

دانشکده مهندسی برق
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

پروژه کنترل مدرن

کنترل کوادکوپتر

استاد درس: دکتر عطریان فر

سپهر جهانگیری ۹۹۲۳۰۱۶

محدثه رضایی ۹۹۲۳۰۳۴

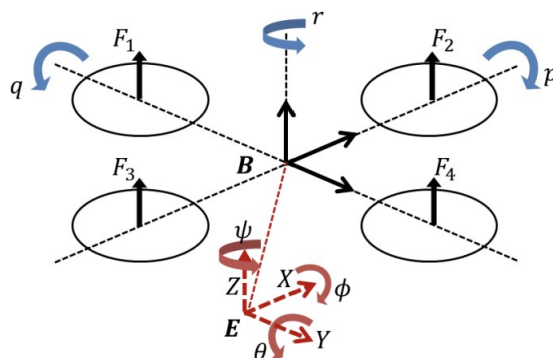
سینا فاضل ۹۹۲۳۰۵۸

درسا رحمتی ۹۹۲۳۱۱۰

فهرست مطالب

۴	۱ مقدمه
۴	۱.۱ معرفی سیستم
۶	۲ خطی سازی و قطری سازی
۶	۱.۲ مدل غیر خطی
۷	۲.۲ خطی سازی
۸	۳.۲ فرم قطری بلوکی جردن
۹	۳ تابع تبدیل، ماتریس انتقال حالت و حذف فرکانس خاص
۹	۱.۳ ماتریس تبدیل
۱۰	۲.۳ ماتریس انتقال حالت
۱۰	۳.۳ حذف فرکانس به ازای حالت اولیه خاص
۱۱	۴.۳ پاسخ ورودی های مختلف
۱۲	۴ بررسی پایداری کنترل پذیری و رویت پذیری
۱۲	۱.۴ مقادیر ویژه و چندجمله ای مینیمال
۱۲	۲.۴ پایداری
۱۲	۳.۴ کنترل پذیری و رویت پذیری
۱۳	۵ پیاده سازی، مدل خطی و غیرخطی در <i>simulink</i>
۱۳	۱.۵ مدل خطی
۱۳	۲.۵ مدل غیرخطی
۱۴	۳.۵ <i>simulink</i>
۱۴	۴.۵ بررسی دقت مدل خطی
۱۸	۶ طراحی کنترلر به روش جایابی قطب
۱۸	۱.۶ تنظیم
۱۹	۲.۶ تعقیب با پیش جبران ساز استاتیکی
۱۹	۳.۶ تعقیب با پیش جبران ساز دینامیکی

۱.۱ معرفی سیستم



شکل ۱.۱: متغیرهای حالت کوادروتور

کوادکوپترها دارای چهار موتور، با پیکربندی صلیبی شکل هستند. با کنترل سرعت چرخشی هرکدام از این موتورها می‌توان position و orientation کوادروتور را کنترل کرد. برای توصیف موقعیت و جهت گیری از ۶ متغیر به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

متغیرهای حالت:

از ۹ متغیر توصیف کننده position (X, Y, Z) ، orientation (ϕ, θ, ψ) و سرعت خطی (V) و ۳ متغیر p, q, r استفاده می‌کنیم.

$$x^T = \begin{pmatrix} X & \dot{X} & Y & \dot{Y} & Z & \dot{Z} & \phi & \theta & \psi & p & q & r \end{pmatrix}$$

خروجی های سیستم:

همچنین متغیرهای position و ψ را به عنوان خروجی در نظر می‌گیریم.

ورودی های سیستم:

ورودی های u_1 تا u_4 را به شکل زیر، تابعی از سرعت چرخش موتورها، بدست می آوریم. (l : فاصله

بین مرکز کوادروتور و مرکز موتورها، b : *thrust factor*، d : *drag factor*)

$$\begin{cases} u_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ u_2 = l.b(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ u_3 = l.b(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\ u_4 = d(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2) \end{cases}$$

ثابت های سیستم:

طبق مقاله ثابت های زیر را استفاده خواهیم کرد:

$$I_{xx} = 2.3 \times 10^{-3} [Kg.m^2] \quad I_{yy} = 2.3 \times 10^{-3} [Kg.m^2] \quad I_{zz} = 5.09 \times 10^{-3} [Kg.m^2]$$

$$m = 1[kg] \quad g = 9.806[m/s^2]$$

۲ خطی سازی و قطری سازی

۱.۲ مدل غیر خطی

مدل غیرخطی سیستم:

برای بدست آوردن مدل غیرخطی سیستم ابتدا مشتق متغیرهای حالت را بدست میاوریم:

$$\begin{cases} \ddot{X} = (\cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi)) \frac{u_1}{m} \\ \ddot{Y} = (\cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) + \sin(\phi) \cos(\psi)) \frac{u_1}{m} \\ \ddot{Z} = \cos(\theta) \cos(\phi) \frac{u_1}{m} - g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + q \sin(\phi) \tan(\theta) + r \cos(\phi) \tan(\theta) \\ \dot{\theta} = q \cos(\phi) - r \sin(\phi) \\ \dot{\psi} = q \sin(\phi) \sec(\theta) - r \cos(\phi) \sec(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{u_2}{I_{xx}} + \frac{qr(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \\ \dot{q} = \frac{u_3}{I_{yy}} + \frac{pr(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{u_4}{I_{zz}} + \frac{pq(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \end{cases}$$

بنابراین معادله حالت به صورت زیر می شود:

$$F = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ u_1 (\sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta)) \\ \dot{Y} \\ -u_1 (\cos(\psi) \sin(\phi) - \cos(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta)) \\ \dot{Z} \\ u_1 \cos(\phi) \cos(\theta) - \frac{4903}{500} \\ p + r \cos(\phi) \tan(\theta) + q \sin(\phi) \tan(\theta) \\ q \cos(\phi) - r \sin(\phi) \\ \frac{r \cos(\phi)}{\cos(\theta)} + \frac{q \sin(\phi)}{\cos(\theta)} \\ \frac{10000 u_2}{23} - \frac{279 q r}{230} \\ \frac{10000 u_3}{23} + \frac{279 p r}{230} \\ \frac{100000 u_4}{509} \end{pmatrix}$$

۲.۲ خطی سازی

نقطه تعادل:

برای پیدا کردن نقطه تعادل می گیریم $\dot{x} = 0$ ، بنابراین:

$$\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = \phi = \theta = \psi = p = q = r = 0$$

و همچنین ورودی به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} u_1 = mg \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{cases}$$

همچنین میدانیم در این نقطه تعادل، کوادروتور ثابت در هوا معلق می ماند.

