# چکیده

پیش از آنکه بخواهیم درباره‌ی مبانی ریاضی، به عنوان یک علم، سخن بگوئیم باید با مفهوم علم (دانش، ساینس) و تفاوت آن با مفهوم دانائی (آگاهی، نالج) آشنا شویم. دانائی، کیفیتی است که در انسان، با استفاده از کسب تجارب یا مطالعه حاصل می‌شود. یک استاد دانشگاه، می‌تواند به سبب مطالعات زیادی که داشته است دانا باشد؛ در عین حال یک کشاورز که در مزرعه کار می‌کند نیز می‌تواند به سبب تجاربی که در زندگی کسب کرده است فرد دانائی باشد. عموماً کسی از دانائی‌های کس دیگر با خبر نیست، مگر این که این دانائی از رفتار یا «سخنان» او قابل برداشت باشد. گاهی دانائی را نمی‌توان به کسان دیگر منتقل کرد. مثلاً ممکن است فرزند کشاورز مثال بالا، از دانائی پدر چیزی بهره نبرد؛ شاید به این دلیل که پدر توانائی تدریس دانائی خود یا روش کسب این دانائی را به او نداشته است. شاید هم، مانند مثال بند بعد، اصولاً انتقال آن دانائی کار دشواری بوده باشد.

یک مثال از دانائی، «عرفان» است. در این نوع از دانائی، شخص نه تنها از طریق تجربه و مطالعه، بلکه شاید به طریق الهام کسب دانائی کرده است. اما باز هم همان مشکل قبلی برقرار است که شاید عارف نتواند دانائی خود را به دیگران منتقل کند. عموماً از سخن عارفان این ادعا برداشت می‌شود که آنها چیزهائی را می‌دانند و می‌بینند که دیگران نمی‌دانند و نمی‌بینند؛ و بدتر از آن، شاید هیچگاه بدان مقامات نرسند که درک کنند!

هر کسی از ظن خود شد یار من

وز درون من نجست اسرار من

از بیت بالا چنین برداشت می‌شود که: «من چیزهائی می‌دانم که دیگران حتی اگر سعی کنند، به ظن خودشان فهمیده‌اند». تفاوت میان دانش و دانائی دقیقاً همین است. دانش به دانائی‌ای گفته می‌شود که با سخن گفتن و نوشتن در یک زبان مشترک و دارای قاعده‌های مشخص (یعنی منطق) قابل انتقال به دیگران است. در دنیای علم هیچگاه نمی‌توان گفت «من چیزهائی می‌دانم که دیگران هرگز نخواهند فهمید». آن چیزها اگر هم وجود داشته باشند، علم محسوب نمی‌شوند. در واقع آن چیزها دقیقاً زمانی علم به حساب می‌آیند که از طریق منطق به نگارش و سخن درآیند و دیگران نیز با خواندشان به دانائی برسند و در صورت امکان بر آنها بیفزایند. بدین صورت است که یک دانائی، نخست به صورت علم درمی‌آید، سپس تبدیل به یک دانائی عمومی می‌شود و دوباره همان به علم تبدیل می‌شود و این روند ادامه می‌یابد.

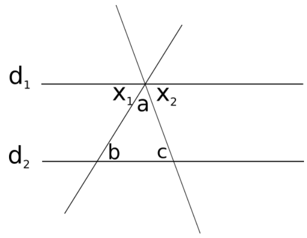
پس گفتیم که علم به نوعی، همان دانائی به‌صورت‌نوشتاریاگفتاروقابل‌انتقال‌درآمده است. نیز گفتیم که برای انتقال دانائی، یعنی تبدیل آن به علم، نیازمند زبانی مشترک هستیم. زبانی که هر کس که بر آن تسلط یابد، بتواند سخنان و نوشته‌های ما را درک کند. این زبان، همان «منطق» است. در این درس نه تنها با این زبان تا حدی آشنا می‌شویم، بلکه نحوه‌ی سخن گفتن در این زبان را نیز خواهیم آموخت. در واقع، در این درس خواهیم آموخت که تا زمانی که نتوانیم دانسته‌ی خود را به صورت صحیح بنویسیم، این دانسته، علم به حساب نمی‌آید. بسیاری از دانشجویان صحیح نوشتن را بلد نیستند. عموماً در برگه‌های امتحانی چیزهائی غیرقابل دنبال‌کردن می‌نویسند ولی مدعی می‌شوند که سوال را فهمیده‌اند و پاسخ را می‌دانند. در این درس، چنین ادعائی از کسی قابل پذیرش نیست. آنچه که دانشجو می‌فهمد دانائی او محسوب می‌شود. در این درس نحوه‌ی انتقال آن دانائی به صورتی که برای متخصصین قابل فهم باشد، مورد پرسش است. پیشنهاد من به دانشجویان تازه‌وارد، این است که صورت هر سوال را موضوع یک انشاء و پاسخ آن را متن آن بدانند. در واقع در پاسخ هر سوال دانشجو

باید مطلبی بنویسد که دارای شروع، بسط و پایان باشد. شروعش صورت سوال است و بیان اینکه این سوال از ما چه می‌خواهد. بسطش بررسی فرضها و نتیجه‌گیری از آنها، و پایان انشاء، رسیدن به خواسته‌ی سوال است.

# ۱ جلسه‌ی اول

منظور از مبانی ریاضی، مبانی لازم برای کسب مدرک کارشناسی در ریاضیات نیست. بلکه منظور پایه‌ها و مبانی ریاضیات به عنوان یک علم بشری است. بیایید برای شروع، یک قضیه‌ی ریاضی را با هم اثبات کنیم:

**قضیه ۱.** مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه است.




*اثبات.* از آنجا که خطوط $d_۱$ و $d_۲$ موازی‌اند، داریم:

$$x_۲ = c \quad , \quad x_۱ = b \quad (*)$$

می‌دانیم که هر خطی یک زاویه‌ی ۱۸۰ درجه می‌سازد. بنابراین داریم:

$$x_۱ + a + x_۲ = ۱۸۰^o \quad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود که :

$$a + b + c = ۱۸۰^o$$

□

برای اثبات بالا به مواد زیر نیازمند هستیم:

۱. آشنایی با زبان (هم زبان فارسی و هم زبان ریاضی برای اعداد)

۲. آشنایی با نحوه‌ی صحیح استدلال کردن

۳. آشنایی با برخی قضیه‌هایی که قبلا ثابت شده‌اند (دانسته‌های قبلی)

اینکه اگر دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی باشند آنگاه زوایای $x_۱$ و $b$ برابرند، معادل با یکی از اصول هندسه‌ی اقلیدسی است. ما از این دانسته در اثبات بالا استفاده کردیم. همچنین از این دانسته استفاده کردیم که یک خط، زاویه‌ی ۱۸۰ درجه می‌سازد. در بخشی از اثبات نیز از $(*)$ و $(**)$ کمک گرفتیم. یعنی گفتیم که می‌شود یکی از آنها را در دیگری جایگذاری کرد. این یک قانون استدلال کردن است.

در درس مبانی ریاضی، به دو جنبه خواهیم پرداخت؛ اول یافتن اصول اولیه ریاضی، و دوم آشنائی با روش صحیح استدلال کردن.

**سوال ۲.** آیا می‌توان مجموعه‌ای از اصول‌موضوعه نوشت که تمام علم ریاضی بر پایه‌ی آنها نهاده شده باشد؛ یعنی به طوری که هر قضیه‌ای در ریاضی نهایتاً به یکی از آن اصول برسد؟

در درس مبانی ریاضی اصول موضوعه اولیه ریاضی را تبیین خواهیم کرد. هدف دوم ما در این درس آشنایی با زبان مشترک ریاضیدانان و نحوه‌ی صحیح استدلال کردن است. موارد زیر را در این درس بررسی خواهیم کرد:

۱. آشنایی با زبان ریاضی

۲. اصول اولیه ریاضیات

۳. آشنایی با مفاهیم مجموعه و اعداد

۴. آشنایی با بی‌نهایت‌ها

بیایید نخست به زبان ریاضی بپردازیم. زبان ریاضی، منطق ریاضی است. در این درس با دو منطق آشنا خواهیم شد که بخش اعظمی از ریاضیات بر اساس آنها بنا شده است:

۱. منطق گزاره‌ها [۱]

۲. منطق مرتبه‌ی اول [۲]

## ۱.۱ منطق گزاره‌ها

اشیای اولیه (مواد اولیه‌ی) منطق گزاره‌ها، **گزاره‌های اتمی** هستند که آنها را با حروف $p$ ، $q$ ، $h$ و ... نشان می‌دهیم.
هر گزاره‌ی اتمی را می‌توان یک **جمله‌ی خبری ساده** پنداشت.
مثال:
ـ حسن آدم است.
ـ هوا بارانی است.
ـ تخته‌سیاه، سبز است.
مثال‌های زیر گزاره‌ی اتمی نیستند:
ـ فردا خانه‌ی حسن می‌آیی؟
به‌به! چه هوای خوبی!
علاوه بر گزاره‌های اتمی در منطق گزاره‌ها علائم کمکی زیر نیز موجودند:

- «و» یا علامت عطف که آن را با $\wedge$ نشان می‌دهیم.
- «یا» یا علامت فصل که آن را با $\vee$ نشان می‌دهیم.

[۱] propositional logic
[۲] first order logic

- علامت «آنگاه» که آن را با $\rightarrow$ نشان می‌دهیم.
- علامت «اگروتنهااگر» که آن را با $\leftrightarrow$ نشان می‌دهیم.
- علامت «نقیض» که آن را با $\neg$ نشان می‌دهیم.
- علامت تناقض که آن را با $\perp$ نشان می‌دهیم.

با استفاده از علائم یاد شده می‌توان جملات پیچیده‌تری در منطق گزاره‌ها نوشت:

$$(p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_3 \longrightarrow p_4) \vee (\neg(\neg p_5) \longrightarrow p_2 \wedge p_3)$$

**توجه ۳.** هر منطقی دارای دو بخش است:

۱. نحو [۳]

۲. معناشناسی [۴]

یک گزاره، در منطق گزاره‌ها، از لحاظ نحوی فقط یک دنباله از علامتها است. مانند آنچه در بالا نوشته‌ایم. در بخش معناشناسی باید به این گزاره‌ها معنا بخشید.

## ۲.۱ معنا شناسی منطق گزاره‌ها

در منطق گزاره‌ها هر جمله‌ای یا دارای ارزش درست (T) یا دارای ارزش غلط (F) است. معمولاً در این منطق برای گزاره‌ها **جدول ارزش** کشیده می‌شود.

| p | |
|---|---|
| T | |
| F | |

**توجه ۴.** علامت‌های $\forall$ و $\exists$ در منطق گزاره‌ها نداریم. متغیر آزاد هم نداریم.

**تعریف ۵.** فرض کنید $p$ و $q$ دو گزاره (نه لزوماً اتمی) در منطق گزاره‌ها باشند. عطف $p$ و $q$ که آن را به صورت $p \wedge q$ نشان می‌دهیم؛ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

| p | q | q ∧ p |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

[۳] syntax

[۴] semantics

فصل دو گزاره‌ی $p$ و $q$ که آن را به صورت $p \vee q$ نشان می‌دهیم؛ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

| p | q | q ∨ p |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

**توجه ۶.** علامت «یا» در بالا، یای مانع جمع **نیست** و از این رو، با «یا» ای که در زبان محاوره‌ای استفاده می‌شود فرق می‌کند. جمله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

یا حسن در خانه بوده است، یا حسین (در صورتی که فقط یک نفر در خانه بوده باشد)

فرض کنید $p$ گزاره‌ی «حسن در خانه است» باشد، و $q$ «گزاره‌ی حسین در خانه است». اگر $p$ و $q$ هر دو درست باشند، گزاره‌ی بالا (در زبان محاوره‌ای) غلط می‌شود؛ در حالی که در جدول بالا دیدیم که در منطق گزاره‌ها، در صورت درست بودن $p, q$ گزاره‌ی $p \vee q$ نیز درست است.

## ۲ جلسه‌ی دوم

در این جلسه به ادامه‌ی معناشناسیِ منطق گزاره‌ها می‌پردازیم. لازم می‌دانم که دوباره درباره‌ی $p \vee q$ توضیحی بدهم.

**توجه ۷.** علامت $\vee$ «یای» مانع جمع نیست. در واقع اگر بخواهیم مانع جمع شویم، گزاره‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

**سوال ۸** (سوال دانشجویان)**.** معنی کلمه‌ی **جمع** در **یای مانع جمع** چیست؟

جمعِ دو چیز در فارسی یعنی داشتن هر دوی آنها با همدیگر. بیت زیر از حافظ را مثال می‌زنم:
عشق و شباب و رندی، مجموعه‌ی مراد است
چون جمع شد معانی، گوی بیان توان زد

**تعریف ۹.** اگر $p$ و $q$ دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، گزاره‌ی $p \to q$ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود.

| p | q | p → q |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

توجه کنید که در سطر سوم و چهارم جدول ارزش بالا، می‌گوئیم که گزاره‌ی موردنظر به **انتفاء مقدم** درست است. در این حالت به محضِ دیدن فرض، تلاش برای یافتن درستی گزاره منتفی است! (یعنی گزاره درست است). این را در زبان روزمره را هم تا حدودی می‌توان دید. فرض کنید که کسی بگوید که «اگر سنگ سخن بگوید، اسب شتر است». این گزاره، با این که بی‌معنی به نظر می‌رسد، درست است! در واقع ما هیچگاه نیاز به تحقیق این نداریم که اسب شتر است، چون می‌دانیم که سنگ سخن نمی‌گوید! [۵]

**تعریف ۱۰.** اگر $p$ و $q$ دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، گزاره‌ی $p \leftrightarrow q$ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود.

| p | q | p ↔ q |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

**تعریف ۱۱.** اگر $p$ یک گزاره باشد $\neg p$ نیز یک گزاره است و به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

[۵] شاید این را هم شنیده باشید که از فرض محال همه چیز نتیجه می‌شود.

| p | ¬p |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

**مثال ۱۲.** جدول ارزش گزاره‌ی $\neg p \vee q$ را رسم کنید.

*پاسخ.*

| p | q | ¬p ∨ q |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

□

**توجه ۱۳.** ستون آخر جداول ارزش دو گزاره‌ی $p \to q$ و $\neg p \vee q$ یکسانند. در این حالت می‌گوییم که دو گزاره‌ی $p \to q$ و $\neg p \vee q$ با هم **معادلند** (هم‌ارزند) و می نویسیم:

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

**توجه ۱۴.** عبارت زیر یک **گزاره** در **منطق گزاره‌ها نیست**.

$$(p \to q) \equiv \neg p \vee q$$

اگر خاطرتان باشید، هنگام معرفی نمادهای منطقی هیچگاه نگفتیم که در منطق گزاره‌ها، نماد $\equiv$ هم داریم. علامت $\equiv$ جزو نمادهای منطقی نیست. بنابراین عبارت $(p \to q) \equiv \neg p \vee q$ یک گزاره نیست. در منطق گزاره‌ها چیزی گزاره حساب می‌شود که با نمادهای منطقی (ای که قبلا درباره‌شان صحبت کردیم) ساخته شده باشد. پس می‌گوییم که علامت $\equiv$ یک نماد «فرامنطقی» است که در زبان ریاضی روزمره از آن استفاده می‌کنیم. جمله‌ی زیر یک جمله در زبان روزمره است:

$$(p \to q) \equiv \neg p \vee q$$

معنی آن هم این است که «ستون آخر جدول ارزش گزاره‌ی سمت راست و چپ با هم یکسان است». چنین چیزی را توسط یک گزاره در خودِ منطق گزاره‌ها نمی‌توان نوشت و ما به عنوان موجوداتی که فرای آن منطق هستیم می‌توانیم درباره‌اش صحبت کنیم.

**تمرین ۱۵.** نشان دهید که در هر مورد گزاره‌های داده‌شده با هم معادلند:

۱. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

باید برای هر دو گزاره‌ی چپ و راست جدول بکشید و تحقیق کنید که ستون آخر هر دو جدول یکی است. برای کشیدن جدول، مثلاً برای گزاره‌ی سمت راست، باید اول تمام اجزایش برایتان مشخص شود (جدول

زیر را پر کنید)

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $q \to p$ | $(p \to q) \wedge (q \to p)$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

برای گزاره‌ی سمت چپ نیز به طور مشابه جدول بکشید.

