۱ جلسه‌ی بیست‌وهفتم، ادامه‌ی کاردینالها و اصل خوش‌ترتیبی

۱.۱ ادامه‌ی کاردینالها

در درسهای گذشته، اثباتی نادقیق برای شمارا بودن مجموعه‌ی اعداد گویا آوردیم. در اینجا با استفاده از قضیه‌ی کانتور — برنشتاین، اثباتی دقیق و ساده ارائه می‌کنیم. عموماً پیدا کردن یک تابع یک به یک و پوشا برای اثبات همتوانی دو مجموعه، کار آسانی نیست. ولی بنا به قضیه‌ی کانتور برنشتاین، اگر توابعی یک به یک از هر یک به دیگری پیدا کنیم، آن دو مجموعه همتوان خواهند بود.

مثال ۱. نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.

$$Q = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbf{N}, (a, b) = ۱\}$$

پاسخ. می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\mathbf{card}(Q) = \aleph_۰$$

برای این منظور کافی است نشان دهیم که

$$۱ \quad \mathbf{card}(Q) \leqslant \aleph_۰$$

$$۲ \quad \aleph_۰ \leqslant \mathbf{card}(Q)$$

اثبات ۲. تابع همانی $id: \begin{array}{c}\mathbf{N} \to \mathbf{Q}\\ x \mapsto x\end{array}$ یک تابع یک به یک است. بنابراین $\aleph_۰ \leqslant \mathbf{card}(Q)$.

توجه ۲. در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ شماراست.

پس برای اثباتِ $\mathbf{card}(Q) \leqslant \aleph_۰$ کافی است تابعی یک به یک از $\mathbf{Q}$ به $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ بیابیم.

تمرین ۳. نشان دهید که تابع زیر از $\mathbf{Q}$ به $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ یک به یک است.

$$f(\frac{x}{y}) = (x, y)$$

که در بالا فرض کرده‌ایم که ب‌م‌مِ x, y برابر با یک باشد. دقت کنید که عبارت سمت راست، زوج مرتب متشکل از x, y است.

□

توانی که برای کاردینالها تعریف کردیم، موافق انتظار، با ضرب کاردینالها سازگار است:

لم ۴. فرض کنید α, β, γ سه کاردینال باشند آنگاه

$$\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta \times \gamma}$$

اثبات. فرض کنید

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

$$\gamma = \mathbf{card}(Z)$$

کافی است ثابت کنیم که

$$\left(X^Y\right)^Z \cong X^{Y\times Z}$$

برای این منظور کافی است یک تابع یک به یک و پوشا (مثلا به نام H) از $\left(X^Y\right)^Z$ به $X^{Y\times Z}$ بیابیم. فرض کنید $f \in \left(X^Y\right)^Z$. پس f تابعی از Z به X^Y است.

هدف ۵. تعریف $H(f)$.

توجه ۶. قرار است که $H(f) \in X^{Y\times Z}$. یعنی $H(f)$ باید تابعی از $Y\times Z$ به X باشد. پس باید برای هر $(y,z) \in Y \times X$ بتوانیم $H(f)(y,z) \in X$ را تعریف کنیم.

$$f : Z \to X^Y$$

$$\forall z_{\circ} \in Z \quad f(z) \in X^Y$$

$$\forall z_{\circ} \in Z \quad f(z) : Y \to X$$

$$y \mapsto f(z)(y)$$

پس برای تعریفِ

$$H(f)(\underset{\text{۲}}{y}, \underset{\text{۱}}{z})$$

۱ z را به f می‌دهیم.

۲ y را به $f(z) : Y \to X$ می‌دهیم.

به بیان دیگر، ضابطه‌ی تابع مورد نظر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$H(f)(z,y) : Z \times Y \to X$$

$$(z,y) \mapsto f(z)(y)$$

□

مثال ۷. نشان دهید که $\mathbf{N}\times\mathbf{R} \cong \mathbf{R}$. به بیان دیگر $\aleph_{\circ} \times ۲^{\aleph_{\circ}} = ۲^{\aleph_{\circ}}$.

اثبات. راه حل اول. تابع زیر را از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{Z} \times [۰, ۱)$ تعریف کنید.

$$x \mapsto (\lfloor x \rfloor, x - \lfloor x \rfloor)$$

به عنوان تمرین نشان دهید که تابع فوق یک به یک و پوشا است. می‌دانیم که $\mathbf{Z} \cong \mathbf{N}$ و $\mathbf{R} \cong [۰, ۱)$. پس ثابت کردیم که $\mathbf{R} \cong \mathbf{N}\times\mathbf{R}$.