خطی سازی:

سیستم خطی سازه شده حول نقطه تعادل ذکر شده به صورت زیر می شود.

[illegible]

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10000}{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10000}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{100000}{509} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۳.۲ فرم قطری بلوکی جردن

فرم قطری به صورت زیر می باشد:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

در این تبدیل تشابهی متغیرهای حالت جدید به فرم زیر می باشند:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} \frac{500 \dot{X}}{4903} & \frac{500 \ddot{X}}{4903} & \theta & q & Z & \dot{Z} & -\frac{500 \dot{Y}}{4903} & -\frac{500 \ddot{Y}}{4903} & \phi & p & \psi & r \end{array} \right)$$

۳ تابع تبدیل، ماتریس انتقال حالت و حذف فرکانس خاص

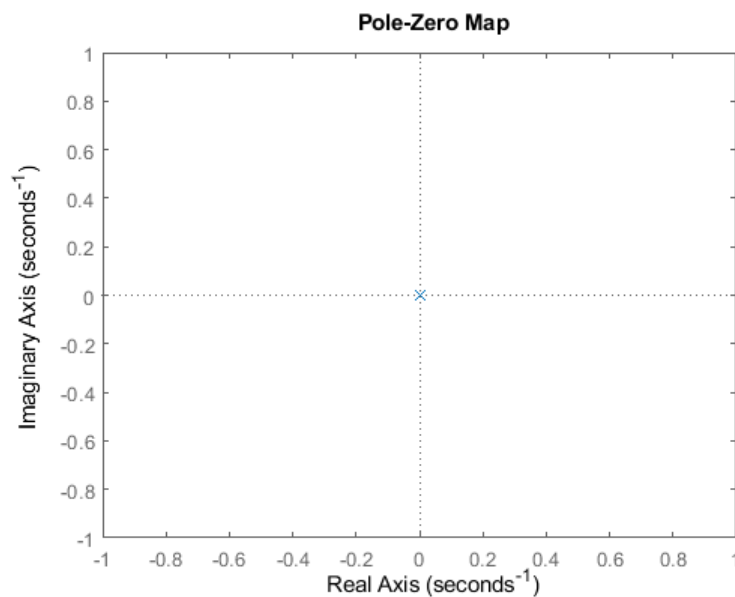
۱.۳ ماتریس تبدیل

ماتریس تبدیل به صورت زیر محاسبه میشود

$$G = C(SI - A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{98060}{23 s^4} & 0 \\ 0 & -\frac{98060}{23 s^4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{100000}{509 s^2} \end{pmatrix}$$

صفر و قطب های سیستم:

تمامی قطب ها روی مبدا میباشند



شکل ۱.۳: نمایش صفر و قطب های سیستم

۲.۳ ماتریس انتقال حالت

ماتریس انتقال حالت به صورت زیر محاسبه شده است

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(SI - A)^{-1}$$

که نتیجه صورت زیر میشود:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1.0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & -\sigma_3 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & t & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = -4.903 t^2$$

$$\sigma_2 = -9.806 t$$

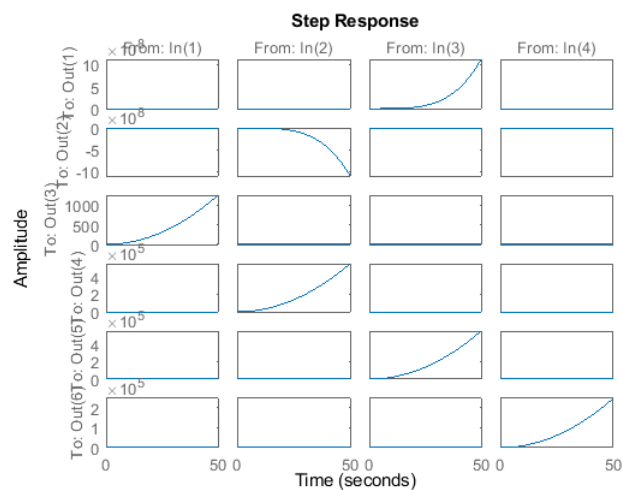
$$\sigma_3 = -1.63433 t^3$$

۳.۳ حذف فرکانس به ازای حالت اولیه خاص

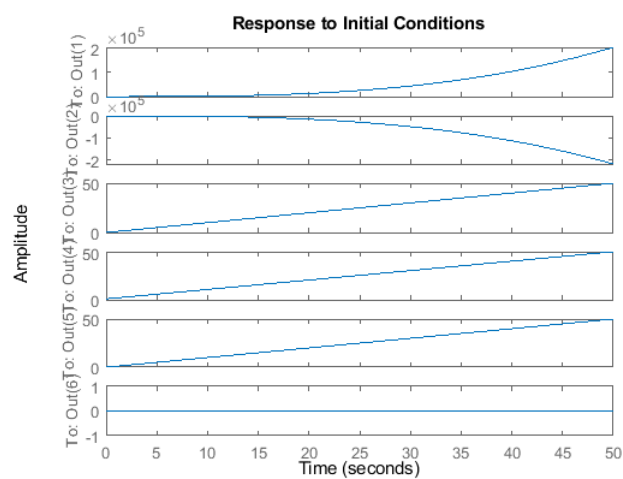
از آنجایی که سیستم تنها یک مقدار ویژه دارد حذف یک فرکانس خاص متناسب با حذف تمام فرکانس ها میباشد که این حالت به ازای حالت اولیه صفر اتفاق می افتد.

