۱ جلسه‌ی بیست و پنجم، دوشنبه، لم زُرن

سرانجام به لم زرن، یکی از مهمترین قضایای درس مبانی ریاضی و یکی از پایه‌ای‌ترین قضایای علم ریاضی می‌رسیم. این لم شرایطی را مشخص می‌کند که طی آنها یک مجموعه‌ی مرتب دارای عنصر ماکزیمال است.

۱.۱ لم زُرن

قضیه ۱. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک **مجموعه‌ی مرتب ناتهی** باشد. اگر هر زنجیرِ $A \subseteq X$ دارای یک کران بالا در X باشد، آنگاه X دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال است.

توجه ۲. لم زُرن با اصل انتخاب معادل است.

برای این که توجه بالا ثابت شود باید نشان دهیم که لم زرن از اصل انتخاب نتیجه می‌شود و اصل انتخاب از لم زرن. اثبات هر دوی این قضایا شیرین و خواندنی است، ولی با توجه به سطح آمادگی کلاس، تنها به اثبات دومی که ساده‌تر است اکتفا می‌کنم. **در ضمن اثبات این قضیه نیز جزو مفاد امتحان شفاهی و دارای نمره‌ی ویژه است.**

قضیه ۳. اصل انتخاب از لم زُرن نتیجه می‌شود.

بگذارید یک بار دیگر اصل انتخاب را یادآوری کنم:

اصل انتخاب. اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه یک تابع $f : I \to \bigcup A_i$ موجود است به طوری که

$$\forall i \in I \quad f(i) \in A_i$$

توجه ۴. اگر A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد برای انتخاب یک عنصر در A نیازی به اصل انتخاب نداریم. همچنین اگر $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌ها باشد، برای انتخاب عناصرِ $a_i \in A_i$ نیازی به اصل انتخاب نداریم. تنها وقتی که خانواده‌ی مورد نظر نامتناهی است به این اصل نیاز است.

اثبات قضیه‌ی ۳. فرض کنید لم زُرن درست باشد. مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathcal{A} = \{(f, J) | J \subseteq I \quad \text{و} \quad f : J \to \bigcup_{i\in I} A_i \text{ یک تابع است} \quad \text{و} \quad \forall j \in J \quad f(j) \in A_j\}$$

به بیان دیگر $\mathcal{A}$ مجموعه‌ی همه‌ی **توابعِ جزئیِ** انتخاب است (که به همراه دامنه‌شان نوشته شده‌اند).

ادعا: $\mathcal{A} \neq \emptyset$

اثبات. فرض کنید $i_\circ \in I$. از آنجا که $A_{i_\circ} \neq \emptyset$. فرض کنید $a_{i_\circ} \in A_{i_\circ}$. تابع زیر در $\mathcal{A}$ است.

$$\{i_\circ\} \xrightarrow{f} \bigcup A_{i_\circ}$$

$$i_\circ \mapsto a_{i_\circ}$$

به بیان دیگر

$$(f, \{i_\circ\}) \in \mathcal{A}$$

□

پایان اثبات ادعا

روی $\mathcal{A}$ ترتیب زیر را تعریف می‌کنیم

$$(f_۱, J_۱) \leqslant (f_۲, J_۲) \iff (j_۱ \subseteq j_۲ \wedge f_۲|_{J_۱} = f_۱)$$

به بیان دیگر

$$(f_۱, J_۱) \leqslant (f_۲, J_۲) \iff J_۱ \subseteq J_۲ \wedge \forall j \in J_۱ \quad f_۱(j) = f_۲(j)$$

به بیان دیگر

$$(f_۱, J_۱) \leqslant (f_۲, J_۲) \iff \underbrace{\Gamma f_۱}_{\{(i, f_۱(i)) | i \in J_۱\}} \subseteq \underbrace{\Gamma f_۲}_{\{(i, f_۲(i)) | i \in J_۲\}}$$

تمرین ۵. نشان دهید که رابطه‌ی بالا رابطه‌ی ترتیبی است. (یعنی انعکاسی، پادتقارنی و متعدی است).

پس تا اینجا (با فرض این که تمرین بالا را حل کنید) دیدیم که مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ یک مجموعه‌ی مرتب ناتهی است. حال در ادامه نشان می‌دهیم که هر زنجیر در این مجموعه، دارای یک کران بالاست، یعنی این مجموعه در شرط لم زرن صدق می‌کند. فرض کنید $\{(f_k, J_k)\}_{k \in K}$ زنجیری در $\mathcal{A}$ باشد. ادعا می‌کنیم که این زنجیر در $\mathcal{A}$ یک کران بالا دارد. قرار دهید

$$H = \bigcup_{k \in K} \Gamma f_k$$

تمرین ۶. ابتدا نشان دهید که H گراف یک تابع است. اگر این تابع را با h و دامنه‌اش را با L نشان دهیم، نشان دهید که $(h, L) \in \mathcal{A}$ و برای هر تابعِ $(f, J) \in \mathcal{A}$ داریم $(f, J) \leq (h, L)$.

تا اینجا ثابت کردیم که اگر $\{(f_k, J_k)\}_{k \in K}$ زنجیزی از توابع در A باشد آنگاه $\bigcup(f_k, J_k)$ گراف یک تابع است.

توجه ۷. در تمرین بالا، ثابت کرده‌اید که هر زنجیرِ $\{(f_k, J_k)\}_{k \in K}$ در $\mathcal{A}$ دارای یک کران بالا در $\mathcal{A}$ است. این کران بالا به صورت (h, L) است که گراف تابع h در واقع $\bigcup\{(f_k, J_k)\}_{k \in K}$ است.