راه حل دوم. کافی است نشان دهیم که

۱. $۲^{\aleph_۰} \leqslant \aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰}$

۲. $\aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰} \leqslant ۲^{\aleph_۰}$

اثبات ۱.

$$۲^{\aleph_۰} = ۱ \times ۲^{\aleph_۰} \leqslant \aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰}$$

اثبات ۲.

$$\aleph_۰ \leqslant ۲^{\aleph_۰}$$

پس

$$\aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰} \leqslant ۲^{\aleph_۰} \times ۲^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰ + \aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$$

□

مثال ۸. نشان دهید که $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$.

اثبات. راه حل اول.

$$۲^{\aleph_۰} \times ۲^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰ + \aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$$

راه حل دوم. می‌دانیم که $|\mathbf{R}|$ برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی، و تعداد زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی با تعداد زیر مجموعه‌های اعداد زوج برابر است و آن هم با تعداد زیرمجموعه‌های اعداد فرد برابر است. در زیر نشان خواهیم داد که:

زیر مجموعه‌های اعداد فرد $\times$ زیر مجموعه‌های اعداد زوج $\cong$ زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی

کافی است تابع زیر را در نظر بگیریم

$$A \mapsto \left(A \cap \mathbf{N}_E, A \cap \mathbf{N}_O\right)$$

که در آن N_E اعداد زوج و N_O اعداد فرد را نشان می‌دهند. E اعداد زوج و O اعداد فرد هستند. به طور مثال فرض کنید مجموعه‌ی

$$\{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

را داشته باشیم آنگاه

$$\{۱, ۲, ۳, ۴\} \mapsto \left(\{۱, ۳\}, \{۲, ۴\}\right)$$

□

مثال ۹. تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ را بیابید.

پاسخ. کافی است $\aleph_۰^{\aleph_۰}$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$(۱) \quad \aleph_۰^{\aleph_۰} \leqslant \left(۲^{\aleph_۰}\right)^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰ \times \aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$$

$$(۲) \quad ۲^{\aleph_۰} \leqslant \aleph_۰^{\aleph_۰}$$

پس

$$\aleph_{\circ}^{\aleph_{\circ}} = 2^{\aleph_{\circ}}$$

پس تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ برابر است با $|\mathbf{R}|$. به بیان دیگر تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ برابر است با تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی $\{0, 1\}$. $\square$

مبحث کاردینالها را در همین جا ختم می‌کنیم.

۲.۱ اصل خوش ترتیبی

اصل خوش‌ترتیبی یکی از اصول مهم ریاضی است که قضایای بسیاری با استفاده از آن ثابت می‌شوند. این اصل در واقع معادل اصل انتخاب و از این رو معادل با لم زُرن است. پس می‌توان یکی از اینها را اصل فرض کرد و بقیه را قضیه دانست.

تعریف ۱۰. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد. می‌گوییم $(X, \leqslant)$ خوش ترتیب است هرگاه هر زیر مجموعه از X دارای یک مینی‌موم باشد (به بیان دیگر هر زیرمجموعه‌ای یک عضو ابتدا داشته باشد).

مثال ۱۱. $(\mathbf{N}, \leqslant)$ خوش ترتیب است.

مثال ۱۲. $(\mathbf{R}, \leqslant)$ خوش ترتیب نیست. برای مثال بازه‌ی $(0, 1) \subseteq \mathbf{R}$ دارای مینی‌موم نیست. همچنین $(-\infty, 0)$ مینی‌موم ندارد.

قضیه ۱۳ (اصل خوش ترتیبی)**.** فرض کنید X یک مجموعه باشد. می‌توان یک ترتیبِ $\leqslant_X$ روی X تعریف کرد، به طوری که $(X, \leqslant)$ خوش ترتیب باشد.

دقت کنید که $\mathbb{R}$ با ترتیب معمولی خودش، خوشترتیب نیست؛ ولی بنا به اصل خوشترتیبی می‌توان یک ترتیب دیگر روی آن در نظر گرفت که با آن ترتیب، خوش ترتیب باشد.
گفتیم که اصل خوشترتیبی با اصل انتخاب معادل است. در این دوره فرصت اثبات این گفته را نداریم و تنها نتیجه شدن اصل انتخاب از اصل خوشترتیبی را، که ساده تر است، اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۴. اصل انتخاب از اصل خوش ترتیبی نتیجه می‌شود.

اثبات. فرض کنید اصل خوش ترتیبی درست باشد. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد.

هدف ۱۵. تعریف یک تابع $f : I \to \bigcup A_i$ به طوری که $\forall i \in I \quad f(i) \in A_i$.