۲. $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

**سوال ۱۶.** آیا عبارت $p \to q \equiv \neg p \to \neg q$ درست است؟

*راهنمایی.* هم با جدول و هم با آوردن مثال نشان دهید که عبارت بالا درست نیست. □

**مثال ۱۷.** بیایید عبارت $p \to q$ را با هم کمی تحلیل کنیم. توجه کنید که عبارتهای زیر با هم هم‌معنیند:

- $p \to q$
- $p$ شرط کافی برای $q$ است. (اگر $p$ آنگاه $q$)
- $q$ شرط لازم برای $p$ است. (تنها اگر $q$ آنگاه $p$).

فرض کنید پدر علی (که حرفهایش همیشه درست است!) به علی گفته است که «اگر درس بخوانی موفق می‌شوی».
از حرف پدر علی چه چیزی می‌توان استنباط کرد؟ بیایید این جمله را فرمولبندی ریاضی کنیم:

$p$ : علی درس بخواند

$q$ : علی موفق شود

پس سخن پدر علی، گزاره‌ی زیر است:

$p \to q$

به بیان دیگر، «به نظر پدر علی» درس خواندن شرط کافی برای موفق شدن است.
به نظر می‌آید که پدر علی در مورد عواقب درس نخواندن چیزی ادعا نکرده است؛ در واقع نگفته است که «اگر درس نخوانی موفق نمی‌شوی» یا «**تنها اگر** درس بخوانی موفق می‌شوی». پس گزاره‌ی زیر از سخن پدر علی نتیجه نمی‌شود:

$$\neg p \to \neg q.$$

به بیان دیگر، او نگفته است که **درس خواندن شرط لازم برای موفق شدن است** (به نظر او، از راههای دیگر هم می‌شود موفق شد!).

اما از طرفی دیگر، بنا به جمله‌ی پدر علی، اگر علی موفق نشود، می‌فهمیم که درس نخوانده بوده است. چون اگر درس می‌خواند، موفق شده بود. پس گزاره‌ی زیر از سخن پدر علی نتیجه می‌شود:

$$\neg q \to \neg p.$$

حال فرض کنیم که علی موفق شده است. از این لزوماً نتیجه نمی‌شود که علی درس خوانده است. پدر علی فقط گفته بود که اگر درس بخواند موفق می‌شود، ولی نگفته بود که تنها راه برای موفق شدن درس خواندن است. در واقع او نگفته بود که «موفق می‌شوی اگر و تنها اگر درس بخوانی». پس جمله‌ی زیر نیز از سخن پدر علی نتیجه نمی‌شود:

$$q \to p.$$

**سوال ۱۸.** آیا عبارت زیر درست است؟

$$\neg p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

**تمرین ۱۹.** جدول زیر را کامل کنید.

| p | q | ؟ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

گفتیم که $p \equiv q$ یعنی جدول ارزش دو گزاره‌ی $p$ و $q$ به ستون یکسانی ختم می‌شود.

**تمرین ۲۰.** نشان دهید که اگر

$$p \equiv q$$

آنگاه ستون آخر در جدول ارزش گزاره‌ی $p \leftrightarrow q$ تنها از علامت $T$ تشکیل شده است.

در تعریف زیر از تمرین بالا ایده گرفته‌ایم.

**تعریف ۲۱.** ۱. گزاره‌ی $p$ را یک **تاتولوژی** می‌خوانیم، هرگاه همواره (یعنی تحت هر نوع ارزشی که اجزاء آن داشته باشند) درست باشد.

**مثال ۲۲.** گزاره‌ی $p \vee \neg p$ یک تاتولوژی است.

| p | ¬p | $\neg p \vee p$ |
|---|---|---|
| T | F | T |
| F | T | T |

آنچه این مثال بیان کرده است را **اصلِ ردِّ شِقِّ ثالث** می‌خوانند. یعنی حالت سومی نیست، یا خود یک گزاره درست است یا نقیض آن.

۲. می گوییم گزاره‌ی $p$ **مستلزم** گزاره‌ی $q$ است، یا $p \to q$ یک **استلزام منطقی** است. هرگاه $p \to q$ تاتولوژی باشد، در اینصورت می‌نویسیم:

$$p \Rightarrow q$$

**توجه ۲۳.** علامت $\Rightarrow$ یک نماد منطقی نیست؛ پس عبارت زیر یک گزاره در منطق گزاره‌ها نیست:

$$p \Rightarrow q.$$

عبارت بالا یک جمله در زبان روزمره است بدین معنی که «گزاره‌ی $p \to q$ یک تاتولوژی است».

**توجه ۲۴.** به جای علامت $\equiv$ گاهی از علامت $\iff$ استفاده خواهیم کرد.

**سوال ۲۵.** فرق میان $p \to q$ و $p \Rightarrow q$ چیست؟

*پاسخ.* عبارت $p \to q$ یک گزاره در منطق گزاره‌ها است؛ ولی $p \Rightarrow q$ یک عبارت **فرا منطقی** در زبان روزمره است. عبارت $p \Rightarrow q$ گزاره محسوب نمی‌شود. □

در زبان روزمره‌ی ریاضیات از کلمه‌ی «**قضیه**» به جای تاتولوژی استفاده می‌کنیم.

**مثال ۲۶.** گزاره‌های زیر تاتولوژی هستند:

$$p \to p \tag{۱}$$

$$p \wedge q \to q \wedge p \tag{۲}$$

$$p \to p \wedge p \tag{۳}$$

$$p \wedge q \to q \tag{۴}$$

پس می توان نوشت:

$$p \Rightarrow p \tag{۵}$$

$$p \wedge q \Rightarrow q \wedge p \tag{۶}$$

$$p \Rightarrow p \wedge p \tag{۷}$$

$$p \wedge q \Rightarrow q \tag{۸}$$

**توجه ۲۷.** داریم $p \equiv q$ (یا $p \iff q$) هرگاه $p \leftrightarrow q$ یک تاتولوژی باشد.

**تمرین ۲۸.** ثابت کنید که

۱. $p \Rightarrow p \vee q$

*اثبات.* باید نشان دهیم که گزاره‌ی $p \to p \vee q$ یک تاتولوژی است.

| p | q | $p \vee q$ | $p \to p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | T | T |
| F | T | T | T |
| F | F | F | T |

□

۲. $p \wedge q \Rightarrow p$

۳. $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$

**تمرین ۲۹.** قوانین دُمُرگان

۱. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

برای اثبات کردن عبارت بالا باید ثابت کنیم که $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ یک تاتولوژی است.

۲. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

**تمرین ۳۰.**

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \tag{۹}$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \tag{۱۰}$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \tag{۱۱}$$

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r \tag{۱۲}$$

$$(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \vee r \to q \vee s) \tag{۱۳}$$

$$(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \wedge r \to q \wedge s) \tag{۱۴}$$

در مورد قضیه‌ی زیر در جلسه‌ی بعد صحبت خواهیم کرد.

**قضیه ۳۱.** ۱. $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$ قیاس استثنائی [۶]

۲. $(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ نفی تالی [۷]

۳. $(p \to q) \iff (p \wedge \neg q \to \underbrace{\perp}_{(p \wedge \neg p)})$ برهان خُلف [۸]

[۶] modus ponens
[۷] modus tollens
[۸] reductio ad absurdum

## ۳ جلسه‌ی سوم

پیش از شروع درس یادآوری می‌کنیم که عبارت

$$p \to q$$

یعنی $p$ شرط کافی برای $q$ است، و $q$ شرط لازم برای $p$ است.

**مثال ۳۲.** شرط لازم برای ورود به دانشگاه در کنکور است.

$q$: علی به دانشگاه وارد شده است.

$p$: علی کنکور داده است.

جمله‌ی شرط لازم برای ورود به دانشگاه، کنکوردادن است، در مورد علی به صورت زیر درمی‌آید:

$$q \to p$$

معادلاً به صورت زیر:

$$\neg p \to \neg q$$

وقتی می‌گوئیم شرط لازم برای ورود به دانشگاه، کنکور دادن است، یعنی اگر کنکور ندهیم، به دانشگاه وارد نمی‌شویم.
این جمله را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:
**تنها‌اگر** کنکور دهیم وارد دانشگاه می‌شویم.

**مرور درس ۳۳.** در جلسه‌ی قبل، با برخی **تاتولوژی‌ها** آشنا شدیم. تاتولوژی‌ها صرف نظر از معنی گزاره‌های به‌کار رفته در آنها همواره درستند. برای اثبات اینکه یک گزاره تاتولوژی است می‌توان جدول ارزش آن را بررسی کرد. اینکه «گزاره‌ی $p$ تاتولوژی است» جمله‌ای فرا منطقی است. تاتولوژی‌ها در واقع قضایایی درباره‌ی منطق گزاره‌ها هستند. برای اثبات تاتولوژی‌های جدید می‌توان از تاتولوژی‌های دیگر استفاده کرد. استفاده از تاتولوژیهای قبل برای اثبات تاتولوژیهای جدید را «**استنتاج**» کردن می‌گویند. [۹]

**مثال ۳۴.** گزاره‌ی زیر تاتولوژی است.

۱.

$$(p \to q) \wedge p \to q \quad \text{قیاس استثنایی}$$

*اثبات.* با توجه به تاتولوژی‌های قبلی مانند

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

[۹] البته تعریف دقیق استنتاج کردن، چیزی غیر از این است که آن را در درس منطق ریاضی خواهید آموخت.

داریم:

$$(p \to q) \wedge p \equiv (\neg p \vee q) \wedge p$$

بنا به تاتولوژی‌های قبلی داریم:

$$(\neg p \vee q) \wedge p \equiv p \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$$

حال توجه می‌کنیم که $p \wedge \neg p \equiv \perp$ (جدول بکشید).

توجه کنید که $p \vee \perp \equiv p$ (جدول بکشید). پس داریم:

$$(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

تا اینجا ثابت کردیم که

$$(p \to q) \wedge p \equiv p \wedge q$$

پس برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که

$$p \wedge q \to q$$

اما حکم بالا، خود یک تاتولوژی است که قبلاً آن را ثابت کرده‌ایم. □

۲.

$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p \quad \text{نفی تالی}$$

*اثبات.*

$$\begin{aligned} (p \to q) \wedge \neg q \to \neg p &\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \to \neg p \equiv \\ (\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \to \neg p &\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee \underbrace{(\neg q \wedge q)}_{\perp}) \to \neg p \equiv \\ &\underbrace{(\neg q \wedge \neg p \to \neg p)}_{T} \end{aligned}$$

□

۳.

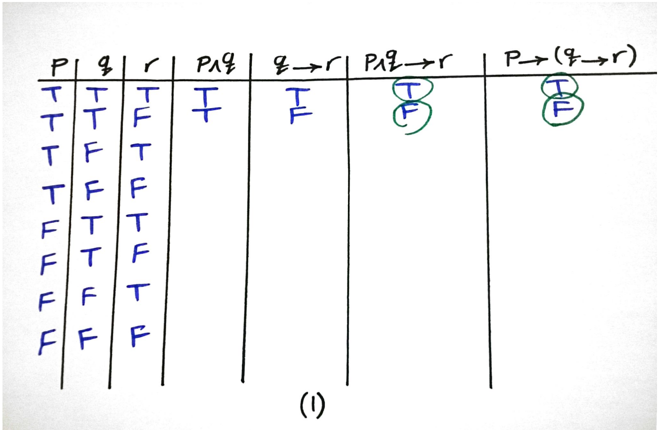
$$(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q \to \perp) \quad \text{برهان خُلف}$$

*اثبات.* به عنوان تمرین بر عهده‌ی شما. □

**مثال ۳۵.** نشان دهید

$$p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$$

*پاسخ.* می‌خواهیم نشان دهیم که $p \wedge q \to r \leftrightarrow p \to (q \to r)$ یک تاتولوژی است. باید نشان دهیم که دو ستون آخر جدول زیر با هم یکسانند:



| $p$ | $q$ | $r$ | $p\wedge q$ | $q\to r$ | $p\wedge q\to r$ | $p\to(q\to r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | F | F |
| T | F | T | | | | |
| T | F | F | | | | |
| F | T | T | | | | |
| F | T | F | | | | |
| F | F | T | | | | |
| F | F | F | | | | |

(۱)

تکمیل جدول به عهده‌ی شما. □

## ۱.۳ منطق مرتبه‌ی اول

منطق گزاره‌ها از بیان عبارتهایی مانند زیر ناتوان است:

ـ هر عدد اول بزرگتر از ۲ فرد است.

ـ حداقل دو نفر در کلاسِ ما قد بلندتر از ۱۷۰ سانتی متر دارند.

عبارت‌های بالا در منطق مرتبه‌ی اول (یا منطق محمولات، یا منطق سورها) نوشته شده‌اند. بخش اعظمی از ریاضیات با استفاده از منطق مرتبه‌ی اول قابل بیان است. منطق مرتبه‌ی اول از افزودن اجزاء زیر به منطق گزاره‌ها بدست می‌آید:

۱. متغیرها $x, y, z, \ldots$

۲. روابط و توابع $R(x,y), f(x,y) = z$

۳. سورهای عمومی و وجودی: $\exists$ و $\forall$

### ۱.۱.۳ نحو منطق مرتبه‌ی اول

ترتیب اهمیت ادوات به صورت زیر است:

۱. $(,)$

۲. $\forall, \exists$

۳. $\neg$

۴. $\wedge, \vee$

۵. $\rightarrow, \leftrightarrow$

**توجه ۳۶.** در میان ادوات هم‌ارزش، آنکه زودتر پدیدار شود، ارجح است.

**توجه ۳۷.** $\exists$ «سور وجودی» و $\forall$ «سور عمومی» نامیده می‌شوند.

متغیری که در <u>دامنه‌ی</u> سوری قرار بگیرد، متغیر <u>**پای‌بند**</u> نامیده می‌شود. متغیری که در دامنه‌ی هیچ سوری نباشد، متغیر <u>**آزاد**</u> نامیده می‌شود.

