۴ جلسه‌ی چهارم

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی منطق مرتبه‌ی اول به عنوان تعمیمی از منطق گزاره‌ها صحبت کردیم. در منطق مرتبه‌ی اول، وقتی می‌خواهیم درباره‌ی یک جهان مشخص صحبت کنیم، ابتدا یک زبان مناسبِ L انتخاب می‌کنیم که الفبای لازم را در اختیار ما قرار دهد، سپس با استفاده از امکانات زبان L و ادوات منطقی (سورها، آنگاه و غیره) جمله‌ی مورد نظر خود را می‌نویسیم.

توجه ۴۲. در منطق مرتبه‌ی اول، سور روی زیر مجموعه‌ها نداریم.

$$\cancel{\forall A \subseteq B \dots}$$

مثال ۴۳. در کلاس حداکثر ۵ دانشجوی خانم وجود دارند.
در این مثال، جهان مورد نظر ما «این کلاس» است. یعنی هر متغیری که روی آن سور بزنیم، به عنصری از این جهان اشاره دارد. ابتدا یک زبان مناسب انتخاب می‌کنیم:

$$L = \{D(x)\}$$

سپس **محمول تک‌متغیره‌ی** D را به صورت زیر **تعبیر** می‌کنیم.
$D(x)$ یعنی x خانم است. سپس جمله‌ی مورد نظرخود را می‌نویسیم:

$$\forall x_۱, x_۲, \dots, x_۶ \quad \Big(D(x_۱) \wedge D(x_۲) \wedge \dots \wedge D(x_۶) \to \bigvee_{i,j \in \{۱,\dots,۶\}}^{i \neq j} x_i = x_j\Big)$$

مثال ۴۴. هر عدد اولِ مخالفِ ۲ فرد است.
در این مثال، جهان ما مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. قرار می‌دهیم: $L\{۱, |, +\}$. فرض می‌کنیم ۱ در زبان، به همان عدد یک در اعداد طبیعی اشاره کند و علامت | تعبیر زیر را داشته باشد:
$x|y$ یعنی عدد x عدد y را عاد می‌کند.

پاسخ.

$$\forall x \quad \Big(\neg x|۱+۱ \wedge \forall y \quad (y|x \to (y = x \vee y = ۱)) \to \neg(۱+۱|x)\Big)$$

□

توجه کنید که همان مثال بالا را در زبان زیر هم می‌توان فرمولبندی کرد:

$L = \{\cdot, |, +, ۱\}$

در اینجا فرض می‌کنیم تعبیر جمع و ضرب موجود در زبان، همان جمع و ضرب اعداد باشد و می‌نویسیم:

$$\forall x\Big(\neg(x = ۲) \wedge \forall y \quad \big(y|x \to (y = x \vee y = ۱)\big) \to \exists n \quad x = ۲ \cdot n + ۱\Big)$$

توجه کنید که در بالا حق نداشتیم بنویسیم که

$$\exists n \in \mathbb{N} \dots$$

در واقع ما ابتدا مشخص کرده‌ایم که جهان مورد نظرمان $\mathbb{N}$ است.

مثال ۴۵. تمام اعداد اول بزرگتر از ۲ فردند.

همان مثال بالا را به این صورت نوشته‌ایم که اگر عددی اول و زوج باشد، آنگاه برابر با ۲ است. در واقع در اینجا از **معنای** عبارت کمک گرفته‌ایم و جمله‌ای **معادل** با جمله‌ی خواسته شده نوشته‌ایم:

پاسخ.

$$\forall x \quad \left(\neg(x = ۱) \wedge (۱ + ۱|x) \wedge \Big(\forall y \quad (y|x \to y = ۱ \vee y = x)\Big) \to x = ۱ + ۱\right)$$

□

مثال ۴۶. تابع f در نقطه‌ی $x = a$ پیوسته است.

$$L = \{۰, f, a, R(x, y, z), >\}$$

جهان: $\mathbf{R}$

تعبیر رابطه‌ی R:

$$|x - y| < z \iff R(x, y, z)$$

پاسخ. آنچه می‌خواهیم عبارت زیر است:

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \quad \Big(|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon\Big)$$

که آن را در زبان داده شده به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall\epsilon > \text{۰} \quad \exists\delta > \text{۰} \quad \forall x \quad \Big(R(x,a,\delta) \to R\big(f(x), f(a), \epsilon\big)\Big)$$

توجه ۴۷. این که تابع f در نقطه‌ی a پیوسته است را می‌توان در فرازبان منطقی اینگونه نوشت:

$$\Big(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\Big) \Leftrightarrow \forall\epsilon > \text{۰} \quad \exists\delta > \text{۰} \quad \forall x \quad \Big(|x-a| < \delta \to |f(x)-f(a)| < \epsilon\Big)$$

علت این که بین دو عبارت از فِلِش دوخطه استفاده کرده‌ایم این است که این عبارت، در فرازبان منطقی نوشته شده است و از قول خود ماست. در عبارت بالا در واقع داریم می‌گوئیم که از نماد $\lim_{x\to a} f(x) = b$ برای اشاره به عبارت سمت راست استفاده کرده‌ایم.

