变量
vol1 = zeros(length(dates),1);
vol2 = zeros(length(dates),1);
for i = 1:length(dates)
    %提取出计算波动率的范围
    d1 = df1(dates(i)-29:dates(i)+1,1);
    %log处理以及求差值
    d1_log = diff(log(d1));
    %计算波动率
    vol1(i) = std(d1_log) * (252^0.5);

    %提取出计算波动率的范围
    d2 = df2(dates(i)-29:dates(i)+1,1);
    %log处理以及求差值
    d2_log = diff(log(d2));
    %计算波动率
    vol2(i) = std(d2_log) * (252^0.5);
end

%% 测试一组数据
%初始价格
price0 = 2.879;
%年化收益率(无风险)
r = 0.015;
%收益率波动
vol = 0.13254625345346;
%步长为正数
d = 5;
%存蓄期
deta_t = 0.136986301369863;
%模拟次数
N = 100000;
%行权价格
price1 = 3.1;
profit = cal(price0,r,vol,d,deta_t,N,price1);
```

```
%% 跑10002565.SH数据，欧式看涨
load('X1.mat')
%每一组都跑一次数据
[m,n] = size(X1);
%新建值存储数据
profits = zeros(m,1);
for j = 1:m
    N = 10000;%蒙特卡洛模拟次数
    price0 = X1(j,4);
    r = X1(j,5);%无风险收益率
vol = X1(j,6);%波动率
    d = 5;%步长
deta_t = X1(j,3);%存蓄期
    price1 = X1(j,2);%行权价格
    profit = cal(price0,r,vol,d,deta_t,N,price1);%计算得到的值
    profits(j) = profit;
end
disp('蒙特卡罗定价结果：')
disp(profits)
%计算MSE
y = X1(:,1);
y_ = profits;
mse = sum((y - y_) .^ 2) / m;
disp('MSE结果为：')
disp(mse)

%% 跑10002566.SH数据，欧式看跌
load('X2.mat')
%每一组都跑一次数据
[m,n] = size(X2);
%新建值存储数据
profits = zeros(m,1);
for j = 1:m
    N = 10000;%蒙特卡洛模拟次数
    price0 = X2(j,4);
    r = X2(j,5);%无风险收益率
vol = X2(j,6);%波动率
    d = 5;%步长
deta_t = X2(j,3);%存蓄期
    price1 = X2(j,2);%行权价格
    profit = cal1(price0,r,vol,d,deta_t,N,price1);%计算得到的值
    profits(j) = profit;
end
disp('蒙特卡罗定价结果为：')
disp(profits)
%计算MSE
y = X2(:,1);
```

```
y_ = profits;
mse = sum((y - y_) .^ 2) / m;
disp('MSE结果为：')
disp(mse)

%% 跑10002567.SH数据，欧式看涨
load('X3.mat')
%每一组都跑一次数据
[m,n] = size(X3);
%新建值存储数据
profits = zeros(m,1);
for j = 1:m
    N = 10000;%蒙特卡洛模拟次数
    price0 = X3(j,4);
    r = X3(j,5);%无风险收益率
vol = X3(j,6);%波动率
    d = 5;%步长
deta_t = X3(j,3);%存蓄期
    price1 = X3(j,2);%行权价格
    profit = cal(price0,r,vol,d,deta_t,N,price1);%计算得到的值
    profits(j) = profit;
end
disp('蒙特卡罗定价结果：')
disp(profits)
%计算MSE
y = X3(:,1);
y_ = profits;
mse = sum((y - y_) .^ 2) / m;
disp('MSE结果为：')
disp(mse)

%% 跑10002568.SH数据，欧式看跌
load('X4.mat')
%每一组都跑一次数据
[m,n] = size(X4);
%新建值存储数据
profits = zeros(m,1);
for j = 1:m
    N = 10000;%蒙特卡洛模拟次数
    price0 = X4(j,4);
    r = X4(j,5);%无风险收益率
vol = X4(j,6);%波动率
    d = 5;%步长
deta_t = X4(j,3);%存蓄期
    price1 = X4(j,2);%行权价格
    profit = cal1(price0,r,vol,d,deta_t,N,price1);%计算得到的值
    profits(j) = profit;
end
```

```
disp('蒙特卡罗定价结果为：')
disp(profits)
%计算MSE
y = X4(:,1);
y_ = profits;
mse = sum((y - y_) .^ 2) / m;
disp('MSE结果为：')
disp(mse)

%导入我们需要的计算的矩阵
X = […]
%计算矩阵的大小
[m,n] = size(X);
%进行标准化
%计算每一列的均值
X_mean = mean(X);
X_now = X ./ repmat(X_mean,m,1);
%确定母序列和子序列
Y = X_now(:,1);
XS = X_now(:,2:end);
X_result = abs(XS - repmat(Y,1,n-1));
%取出最大值和最小值
a = min(min(X_result));
b = max(max(X_result));
%计算关联系数
   ratio = (a + 0.5*b) ./ (X_result + 0.5*b);
%每一列的均值
   x_ratio = mean(ratio);
disp("灰色关联度为:")
disp(x_ratio)

%计算MSE
y = X1(:,1);
y_ = profits;
mse = sum((y-y_)^2)/m;
disp(‘MSE的结果为：’)
disp(mse)
```