**مثال ۳۸.** در فرمول‌های زیر متغیر آزاد و پای‌بند را مشخص کنید و فرمول مورد نظر را پرانتزگذاری کنید.

۱. $\forall x \quad R_1(x,y) \rightarrow \exists y(s(y) \vee R_2(x,y))$

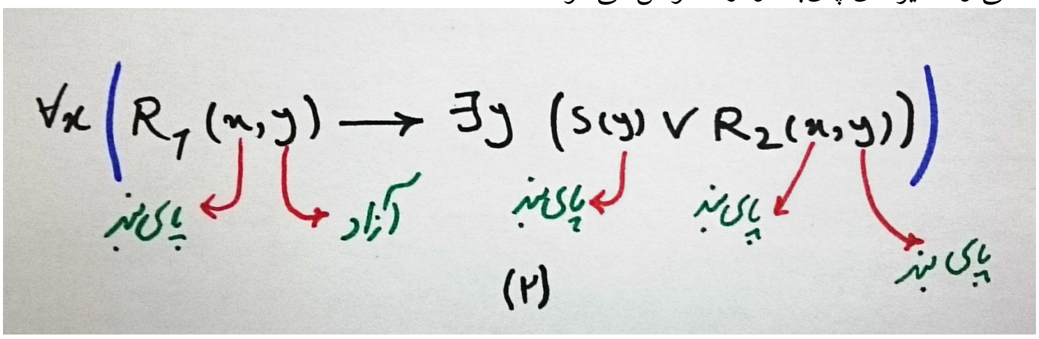
*پاسخ.* ابتدا پرانتزگذاری می‌کنیم:

$$(\forall x \quad R_1(x,y)) \rightarrow \exists y(s(y) \vee R_2(x,y))$$

حال متغیرهای آزاد و پای‌بند را شناسایی می‌کنیم:

$$(\forall x \quad R_1(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \overbrace{y}^{\text{آزاد}})) \rightarrow \exists y(s(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}) \vee R_2(\overbrace{x}^{\text{آزاد}}, \underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}))$$

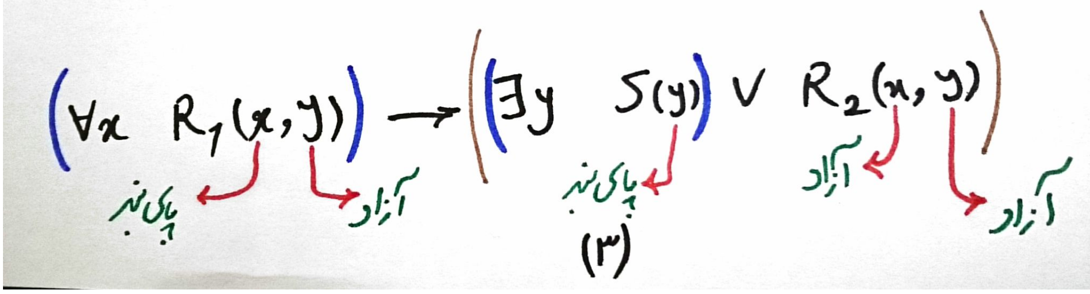
توجه: پرانتزگذاری فرمول بالا فقط به صورت بالا درست است؛ اگر پرانتزگذاری را به صورت زیر انجام دهیم، معنی و متغیرهای پای‌بند و آزاد عوض می‌شوند:




□

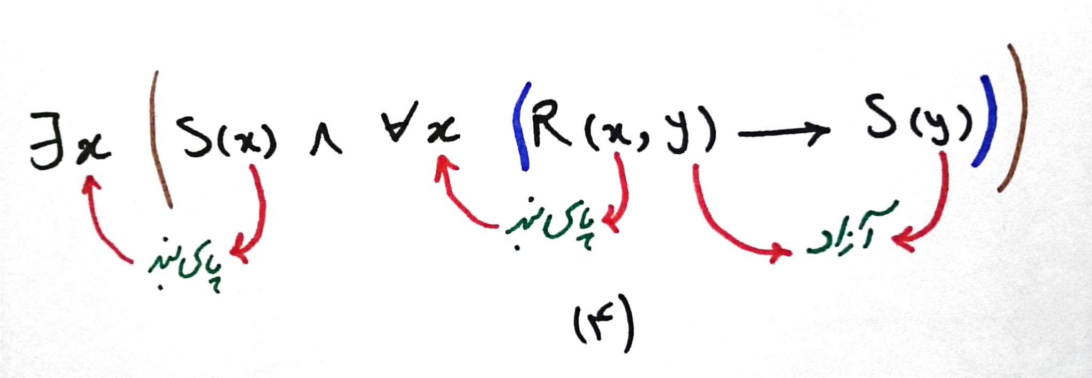
۲. فرمول زیر را پرانتزگذاری کنید:

$\forall x R_1(x,y) \rightarrow \exists y s(y) \vee R_2(x,y)$

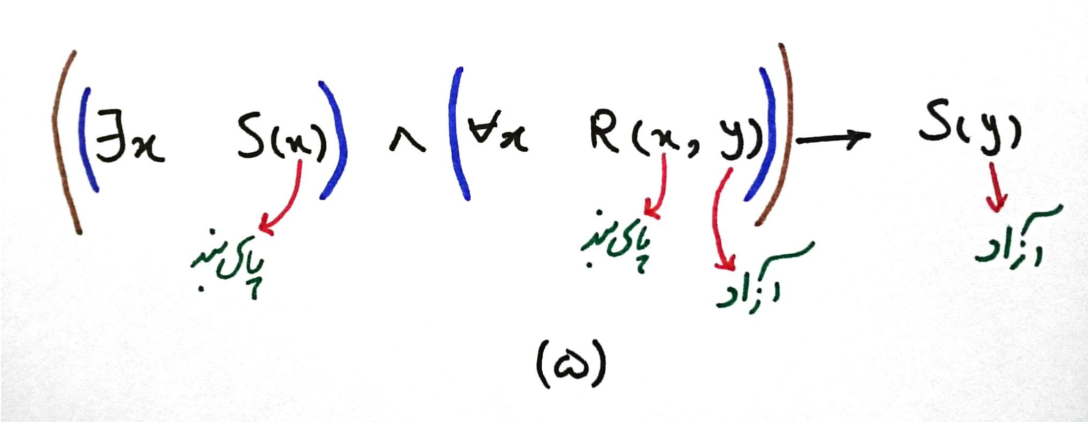


پاسخ. $\square$

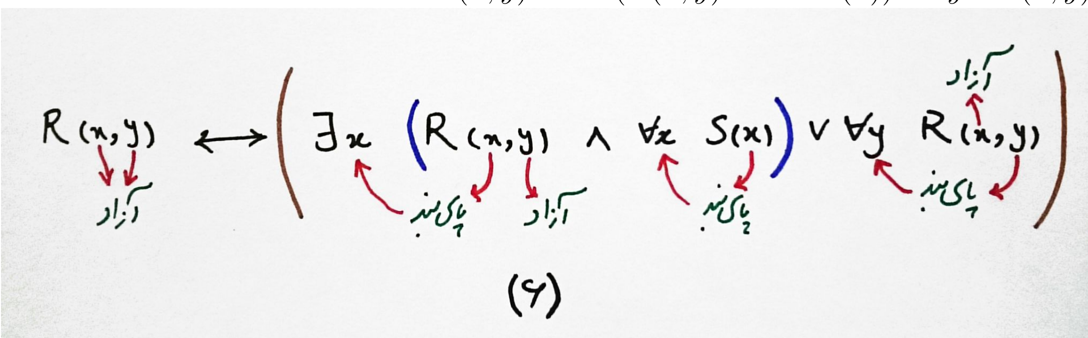
۳. $\exists x(s(x) \wedge \forall x(R(x,y) \to s(y)))$




۴. $\exists x s(x) \wedge \forall x R(x,y) \to s(y)$




۵. $R(x,y) \leftrightarrow \exists x(R(x,y) \wedge \forall x \quad s(x)) \vee \forall y \quad R(x,y)$




**توجه ۳۹.** در منطق مرتبه‌ی اول بسته به اینکه در مورد چه چیزی صحبت می‌کنیم، به زبان، رابطه یا تابع اضافه می‌کنیم. این را در مثالها بررسی خواهیم کرد.

## ۲.۳ معناشناسی منطق مرتبه‌ی اول

معناشناسی منطق مرتبه‌ی اول با استفاده از جدول ارزش صورت نمی‌گیرد. در اینجا باید گزاره‌ها و فرمولها را در **جهان** مربوط بدانها ارزیابی کرد. برای مثال، برای بررسی صحت جمله‌ی «در کلاس مبانی ریاضی سه نفر قد بلندتر

از ۱۷۰ سانتی‌متر دارند» باید وارد این کلاس شد، و به دنبال سه نفر گشت که شرط ذکر شده را برآورده کنند.

**مثال ۴۰.** عبارت زیر را در یک **زبان** مناسب در منطق مرتبه‌ی اول بنویسید.

ـ در کلاس حداقل ۵ دانشجوی خانم وجود دارند.

*پاسخ.* زبان را $L = \{D(x)\}$ می‌گیریم که در آن $D$ یک محمول تک‌موضعی است به معنی این که $x$ یک دختر است.

$\underbrace{D(x)}_{\text{محمول}}$ : $x$ دختر است.

$$\exists x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (D(x_1) \wedge D(x_2) \wedge D(x_3) \wedge D(x_4) \wedge D(x_5) \wedge \bigwedge_{i,j=1,\ldots,5, i\neq j} x_i \neq x_j)$$

□

**مثال ۴۱.** ـ در کلاس دقیقاً ۵ خانم وجود دارد.

*پاسخ.* دوباره از همان زبان $L$ در بالا استفاده می‌کنیم:

$$\big(\exists x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (D(x_1) \wedge D(x_2) \wedge D(x_3) \wedge D(x_4) \wedge D(x_5) \wedge \bigwedge_{i,j=1,\ldots,5, i\neq j} x_i \neq x_j)\big)$$

$$\wedge \forall x (D(x) \rightarrow (x = x_1) \vee \ldots \vee (x = x_5))$$

□

## ۴ جلسه‌ی چهارم

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی منطق مرتبه‌ی اول به عنوان تعمیمی از منطق گزاره‌ها صحبت کردیم. در منطق مرتبه‌ی اول، وقتی می‌خواهیم درباره‌ی یک جهان مشخص صحبت کنیم، ابتدا یک زبان مناسبِ $L$ انتخاب می‌کنیم که الفبای لازم را در اختیار ما قرار دهد، سپس با استفاده از امکانات زبان $L$ و ادوات منطقی (سورها، آنگاه و غیره) جمله‌ی مورد نظر خود را می‌نویسیم.

**توجه ۴۲.** در منطق مرتبه‌ی اول، سور روی زیر مجموعه‌ها نداریم.

$$\cancel{\forall A \subseteq B \ldots}$$

**مثال ۴۳.** در کلاس حداکثر ۵ دانشجوی خانم وجود دارند.
در این مثال، جهان مورد نظر ما «این کلاس» است. یعنی هر متغیری که روی آن سور بزنیم، به عنصری از این جهان اشاره دارد. ابتدا یک زبان مناسب انتخاب می‌کنیم:

$$L = \{D(x)\}$$

سپس **محمول تک‌متغیره‌ی** $D$ را به صورت زیر **تعبیر** می‌کنیم.
$D(x)$ یعنی $x$ خانم است. سپس جمله‌ی مورد نظرخود را می‌نویسیم:

$$\forall x_۱, x_۲, \ldots, x_۶ \quad \Big(D(x_۱) \wedge D(x_۲) \wedge \ldots \wedge D(x_۶) \rightarrow \bigvee_{i,j \in \{۱,\ldots,۶\}}^{i \neq j} x_i = x_j\Big)$$

**مثال ۴۴.** هر عدد اولِ مخالفِ ۲ فرد است.
در این مثال، جهان ما مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. قرار می‌دهیم: $L\{۱, |, +\}$. فرض می‌کنیم ۱ در زبان، به همان عدد یک در اعداد طبیعی اشاره کند و علامت $|$ تعبیر زیر را داشته باشد:
$x|y$ یعنی عدد $x$ عدد $y$ را عاد می‌کند.

*پاسخ.*

$$\forall x \quad \Big(\neg x|۱ + ۱ \wedge \forall y \quad (y|x \rightarrow (y = x \vee y = ۱)) \rightarrow \neg(۱ + ۱|x)\Big)$$

□

توجه کنید که همان مثال بالا را در زبان زیر هم می‌توان فرمولبندی کرد:
$L = \{\cdot, |, +, ۱\}$
در اینجا فرض می‌کنیم تعبیر جمع و ضرب موجود در زبان، همان جمع و ضرب اعداد باشد و می‌نویسیم:

$$\forall x \Big(\neg(x = ۲) \wedge \forall y \quad \big(y|x \rightarrow (y = x \vee y = ۱)\big) \rightarrow \exists n \quad x = ۲ \cdot n + ۱\Big)$$

توجه کنید که در بالا حق نداشتیم بنویسیم که

$$\exists n \in \mathbb{N} \dots$$

در واقع ما ابتدا مشخص کرده‌ایم که جهان مورد نظرمان $\mathbb{N}$ است.

**مثال ۴۵.** تمام اعداد اول بزرگتر از ۲ فردند.

همان مثال بالا را به این صورت نوشته‌ایم که اگر عددی اول و زوج باشد، آنگاه برابر با ۲ است. در واقع در اینجا از **معنای** عبارت کمک گرفته‌ایم و جمله‌ای **معادل** با جمله‌ی خواسته شده نوشته‌ایم:

*پاسخ.*

$$\forall x \quad \Big(\neg(x=۱) \wedge (۱+۱|x) \wedge \big(\forall y \quad (y|x \to y=۱ \vee y=x)\big) \to x=۱+۱\Big)$$

$\square$

**مثال ۴۶.** تابع $f$ در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است.

$$L=\{۰, f, a, R(x,y,z), >\}$$

جهان: $\mathbf{R}$

تعبیر رابطه‌ی $R$:

$$|x-y|<z \iff R(x,y,z)$$

*پاسخ.* آنچه می‌خواهیم عبارت زیر است:

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \quad \big(|x-a|<\delta \to |f(x)-f(a)|<\epsilon\big)$$

که آن را در زبان داده شده به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \quad \Big(R(x,a,\delta) \to R\big(f(x), f(a), \epsilon\big)\Big)$$

**توجه ۴۷.** این که تابع $f$ در نقطه‌ی $a$ پیوسته است را می‌توان در فرازبان منطقی اینگونه نوشت:

$$\Big(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\Big) \Leftrightarrow \forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \quad \big(|x-a|<\delta \to |f(x)-f(a)|<\epsilon\big)$$

علت این که بین دو عبارت از فِلِش دوخطه استفاده کرده‌ایم این است که این عبارت، در فرازبان منطقی نوشته شده است و از قول خود ماست. در عبارت بالا در واقع داریم می‌گوئیم که از نماد $\lim_{x\to a} f(x) = b$ برای اشاره به عبارت سمت راست استفاده کرده‌ایم.

$\square$

**مثال ۴۸.** اگر هر کس حداقل دو دوست داشته باشد، آنگاه یک نفر هست که با همه دوست است.

$$L = \{R(x, y)\}$$

جهان: دانشگاه

تعبیر رابطه‌ی $R(x, y)$ : $x$ و $y$ با هم دوستند.

*پاسخ.*

$$\forall x \quad \exists y_1, y_2 \quad R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \to \exists z \quad \forall t \quad R(z, t)$$

□

**مثال ۴۹.** هر کسی که حداقل دو دوست داشته باشد، با همه دوست است.

*پاسخ.*

$$\forall x \quad \Big(\exists y_1, y_2 \quad R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \to \forall z \quad R(x, z)\Big)$$

□

**مثال ۵۰.** هر کسی دو دوست دارد که آنها تنها یک دوست مشترک دارند.

*پاسخ.*

$$\forall x \quad \exists y_1, y_2 \quad \Bigg(R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \exists z \quad \Big(R(y_1, z) \wedge R(y_2, z) \wedge \\ \forall t \quad R(t, y_1) \wedge R(t, y_2) \to (t = z)\Big)\Bigg)$$

جمله‌ی بالا را با توجه به معنای آن می‌توان به صورت زیر بازنوشت:

$$\forall x \quad \Bigg(\exists y_1, y_2 \quad R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \forall z \quad \Big(R(y_1, z) \wedge R(y_2, z) \to (x = z)\Big)\Bigg)$$

□

**مثال ۵۱.** هر دو عدد دارای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هستند.

$$L = \{|\}$$

جهان: $\mathbf{N}$

*پاسخ.*

$$\forall x, y \quad \Bigg(\exists z \quad (z|x) \wedge (z|y) \wedge \Big(\forall t \quad (t|x) \wedge (t|y) \to (t|z)\Big)\Bigg)$$

□

**مثال ۵۲.** هر کسی که دوستی داشته باشد، دوست دیگری ندارد.

*پاسخ.*

$$\forall x \quad \left(\exists y \quad R(x,y) \to \forall z \quad \Big(\neg(y=z) \to \neg R(x,z)\Big)\right)$$

□

## ۱.۴ عبارت‌های همیشه درست در منطق مرتبه‌ی اول

گفتیم که «تاتولوژی‌ها» در منطق گزاره‌ها، عباراتی هستند که صرف نظر از ارزش گزاره‌های به کار رفته در آنها همواره درستند. برای مثال $p \vee \neg p$ همواره درست است و فرقی نمی‌کند که $p$ چه گزاره‌ای باشد. در واقع تاتولوژیها به نوعی «قوانین استنتاج» هستند. در منطق مرتبه‌ی اول نیز عبارتهای همیشه درست داریم (ولی کمتر از کلمه‌ی تاتولوژی برای آنها استفاده می‌شود). منظور از یک عبارت همیشه درست در منطق مرتبه‌ی اول، عبارتی است که **در هر جهانی که آن عبارت را تعبیر کنیم** درست است. در زیر چند مثال آورده‌ایم:

۱. $\neg\forall x \quad p(x) \equiv \exists x \quad \neg p(x)$

۲. $\neg\exists x \quad p(x) \equiv \forall x \quad \neg p(x)$

۳. $\forall x \quad \Big(p(x) \wedge q(x)\Big) \leftrightarrow \forall x \quad p(x) \wedge \forall x \quad q(x)$