□

مثال ۴۸. اگر هر کس حداقل دو دوست داشته باشد، آنگاه یک نفر هست که با همه دوست است.

$$L = \{R(x,y)\}$$

جهان: دانشگاه
تعبیر رابطه‌ی $R(x,y)$: x و y با هم دوستند.

پاسخ.

$$\forall x \quad \exists y_\text{۱}, y_\text{۲} \quad R(x,y_\text{۱}) \wedge R(x,y_\text{۲}) \wedge \neg(y_\text{۱} = y_\text{۲}) \to \exists z \quad \forall t \quad R(z,t)$$

□

مثال ۴۹. هر کسی که حداقل دو دوست داشته باشد، با همه دوست است.

پاسخ.

$$\forall x \quad \Big(\exists y_\text{۱}, y_\text{۲} \quad R(x,y_\text{۱}) \wedge R(x,y_\text{۲}) \wedge \neg(y_\text{۱} = y_\text{۲}) \to \forall z \quad R(x,z)\Big)$$

□

مثال ۵۰. هر کسی دو دوست دارد که آنها تنها یک دوست مشترک دارند.

پاسخ.

$$\forall x \quad \exists y_۱, y_۲ \quad \Big(R(x,y_۱) \wedge R(x,y_۲) \wedge \neg(y_۱ = y_۲) \wedge \exists z \quad \big(R(y_۱,z) \wedge R(y_۲,z) \wedge$$
$$\forall t \quad R(t,y_۱) \wedge R(t,y_۲) \rightarrow (t = z)\big)\Big)$$

جمله‌ی بالا را با توجه به معنای آن می‌توان به صورت زیر بازنوشت:

$$\forall x \quad \Big(\exists y_۱, y_۲ \quad R(x,y_۱) \wedge R(x,y_۲) \wedge \neg(y_۱ = y_۲) \wedge \forall z \quad \big(R(y_۱,z) \wedge R(y_۲,z) \rightarrow (x = z)\big)\Big)$$

□

مثال ۵۱. هر دو عدد دارای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هستند.

$$L = \{|\}$$

جهان: $\mathbf{N}$

پاسخ.

$$\forall x, y \quad \Big(\exists z \quad (z|x) \wedge (z|y) \wedge \big(\forall t \quad (t|x) \wedge (t|y) \rightarrow (t|z)\big)\Big)$$

□

مثال ۵۲. هر کسی که دوستی داشته باشد، دوست دیگری ندارد.

پاسخ.

$$\forall x \quad \Big(\exists y \quad R(x,y) \rightarrow \forall z \quad \big(\neg(y = z) \rightarrow \neg R(x,z)\big)\Big)$$

□

۱.۴ عبارت‌های همیشه درست در منطق مرتبه‌ی اول

گفتیم که «تاتولوژی‌ها» در منطق گزاره‌ها، عباراتی هستند که صرف نظر از ارزش گزاره‌های به کار رفته در آنها همواره درستند. برای مثال $p\vee\neg p$ همواره درست است و فرقی نمی‌کند که p چه گزاره‌ای باشد. در واقع تاتولوژیها به نوعی «قوانین استنتاج» هستند. در منطق مرتبه‌ی اول نیز عبارتهای همیشه درست داریم (ولی کمتر از کلمه‌ی تاتولوژی برای آنها استفاده می‌شود). منظور از یک عبارت همیشه درست در منطق مرتبه‌ی اول، عبارتی است که **در هر جهانی که آن عبارت را تعبیر کنیم** درست است. در زیر چند مثال آورده‌ایم:

۱. $\neg\forall x \quad p(x) \equiv \exists x \quad \neg p(x)$

۲. $\neg\exists x \quad p(x) \equiv \forall x \quad \neg p(x)$

۳. $\forall x \quad \Big(p(x)\wedge q(x)\Big) \leftrightarrow \forall x \quad p(x)\wedge\forall x \quad q(x)$

۴. $\exists x \quad \Big(p(x)\vee q(x)\Big) \leftrightarrow \exists x \quad p(x)\vee\exists x \quad q(x)$

سوال ۵۳. عبارت‌های بالا را ثابت کنید.

اثبات. در زیر اولی را ثابت می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\neg\forall x \quad p(x) \equiv \exists x \quad \neg p(x)$$

فرض کنیم که M یک جهان باشد که گزاره‌های بالا درباره‌ی آن نوشته شده‌اند. فرض کنیم در جهان M داشته باشیم:

$$\neg\forall x \quad p(x)$$

یعنی در جهان M اینگونه نیست که همه‌ی $x\in M$ ویژگی p را داشته باشند. پس عنصری مانند $a\in M$ هست که $\neg p(a)$ پس در جهان ما جمله‌ی زیر درست است:

$$\exists x \quad \neg p(x)$$

اثبات جهت عکس به عهده‌ی شما. □

سوال ۵۴. آیا عبارت زیر همیشه درست است؟

$$\forall x \quad \big(A(x) \vee B(x)\big) \to \forall x \quad A(x) \vee \forall x \quad B(x)$$