۴.۳ پاسخ ورودی های مختلف

شرایط اولیه را به صورت $x_0^T = [1, 0, 0.5, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0]$ می گیریم. پاسخ پله و پاسخ شرایط اولیه در شکل زیر آمده اند.



شکل ۲.۳: پاسخ پله



شکل ۳.۳: پاسخ ورودی اولیه

۴ بررسی پایداری کنترل پذیری و رویت پذیری

۱.۴ مقادیر ویژه و چندجمله ای مینیمال

تمامی مقادیر ویژه ماتریس حالت صفر میباشند و چندجمله ای مینیمال آن به صورت زیر میباشد:

$$mp(\lambda) = \lambda^4 \quad (1.4)$$

۲.۴ پایداری

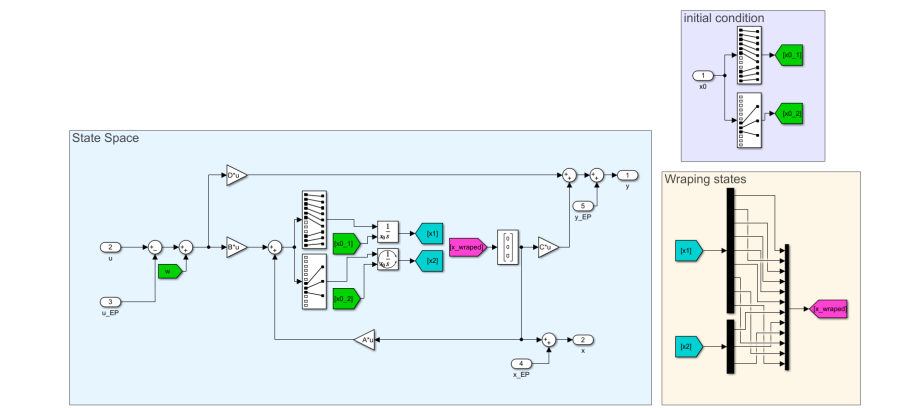
سیستم به دلیل قطب مکرر در صفر ناپایدار است و همچنین از آنجا که مقدار ویژه مکرر صفر در چندجمله ای مینیمال داریم سیستم ناپایدار درونی نیز میباشد.

۳.۴ کنترل پذیری و رویت پذیری

از آنجا که رنک ماتریس کنترل پذیری و رویت پذیری و کنترل پذیری خروجی کامل است میتوان نتیجه گرفت که سیستم کنترل پذیر و رویت پذیر و کنترل پذیر خروجی میباشد. ولی از آنجا که تعداد ورودی ها از خروجی ها کمتر است سیستم کنترل پذیر تابعی نیست. همچنین از آنجا که سیستم رویت پذیر و کنترل پذیر است نیازی به تجزیه کالمن نیست.

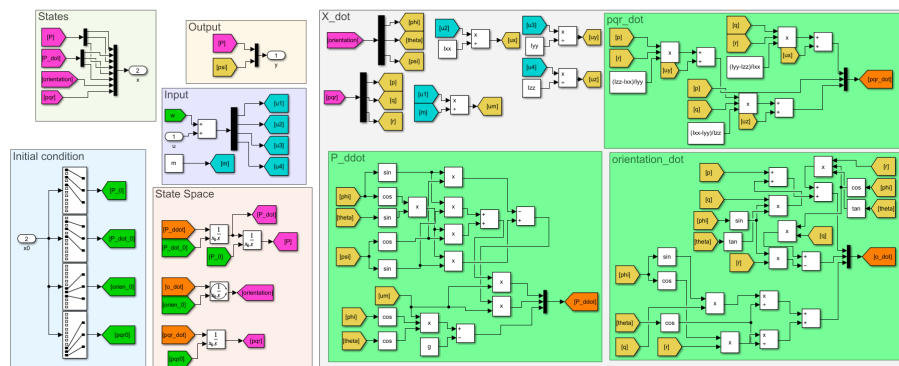
۵ پیاده سازی مدل خطی و غیرخطی در *simulink*