از آنجا که اصل خوش ترتیبی را داریم، می‌دانیم که روی هر A_i یک ترتیب $\leqslant_i$ وجود دارد به طوری که $(A_i, \leqslant_i)$ خوش ترتیب است. پس تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(i) = \min_{\leqslant_i} A_i$$

$\square$

برای اثبات اصل انتخاب با استفاده از خوشترتیبی، تابع انتخاب را تابعی در نظر گرفته‌ایم که از هر مجموعه، مینی‌موم آن را برمی‌دارد. در اینجا دیگر تابع انتخاب دارای یک ضابطه است و وجودش به اصل انتخاب نیازی ندارد.
اصل خوشترتیبی همچنین با لم زرن معادل است. در زیر نشان داده‌ایم که چگونه با استفاده از لم زرن می‌توان اصل خوشترتیبی را ثابت کرد.

قضیه ۱۶. لم زُرن اصل خوش ترتیبی را نتیجه می‌دهد.

اثبات.

یادآوریِ **لم زُرن**. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی و ناتهی باشد به طوری که هر زنجیر $A \subseteq X$ دارای کران بالا در X باشد. آنگاه X دارای یک عنصرِ ماکزیمال است.

فرض کنیم لم زُرن درست باشد و Y یک مجموعه‌ی دلخواه باشد.

هدف ۱۷. تعریف یک ترتیب روی Y به طوری که $(Y, \leqslant_Y)$ یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد.

مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{A} = \{(B, \leqslant_B) | \text{یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد.} \ (B, \leqslant_B) \ \text{و} \ B \subseteq Y\}$$

ادعا: $\mathcal{A}$ ناتهی است.
فرض کنید $y_0 \in Y$. روی $\{y_0\}$ ترتیب زیر را در نظر بگیرید:

$$y_0 \leqslant y_0$$

مجموعه‌ی $\{y_0\}$ به همراه ترتیبِ بالا در $\mathcal{A}$ است. پس $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
قدم دوم. تعریف یک ترتیب روی $\mathcal{A}$. تعریف کنید:

$$(B_1, \leqslant_{B_1}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_2, \leqslant_{B_2}) \iff (B_1 \subseteq B_2) \wedge \text{گسترشی از ترتیب} \leqslant_{B_1} \text{باشد} \leqslant_{B_2}$$

یعنی

$$(B_1 \subseteq B_2) \wedge \forall x, y \in B_1 \quad (x \leqslant_{B_1} y \to x \leqslant_{B_2} y)$$

قدم سوم. هر زنجیر در $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای کران بالا در $\mathcal{A}$ است. فرض کنید

$$(B_1, \leqslant_{B_1}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_2, \leqslant_{B_2}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_3, \leqslant_{B_3}) \leqslant_{\mathcal{A}} \dots$$

یک زنجیر دلخواه در $\mathcal{A}$ باشد. [1] ادعا: این زنجیر دارای کران بالا در $\mathcal{A}$ است.
قرار دهید $B = \bigcup B_i$ روی B ترتیب زیر را تعریف کنید.

$$x \leqslant_B y \leftrightarrow \exists i \quad x, y \in B_i \quad x \leqslant_{B_i} y$$

[1] زنجیرها می‌توانند ناشمارا باشند و اینجا تنها برای سادگی، زنجیر را شمارا گرفته‌ایم.

تمرین ۱۸. نشان دهید که $(B, \leqslant_B) \in \mathcal{A}$ و همچنین نشان دهید که $(B, \leqslant_B)$ یک کران بالا برای زنجیر یادشده است.

پس (بعد از حل تمرین بالا) هر زنجیر در $(\mathcal{A}, \leqslant_\mathcal{A})$ دارای کران بالاست . بنا به لم زُرن $(\mathcal{A}, \leqslant_\mathcal{A})$ دارای عنصر ماکزیمال بنام $(C, \leqslant_C)$ است.

ادعا: $C = Y$.

اثبات ادعا: فرض کنید $y_\cdot \in Y - C$.

هدف ۱۹. پیدا کردن یک عنصر بزرگتر از $(C, \leqslant_C)$ در $\mathcal{A}$. قرار دهید $C' = C \cup \{y_\cdot\}$ و فرض کنید $\forall c \in C \quad y_\cdot \geqslant c$ آنگاه $(C', \leqslant_{C'}) \in \mathcal{A}$ و $(C', \leqslant_{C'}) \gneqq_\mathcal{A} (C, \leqslant_C)$ و این تناقض با ماکزیمال بودن C دارد.

□

دقت کنید که در بالا با استفاده از لم زرن ثابت کردیم که روی هر مجموعه‌ای می‌توان یک ترتیب تعریف کرد که مجموعه‌ی مورد نظر با آن خوشترتیب باشد. در اثبات بالا، تنها وجود یک ترتیب را ثابت کردیم بی آنکه کوچکترین ایده‌ای درباره‌ی چگونگی این ترتیب به دست بدهیم. این نوع اثباتها از توانائیِ بالای لم زرن ناشی می‌شوند. در واحدهای جبری (احتمالاً در ترمهای آینده) قضایای فراوانی را خواهید دید که همه بر پایه‌ی لم زرن بنا شده‌اند.