۴. $\exists x \quad \Big(p(x) \vee q(x)\Big) \leftrightarrow \exists x \quad p(x) \vee \exists x \quad q(x)$

**سوال ۵۳.** عبارت‌های بالا را ثابت کنید.

*اثبات.* در زیر اولی را ثابت می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\neg\forall x \quad p(x) \equiv \exists x \quad \neg p(x)$$

فرض کنیم که $M$ یک جهان باشد که گزاره‌های بالا درباره‌ی آن نوشته شده‌اند. فرض کنیم در جهان $M$ داشته باشیم:

$$\neg\forall x \quad p(x)$$

یعنی در جهان $M$ اینگونه نیست که همه‌ی $x \in M$ ویژگی $p$ را داشته باشند. پس عنصری مانند $a \in M$ هست که $\neg p(a)$ پس در جهان ما جمله‌ی زیر درست است:

$$\exists x \quad \neg p(x)$$

اثبات جهت عکس به عهده‌ی شما. □

**سوال ۵۴.** آیا عبارت زیر همیشه درست است؟

$$\forall x \quad \big(A(x) \vee B(x)\big) \rightarrow \forall x \quad A(x) \vee \forall x \quad B(x)$$

*پاسخ.* به عنوان مثال اگر جهان ما $M = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد، و تعبیر جملات به صورت زیر باشد: $A(x) : x \geqslant ۲$ و $B(x) : x \leqslant ۱$. در جهان $M$ داریم:

$$\forall x \quad \big(x \geqslant ۲ \vee x \leqslant ۱\big)$$

اما جمله‌ی زیر در جهان $M$ درست نیست:

$$\forall x \quad x \geq ۲ \quad \vee \quad \forall x \quad x \leq ۱$$

در زیر مثال دیگری نیز آورده‌ایم. فرض کنید:

$$M = \{a, b, c, d, e\}$$

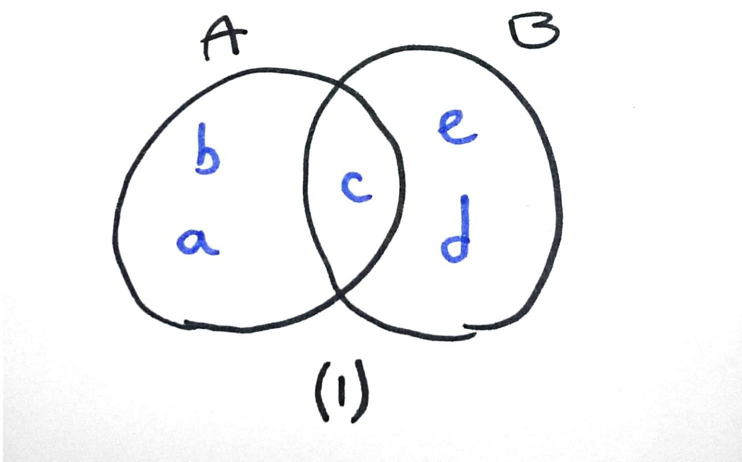
$$A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e\}$$

فرض کنید $A(x)$ به معنی $x \in A$ باشد و $B(x)$ به معنی $x \in B$. داریم

$$\forall x \quad (x \in A \vee x \in B)$$

اما عبارت زیر در جهان ما درست نیست:

$$\forall x \quad x \in A \quad \vee \quad \forall x \quad x \in B$$




$\square$

**سوال ۵۵.** آیا عبارت زیر درست است:

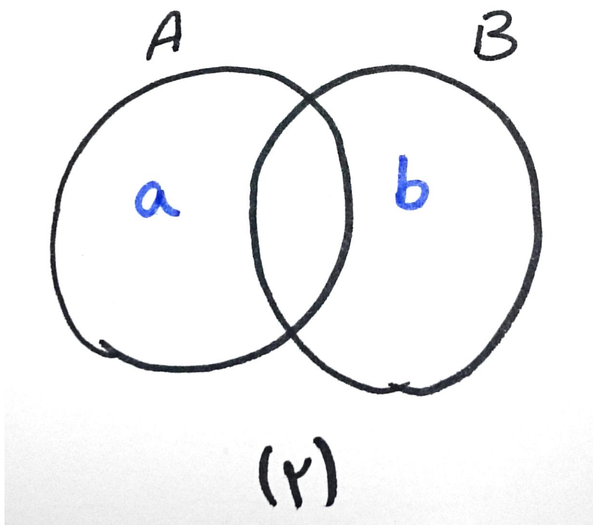
$$\exists x \quad A(x) \wedge \exists x \quad B(x) \rightarrow \exists x \quad \big(A(x) \wedge B(x)\big)$$

*پاسخ.* جهان را به صورت کشیده شده در شکل زیر در نظر بگیرید. داریم

$$\exists x \quad x \in A$$

$$\exists x \quad x \in B$$

$$\neg(\exists x \quad x \in A \wedge x \in B)$$




$\square$

**سوال ۵۶.** آیا عبارت زیر همواره درست است؟

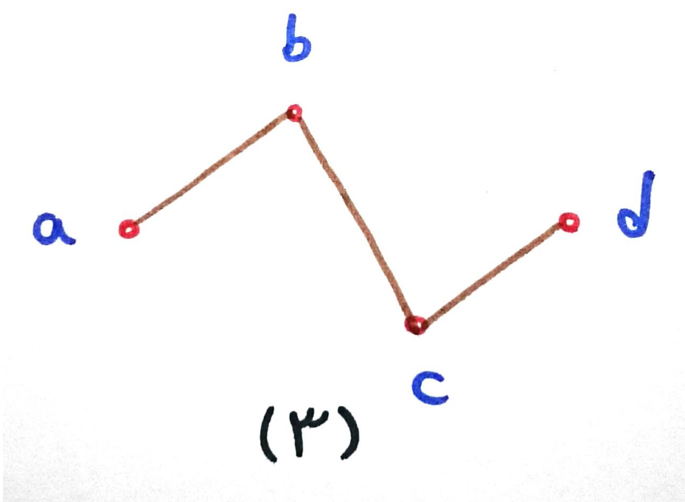
$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y) \to \exists y \quad \forall x \quad R(x,y)$$

*پاسخ.* جهان را به صورت زیر، مجموعه‌ی رأسهای یک گراف در نظر بگیرید:

$$M = \{a, b, c, d\}$$

و رابطه‌ی $R$ را چنین تعبیر کنید:

$R(x,y)$ یعنی بین $x$ و $y$ یک یال وجود داشته باشد.



در جهان بالا جمله‌ی

$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y)$$

درست است ولی جمله‌ی زیر غلط است:

$$\exists y \quad \forall x \quad R(x,y)$$

$\square$

# ۵ جلسه‌ی پنجم

**کوییز اول.** جملات زیر را در زبانِ $L = \{R(x,y)\}$ فرمولبندی کنید:

۱. هر کس که دوستی داشته باشد که با همه دوست است، حداقل با دو نفر دوست نیست.

*پاسخ.*

$$\forall x \quad \Big(\exists y \quad \big(R(x,y) \wedge \forall z \quad R(y,z)\big) \to \exists r,s \quad \big(\neg R(x,r) \wedge \neg R(x,s) \wedge \neg(r=s)\big)\Big)$$

$\square$

۲. اگر هر کس حداقل یک دوست داشته باشد، آنگاه دو نفر هستند که با هم دوست نیستند.

*پاسخ.*

$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y) \to \exists z,r \quad \neg R(z,r)$$

$\square$

## ۱.۵ نظریه‌ی مجموعه‌ها

مجموعه را در ریاضیات دبیرستان به صورت زیر تعریف می‌کنند:

مجموعه، گردایه‌ای است از اشیاء معین و متمایز که دارای ویژگی خاصی هستند.

هر چند همه‌ی ما تعریف بالا را به صورت شهودی می‌توانیم بپذیریم ولی در عین حال باید بپذیریم که عبارتهای **گردایه، شیء، دور هم جمع آمدن** و ... ساده‌تر از خودِ مجموعه نیستند! به نظر می‌آید که در تعریف بالا، تنها کلمه‌ی مجموعه با چند کلمه‌ی دیگر جایگزین شده است. شاید این مشکل به ظاهر بزرگ نرسد. در واقع تا اوایل قرن بیستم تعریف شهودی بالا، که آن را به کانتور نسبت می‌دهند، تعریف مورد قبول ریاضیدانان برای مفهوم مجموعه بود. بنابراین از نظر کانتور، اگر $p(x)$ یک ویژگی باشد، هر عبارت به صورت زیر یک مجموعه است:

$$\{x|p(x)\}$$

عبارت بالا، مجموعه‌ی $x$ هائی را نشان می‌دهد که ویژگیِ $p$ را دارا هستند.

در قسمت بعد بررسی کرده‌ایم که مشکل تعریف بالا چه می‌تواند باشد.

## ۲.۵ پارادوکس راسِل

فرض کنید $p(x)$ ویژگیِ $x \notin x$ باشد:

$$p(x) : x \notin x$$

آنگاه بنا به آنچه در بالا گفتیم، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$A = \{x | x \notin x\}$$

از آنجا که $A$ یک مجموعه است، پس گزاره‌ی $p(x)$ که درمورد مجموعه‌ها نوشته شده است، با جایگذاریِ $A$ به جای $x$ یا باید درست باشد یا غلط؛ به بیان دیگر گزاره‌ی $p(A)$ یا درست است یا غلط (بنا به اصل ردّ شق ثالث). حال درست بودن یا غلط بودن این گزاره را بررسی می‌کنیم.

**سوال ۵۷.** آیا $A \in A$؟

*پاسخ.* اگر $A \in A$ آنگاه

$$A \in \{x | x \notin x\}$$

پس $A \notin A$ ↯

پس به نظر می‌آید که $A$ متعلق به $A$ نیست. اما انگار این هم درست نیست: اگر $A \notin A$ آنگاه

$$A \notin \{x | x \notin x\}$$

پس $A \in A$ ↯

رویداد پاردوکس راسل نشان می‌دهد که شهود علمی اولیه ما از مجموعه‌ها، که سالها پایه‌ی بنای کار ریاضیدانان بوده است، شهودی تناقض‌آمیز است. در واقع علم ریاضی، در همین نخستین قدم دچار تناقضی آشکار شده است. از کجا معلوم که سایر بخشهای دیگر ریاضی دچار تناقض نباشند؟ شاید من امروز قضیه‌ای در اتاق کارم ثابت کنم که چند ماه بعد قرار است نقیض آن را اثبات کنم!

از آنجا که علمِ حاویِ تناقض، مطلوب ما نیست، باید برای تعریف مجموعه‌ها، چاره‌ای بجوئیم.

در بخش بعد راهی را که منطق برای رهائی از چنین پارادوکسهائی پیش پای ریاضیدانان گذاشته است معرفی می‌کنیم. پیش از آن در زیر دو نکته را یادآور می‌شویم:

نظریه‌ی مجموعه‌های کانتور را گاهی نظریه‌ی مجموعه‌ی سهل‌انگارانه [۱۰] نیز می‌خوانند.

پارادوکس راسل، که ذهن بسیاری از ریاضیدانان و فیلسوفان را به خود مشغول کرده بود، از نوع پارادوکسهای «ارجاع‌به‌خود» [۱۱] است. در زیر مثال دیگری از چنین پارادوکسها را آورده‌ایم:

**مثال ۵۸** (پارادوکس دروغگو). فرض کنید شخصی بگوید «من دروغگو هستم». آیا این شخص دروغگو است یا راستگو؟ اگر راستگو باشد، پس راست گفته است که دروغگو است، پس دروغگو است! اگر دروغگو باشد پس دروغ گفته است که دروغگوست، پس راستگوست!

[۱۰] naive set theory

[۱۱] self-reference

$\square$

## ۳.۵ روش اصل‌موضوعه‌ای برای تعریف مجموعه

برای رهائی از پارادوکسهائی مانند پاردوکس راسل، ریاضیدانان روش اصل موضوعه‌ای را برای تعریف مجموعه برگزیده‌اند. این روش بر منطق مرتبه‌ی اول استوار است که آن را در جلسات اول معرفی کرده‌ایم.

نخست زبان مرتبه اول زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$L = \{\in\}$$

در روش اصل‌موضوعه‌ای، مجموعه، متغیری مانند $x, y, z, \ldots$ است که از اصول «نظریه‌ی مجموعه‌ها» پیروی کند. همه‌ی این اصول را می‌توان با استفاده از ادوات منطقی و علامت $\in$ نوشت.

بخش اعظمی از ریاضیات امروز بر پایه‌ی **اصول نظریه‌ی مجموعه‌های زرملو ـ فرانکل به علاوه‌ی اصل انتخاب** بنا نهاده شده است. مجموعه‌ی این اصول را $ZFC$ می‌خوانیم. در زیر (و در جلسه‌ی بعد) این اصول را معرفی کرده‌ایم. در طی جلسات آینده، برخی از آنها را به تفصیل بررسی خواهیم کرد و نیز به بررسی این نکته خواهیم پرداخت که آیا در روش اصل موضوعه‌ای هم پارادوکس راسل رخ می‌دهد. توجه کنید که اصول زیر، **از همدیگر نتیجه نمی‌شوند**.

اصول $ZFC$ را در زبان $L = \{\in\}$ و در منطق مرتبه‌ی اول می‌نویسیم:

۱. **اصل وجود:**

بیان غیر رسمی: تهی یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\exists X \quad \forall y \quad \neg(y \in X)$$

از این بعد از نمادِ $X = \emptyset$ به جای فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\forall y \quad \neg(y \in x)$$

پس اصل اول می‌گوید که

$$\exists X \quad X = \emptyset$$

۲. **اصل گسترش:** بیان غیر رسمی: دو مجموعه که اعضای یکسانی داشته باشند، با هم برابرند. بیان رسمی:

$$\forall A, B \quad \Big(\forall x \quad (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B\Big)$$

۳. **اصل تصریح:**

بیان غیر رسمی: اگر بدانیم که $A$ یک مجموعه است آنگاه اگر $p(x)$ یک ویژگی باشد که در منطق مرتبه‌ی اول بیان شده است، آنگاه عبارت زیر نیز یک مجموعه است.

$$\{x \in A | p(x)\}$$

بیان رسمی:

$$\forall A \quad \exists B \quad \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge p(x))$$

در واقع اگر $A$ یک مجموعه باشد، عبارت زیر بنا به اصل تصریح یک مجموعه است.

$$B = \{x \in A | p(x)\}$$

**توجه ۵۹.** توجه کنید که در نظریه‌ی مجموعه‌های سهل‌انگارانه، هر عبارتی به صورت زیر را یک مجموعه دانستیم:

$$\{x | p(x)\}$$

در اصل تصریح، یک شرط به بالا اضافه کرده‌ایم: **اگر بدانیم که $A$ یک مجموعه است،** آنگاه عبارت زیر نیز یک مجموعه است:

$$\{x \in A | p(x)\}.$$

۴. **اصل جفت‌سازی:**

بیان غیر رسمی: اگر $x$ و $y$ دو مجموعه باشند، آنگاه $\{x, y\}$ یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\forall x, y \quad \exists A \quad \Big(\forall z \quad z \in A \leftrightarrow (z = x \vee z = y)\Big)$$

۵. **اصل اجتماع:**

بیان غیر رسمی: هر اجتماعی از مجموعه‌ها خود یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\forall A \quad \exists U \quad \forall x \quad \Big(x \in U \leftrightarrow \exists B \quad B \in A \wedge x \in B\Big)$$

اگر $U$ مجموعه‌ی بالا باشد، می‌نویسیم:

$$U = \bigcup A$$

مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{A_۱, A_۲, A_۳\} \quad U = \bigcup A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$$

$$x \in U \leftrightarrow (x \in A_۱) \vee (x \in A_۲) \vee (x \in A_۳)$$

**مثال ۶۰.** یکی از دانشجویان پرسید که فرق بین اصل جفت‌سازی و اصل اجتماع چیست. در زیر این تفاوت آشکار است:

$$x = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$y = \{۴, ۵, ۶\}$$

$$x \cup y = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

$$\{x, y\} = \{\{۱, ۲, ۳\}, \{۴, ۵, ۶\}\}$$

۶. **اصل مجموعه‌ی توان:**

بیان غیر رسمی: اگر $A$ یک مجموعه باشد، گردایه‌ی تمام زیر مجموعه‌های آن نیز یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\forall A \quad \exists B \quad \left(\forall x \quad x \in B \leftrightarrow \left(\forall z \quad \underbrace{(z \in x \to z \in A)}_{x \subseteq A}\right)\right)$$

**توجه ۶۱.** برای یک مجموعه‌ی $A$، گردایه‌ی تمام زیر مجموعه‌هایش را (که بنا به اصل بالا یک مجموعه است) با $P(A)$ نشان می‌دهیم:

$$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

۷. **اصل جانشانی** [۱۲]:

برای این اصل، به بیان غیر رسمی بسنده می‌کنیم. بیان غیر رسمی: **تصویر** یک مجموعه تحت یک **تابع تعریف‌پذیر** ، مجموعه است. پرداختن به معنی «تابع تعریف‌پذیر» جزو اهداف این درس نیست. دانشجوی علاقه‌مند می‌تواند با این مفهوم در درس «منطق» آشنائی پیدا کند.

