۱ جلسه‌ی دهم

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که درباره‌ی اعدادِ حقیقی جمله‌ی اول در زیر درست است ولی جمله‌ی دوم نادرست:

۱. $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists r \in \mathbf{R} \quad ۰ < r < \frac{۱}{n}$

۲. $\exists r \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad ۰ < r < \frac{۱}{n}$

گفتیم که جمله‌ی دوم در بالا همان ویژگی ارشمیدسی است.
ویژگی ارشمیدسی:

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (۰, \frac{۱}{n}) = \emptyset$$

سوال ۱. آیا $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ ؟

پاسخ. نخست ثابت می‌کنیم که

$$(۱) \quad P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

$$\begin{array}{ll}
۱ & c \in P(A) \cup P(B) \to c \in P(A) \vee c \in P(B) \\
۲ & c \in P(A) \to c \subseteq A \\
۳ & A \subseteq A \cup B \\
۴ & c \subseteq A \cup B \quad \text{بنا به } ۲,۳ \\
۵ & c \in P(A \cup B) \quad \text{بنا به } ۴
\end{array}$$

مراحل ۲ تا ۵ در استنتاج بالا را می‌توان با B به جای A هم تکرار کرد. پس از $c \in P(A) \vee c \in P(B)$ نتیجه می‌گیریم که $c \in P(A \cup B)$.
حال فرض کنید $c \in P(A \cup B)$. آنگاه $c \subseteq A \cup B$. می‌خواهیم ببینیم که آیا $c \in P(A) \cup P(B)$؟
داریم:

$$** \quad c \in P(A) \cup P(B) \leftrightarrow c \in P(A) \vee c \in P(B)$$

$$\leftrightarrow c \subseteq A \vee c \subseteq B$$

سوال ۲. آیا $c \subseteq A \cup B \to (c \subseteq A) \vee (c \subseteq B)$ ؟

حکم بالا غلط است. مثال نقض:

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

$$A = \{۱, ۲\} \quad B = \{۳, ۴\}$$

$$c = \{۲, ۳\}$$

□

۱.۱ ادامه‌ی خانواده‌ها

مثال ۳. حاصل

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}}(k,k+۱]$$

را بیابید:

$$\begin{aligned}\bigcup_{k\in\mathbf{N}}(k,k+۱] &= (۰,۱]\cup(۱,۲]\cup(۲,۳]\cup\ldots\cup(k,k+۱]\cup\ldots\\ &=(۰,\infty)=\{x\in\mathbf{R}|x>۰\}\end{aligned}$$

مثال ۴.

$$(۱)\quad \bigcap_{k\in\mathbf{N}}(-\frac{۱}{k},\frac{۱}{k})$$

$$(۲)\quad \bigcap_{k\in\{۱,۲,\ldots,n\}}(-\frac{۱}{k},\frac{۱}{k})=(-۱,۱)\cap(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})\cap(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})\cap\ldots\cap(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n})$$

نخست نشان می‌دهیم (۱) مجموعه‌ی تهی است: توجه کنید که

$$x_۰\in\bigcap_{k\in\mathbf{N}}(-\frac{۱}{k},\frac{۱}{k})\to\forall k\in\mathbf{N}\quad x_۰\in(-\frac{۱}{k},\frac{۱}{k})$$

$$\to\quad\star\quad\forall k\in\mathbf{N}\quad -\frac{۱}{k}<x_۰<\frac{۱}{k}$$

فرض کنید $x_۰>۰$. از $\star$ نتیجه می‌گیریم که

$$\forall k\in\mathbf{N}\quad ۰<x_۰<\frac{۱}{k}\quad \lightning$$ بنا به ویژگی ارشمیدسی

اگر $x_۰<۰$ آنگاه

$$\forall k\in\mathbf{N}\quad -\frac{۱}{k}<x_۰<۰$$

$$\to\forall k\in\mathbf{N}\quad ۰<-x_۰<\frac{۱}{k}\quad \lightning$$ بنا به ویژگی ارشمیدسی

همچنین توجه کنید که حاصلِ (۲) مجموعه‌ی $(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n})$ است.

مثال ۵. قضیه‌ی (دمورگان) $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)^c=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma^c$ را ثابت کنید.

اثبات. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\underbrace{(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)^c}_{C}=\underbrace{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma^c}_{D}$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x_۰\in C\Leftrightarrow x_۰\in(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)^c$$

$$\iff x_{\cdot} \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \iff \forall\gamma\in\Gamma \quad (x_{\cdot} \notin A_\gamma)$$

$$\iff \forall\gamma\in\Gamma \quad x_{\cdot} \in A_\gamma^c \iff x_{\cdot} \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$$

□

مثال ۶. قضیه‌ی پخش‌پذیری را ثابت کنید:

اثبات پخش‌پذیری. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big)$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x_{\cdot}\in A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) \Leftrightarrow x_{\cdot}\in A \wedge x_{\cdot}\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$$

$$\Leftrightarrow (x_{\cdot}\in A)\wedge(\exists\gamma_{\cdot}\in\Gamma \quad x_{\cdot}\in B_{\gamma_{\cdot}})$$

از $(x_{\cdot}\in A)\wedge(x_{\cdot}\in B_{\gamma_{\cdot}})$ نتیجه می‌گیریم که

$$x_{\cdot}\in A\cap B_{\gamma_{\cdot}}$$

از آنجا که

$$A\cap B_{\gamma_{\cdot}}\subseteq\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$x_{\cdot}\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big)$$

حال می‌خواهیم بدانیم که آیا $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big)\subseteq A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big)$ نیز برقرار است؟

$$x_{\cdot}\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big) \Rightarrow \exists\gamma_{\cdot}\in\Gamma \quad x_{\cdot}\in A\cap B_{\gamma_{\cdot}}$$

$$\Rightarrow x_{\cdot}\in A\wedge x_{\cdot}\in B_{\gamma_{\cdot}} \Rightarrow (x_{\cdot}\in A)\wedge(x_{\cdot}\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_{\gamma_{\cdot}})$$

$$\Rightarrow x_{\cdot}\in A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big)$$

□

۲.۱ مفهوم رابطه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند و $x \in A$ و $y \in B$. بنا به اصل جفت‌سازی $\{x, y\}$ یک مجموعه است و $\{x\}$ نیز یک مجموعه است. دوباره بنا به اصل جفت‌سازی $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ یک مجموعه است. این مجموعه را با (x, y) نشان می‌دهیم. پس

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

تمرین ۷. نشان دهید که

$$(x_۰, y_۰) = (x_۱, y_۱) \iff (x_۰ = x_۱) \wedge (y_۰ = y_۱)$$

ایده‌ی اثبات.

$$\{\{x_۰\}, \{x_۰, y_۰\}\} = \{\{x_۱\}, \{x_۱, y_۱\}\}$$

$$\{x_۰\} = \{x_۱\} \Rightarrow x_۰ = x_۱$$

$$\{x_۱, y_۰\} = \{x_۱, y_۱\} \Rightarrow y_۰ = y_۱$$

□

تعریف ۸. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

تمرین ۹. نشان دهید که $A \times B$ یک مجموعه است.