۱.۵ مدل خطی



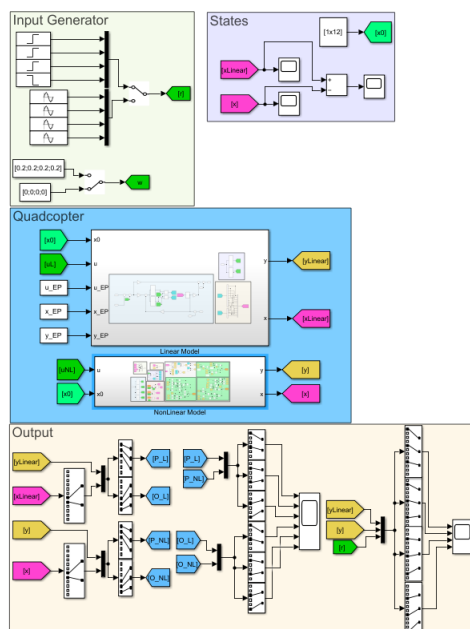
شکل ۱.۵: مدل خطی

۲.۵ مدل غیرخطی



شکل ۲.۵: مدل غیرخطی

۳.۵ *simulink*



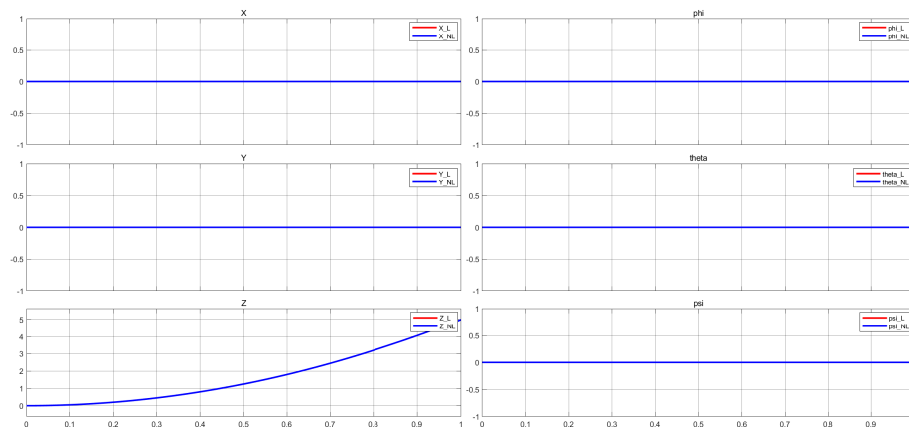
شکل ۳.۵: سیمولینک

۴.۵ بررسی دقت مدل خطی

حال Δu های مختلف کوچک را تست میکنیم تا دقت مدل خطی شده را بسنجیم. تمام شبیه سازی ها به ازای ورودی اولیه صفر انجام شده اند.

ورودی اول:

شکل زیر پاسخ سیستم غیر خطی و خطی را به ازای $\Delta u_1 = 10$ نشان میدهد.

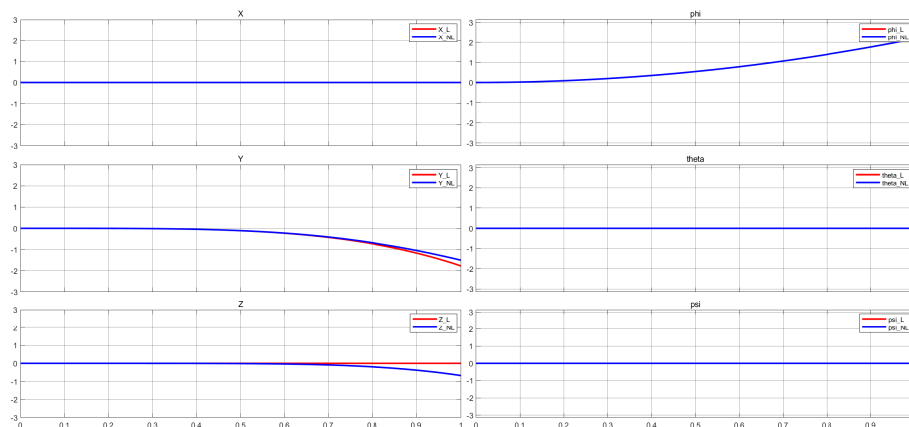


شکل ۴.۵: خروجی به ازای $\Delta u_1 = 10$

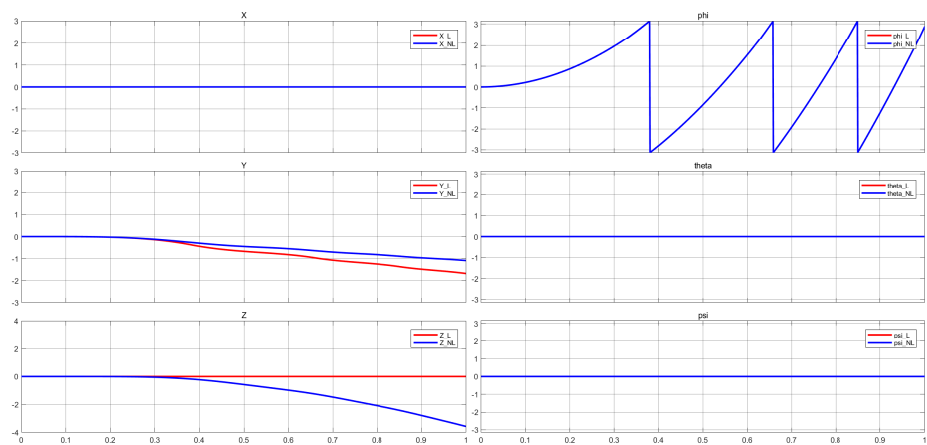
همانطور که مشاهده میشود سیستم غیرخطی و خطی کاملاً منطبق بر هم رفتار میکنند که نشان میدهد دامنه اطمینان مدل خطی برای ورودی اول بینهایت میباشد.

ورودی دوم:

شکل زیر پاسخ سیستم غیر خطی و خطی را به ازای $\Delta u_2 = 0.01, 0.1$ نشان میدهد.