۸. **اصل انتظام:**

$$\forall X \quad \left(X \neq \emptyset \to \exists z \quad z \in X \quad z \cap X = \emptyset\right)$$

در جلسه‌ی بعد این اصل را توضیح خواهیم داد و به باقی اصول نیز خواهیم پرداخت.

---

[۱۲] replacement

## ۶ جلسه‌ی ششم

### اصل انتظام

در جلسه‌ی قبل، با اصل انتظام آشنا شدیم:

$$\forall X \quad \left(X \neq \emptyset \to \exists z \quad z \in X \wedge z \cap X = \emptyset\right)$$

#### دو نتیجه از اصل انتظام

۱. از اصول $ZFC$ نتیجه می‌شود که:

$$\forall x \quad x \notin x.$$

یعنی عبارتی به صورت زیر (یعنی به صورتی که تعداد آکولادها نامتناهی باشد)، مجموعه **به حساب نمی‌آید:**

$$\left\{\left\{\{\dots\}\right\}\right\}$$

اثبات این گفته، از اثبات قسمت بعدی نتیجه می‌شود.

۲. به طور کلی‌تر، در نظریه‌ی مجموعه‌ها هیچ دنباله‌ی به صورت زیر پیدا نمی‌شود:

$$a_۱ \ni a_۲ \ni a_۳ \ni \dots$$

*اثبات.* فرض کنید که دنباله‌ای نزولی به صورت زیر موجود باشد.

$$a_۱ \ni a_۲ \ni a_۳ \ni \dots$$

بنا به اصل جانشانی $A = \{a_۱, a_۲, \dots\}$ یک مجموعه است. [۱۳] بنا به اصل انتظام از آنجا که $A \neq \emptyset$ داریم:

$$\exists z \in A \quad z \cap A \neq \emptyset$$

فرض کنیم که

$$z = a_k$$

اما $a_{k+۱} \in a_k$ پس

$$\lightning \quad a_{k+۱} \in \underbrace{z \cap A}_{a_k}$$

□

[۱۳] این قسمت اثبات را فعلاً از من بپذیرید. از آنجا که پرداختن به اصل جانشانی به صورت دقیق، جزو اهداف درس نیست، فعلاً توضیح نمی‌دهم که چگونه با اصل جانشانی به این نتیجه رسیده‌ایم.

**مثال ۶۲.** سعی کنید که اصل انتظام را در مجموعه‌ای نقض کنید، آیا این کار برایتان امکان‌پذیر است؟:

$$A = \Big\{ \big\{ \{\{۱, ۲\}\} \big\}, \big\{ \{۱, ۲\} \big\}, \{۱, ۲\} \Big\}$$

## اصل نهم، اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی

این که جهان هستی متناهی است یا نامتناهی، قابل اثبات نیست. در نظریه‌ی مجموعه‌ها، این که مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد، یک اصل است:

بیان غیر رسمی: یک مجموعه‌ی نامتناهی موجود است.

بیان رسمی این اصل در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها، به شیوه‌ی هوشمندانه‌ی زیر است:

بیان رسمی:

$$\exists X \quad \Big( \emptyset \in X \wedge \forall y \quad \big( y \in X \to y \cup \{y\} \in X \big) \Big)$$

پس مجموعه‌ی $X$ که در اصل بالا بدان اشاره شده است، شامل مجموعه‌ی زیر است:

$$\Big\{ \emptyset, \{\emptyset\}, \big\{ \emptyset, \{\emptyset\} \big\}, \big\{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \big\}, \dots \Big\}$$

## اصل دهم، اصل انتخاب

فرض کنید $A_۱, A_۲, A_۳$ سه مجموعه‌ی ناتهی باشند؛ پس

$$\exists x_۱, x_۲, x_۳ \quad x_۱ \in A_۱ \wedge x_۲ \in A_۲ \wedge x_۳ \in A_۳$$

یعنی عنصرِ $(x_۱, x_۲, x_۳)$ در مجموعه‌ی $A_۱ \times A_۲ \times A_۳$ واقع است. اما اگر تعداد این مجموعه‌ها نامتناهی باشد، چگونه می‌توان از هر یک از آنها عضوی انتخاب کرد. امکان‌پذیر بودن این امر، خودْ یک اصل است.

بیان غیر رسمی اصل انتخاب: اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد، می‌توان از هر یک از آنها عضوی انتخاب کرد.

بیان رسمی:

$$\forall X \quad \Big( X \neq \emptyset \to \exists f : X \to \bigcup X \quad \forall x \in X \quad f(x) \in x \Big)$$

**مثال ۶۳.**

$$X = \Big\{ \{۱, ۲\}, \{۴, ۵, ۶\}, \{۷, ۸\}, \{۹\} \Big\}$$

$$\bigcup X = \Big\{ ۱, ۲, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ \Big\}$$

$$f : X \to \bigcup X$$

$$f(\{۱, ۲\}) = ۱ \quad f(\{۴, ۵, ۶\}) = ۶, \quad f(\{۷, ۸\}) = ۷, \quad f(\{۹\}) = ۹$$

تابع $f$ در بالا یک مثال از یک تابع انتخاب است. برای مجموعه‌ی $X$ در بالا، توابع انتخاب دیگری نیز موجودند.

## ۱.۶ بررسی پارادوکس راسل در زدافسی

گفتیم که رهیافت اصل‌موضوعه‌ای به نظریه‌ی مجموعه‌ها، برای رهائیدن از پارادوکسهائی مانند پارادوکس راسل برگزیده شده است. در زیر بررسی کرده‌ایم که چرا در زدافسی پارادوکس راسل رخ نمی‌دهد. نخست یک مشاهده‌ی مهم داشته باشیم: گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها، خودْ مجموعه نیست.

**مشاهده ۶۴.** نشان دهید که از اصول $ZFC$ نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها نداریم.

*اثبات.* راه اول (با استفاده از اصل انتظام). فرض کنیم گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها، یک مجموعه باشد؛ آن را $A$ بنامیم. پس از آنجا که $A$ یک مجموعه است و $A$ گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست پس $A \in A$. اما این با اصل انتظام تناقض دارد.
راه دوم (بدون استفاده از اصل انتظام و با استفاده از اصل تصریح). فرض کنید $A$ مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها باشد. بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$B = \{x \in A | x \notin x\}$$

حال دو حالت داریم، یا $B \in B$ یا $B \notin B$. اگر $B \in B$ آنگاه $B \in \{x \in A | x \notin x\}$ پس $B \notin B$. و به طور مشابه اگر $B \notin B$ آنگاه $B \in B$ و این تناقض است. □

معمولاً در ریاضیات برای سخن گفتن درباره‌ی گردایه‌هائی که مجموعه نیستند از کلمه‌ی **کلاس** استفاده می‌شود.

کلاسِ همه‌ی مجموعه‌ها : $V$

**سوال ۶۵.** آیا پارادوکس راسل، اصول $ZFC$ را دچار مشکل می‌کند؟

*پاسخ.* عبارت $\{x | x \notin x\}$، بنا به اصل انتظام، کلاس همه‌ی مجموعه‌هاست. پس مجموعه نیست!
□

[۱۴] در سال اول دانشگاه، هرگز متوجه نمی‌شدم که چرا اصل انتخاب، یک اصل است. با خود می‌گفتم که اصل انتخاب را می‌توان ثابت کرد، پس اصل نیست. اثبات من این بود: فرض کنیم $\{X_i\}_{i \in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. داریم

$$\forall i \in I \quad X_i \neq \emptyset$$

پس فرض کنیم

$$\forall i \quad x_i \in X_i$$

پس $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$! به نظر شما، اشکال استدلال من چه بوده است؟

## ۲.۶ کار با اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

**تعریف ۶۶.** فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه باشند، می‌نویسیم $A \subseteq B$ هرگاه:

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \in B\Big)$$

**قضیه ۶۷.** مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست؛ به بیان ریاضی:

$$\forall X \quad \emptyset \subseteq X$$

*اثبات.* باید نشان دهیم که

$$\forall X \forall x \quad \Big(x \in \emptyset \to x \in X\Big)$$

حال فرض کنیم $X$ یک مجموعه باشد، باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad \Big(x \in \emptyset \to x \in X\Big)$$

حال یک مجموعه‌ی دلخواهِ $x$ را در نظر می‌گیریم. باید نشان دهیم که عبارت زیر درست است:

$$x \in \emptyset \to x \in A$$

عبارت بالا به انتفاء مقدم درست است. $\square$

**قضیه ۶۸.** اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$ .

*اثبات.* فرض کنید $A$ ، $B$ و $C$ مجموعه باشند و $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. برای نشان دادن این که $A \subseteq C$ باید عبارت زیر را ثابت کنیم:

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \in C\Big)$$

اگر $a$ یک عضو دلخواه باشد، آنگاه

$$a \in A \to a \in B(۱)$$

از آنجا که $B \subseteq C$ داریم

$$a \in B \to a \in C(۲)$$

پس بنا به تاتولوژیهای بخش قبل، از (۲) ,(۱) نتیجه می‌شود که

$$a \in A \to a \in C.$$

از آنجا که $a$ به دلخواه انتخاب شده است، پس نشان داده‌ایم که

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \in C\Big)$$

یعنی

$$A \subseteq C$$

$\square$

### ۳.۶ اعداد طبیعی و استقراء

روشی که زِرمِلو برای تعریف اعداد طبیعی پیشنهاد کرده است، روش زیر است:

$$
\begin{aligned}
&۰ = \emptyset \\
&۱ = \{۰\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \\
&۲ = \{۰, ۱\} = \{\emptyset\} \cup \big\{\{\emptyset\}\big\} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \\
&۳ = \{۰, ۱, ۲\} = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

**تعریف ۶۹.** فرض کنید $A$ یک مجموعه باشد. آن را استقرائی می‌خوانیم هرگاه $\emptyset \in A$ و

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \cup \{x\} \in A\Big)$$

**توجه ۷۰.** اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی در واقع بیانگر این است که یک مجموعه‌ی استقرائی موجود است.

**تعریف ۷۱.** هر عنصری (یعنی هر مجموعه‌ای) که متعلق به تمام مجموعه‌های استقرائی باشد، یک **عدد طبیعی** می‌نامیم.

**قضیه ۷۲.** مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد.
(منظور: یک مجموعه هست که اعضای آن دقیقاً اعداد طبیعی هستند.)

قضیه‌ی بالا را در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد.

**توجه ۷۳.** در نظریه‌ی مجموعه‌های اصل‌موضوعه‌ای، هر متغیری که درباره‌ی آن صحبت شود، یک مجموعه است. در واقع جهانی که روی آن سور زده می‌شود جهان مجموعه‌هاست. پس برای ما مجموعه و عنصر دو مفهوم متفاوت نیستند. هر عنصری از یک مجموعه، خود نیز یک مجموعه است.

# ۷ جلسه‌ی هفتم

## ۱.۷ اعداد طبیعی

در جلسات قبل با اصل موجود یک مجموعه‌ی استقرایی (یا وجود یک مجموعه‌ی نامتناهی) آشنا شدیم:

$$\exists A \quad \Big(\emptyset \in A \wedge \forall x \quad (x \in A \to x \cup \{x\} \in A)\Big)$$

نیز گفتیم که از این ایده، برای تعریف اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&۰ = \emptyset\\
&۱ = \{۰\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}.\\
&۲ = \{۰, ۱\} = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}\\
&۳ = \{۰, ۱, ۲\} = \left\{\emptyset, \Big\{\emptyset\Big\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}\right\}
\end{aligned}$$

**تعریف ۷۴.** منظور از یک عدد طبیعی، **مجموعه‌ای** است که به همه‌ی مجموعه‌های استقرایی تعلق دارد.

**قضیه ۷۵.** مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد. (یعنی مجموعه‌ای موجود است که مجموعه های موجود در آن، یا همان اعضای آن، دقیقاً اعداد طبیعی هستند.)

*اثبات.* بنا به اصل وجودِ یک مجموعه‌ی نامتناهی، یک مجموعه‌ی استقراییِ $A$ موجود است. بنا به اصل تصریح عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{x \in A | \forall y \quad \Big( \big( \underbrace{\emptyset \in y \wedge \forall z \quad (z \in y \to z \cup \{z\} \in y)}_{\text{اگر } y \text{ استقرایی باشد.}} \big) \to x \in y \Big) \}$$

□

در واقع، در قضیه‌ی بالا ثابت کرده‌ایم که مجموعه‌ی اعداد طبیعی اشتراک همه‌ی مجموعه‌های استقرائی است. یعنی اگر $x$ طبیعی باشد آنگاه $x$ در تمام مجموعه‌های استقرائی است و اگر $x$ در تمام مجموعه‌های استقرائی باشد، $x$ طبیعی است.

**توجه ۷۶.** مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با $\mathbf{N}$ نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{N} = \bigcap_{A \text{ استقرایی}} A$$

پس $\mathbf{N}$ کوچکترین مجموعه‌ی استقرائی است.

**قضیه ۷۷** (استقراء روی اعداد طبیعی). فرض کنید $p(x)$ یک ویژگی برای اعداد طبیعی باشد. آنگاه جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست است:

$$p(۰) \wedge \forall x \quad \Big(p(x) \to p(x + ۱)\Big) \to \forall y \quad p(y)$$

*اثبات.* فرض کنید جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست باشد.

$$p(۰) \wedge \forall x \quad \Big(p(x) \rightarrow p(x+۱)\Big)$$

هدف: نشان دادن این که جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست است:

$$\forall x \quad p(x)$$

بنا به اصل تصریح عبارت زیر یک مجموعه است:

$$S = \{x \in \mathbf{N} | p(x)\}$$

می‌دانیم که $\quad S \subseteq \mathbf{N} \quad$ ①

**یادآوری ۷۸** (اصل گسترش)**.**

$$A = B \leftrightarrow \forall x \quad (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

به بیان دیگر با توجه به اینکه نماد $\subseteq$ را تعریف کرده‌ایم، اصل گسترش را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

کافیست نشان دهیم که $\mathbf{N} \subseteq S$. در آن صورت برای تمام اعداد طبیعی، حکمِ $p$ درست خواهد بود.