پاسخ. به عنوان مثال اگر جهان ما $M = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد، و تعبیر جملات به صورت زیر باشد: $A(x) : x \geqslant ۲$ و $B(x) : x \leqslant ۱$. در جهان M داریم:

$$\forall x \quad \big(x \geqslant ۲ \vee x \leqslant ۱\big)$$

اما جمله‌ی زیر در جهان M درست نیست:

$$\forall x \quad x \geq ۲ \quad \vee \quad \forall x \quad x \leq ۱$$

در زیر مثال دیگری نیز آورده‌ایم. فرض کنید:

$$M = \{a, b, c, d, e\}$$

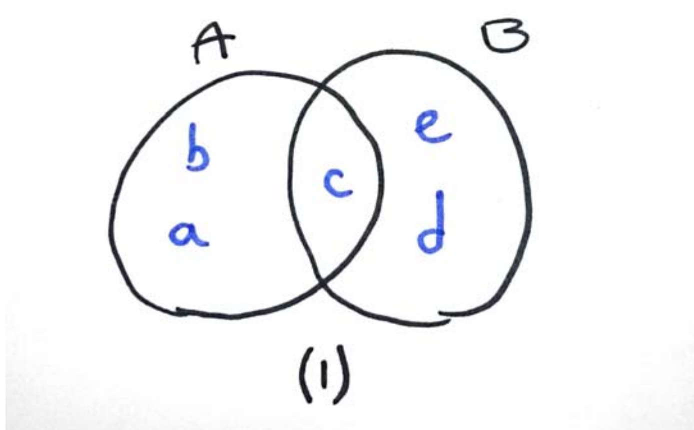
$$A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e\}$$

فرض کنید $A(x)$ به معنی $x \in A$ باشد و $B(x)$ به معنی $x \in B$. داریم

$$\forall x \quad (x \in A \vee x \in B)$$

اما عبارت زیر در جهان ما درست نیست:

$$\forall x \quad x \in A \quad \vee \quad \forall x \quad x \in B$$



□

سوال ۵۵. آیا عبارت زیر درست است:

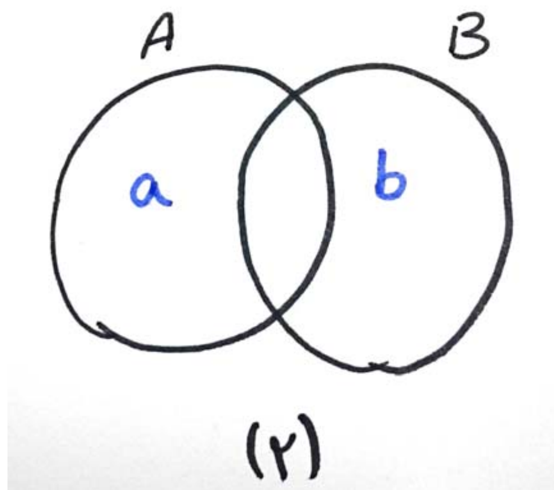
$$\exists x \quad A(x) \wedge \exists x \quad B(x) \to \exists x \quad (A(x) \wedge B(x))$$

پاسخ. جهان را به صورت کشیده شده در شکل زیر در نظر بگیرید. داریم

$$\exists x \quad x \in A$$

$$\exists x \quad x \in B$$

$$\neg(\exists x \quad x \in A \wedge x \in B)$$



□

سوال ۵۶. آیا عبارت زیر همواره درست است؟

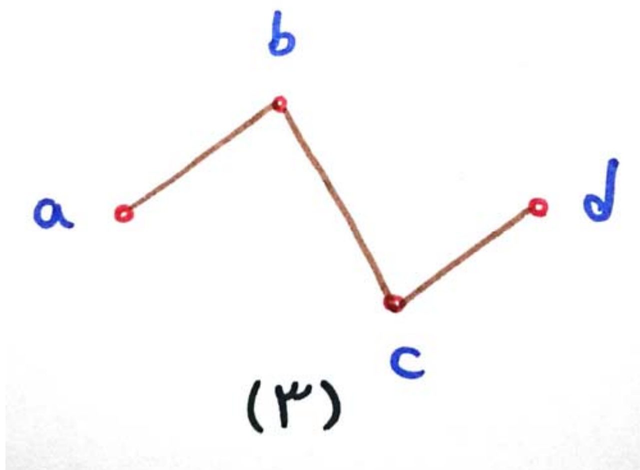
$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y) \to \exists y \quad \forall x \quad R(x,y)$$

پاسخ. جهان را به صورت زیر، مجموعه‌ی رأسهای یک گراف در نظر بگیرید:

$$M = \{a, b, c, d\}$$

و رابطه‌ی R را چنین تعبیر کنید:

$R(x,y)$ یعنی بین x و y یک یال وجود داشته باشد.



در جهان بالا جمله‌ی

$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y)$$

درست است ولی جمله‌ی زیر غلط است:

$$\exists y \quad \forall x \quad R(x,y)$$

□