شکل ۵.۵: خروجی به ازای $\Delta u_2 = 0.01, 0.1$

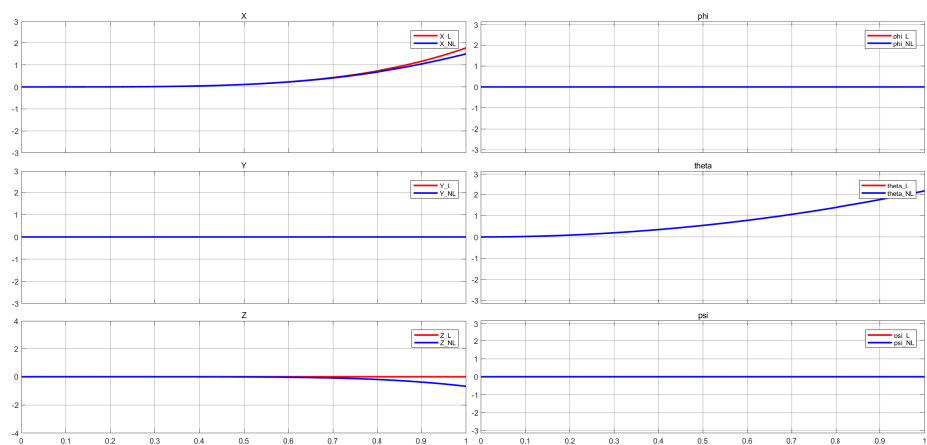


شکل ۶.۵: خروجی به ازای $\Delta u_2 = 0.1$

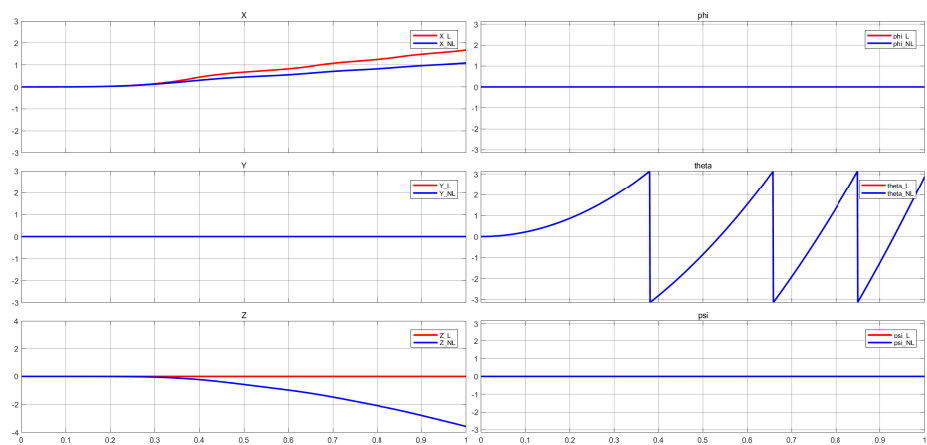
همانطور که مشاهده میشود مدل خطی زاویه ϕ را به خوبی محاسبه میکند و اندازه Y هم با خطای کمی محاسبه میشود. اما با بزرگ شدن ورودی و زمان تقریب سیستم خطی از خروجی Z بسیار با مدل غیرخطی اختلاف دارد.

ورودی سوم:

شکل زیر پاسخ سیستم غیر خطی و خطی را به ازای $\Delta u_3 = 0.01, 0.1$ نشان میدهد.



شکل ۷.۵: خروجی به ازای $\Delta u_3 = 0.01$

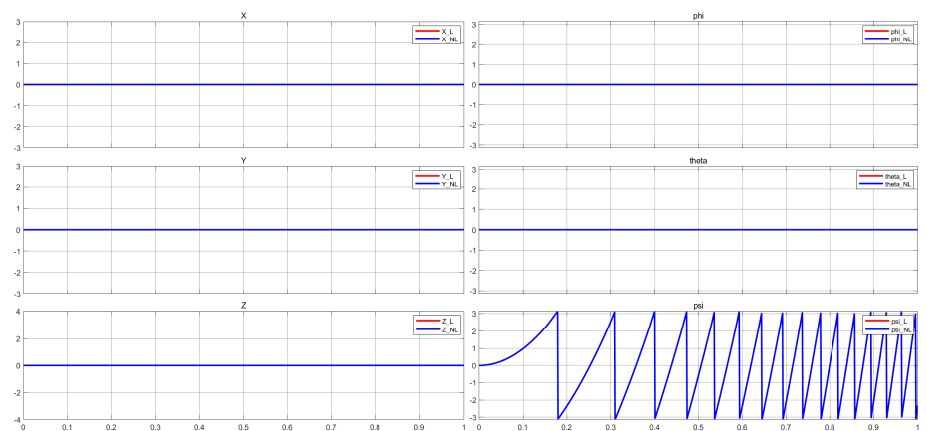


شکل ۸.۵: خروجی به ازای $\Delta u_3 = 0.1$

همانطور که مشاهده میشود مدل خطی زاویه θ را به خوبی اندازه X هم با خطای کمی محاسبه میشود. اما با بزرگ شدن ورودی تقریب سیستم خطی از خروجی Z بسیار با مدل غیرخطی اختلاف دارد.

ورودی چهارم:

شکل زیر پاسخ سیستم غیر خطی و خطی را به ازای $\Delta u_4 = 1$ نشان میدهد.



شکل ۹.۵: خروجی به ازای $\Delta u_4 = 1$

همانطور که مشاهده میشود سیستم غیرخطی و خطی کاملاً منطبق بر هم رفتار میکنند که نشان میدهد دامنه اطمینان مدل خطی برای ورودی اول بینهایت میباشد.

۶ طراحی کنترلر به روش جایابی قطب

۱.۶ تنظیم

در این قسمت معیار عملکردی خود را به صورت زیر قرار می دهیم:

$$T_s = 10s$$

$$P.O = 5\%$$

زمان نشست سیستم را زیاد می گیریم که سیستم تا حدودی کند باشد. در این صورت ورودی بزرگ نمی شود و سیستم از همسایگی خطی بودن خارج نمی شود.
 باتوجه به معیارهای ذکر شده، قطب های مطلوب در $-0.4 + j0.4$ و $-0.4 - j0.4$ قرار می گیرند و سایر قطب ها را نیز روی محور حقیقی و چند برابر این قطب ها قرار می دهیم. سپس با استفاده از دستور *palce* در متلب K را بدست می آوریم و $u = -Kx$ می گیریم.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.8 & 4.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0009 & -0.0012 & 0 & -0.0032 \\ 0 & 0 & 0.0396 & -0.0049 \\ 0 & 0.0166 & -0.0007 & 0 \\ 0.0025 & 0.0063 & -0.0033 & -0.0042 \\ 0 & 0 & 0.0173 & 0.0524 \\ 0 & 0.0024 & 0.0184 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0244 & 0 & 0 & 0.0224 \end{pmatrix}$$