**توجه ۷۹.** اگر نشان دهیم که $S$ یک مجموعه‌ی استقرائی است آنگاه $\mathbf{N} \subseteq S$.

پس نشان می‌دهیم که $S$ استقرائی است.
اولاً $۰ \in S$ . ثانیاً اگر $x \in S$ آنگاه

$$x + ۱ := x \cup \{x\} \in S$$

پس $S$ استقرائی است. پس $\mathbf{N} \subseteq S \quad$ ②

$$①, ②, \text{اصل گسترش} \Rightarrow \mathbf{N} = S$$

□

در قضیه‌ی بالا در واقع «استقراء» را برای اعداد طبیعی ثابت کرده‌ایم. یعنی ثابت کرده‌ایم که اگر $p$ حکمی درباره‌ی اعداد طبیعی باشد و $p(۰)$ برقرار باشد و از برقراری هر $p(x)$ برقراریِ $p(x+۱)$ نتیجه شود، آنگاه حکم مورد نظر برای تمام اعداد طبیعی درست است.
از استقراء گاهی برای **تعریف** های مربوط به اعداد طبیعی نیز استفاده می‌کنیم:

## ۲.۷ تعریف توان $x^n$

فرض کنید $x$ یک متغیر (مثلاً یک عدد حقیقی) باشد. توانهای طبیعیِ $x$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x^{۰} := ۱$$

$$x^{n+۱} := x^n . x$$

**تعریف ۸۰** (مثال برای استقراء)**.** اگر $n$ یک عدد طبیعی باشد و $r$ یک عدد صحیح تعریف کنید:

$$\binom{۰}{۰} = ۱$$
$$\binom{۰}{r} = ۰ \quad \forall r \neq ۰$$
$$\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r} + \binom{n-۱}{r-۱}$$

**تمرین ۸۱.** نشان دهید که (برای هر $۰ \leqslant r \leqslant n$) داریم

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

*اثبات.*

$$\text{حکم} \quad p(n): \quad \forall ۰ \leqslant r \leqslant n \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ابتدا بررسی می‌کنیم که حکم در ۰ برقرار است:

$$p(۰): \quad \forall \underbrace{۰ \leqslant r \leqslant ۰}_{r=۰} \quad \cancelto{۱}{\binom{۰}{r}} = \frac{۰!}{r!(۰-r)!} = ۱$$

فرض کنیم که $p(n)$ برقرار باشد، یعنی

$$\forall ۰ \leqslant r \leqslant n \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

هدف: نشان دادن اینکه $p(n+۱)$ برقرار است.

$$\forall ۰ \leqslant r \leqslant n+۱ \quad \binom{n+۱}{r} = \frac{(n+۱)!}{r!(n+۱-r)!}$$

فرض کنیم $r < n+۱$ آنگاه داریم

$$\binom{n+۱}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-۱} = \frac{n!}{n!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-۱)!(n-r+۱)!} =$$
$$\frac{n!(n-r+۱) + n! \cdot r}{r!(n-r+۱)!} = \frac{n!(n+۱)}{r!(n-r+۱)!} = \frac{(n+۱)!}{r!(n-r+۱)!}$$

اثبات حکم هنوز تمام نشده است. تنها چیزی که مانده است این است که نشان دهیم که $\binom{n+۱}{n+۱} = ۱$. این قسمت را به عنوان تمرین به عهده‌ی شما می‌گذاریم. □

**تمرین ۸۲.** نشان دهید که
$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \binom{n}{n} = ۱$$

**قضیه ۸۳.** فرض کنید که $x, y$ دو متغیر باشند. آنگاه داریم:

$$(x+y)^n = \binom{n}{۰}x^n + \binom{n}{۱}x^{n-۱}y^۱ + \binom{n}{۲}x^{n-۲}y^۲ + \ldots + \binom{n}{n-۱}xy^{n-۱} + \binom{n}{n}y^n$$

*اثبات.* حکم $p(n)$ که قرار است با استقراء ثابت شود به صورت زیر است:

$$p(n): \quad (x+y)^n = \binom{n}{۰}x^n + \binom{n}{۱}x^{n-۱}y^۱ + \binom{n}{۲}x^{n-۲}y^۲ + \ldots + \binom{n}{n-۱}xy^{n-۱} + \binom{n}{n}y^n$$

بررسی $p(۰)$:
$$(x+y)^۰ = ۱ = \binom{۰}{۰}x^۰$$

حال فرض کنید $p(n)$ برقرار باشد:

$$(x+y)^n = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} y^i x^{n-i}$$

بررسی $p(n+۱)$:

$$(x+y)^{n+۱} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\left(\binom{n}{۰}x^n + \binom{n}{۱}x^{n-۱}y + \ldots + \binom{n}{n}y^n\right)$$

$$= \underbrace{\binom{n}{۰}x^{n+۱}}_{\binom{n+۱}{۰}x^{n+۱}} + \left(\underbrace{\binom{n}{۱}x^n y + \binom{n}{۰}x^n y}_{\binom{n+۱}{۱}x^n y}\right) + \left(\underbrace{\binom{n}{۲} + \binom{n}{۱}}_{\binom{n+۱}{۲}}\right)x^{n-۱}y^۲ + \ldots +$$
$$\left(\underbrace{\binom{n}{n} + \binom{n}{n-۱}}_{\binom{n+۱}{n}}\right)xy^n + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\binom{n+۱}{n+۱}}y^{n+۱}$$

□

منظور از یک مجموعه‌ی $n$ عضوی، مجموعه‌ای مانند مجموعه‌ی زیر است:

$$n = \{۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱\}$$

**قضیه ۸۴.** تعداد زیر مجموعه‌های $r$ عضوی یک مجموعه‌ی $n$ عضوی $(r \leq n)$ برابر است با
$$\binom{n}{r}.$$

*اثبات.* فرض کنید $p(n)$ عبارت زیر باشد:

به ازای هر $r \leqslant n$ تعداد زیر مجموعه‌ی های $r$ عضوی یک مجموعه‌ی $n$ عضوی برابر است با

$$\binom{n}{r}.$$

نخست $p(۰)$ را بررسی می‌کنیم: تعداد زیر مجموعه‌های ۰ عضوی یک مجموعه‌ی ۰ عضوی برابر است با

$$\binom{۰}{۰} = ۱$$

حال $p(n+۱)$ را بررسی می‌نماییم. فرض کنید $p(n)$ درست باشد. فرض کنید $A = \{x_۱, \ldots, x_{n+۱}\}$ یک مجموعه‌ی $n+۱$ عضوی باشد و فرض کنید $r \leqslant n$. تعداد زیر مجموعه‌های $r$ عضوی $A$ که شامل $x_{n+۱}$ نیستند برابر است با $\binom{n}{r}$ و تعداد زیر مجموعه‌های $r$ عضوی $A$ که شامل $x_{n+۱}$ هستند برابر است با

$$\binom{n}{r-۱}.$$

پس تعداد زیر مجموعه‌های $r$ عضوی یک مجموعه‌ی $n+۱$ عضوی برابر است با

$$\binom{n}{r-۱} + \binom{n}{r} = \binom{n+۱}{r}$$

همچنین تعداد زیرمجموعه‌های $n+۱$ عضوی یک مجموعه‌ی $n+۱$ عضوی، یکی است و برابر است با $\binom{n+۱}{n+۱}$. $\square$

**قضیه ۸۵.** تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n$ عضوی برابر است با $۲^n$.

*اثبات.* تعداد زیر مجموعه‌های $i$ عضوی آن برابر است با $\binom{n}{i}$. تعداد کل زیر مجموعه‌ها برابر است با

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \ldots + \binom{n}{n-۱} + \binom{n}{n} = (۱+۱)^n = ۲^n$$

$\square$

گفتیم که اگر $A$ یک مجموعه باشد، آنگاه بنابراصل وجود مجموعه‌ی توانی، یک مجموعه به نام $p(A)$ موجود است که از زیرمجموعه‌های $A$ تشکیل شده است. قضیه‌ی بالا در واقع می‌گوید که اگر $|A| = n$ آنگاه $|p(A)| = ۲^n$. در واقع تعداد اعضایِ $p(A)$ اکیداً از تعداد اعضایِ $A$ بیشتر است:

$$\left|p(n)\right| = ۲^n$$

به همین علت است که به این اصل «اصل توان» گفته می‌شود. در بخشهای آخرین این درس خواهیم دید که این حکم، برای همه‌ی «کاردینالها» درست است. برای مثال اگر $\aleph_۰$ تعداد اعداد طبیعی باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی برابر است با $\aleph_۰ < ۲^{\aleph_۰}$. یکی از سوالهای باز در ریاضیات این است که آیا عددی بین $\aleph_۰$ و $۲^{\aleph_۰}$ وجود دارد؟ فعلاً نگران فهمیدن این بند آخر نباشید. بعداً مفصلاً بدان خواهیم پرداخت.

## ۸ جلسه‌ی هشتم، دوشنبه

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که اگر مجموعه‌ی $A$ دارای $n$ عضو باشد، آنگاه $p(A)$ دارای $۲^n$ عضو است. [۱۵] وقتی می‌گوییم یک مجموعه $n$ عضو دارد یعنی در **تناظر یک به یک** با مجموعه‌ی

$$n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$$

است. مثلاً مجموعه‌ی

$$\{\text{حسن}, \text{علی}, \text{حسین}\}$$

دارای سه عضو است، زیرا می‌توان حسن را با ۱ و علی را با ۲ و حسین را با ۳ متناظر کرد:

$$۳ = \{۰, ۱, ۲\}$$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی

$$\mathbf{N} = \{۰, ۱, ۲, \ldots\}$$

دارای $\aleph_۰$ عضو است. در بخش‌های آینده این مفاهیم را دقیق توضیح خواهیم داد و خواهیم دید که:

$$|\mathbf{N}| = \aleph_۰$$

$$|\mathbf{Q}| = \aleph_۰$$

$$|\mathbf{R}| = ۲^{\aleph_۰}$$

### ۱.۸ اجتماع دو مجموعه

فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه باشند. آنگاه یک مجموعه‌ی $C$ موجود است به طوری که

$$\forall x \quad (x \in C \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$$

مجموعه‌ی $C$ را اجتماع دو مجموعه‌ی $A, B$ خوانده آن را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم.

*اثبات.* فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه باشند. بنابه اصل جفت‌سازی

$$D = \{A, B\}$$

یک مجموعه است، به بیان بهتر بنا به اصل جفت‌سازی از آنجا که $A, B$ مجموعه‌اند:

$$\exists D \quad \forall x \quad (x \in D \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$$

[۱۵] Power set of A

حال بنا به اصل اجتماع،

$$\exists E \quad \forall x \quad (x \in E \leftrightarrow \exists y \in D \quad x \in y)$$

پس

$$\forall x \quad (x \in E \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

مجموعه‌ی $E$ در بالا همان $A \cup B$ است. $\square$

فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه باشند. عبارت زیر، بنا بر اصل تصریح یک مجموعه است:

$$\{x \in A | x \in B\}$$

مجموعه‌ی بالا را با $A \cap B$ نشان می‌دهیم.

**قضیه ۸۶.** فرض کنید $A, B, X$ مجموعه باشند و $A, B \subseteq X$. نشان دهید که

۱. $A \cup \emptyset = A$

۲. $A \cap X = A$

۳. $A \cup A = A$

۴. $A \cap A = A$

۵. $A \cup B = B \cup A$

۶. $A \cap B = B \cap A$

۷. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

۸. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

*اثبات.* مورد دوم: بنا به اصل گسترش، برای این که نشان دهیم که $A \cap X = A$ باید ثابت کنیم که

$$\forall x \quad (x \in A \cap X \leftrightarrow x \in A)$$

مجموعه‌ی دلخواه $x_{\cdot}$ را در نظر بگیرید. باید نشان دهیم:

$$x_{\cdot} \in A \cap X \leftrightarrow x_{\cdot} \in A$$

طبق تعریف اشتراک داریم:

$$x_{\cdot} \in A \cap X \leftrightarrow (x_{\cdot} \in A) \wedge (x_{\cdot} \in X)$$

پس کافی است نشان دهیم که

$$(x_\circ \in A) \wedge (x_\circ \in X) \leftrightarrow x_\circ \in A.$$

می‌دانیم که

$$p \wedge q \to p$$

پس داریم:

$$(x_\circ \in A) \wedge (x_\circ \in X) \to x_\circ \in A$$

همچنین از آنجا که $A \subseteq X$ داریم

$$x_\circ \in A \to x_\circ \in X$$

عبارت زیر تاتولوژی است:

$$(p \to q) \to \big(p \to (p \wedge q)\big)$$

پس

$$x_\circ \in A \to (x_\circ \in A) \wedge (x_\circ \in X)$$

$\square$

**تمرین ۸۷.** نشان دهید که

۱. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

۲. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

۳. $A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

۴. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$

۵. $A \cup B = A \cap B \iff A = B$

۶. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

**سوال ۸۸.** آیا عبارت زیر درست است؟

$$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$$

*پاسخ.* مثال نقض.

$$A = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$B = \{۲\}$$

$$C = \{۳\}$$

داریم

$$A \cup B = A \cup C \wedge \neg B = C$$

□

**تمرین ۸۹.** فرض کنید $A, B_1, \ldots, B_n$ مجموعه باشند. با استفاده از استقراء نشان دهید که

$$A \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

و

$$A \cup (B_1 \cap \ldots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap \ldots \cap (A \cup B_n)$$

## ۲.۸ تفاضل

اگر $A$ و $B$ دو مجموعه باشند،تفاضل نسبی آنها را با $A - B$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A - B = \{x \in A | x \notin B\}$$

احتمالاً در دبیرستان خوانده‌اید که مجموعه‌ای به نام **مجموعه‌ی مرجع** وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند. در زیر درستی این گفته را بررسی می‌کنیم. در جلسات قبل ثابت کردیم که مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

**سوال ۹۰.** آیا مجموعه‌ای وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها، زیر مجموعه‌ی آن باشند؟

*پاسخ.* فرض کنید $C$ مجموعه‌ای باشد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند. بنابراین بنا به اصل اجتماع، $\bigcup C$ نیز یک مجموعه است. ادعا می‌کنیم که $\bigcup C$ شامل همه‌ی مجموعه‌هاست، و این تناقض است، زیرا مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.
فرض می‌کنیم $A$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم که $A \in \bigcup C$. برای اثبات این ادعا باید نشان دهیم که $D \in C$ موجود است، به طوری که $A \in D$. می دانیم که $\{A\}$ بنا به اصل زوج‌سازی یک مجموعه است و $A \in \{A\}$ ادعا می‌کنیم که $\{A\} \in C$. می‌دانیم که $\{\{A\}\}$ نیز یک مجموعه است. بنا به فرضمان درباره‌ی $C$ داریم

$$\{\{A\}\} \subseteq C$$

پس

$$\{A\} \in C.$$

□

بنابراین این ادعّای دبیرستانی که مجموعه‌ای مرجع وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند درست نیست.

اما نیاز به داشتن یک مجموعه‌ی «به‌اندازه‌ی‌کافی‌بزرگ» را چگونه برطرف کنیم؟ می‌دانیم که اجتماع هر تعداد (کم!) از مجموعه، یک مجموعه است. فرض می‌کنیم که $U$ یک مجموعه باشد که **همه‌ی مجموعه‌هایی که ادامه‌ی این درس درباره‌ی آنها صحبت خواهیم کرد،** زیر مجموعه‌ی آن باشند. کافی است $U$ را اجتماع همه‌ی مجموعه‌هائی بگیریم که در این جزوه بدانها اشاره شده است. پس بیایید $U$ را مجموعه‌ی مرجع بنامیم.

**تعریف ۹۱.** برای هر مجموعه $A$ تعریف کنید:

$$A^c = U - A$$

**تمرین ۹۲.** نشان دهید که

$$A - B = A \cap B^c$$

**قضیه ۹۳.**

۱. $(A^c)^c = A$

۲. $\emptyset^c = U$

۳. $U^c = \emptyset$

۴. $A \cap A^c = \emptyset$

۵. $A \cup A^c = U$

۶. $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$

۷. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

۸. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

**مثال ۹۴.** نشان دهید که برای هر مجموعه‌ی $A$ ، $B$ و $C$ داریم:

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

*پاسخ.* بنا به اصل گسترش، کافی است نشان دهیم:

$$\text{(۱)} \quad A \cap (B - C) \subseteq (A \cap B) - (A \cap C)$$

و

$$\text{(۲)} \quad (A \cap B) - (A \cap C) \subseteq A \cap (B - C)$$

□

*اثبات.* برای اثبات موارد ۱ و ۲ باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad x \in A \cap (B - C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) - (A \cap C)$$

فرض کنید $x$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد.

$$x \in A \cap (B - C) \iff (x \in A) \wedge (x \in B - C) \iff$$

$$(x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \iff$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \iff$$

$$x \in (A \cap B) \wedge (x \notin A \cap C) \iff$$

$$x \in (A \cap B) - (A \cap C)$$

$\square$

**تمرین ۹۵.** نشان دهید که

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

تعریف می‌کنیم

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

**تمرین ۹۶.** فرض کنید که $A$ یک مجموعه باشد و $X = P(A)$. نشان دهید که $(X, \oplus)$ یک گروه آبلی است؛ یعنی موارد زیر را نشان دهید:

۱. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B \in X$

۲. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B = B \oplus A$

۳. $\forall A, B, C \in X \quad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

۴. $\forall A \quad A \oplus \emptyset = A$

۵. $\forall A \quad A \oplus A = \emptyset$

در واقع در تمرین بالا نشان داده‌اید که $\oplus$ ویژگی‌هائی شبیه جمع اعداد دارد. هر چند در بالا این که

$$A \oplus A = \emptyset$$

با درک ما نسبت به جمع اعداد سازگار نیست!

