۱۱ جلسه‌ی یازدهم، شنبه

کوییز دوم.

۱. نشان دهید که $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ اگر و تنها اگر $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$.

پاسخ. حکم: ۱ اگر $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$ آنگاه $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.
و ۲ اگر $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ آنگاه یا $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$.

اثبات ۲. برای اثبات مورد دوم عبارت معادل زیر را ثابت می‌کنیم:

اگر نه $A\subseteq B$ و نه $B\subseteq A$ آنگاه $P(A\cup B)\neq P(A)\cup P(B)$.

اگر $A\not\subseteq B$ و $B\not\subseteq A$ آنگاه

$$\exists y\in B-A$$

و

$$\exists x\in A-B.$$

فرض کنید $y_\circ\in B-A$ و $x_\circ\in A-B$. حال توجه کنید که

$$\{x_\circ,y_\circ\}\notin P(A),\quad \{x_\circ,y_\circ\}\notin P(B)\quad \{x_\circ,y_\circ\}\in P(A\cup B).$$

اثبات ۲. اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A\cup B=B$ و $P(A)\subseteq P(B)$ (چرا؟). پس

$$P(A\cup B)=P(B)=P(A)\cup P(B)$$

□

۲. نشان دهید که ویژگی ارشمیدسی، از اصل کمال نتیجه می‌شود. (جزوه‌ی جلسات قبل را نگاه کنید).

تمرین ۱۲۲. نشان دهید که جمله‌های زیر با هم معادلند.

۱. هیچ $x_\circ\in\mathbf{R}$ وجود ندارد که

$$\forall n\in\mathbf{N}\quad x_\circ\in(\circ,\frac{1}{n})$$

۲. هیچ $x_\circ\in\mathbf{R}$ وجود ندارد که $\forall n\in\mathbf{N}\quad x_\circ>n$

۱۲ ادامه‌ی درسِ ضربهای دکارتی

گفتیم که اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه

$$\underbrace{A \times B}_{\text{حاصلضرب دکارتی}} = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$$

نیز مفهوم زوج مرتب را با استفاده از مجموعه‌ها به صورت زیر تعریف کردیم:

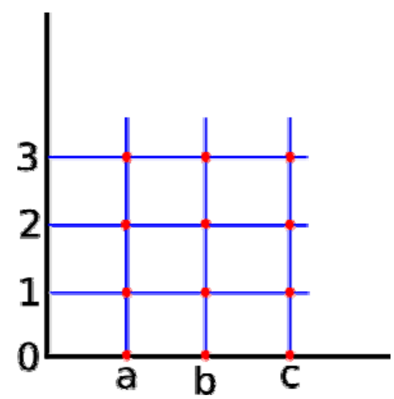
$$(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$$

برای مثال اگر

$$A = \{a,b,c\} \quad B = \{۰,۱,۲,۳\}$$

آنگاه

$$A \times B = \{(a,۰),(a,۱),(a,۲),(a,۳),(b,۰),(b,۱),(b,۲),(b,۳),(c,۰),(c,۱),(c,۲),(c,۳)\}$$



قضیه ۱۲۳.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

اثبات.

$$(x,y) \in A \times (B \cap C) \iff (x \in A \wedge y \in B \cap C) \iff (x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C)$$

$$\overset{p \leftrightarrow p \wedge p}{\iff} (x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \iff \Big((x,y) \in A \times B\Big) \wedge \Big((x,y) \in A \times C\Big)$$

$$\iff (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

□

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

اثبات عبارت بالا را به عنوان تمرین رها می‌کنم.

قضیه ۱۲۴.

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

اثبات. در زیر اثباتی استنتاجی برای حکم بالا ارائه کرده‌ایم.

$$(x, y) \in A \times (B - C) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B - C) \tag{۱۵}$$

$$x \in A \wedge y \in B - C \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \tag{۱۶}$$

$$x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \Rightarrow (x, y) \in A \times B \tag{۱۷}$$

$$x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \Rightarrow (x, y) \notin A \times C \tag{۱۸}$$

$$(x, y) \in A \times (B - C) \Rightarrow (x, y) \in (A \times B) - (A \times C) \quad \text{بنا به موارد ۱۵ تا ۱۸} \tag{۱۹}$$

اثبات برگشت:

$$(x, y) \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin A \times C \tag{۲۰}$$

$$(x, y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \tag{۲۱}$$

$$(x, y) \notin A \times C \Rightarrow (x \notin A) \vee (y \notin C) \tag{۲۲}$$

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge ((x \notin A) \vee (y \notin C)) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C). \tag{۲۳}$$

$$(x, y) \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times (B - C). \quad \text{بنا به موارد ۲۰ تا ۲۳} \tag{۲۴}$$

□

تمرین ۱۲۵. نشان دهید که

$$(A \times B) - (C \times D) = \Big((A - C) \times B\Big) \cup \Big(A \times (B - D)\Big)$$

سوال ۱۲۶. آیا $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$؟

پاسخ. فرض کنید که $A, D \neq \emptyset$ و $x. \in A, y. \in D$. آنگاه

$$(x., y.) \notin (A \times B) \cup (C \times D)$$

اما

$$(x., y.) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$$

□

۱.۱۲ رابطه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. به هر زیر مجموعه از $P(A \times B)$ یک رابطه از A به B می‌گوییم. فرض کنید X یک مجموعه باشد. منظور از یک رابطه روی X یک زیر مجموعه از $P(X \times X)$ است.
فرض کنید $R \subseteq P(A \times B)$ یک رابطه از A به B باشد. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$Dom(R) = \{x \in A | \exists y \in B \quad (x, y) \in R\}$$

$$Range(R) = \{y \in B | \exists x \in A \quad (x, y) \in R\}$$

نمادگذاری ۱۲۷. به جای

$$(x, y) \in R$$

گاهی می‌نویسیم:

$$xRy$$