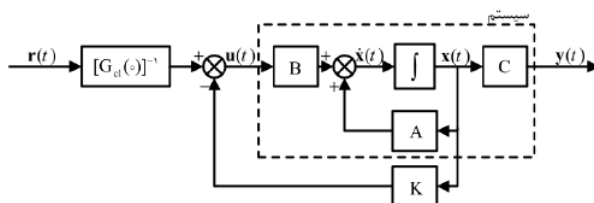
۲.۶ تعقیب با پیش جبران ساز استاتیکی

در این قسمت قصد طراحی پیش جبران ساز استاتیکی را داریم که ضمن پایدارسازی سیستم حلقه بسته، ورودی مرجع ثابت را تعقیب کند. در ابتدا مانند قسمت قبل K را محاسبه کرده و در مرحله بعد نیازمند محاسبه $G_{CL}^{-1}(0)$ می باشیم که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$G_{CL}(0) = -C(A - BK)^{-1}B$$

در آخر با محاسبه معکوس ماتریس بدست آمده u را به صورت زیر قرار می دهیم:

$$u(t) = -Kx(t) + G_{CL}^{-1}(0)r$$

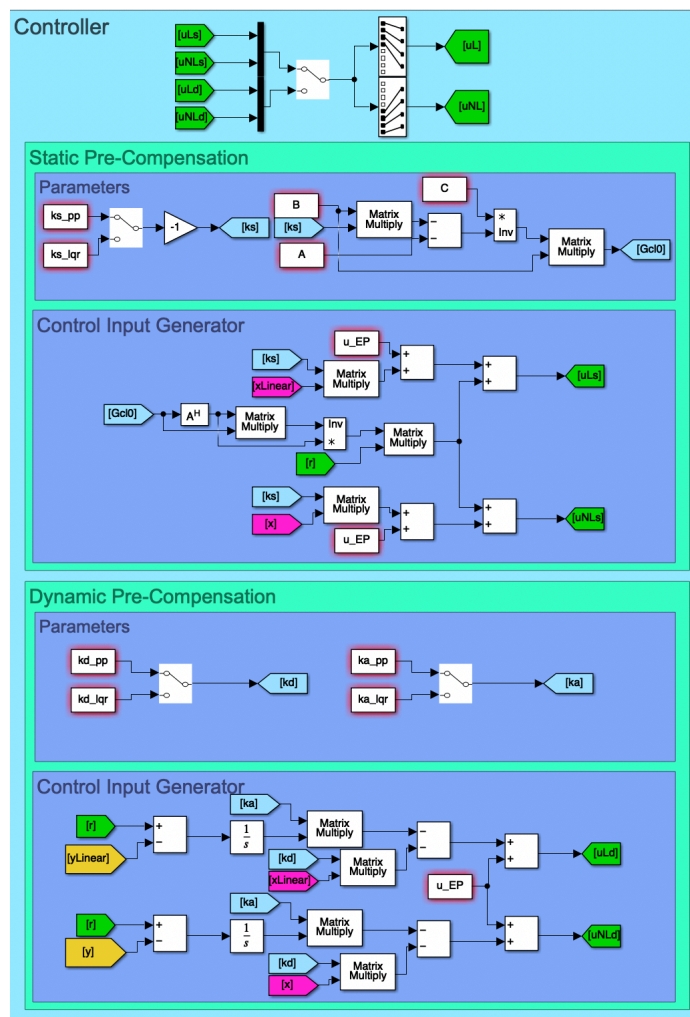


شکل ۱.۶: سیستم ردیاب با پیش جبران ساز ورودی مرجع

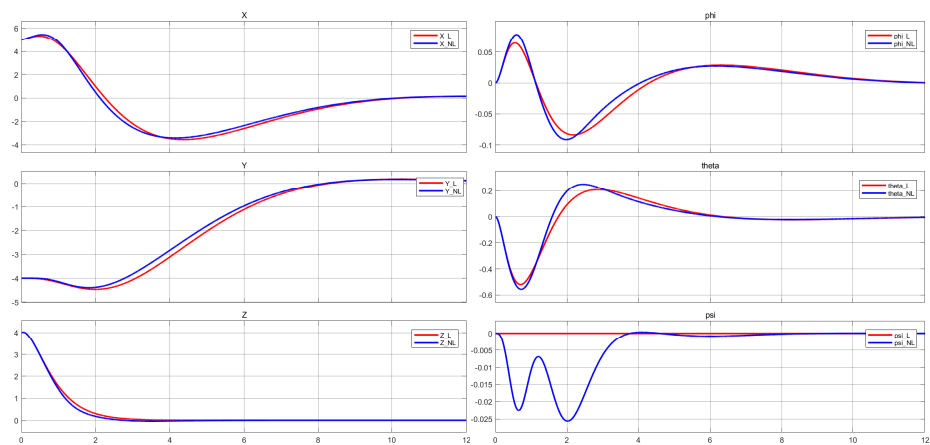
۳.۶ تعقیب با پیش جبران ساز دینامیکی

در این بخش به منظور طراحی پیش جبران ساز دینامیکی، یک انتگرال گیر قرار می دهیم و ماتریس A و B سیستم را به روز رسانی می کنیم. سپس با استفاده از دستور Place متلب، عملیات Placement Pole را انجام می دهیم.