**تمرین ۹۷.** موارد زیر را ثابت کنید:

۱. $A - B = A - (A \cap B)$

۲. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^c$

۳. $A - B = B^c - A^c$.

۴. $(A - B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

۵. $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

۶. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.

۷. $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

۸. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

۹. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

۱۰. $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

۱۱. اگر $A \subseteq C, B \subseteq C, A \cup B = C, A \cap B = \emptyset$ آنگاه $A = C - B$.

## ۳.۸ خانواده‌های مجموعه‌ها

فرض کنید $\Gamma$ یک مجموعه باشد. برای هر $\gamma \in \Gamma$ یک مجموعه‌ی $A_\gamma$ در نظر بگیرید. عبارت زیر را ، یک خانواده‌ی اندیس‌دار از مجموعه‌ها می‌خوانیم:

$$\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\} = \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$$

معمولاً در ریاضیات در موارد زیر از کلمه‌ی خانواده به جای مجموعه استفاده می‌شود.

۱. خانواده‌ی مورد نظر، مجموعه نباشد: خانواده‌ی همه‌ی مجموعه‌ها
البته در این مورد بهتر است از کلمه‌ی «کلاس» استفاده می‌شود.

۲. برخی از اعضا در خانواده‌ی مورد نظر تکراری باشند: $A_\gamma = A_{\gamma'}$. مانند خانواده‌ی زیر:

$$A = \{a, a, a, a\}$$

در این درس، ما به علت دوم در بالا از کلمه‌ی خانواده استفاده کرده‌ایم، زیرا می‌دانیم که همه‌ی مجموعه‌هائی که درباره‌ی آنها صحبت می‌کنیم زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی مرجع $U$ هستند.
فرض کنید $F = \{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\bigcup F = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \exists\gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

$$\bigcap F = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \forall\gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

**مثال ۹۸.** قرار دهید

$$\Gamma = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$$

در زیر یک خانواده‌ی متناهی مثال زده‌ایم که توسط $\Gamma$ اندیس‌گذاری شده است.

$$F = \{A_۰, A_۱, A_۲, A_۳\}$$

داریم:

$$\bigcup F = A_۰ \cup A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$$

$$\bigcap F = A_۰ \cap A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳$$

**تمرین ۹۹.** خانواده‌ی $F$ در زیر را اندیس گذاری کنید و اجتماع و اشتراک آن را بیابید.

$$\{۱\}, \{۲, ۳\}, \{۳, ۴, ۵\}, \{۴, ۵, ۶, ۷\}, \ldots$$

## ۹ جلسه‌ی نهم، شنبه

**مثال ۱۰۰.** اگر $A \cap B = \emptyset$، $A \cup B = C$، $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آنگاه نشان دهید که

$$A = C - B$$

*پاسخ.* بنا بر اصل گسترش کافی است اثبات کنیم که

۱. $A \subseteq C - B$ و

۲. $C - B \subseteq A$.

برای اثبات ۱ باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad \big(x \in A \to x \in (C - B)\big) \quad *$$

برای اثبات $*$ کافی است $x.$ دلخواه در نظر گرفته نشان دهیم:

$$x. \in A \to x. \in (C - B)$$

پس فرض می‌کنیم $x. \in A$. از آنجا که طبق فرض صورت سؤال $A \subseteq C$، داریم:

$$x. \in C \quad ☺$$

همچنین داریم:

$$\big(x. \in A \wedge A \cap B = \emptyset \to x. \notin B\big) \quad ☺☺$$

پس بنا به ☺☺ و ☺ داریم

$$x. \in C - B.$$

اثبات ۲

$$x. \in C - B \Rightarrow x. \in C \wedge x. \notin B$$

از آنجا که $C = A \cup B$ پس

$$(x. \in A \cup B) \wedge (x. \notin B) \Rightarrow (x. \in A \vee x. \in B) \wedge (x. \notin B)$$

$$\Rightarrow x. \in A$$

□

## ۱.۹ ادامه‌ی خانواده‌ی مجموعه‌ها

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی خانواده‌ها صحبت کردیم: برای مثال

$$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

یک خانواده از مجموعه‌ها با مجموعه‌ی اندیسِ $\Gamma$ است. همچنین تعریف کردیم که

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x\in U | \exists\gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\}$$

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x\in U | \forall\gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\}$$

**مثال ۱۰۱.** خانواده‌ی زیر از مجموعه‌ها را اندیس گذاری کنید:

$$\{۱\}, \{۲, ۳\}, \{۳, ۴, ۵\}, \{۴, ۵, ۶, ۷\}, \ldots$$

$$A_n = \{n, n+۱, \ldots, ۲n-۱\} \qquad \Gamma = \mathbf{N} - \{۰\}$$

**مثال ۱۰۲.** اشتراک خانواده‌ی زیر از زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}$ را بیابید.

$$(۰, ۱) \quad (۰, \frac{۱}{۲}) \quad (۰, \frac{۱}{۳}) \quad (۰, \frac{۱}{۴}) \quad \ldots$$

بیایید خانواده‌ی بالا را به صورت زیر اندیس‌گذاری کنیم:

$$A_n = (۰, \frac{۱}{n}).$$

$$\overset{A_۱}{(۰, ۱)} \quad \overset{A_۲}{(۰, \frac{۱}{۲})} \quad \overset{A_۳}{(۰, \frac{۱}{۳})} \quad \underbrace{\overset{A_۴}{(۰, \frac{۱}{۴})}}_{=\{x\in\mathbf{R} | ۰<x<\frac{۱}{۴}\}} \quad \ldots$$

پس خانواده‌ی زیر از مجموعه‌ها را داریم:

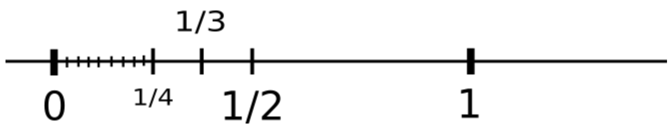
$$F = \{A_n\}_{n\in\mathbf{N}-\{۰\}}$$

اشتراک این خانواده را می‌توانیم با نمادهای زیر نیز نشان دهیم.

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (۰, \frac{۱}{n}) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n = \bigcap F$$

داریم

$$x \in \bigcap (۰, \frac{۱}{n}) \leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad ۰ < x < \frac{۱}{n}.$$




برای یافتن یک عنصرِ $x$ که در تمام بازه‌های $(۰, \frac{۱}{n})$ واقع شود، نیاز به اطلاعاتی داریم:

## ۲.۹ اصل کمال

هر زیرمجموعه‌ی از بالا کراندار از اعداد حقیقی دارای کوچکترین کران بالا و هر زیرمجموعه‌ی از پائین کراندار از اعداد حقیقی دارای بزرگترین کران پائین است. [۱۶]

**نتیجه ۱۰۳** (ویژگی ارشمیدسی). در اعداد حقیقی هیچ عنصری مانند $x > ۰$ وجود ندارد بطوری که

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad ۰ < x < \frac{۱}{n}$$

معادلاً هیچ عدد طبیعی‌ای وجود ندارد به طوری که

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad x > n.$$

*اثبات.* فرض کنید $x_۰ \in \mathbf{R}$ از تمام اعداد طبیعی بزرگتر باشد، پس $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$ دارای یک کران بالا در $\mathbf{R}$ است؛ به بیان دیگر، $x_۰$ یک کران بالا برای $\mathbf{N}$ است. پس بنا به اصل کمال، $x_۱ \in \mathbf{R}$ موجود است به طوری که

$$x_۱ = \sup \mathbf{N}$$

از این که $x_۱$ کوچکترین کران بالا برای $\mathbb{N}$ است نتیجه می‌شود که $x_۱ - ۱$ یک کران بالای $\mathbf{N}$ نیست؛ چون اگر باشد، از کوچکترین کران بالا کوچکتر می‌شود و این امکان‌پذیر نیست. پس

$$\exists n \in \mathbf{N} \quad n > x_۱ - ۱$$

یعنی

$$n + ۱ > x_۱$$

و این متناقض است با این که $x_۱$ یک کران بالا برای $\mathbf{N}$ است. □

**نتیجه ۱۰۴.** بنا به ویژگی ارشمیدسی،

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} (۰, \frac{۱}{n}) = \emptyset$$

**توجه ۱۰۵.** برای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم

$$\bigcap_{i \in \{۱,۲,\ldots,n\}} (۰, \frac{۱}{i}) = (۰, \frac{۱}{n})$$

**توجه ۱۰۶.** می‌دانیم که

$$(۱) \quad A \cap (B_۱ \cup B_۲) = (A \cap B_۱) \cup (A \cap B_۲)$$

[۱۶] هر چند نیازی نیست شما فعلاً به این مطلب فکر کنید، ولی لازم به ذکر است که اصل کمال، اصلی مرتبه‌ی اول نیست. در مرتبه‌ی اول نمی‌توان روی همه‌ی زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی سور زد. سوال: آیا می‌توان عبارتی شاملِ $\forall A \subseteq \mathbb{N}$... را در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها نوشت؟

همچنین گفتیم که با استقراء می‌توان ثابت کرد که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$(۲) \quad A \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_۱) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

عبارت بالا را می‌توان با استفاده از خانواده‌ها به صورت زیر نوشت:

$$A \cap \bigcup_{i \in \{۱,\ldots,n\}} B_i = \bigcup_{i \in \{۱,\ldots,n\}} (A \cap B_i)$$

حال ادعا می‌کنیم که این حکم را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$(۳) \quad A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big) = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i)$$

**سوال ۱۰۷.** آیا حکم (۳) را می‌توان با استقراء ثابت کرد؟

**توجه ۱۰۸.** با استفاده از استقراء می‌توان احکامی مانند احکام زیر را درباره‌ی هر عدد طبیعی ثابت کرد:
برای هر عددِ طبیعیِ $n$ داریم $p(n)$. به عنوان مثال، حکم زیر را می‌توان با استقراء ثابت کرد: برای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم

$$۱ + ۲ + \ldots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

به عنوان مثال دیگر، این حکم که هر عدد طبیعی ناصفر از عدد قبل از خودش بزرگ‌تر است را نیز می‌توان با استقراء ثابت کرد. اما در مورد «مجموعه‌ی اعداد طبیعی» نمی‌توان با استقراء روی اعداد طبیعی حکمی را نتیجه گرفت. برای مثال نمی‌توان حکم زیر را با استقراء ثابت کرد:
مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجموعه‌ای نامتناهی است. حکم (۳) نیز حکمی درباره‌ی یک عددِ طبیعیِ $n$ نیست، پس نمی‌توان آن را با استقراء ثابت کرد.

حکمِ (۳) را به صورت زیر ثابت می‌کنیم:

*اثبات* (۳). از آنجا که در دو طرف مجموعه داریم بنا به اصل گسترش کافی است نشان دهیم که

۱. $A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i)$ و

۲. $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i) \subseteq A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big)$

یک عنصرِ $x_۰ \in U$ را به صورت دلخواه در نظر بگیرید.

$$x_۰ \in A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big) \Rightarrow (x_۰ \in A) \wedge \big(x_۰ \in \bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big)$$

$$\Rightarrow x_۰ \in A \wedge \big(\exists i_۰ \in \mathbf{N} \quad x_۰ \in B_{i_۰}\big)$$

پس از اینکه $x_۰ \in A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big)$ نتیجه گرفتیم که $i_۰ \in \mathbf{N}$ موجود است به طوری که

$$x_۰ \in A \cap B_{i_۰}$$

داریم:

$$A\cap B_{i.}\subseteq \bigcup_{i\in\mathbf{N}}\left(A\cap B_i\right)$$

پس

$$x.\in \bigcup_{i\in\mathbf{N}}\left(A\cap B_i\right)$$

اثبات ۲.

$$x.\in \bigcup_{i\in\mathbf{N}}\left(A\cap B_i\right)\Rightarrow \exists i.\in\mathbf{N}\quad x.\in A\cap B_{i.}$$

پس $x.\in A$ ۳ و $x.\in B_{i.}$. از آنجا که $B_{i.}\subseteq\bigcup_{i\in\mathbf{N}}B_i$ پس $x.\in\bigcup_{i\in\mathbf{N}}B_i$ ۴.

از ۳ و ۴ نتیجه می‌شود که

$$x.\in A\cap\big(\bigcup_{i\in\mathbf{N}}B_i\big)$$

$\square$

**قضیه ۱۰۹ (پخش‌پذیری).** فرض کنید $\Gamma$ یک مجموعه‌ی اندیس باشد.

۱. $A\cap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\right)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(A\cap B_\gamma\right)$

۲. $A\cup\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\right)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\left(A\cup B_\gamma\right)$

**قضیه ۱۱۰.**

۱. $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)^c=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma^c$

۲. $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma})A_\gamma\right)^c=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma^c$

**تمرین ۱۱۱.** فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ و $\{B_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ خانواده‌هایی از مجموعه‌ها باشند، نشان دهید که

$$(1)\quad \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\big)\cap\big(\bigcup_{\delta\in\Delta}B_\delta\big)=$$

$$\bigcup_{\delta\in\Delta}\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\cap B_\delta\big)=\bigcup_{\delta\in\Delta}\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\cap B_\delta)\big)=$$

$$\bigcup_{\delta\in\Delta}\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\cap B_\delta):=\bigcup_{(\delta,\gamma)\in\Delta\times\Gamma}(A_\gamma\cap B_\delta)$$

$$(2)\quad \big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\big)\cup\big(\bigcap_{\delta\in\Delta}B_\delta\big)=$$

$$\bigcap_{\delta\in\Delta}\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\cap B_\delta\big)=\bigcap_{\delta\in\Delta}\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\cup B_\delta)$$

$$③ \quad (\bigcup_{i=۱}^{m} A_i) \cap (\bigcup_{j=۱}^{n} B_j) \overset{\Delta=\{۱,\ldots,n\},\Gamma=\{۱,\ldots,m\}}{=}$$

$$\bigcup_{j\in\{۱,\ldots,n\}} \bigcup_{i\in\{۱,\ldots,m\}} (A_i \cap B_j)$$

**تمرین ۱۱۲.** فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $I$ باشد به طوری که

$$\bigcup_{k\in L} J_k = I.$$

نشان دهید که

۱. $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L} \bigcup_{j\in J_k} A_j$

۲. $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in L} \bigcap_{j\in J_k} A_j$

## ۱۰ جلسه‌ی دهم

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که درباره‌ی اعدادِ حقیقی جمله‌ی اول در زیر درست است ولی جمله‌ی دوم نادرست:

۱. $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists r \in \mathbf{R} \quad ۰ < r < \frac{۱}{n}$

۲. $\exists r \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad ۰ < r < \frac{۱}{n}$

گفتیم که جمله‌ی دوم در بالا همان ویژگی ارشمیدسی است.
ویژگی ارشمیدسی:

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (۰, \frac{۱}{n}) = \emptyset$$

**سوال ۱۱۳.** آیا $P(A\cup B) = P(A)\cup P(B)$ ؟

*پاسخ.* در زیر نشان داده‌ایم که حکم بالا برقرار نیست، هر چند عبارت ۱ در پایین برقرار است. نخست ثابت می‌کنیم که

$$(۱) \quad P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$$

عبارت بالا را با روش استنتاجی زیر ثابت می‌کنیم:

