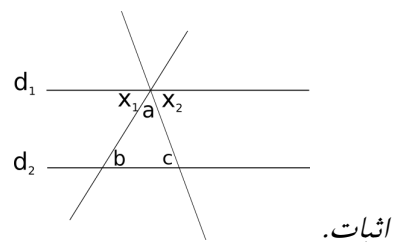


۱ جلسه‌ی اول

منظور از مبانی ریاضی، مبانی لازم برای کسب مدرک کارشناسی در ریاضیات نیست. بلکه منظور پایه‌ها و مبانی ریاضیات به عنوان یک علم بشری است. بیایید برای شروع، یک قضیه‌ی ریاضی را با هم اثبات کنیم:

قضیه ۱. مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه است.



از آنجا که خطوط d_1 و d_2 موازی‌اند، داریم:

$$x_2 = c, \quad x_1 = b \quad (*)$$

می‌دانیم که هر خطی یک زاویه‌ی ۱۸۰ درجه می‌سازد. بنابراین داریم:

$$x_1 + a + x_2 = ۱۸۰^\circ \quad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود که:

$$a + b + c = ۱۸۰^\circ$$

□

برای اثبات بالا به مواد زیر نیازمند هستیم:

۱. آشنایی با زبان (هم زبان فارسی و هم زبان ریاضی برای اعداد)

۲. آشنایی با نحوه‌ی صحیح استدلال کردن

۳. آشنایی با برخی قضیه‌هایی که قبلاً ثابت شده‌اند (دانسته‌های قبلی)

اینکه اگر دو خط d_1 و d_2 موازی باشند آنگاه زوایای x_1 و b برابرند، معادل با یکی از اصول هندسه‌ی اقلیدسی است. ما از این دانسته در اثبات بالا استفاده کردیم. همچنین از این دانسته استفاده کردیم که یک خط، زاویه‌ی 180° درجه می‌سازد. در بخشی از اثبات نیز از $(*)$ و $(**)$ کمک گرفتیم. یعنی گفتیم که می‌شود یکی از آنها را در دیگری جایگذاری کرد. این یک قانون استدلال کردن است. در درس مبانی ریاضی، به دو جنبه خواهیم پرداخت؛ اول یافتن اصول اولیه ریاضی، و دوم آشنائی با روش صحیح استدلال کردن.

سوال ۲. آیا می‌توان مجموعه‌ای از اصول موضوعه نوشت که تمام علم ریاضی بر پایه‌ی آنها نهاده شده باشد؛ یعنی به طوری که هر قضیه‌ای در ریاضی نهایتاً به یکی از آن اصول برسد؟

در درس مبانی ریاضی اصول موضوعه اولیه ریاضی را تبیین خواهیم کرد. هدف دوم ما در این درس آشنایی با زبان مشترک ریاضیدانان و نحوه‌ی صحیح استدلال کردن است. موارد زیر را در این درس بررسی خواهیم کرد:

۱. آشنایی با زبان ریاضی

۲. اصول اولیه ریاضیات

۳. آشنایی با مفاهیم مجموعه و اعداد

۴. آشنایی با بی‌نهایت‌ها

بیاید نخست به زبان ریاضی بپردازیم. زبان ریاضی، منطق ریاضی است. در این درس با دو منطق آشنا خواهیم شد که بخش اعظمی از ریاضیات بر اساس آنها بنا شده است:

۱. منطق گزاره‌ها^۱

۲. منطق مرتبه‌ی اول^۲

^۱propositional logic

^۲first order logic

۱.۱ منطق گزاره‌ها

اشیای اولیه (مواد اولیه‌ی) منطق گزاره‌ها، گزاره‌های اتمی هستند که آنها را با حروف h, q, p و ... نشان می‌دهیم. هر گزاره‌ی اتمی را می‌توان یک جمله‌ی خبری ساده پنداشت.
مثال:

– حسن آدم است.

– هوا بارانی است.

– تخته‌سیاه، سبز است.

مثال‌های زیر گزاره‌ی اتمی نیستند:

– فردا خانه‌ی حسن می‌آیی؟

به‌به! چه هوای خوبی!

علاوه بر گزاره‌های اتمی در منطق گزاره‌ها علائم کمکی زیر نیز موجودند:

• «و» یا علامت عطف که آن را با \wedge نشان می‌دهیم.

• «یا» یا علامت فصل که آن را با \vee نشان می‌دهیم.

• علامت «آنگاه» که آن را با \rightarrow نشان می‌دهیم.

• علامت «اگروتنها اگر» که آن را با \leftrightarrow نشان می‌دهیم.

• علامت «نقیض» که آن را با \neg نشان می‌دهیم.

• علامت تناقض که آن را با \perp نشان می‌دهیم.

با استفاده از علائم یاد شده می‌توان جملات پیچیده‌تری در منطق گزاره‌ها نوشت:

$$(p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_3 \rightarrow p_4) \vee (\neg(\neg p_5) \rightarrow p_2 \wedge p_3)$$

توجه ۳. هر منطقی دارای دو بخش است:

۱. نحو^۳

^۳syntax

۲. معناشناسی^۴

یک گزاره، در منطق گزاره‌ها، از لحاظ نحوی فقط یک دنباله از علامتها است. مانند آنچه در بالا نوشته‌ایم. در بخش معناشناسی باید به این گزاره‌ها معنا بخشید.

۲.۱ معناشناسی منطق گزاره‌ها

در منطق گزاره‌ها هر جمله‌ای یا دارای ارزش درست (T) یا دارای ارزش غلط (F) است. معمولاً در این منطق برای گزاره‌ها جدول ارزش کشیده می‌شود.

p	
T	
F	

توجه ۴. علامت‌های \forall و \exists در منطق گزاره‌ها نداریم. متغیر آزاد هم نداریم.

تعریف ۵. فرض کنید p و q دو گزاره (نه لزوماً اتمی) در منطق گزاره‌ها باشند. عطف p و q که آن را به صورت $p \wedge q$ نشان می‌دهیم؛ به صورت زیر معناشناسی می‌شود:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

فصل دو گزاره‌ی p و q که آن را به صورت $p \vee q$ نشان می‌دهیم؛ به صورت زیر معناشناسی می‌شود:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

^۴ semantics

توجه ۶. علامت «یا» در بالا، یای مانع جمع نیست و از این رو، با «یا» ای که در زبان محاوره‌ای استفاده می‌شود فرق می‌کند. جمله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

یا حسن در خانه بوده است، یا حسین (در صورتی که فقط یک نفر در خانه بوده باشد)

فرض کنید p گزاره‌ی «حسن در خانه است» باشد، و q «گزاره‌ی حسین در خانه است». اگر p و q هر دو درست باشند، گزاره‌ی بالا (در زبان محاوره‌ای) غلط می‌شود؛ در حالی که در جدول بالا دیدیم که در منطق گزاره‌ها، در صورت درست بودن p, q گزاره‌ی $p \vee q$ نیز درست است.