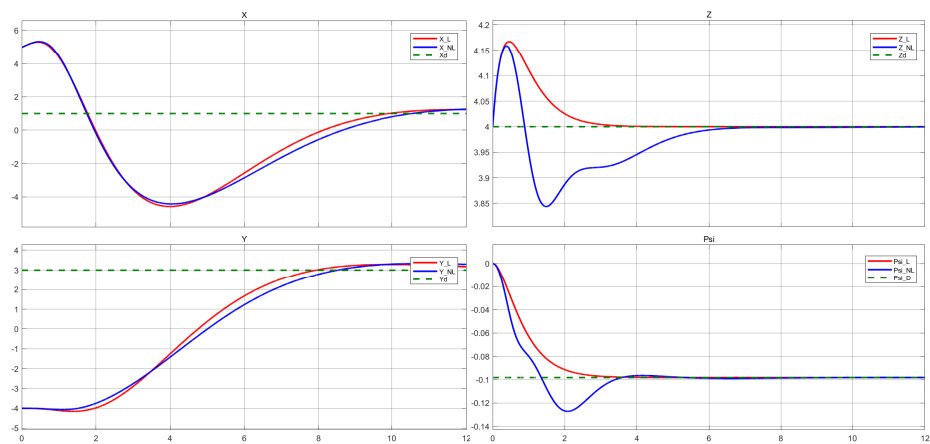
۴.۶ شبیه سازی در Simulink



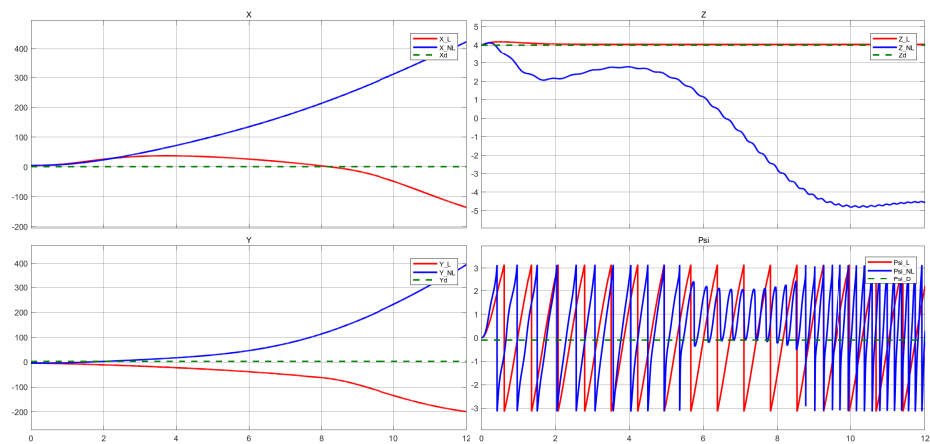
شکل ۲.۶: شماتیک کنترلر سیستم در سیمولینک