پس $\mathcal{A}$ شرایط استفاده از لم زرن را داراست. پس بنا به لم زُرن، $\mathcal{A}$ دارای یک عنصر ماکزیمال است. فرض کنید (P, Q) عنصر ماکزیمالِ $\mathcal{A}$ باشد. کافی است ثابت کنیم که

$$Q = I$$

اگر عبارت بالا ثابت شود، از آنجا که $(P, Q) \in \mathcal{A}$ و بنا به نحوه‌ی تعریفِ $\mathcal{A}$ تابع $P : I \to \bigcup A_i$ یک تابع انتخاب خواهد بود.

فرض کنید $Q \neq I$ و $i \in I - Q$. فرض کنید $a_i \in A_i$ عنصر دلخواهی باشد. داریم

$$\underbrace{P \cup \{(i, a_i)\}}_{R} \in \mathcal{A}$$

و

$$P \lneqq R$$

و این با ماکزیمال بودن P متناقض است. □

بیایید یک بار دیگر اثبات را مرور کنیم. فرض کنیم لم زرن درست باشد، می‌خواهیم نشان دهیم که اصل انتخاب درست است. فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و به دنبال یک تابع انتخاب از I به $\bigcup A_i$ هستیم. نخست مجموعه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{A}=\{(f,J)|J\subseteq I,\quad \forall j\in J\quad f(j)\in A_j \text{ و } f:J\to\bigcup_{i\in I}A_i \text{ یک تابع است}\}$$

روی مجموعه‌ی بالا یک ترتیب تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با آن ترتیب، مجموعه بالا یک مجموعه‌ی ناتهی مرتب است. سپس نشان می‌دهیم که هر زنجیر با آن ترتیب دارای یک کران بالاست، پس مجموعه‌ی بالا در شرایط لم زرن صدق می‌کند، پس عنصر ماکزیمال دارد. عنصر ماکزیمال این مجموعه، همان تابع انتخابی است که در پی آن هستیم.
این بخش از درس را با یک قضیه‌ی خیلی زیبا به پایان می‌برم. می‌دانیم که اعداد طبیعی همیشه با هم قابل مقایسه‌اند؛ یعنی اگر m,n دو عدد طبیعی باشند همواره یا $m\leq n$ یا $n\leq n$. در درسهای گذشته با اعداد جدیدی به نام کاردینالها آشنا شدیم و برای آنها یک ترتیب تعریف کردیم. گفتیم که اگر u,v دو کاردینال باشند و $u=card(A)$ و $v=card(B)$ آنگاه می‌گوییم $u\leq v$ هرگاه یک تابع یک به یک از A به B موجود باشد. حال طبیعی است از خودمان بپرسیم که آیا لزوماً دو کاردینال با هم قابل مقایسه‌اند؟ به بیان دیگر اگر A,B دو مجموعه باشند آیا لزوماً یا تابعی یک به یک از A به B موجود است یا تابعی یک به یک از B به A؟ پاسخ سوال بالا (در نتیجه‌ی لم زرن) مثبت است.

قضیه ۸. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی دلخواه باشند. آنگاه یا $X\leqslant Y$ یا $Y\leqslant X$.

اثبات. مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\mathcal{A}=\{(f,Z)|Z\subseteq X,\quad f:Z\to Y \text{ یک تابع یک به یک است}\}$$

توجه کنید که $\mathcal{A}\neq\emptyset$. علت: فرض کنید

$$y_\cdot\in Y\quad,\quad z_\cdot\in X$$

آنگاه تابع $f=\{(z_\cdot,y_\cdot)\}$ در $\mathcal{A}$ است. به بیان دقیقتر

$$(f,\{z_\cdot\})\in\mathcal{A}$$

ترتیب زیر را روی $\mathcal{A}$ تعریف کنید.

$$(f_1,Z_1)\leqslant(f_2,Z_2)\iff \Gamma f_1\subseteq\Gamma f_2$$

فرض کنید $\{(f_j,Z_j)\}_{j\in J}$ زنجیری در A باشد آنگاه این زنجیر دارای یک کران بالا در $\mathcal{A}$ است که این کران بالا، مشابه قضیه‌ی قبل تابعی است که گرافش $\bigcup\Gamma f_j$ است. پس $\mathcal{A}$ دارای یک عنصر ماکزیمال است. فرض کنید

$$P:Z\to Y$$

عنصر ماکزیمال مورد نظر باشد. به بیان دیگر فرض کنید $(P,Z)\in\mathcal{A}$ ماکزیمال باشد. اگر $Z=X$ حکم اثبات شده است، یعنی تابع یک به یکِ P از X به Y پیدا شده است و این مطلوب قضیه است زیرا در این صورت $X\leq Y$. اگر $Z\neq X$ آنگاه از دو حال خارج نیست.

۱. یا P پوشاست.

۲. یا P پوشا نیست.(مثلا P عنصر $y \in Y$ را نمی‌پوشاند.)

در حالتی که P پوشا نیست، فرض کنید $x \in X - Z$. حال $P \cup \{(x, y)\} \in \mathcal{A}$ و این ماکزیمال بودن P را نقض می‌کند. حال اگر P پوشا باشد آنگا بنا به قضایای قبل یک تابع یک به یک از Y به X موجود است؛ یعنی $Y \leqslant X$. پس نشان دادیم که یا $Y \leq X$ یا $X \leq Y$. $\square$

قضیه‌ی بالا نیز جزو امتحان شفاهی خواهد بود.