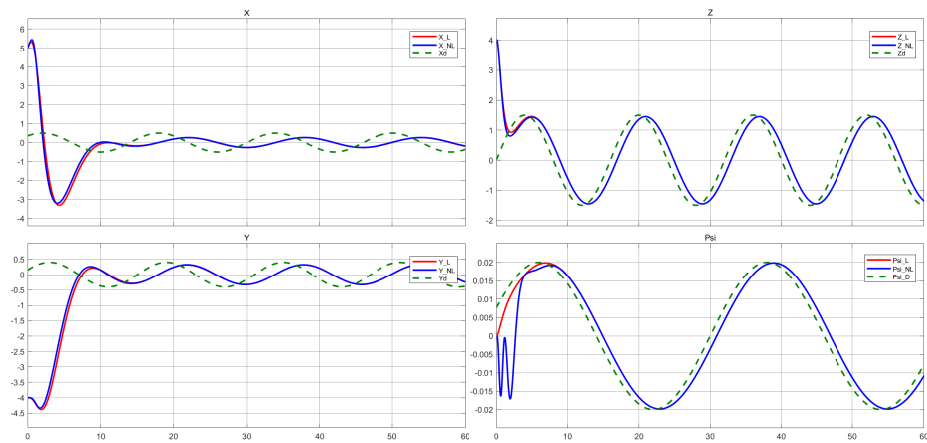
شکل ۳.۶: رگرسیون



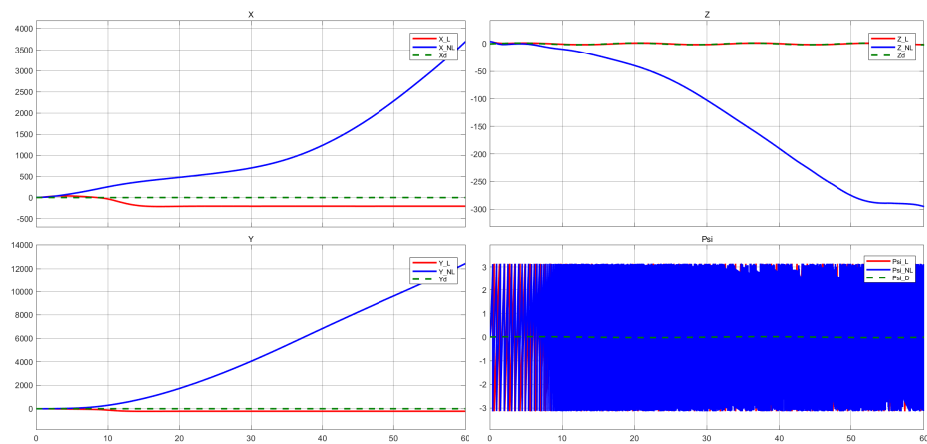
شکل ۴.۶: پاسخ پله استاتیکی بدون اغتشاش



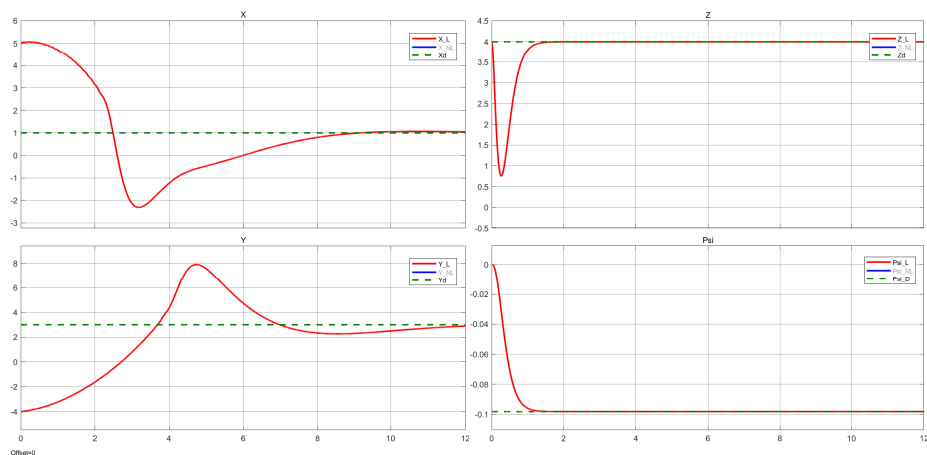
شکل ۵.۶: پاسخ پله استاتیکی با اغتشاش



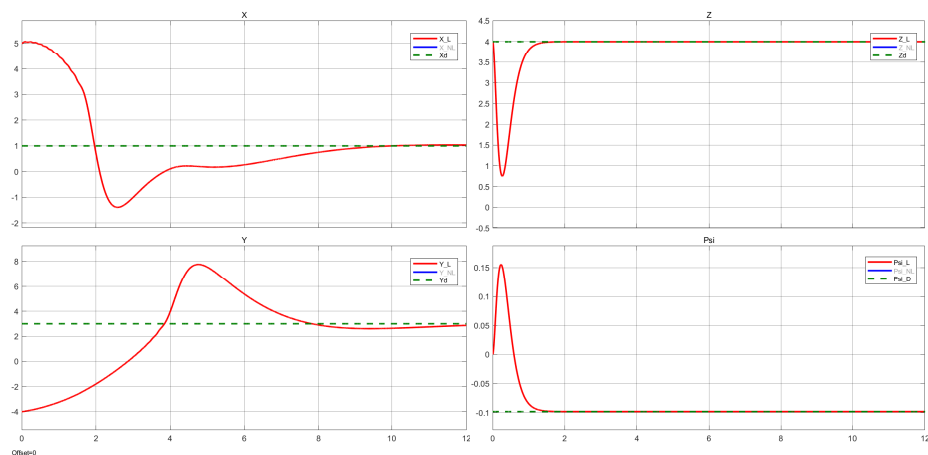
شکل ۶.۶: پاسخ سینوسی استاتیکی بدون اغتشاش



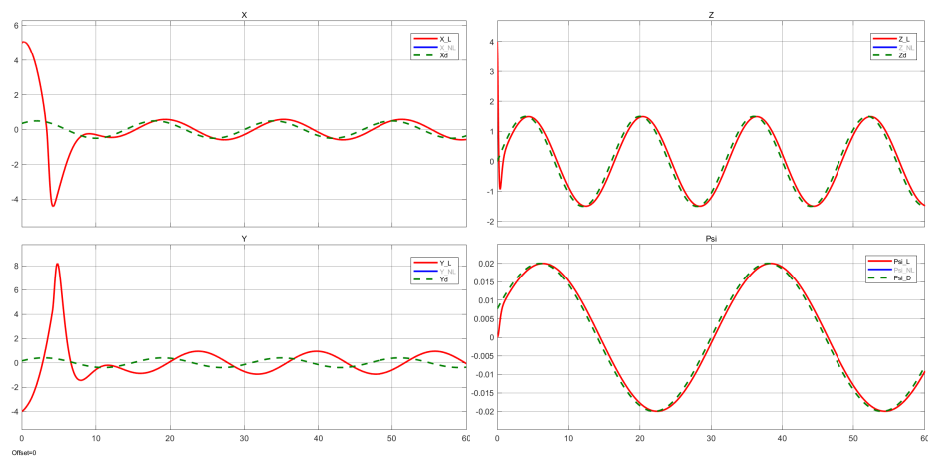
شکل ۷.۶: پاسخ سینوسی استاتیکی با اغتشاش



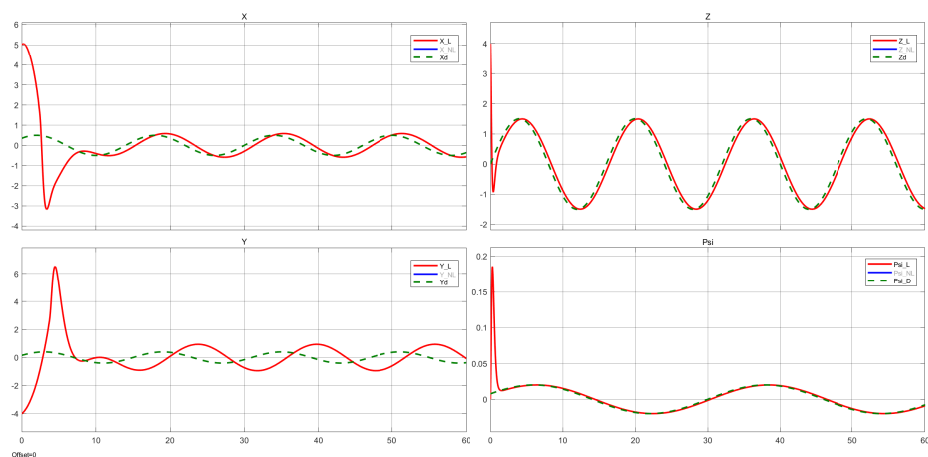
شکل ۸.۶: پاسخ پله دینامیکی بدون اغتشاش



شکل ۹.۶: پاسخ پله دینامیکی با اغتشاش



شکل ۱۰.۶: پاسخ سینوسی دینامیکی بدون اغتشاش



شکل ۱۱.۶: پاسخ سینوسی دینامیکی با اغتشاش

همچنین شبیه سازی گرافیکی خروجی مدل غیر خطی نیز در پیوست می باشد.