۱ $c \in P(A)\cup P(B) \to c \in P(A) \vee c \in P(B)$

۲ $c \in P(A) \to c \subseteq A$

۳ $A \subseteq A\cup B$

۴ $c \in P(A) \to c \subseteq A\cup B$ بنا به ۲, ۳

۵ $c \in P(B) \to c \subseteq A\cup B$ تکرار ۲و۳و۴ برای $B$ به جای $A$

۶ $c \in P(A) \vee c \in P(B) \to c \subseteq A\cup B$ بنا به ۴و۵

۷ $c \in P(A)\cup P(B) \to c \in P(A\cup B).$

حال فرض کنید $c \in P(A\cup B)$. آنگاه $c \subseteq A\cup B$. می‌خواهیم ببینیم که آیا $c \in P(A)\cup P(B)$؟
داریم:

$$** \quad c \in P(A)\cup P(B) \leftrightarrow c \in P(A) \vee c \in P(B)$$
$$\leftrightarrow c \subseteq A \vee c \subseteq B$$

**سوال ۱۱۴.** آیا $c \subseteq A\cup B \to (c\subseteq A) \vee (c \subseteq B)$ ؟

حکم بالا غلط است. مثال نقض:

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

$$A = \{۱, ۲\} \quad B = \{۳, ۴\}$$

$$c = \{۲, ۳\}$$

بنابراین این حکم که

$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

غلط است. □

## ۱.۱۰ ادامه‌ی خانواده‌ها

**مثال ۱۱۵.** حاصل

$$\bigcup_{k \in \mathbf{N}} (k, k+۱]$$

را بیابید:

$$\bigcup_{k \in \mathbf{N}} (k, k+۱] = (۰, ۱] \cup (۱, ۲] \cup (۲, ۳] \cup \ldots \cup (k, k+۱] \cup \ldots$$
$$= (۰, \infty) = \{x \in \mathbf{R} | x > ۰\}$$

**مثال ۱۱۶.**

$$۱ \quad \bigcap_{k \in \mathbf{N}} (-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k})$$

$$۲ \quad \bigcap_{k \in \{۱, ۲, \ldots, n\}} (-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k}) = (-۱, ۱) \cap (-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}) \cap (-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}) \cap \ldots \cap (-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n})$$

نخست نشان می‌دهیم ۱ مجموعه‌ی تهی است: توجه کنید که

$$x. \in \bigcap_{k \in \mathbf{N}} (-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k}) \to \forall k \in \mathbf{N} \quad x. \in (-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k})$$

$$\to \quad \star \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad -\frac{۱}{k} < x. < \frac{۱}{k}$$

فرض کنید $x. > ۰$. از $\star$ نتیجه می‌گیریم که

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad ۰ < x. < \frac{۱}{k}$$ بنا به ویژگی ارشمیدسی ↯

اگر $x. < ۰$ آنگاه

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad -\frac{۱}{k} < x. < ۰$$

$$\to \forall k \in \mathbf{N} \quad ۰ < -x. < \frac{۱}{k}$$ بنا به ویژگی ارشمیدسی ↯

همچنین توجه کنید که حاصلِ ۲ مجموعه‌ی $(-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n})$ است.

**مثال ۱۱۷.** قضیه‌ی (دمورگان) $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$ را ثابت کنید.

*اثبات.* می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\underbrace{\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)^c}_{C} = \underbrace{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c}_{D}$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x_\circ \in C \Leftrightarrow x_\circ \in \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)^c$$

$$\Longleftrightarrow\ x_\circ \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \ \Longleftrightarrow\ \forall\gamma\in\Gamma \quad (x_\circ \notin A_\gamma)$$

$$\Longleftrightarrow\ \forall\gamma\in\Gamma \quad x_\circ \in A_\gamma^c \ \Longleftrightarrow\ x_\circ \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$$

□

**مثال ۱۱۸.** قضیه‌ی پخش‌پذیری را ثابت کنید:

*اثبات پخش‌پذیری.* می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x_\circ \in A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) \Leftrightarrow x_\circ \in A \wedge x_\circ \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$$

$$\Leftrightarrow (x_\circ \in A) \wedge (\exists\gamma_\circ \in\Gamma \quad x_\circ \in B_{\gamma_\circ})$$

از $(x_\circ \in A)\wedge(x_\circ \in B_{\gamma_\circ})$ نتیجه می‌گیریم که

$$x_\circ \in A\cap B_{\gamma_\circ}$$

از آنجا که

$$A\cap B_{\gamma_\circ} \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$x_\circ \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

حال می‌خواهیم بدانیم که آیا $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(A\cap B_\gamma\right) \subseteq A\cap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)$ نیز برقرار است؟

$$x_\circ \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(A\cap B_\gamma\right) \Rightarrow \exists \gamma_\circ \in \Gamma \quad x_\circ \in A\cap B_{\gamma_\circ}$$

$$\Rightarrow x_\circ \in A \wedge x_\circ \in B_{\gamma_\circ} \Rightarrow (x_\circ \in A) \wedge (x_\circ \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_{\gamma_\circ})$$

$$\Rightarrow x_\circ \in A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big)$$

□

## ۲.۱۰ ضربهای دکارتی

فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه باشند و $x\in A$ و $y\in B$. بنا به اصل جفت‌سازی $\{x,y\}$ یک مجموعه است و $\{x\}$ نیز یک مجموعه است. دوباره بنا به اصل جفت‌سازی $\{\{x\},\{x,y\}\}$ یک مجموعه است. این مجموعه را با $(x,y)$ نشان می‌دهیم. پس

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

**تمرین ۱۱۹.** نشان دهید که

$$(x_\circ,y_\circ)=(x_1,y_1) \iff (x_\circ=x_1)\wedge(y_\circ=y_1)$$

*ایده‌ی اثبات.*

$$\{\{x_\circ\},\{x_\circ,y_\circ\}\}=\{\{x_1\},\{x_1,y_1\}\}$$

$$\{x_\circ\}=\{x_1\}\Rightarrow x_\circ=x_1$$

$$\{x_1,y_\circ\}=\{x_1,y_1\}\Rightarrow y_\circ=y_1$$

□

**تعریف ۱۲۰.** فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A, y\in B\}$$

**تمرین ۱۲۱.** نشان دهید که $A\times B$ یک مجموعه است.

# ۱۱ جلسه‌ی یازدهم، شنبه

کوییز دوم.

۱. نشان دهید که $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ اگر و تنها اگر $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$.

*پاسخ.* حکم: ۱ اگر $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$ آنگاه $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.
و ۲ اگر $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ آنگاه یا $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$.

اثبات ۲. برای اثبات مورد دوم عبارت معادل زیر را ثابت می‌کنیم:

اگر نه $A\subseteq B$ و نه $B\subseteq A$ آنگاه $P(A\cup B)\neq P(A)\cup P(B)$.

اگر $A\not\subseteq B$ و $B\not\subseteq A$ آنگاه

$$\exists y\in B-A$$

و

$$\exists x\in A-B.$$

فرض کنید $y_\circ\in B-A$ و $x_\circ\in A-B$. حال توجه کنید که

$$\{x_\circ,y_\circ\}\notin P(A),\quad \{x_\circ,y_\circ\}\notin P(B)\quad \{x_\circ,y_\circ\}\in P(A\cup B).$$

اثبات ۲. اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A\cup B=B$ و $P(A)\subseteq P(B)$ (چرا؟). پس

$$P(A\cup B)=P(B)=P(A)\cup P(B)$$

□

۲. نشان دهید که ویژگی ارشمیدسی، از اصل کمال نتیجه می‌شود. (جزوه‌ی جلسات قبل را نگاه کنید).

**تمرین ۱۲۲.** نشان دهید که جمله‌های زیر با هم معادلند.

۱. هیچ $x_\circ\in\mathbf{R}$ وجود ندارد که

$$\forall n\in\mathbf{N}\quad x_\circ\in(\circ,\frac{1}{n})$$

۲. هیچ $x_\circ\in\mathbf{R}$ وجود ندارد که $\forall n\in\mathbf{N}\quad x_\circ>n$

## ۱۲ ادامه‌ی درسِ ضربهای دکارتی

گفتیم که اگر $A$ و $B$ دو مجموعه باشند آنگاه

$$\underbrace{A \times B}_{\text{حاصلضرب دکارتی}} = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$$

نیز مفهوم زوج مرتب را با استفاده از مجموعه‌ها به صورت زیر تعریف کردیم:

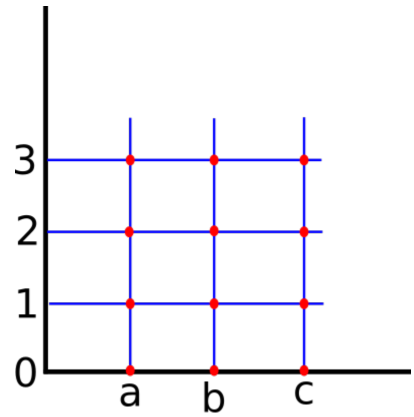
$$(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$$

برای مثال اگر

$$A = \{a,b,c\} \quad B = \{۰,۱,۲,۳\}$$

آنگاه

$$A \times B = \{(a,۰),(a,۱),(a,۲),(a,۳),(b,۰),(b,۱),(b,۲),(b,۳),(c,۰),(c,۱),(c,۲),(c,۳)\}$$




**قضیه ۱۲۳.**

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

*اثبات.*

$$(x,y) \in A \times (B \cap C) \iff (x \in A \wedge y \in B \cap C) \iff (x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C)$$

$$\overset{p \leftrightarrow p \wedge p}{\iff} (x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \iff \Big((x,y) \in A \times B\Big) \wedge \Big((x,y) \in A \times C\Big)$$

$$\iff (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

□

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

اثبات عبارت بالا را به عنوان تمرین رها می‌کنم.

**قضیه ۱۲۴.**

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

*اثبات.* در زیر اثباتی استنتاجی برای حکم بالا ارائه کرده‌ایم.

$$(x, y) \in A \times (B - C) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B - C) \qquad (۱۵)$$

$$x \in A \wedge y \in B - C \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \qquad (۱۶)$$

$$x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \Rightarrow (x, y) \in A \times B \qquad (۱۷)$$

$$x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \Rightarrow (x, y) \notin A \times C \qquad (۱۸)$$

(۱۹) بنا به موارد ۱۵ تا ۱۸ $(x, y) \in A \times (B - C) \Rightarrow (x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$

اثبات برگشت:

$$(x, y) \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin A \times C \qquad (۲۰)$$

$$(x, y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \qquad (۲۱)$$

$$(x, y) \notin A \times C \Rightarrow (x \notin A) \vee (y \notin C) \qquad (۲۲)$$

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge ((x \notin A) \vee (y \notin C)) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C). \qquad (۲۳)$$

(۲۴) بنا به موارد ۲۰ تا ۲۳ $(x, y) \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times (B - C)$.

□

**تمرین ۱۲۵.** نشان دهید که

$$(A \times B) - (C \times D) = \Big((A - C) \times B\Big) \cup \Big(A \times (B - D)\Big)$$

**سوال ۱۲۶.** آیا $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$؟

*پاسخ.* فرض کنید که $A, D \neq \emptyset$ و $x_\circ \in A, y_\circ \in D$. آنگاه

$$(x_\circ, y_\circ) \notin (A \times B) \cup (C \times D)$$

اما

$$(x_\circ, y_\circ) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$$

□

## ۱.۱۲ رابطه

فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه باشند. به هر زیر مجموعه از $P(A \times B)$ یک رابطه از $A$ به $B$ می‌گوییم. فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد. منظور از یک رابطه روی $X$ یک زیر مجموعه از $P(X \times X)$ است.
فرض کنید $R \subseteq P(A \times B)$ یک رابطه از $A$ به $B$ باشد. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$Dom(R) = \{x \in A | \exists y \in B \quad (x, y) \in R\}$$

$$Range(R) = \{y \in B | \exists x \in A \quad (x, y) \in R\}$$

**نمادگذاری ۱۲۷.** به جای

$$(x, y) \in R$$

گاهی می‌نویسیم:

$$xRy$$

# ۱۳ جلسه‌ی دوازدهم، دوشنبه

## ۱.۱۳ مرور

**تمرین ۱۲۸.** فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$، خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $I$ به طوری که $\bigcup_{k\in L} J_k = I$. ثابت کنید که

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$$

*پاسخ.* می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$①\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$$

$$②\bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

در این جا اولی را ثابت می‌کنیم و دومی را به عنوان تمرین به عهده‌ی شما می‌نهیم.

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists i_\circ \in I \quad x \in A_{i_\circ} \tag{۲۵}$$

$$(i_\circ \in I) \wedge (I = \bigcup_{k\in L} J_k) \Rightarrow \exists k_\circ \in K \quad i_\circ \in J_{k_\circ} \tag{۲۶}$$

$$(x \in A_{i_\circ}) \wedge (i_\circ \in J_{k_\circ}) \Rightarrow x \in \bigcup_{j\in J_{k_\circ}} A_j \tag{۲۷}$$

$$(k_\circ \in L) \wedge x \in \bigcup_{j\in J_{k_\circ}} A_j \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \tag{۲۸}$$

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \quad \text{بنا به ۱و۲و۳و۴} \tag{۲۹}$$

□

**تمرین ۱۲۹.** آیا $P(A\times B) = P(A)\times P(B)$؟

## ۲.۱۳ روابط

مفهوم رابطه در زبان روزمره آنقدر پرکاربرد است که شاید هنگام استفاده آن به تعریف دقیق آن توجه نکرده باشیم: رابطه‌ی پدر و فرزندی، پسرخاله و دخترخاله بودن، همسن‌وسال‌بودن و امثالهم. برای مصارف ریاضی، باید رابطه را دقیق تعریف کنیم:

منظور از یک رابطه از مجموعه‌ی $A$ به مجموعه‌ی $B$، یک زیرمجموعه از $P(A\times B)$ است. نیز منظور از یک رابطه روی مجموعه‌ی $X$ یک رابطه از $X$ به $X$ است.

**توجه ۱۳۰.** اگر $R$ رابطه‌ای از $X$ به $Y$ باشد لزوماً دامنه‌ی $R$ تمام $X$ نیست. برای مثال روی مجموعه‌ی اعضای یک خانواده‌ی مشخص، دامنه‌ی رابطه‌ی $x$ پدرِ $y$ است، تنها یک عضو دارد.

### ۱.۲.۱۳ رابطه‌ی تساوی

فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد. رابطه‌ی زیر را رابطه‌ی تساوی روی $X$ می‌خوانیم:

$$R = \{(x, y) | x \in X, y \in X, x = y\}$$

رابطه‌ی تساوی (که آن را رابطه‌ی قطری نیز می‌خوانیم) را می‌توان به صورت زیر هم نمایش داد:

$$xRy \iff x = y$$

این رابطه را با $\Delta$ نیز گاهی نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات مجموعه مورد نظر را نیز به صورت اندیس می‌نویسیم تا مشخص شود که تساوی روی چه مجموعه‌ای منظور ماست. پس به طور خلاصه:

$$\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$$

### ۲.۲.۱۳ رابطه‌ی تعلق

رابطه‌ی تعلق را با $\in$ نشان می‌دهیم.

$$xRy \iff x \in y$$

فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد و $P(x)$ مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های آن. رابطه‌ی تعلق رابطه‌ای از $X$ به $P(X)$ است که به صورت بالا تعریف می‌شود. به بیان دیگر:

$$R = \{(x, y) | x \in X, y \in P(X), x \in Y\}.$$

توجه کنید که دامنه‌ی این رابطه، $X$ است و بُرد آن برابر است با $P(X) - \{\emptyset\}$. (این گفته را تحقیق کنید).

### ۳.۲.۱۳ رابطه‌ی مشمولیت

فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد. روی $P(X)$ رابطه‌ی مشمولیت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ARB \iff A \subseteq B$$

به بیان دیگر

$$R = \{(x, y) | x \in P(X), y \in P(X), x \subseteq y\}$$

### ۴.۲.۱۳ معکوس یک رابطه

اگر $R$ یک رابطه از $A$ به $B$ باشد، رابطه‌ی $R^{-1}$ را از $B$ به $A$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x, y) \in R^{-1} \iff (x, y) \in R$$

### ۵.۲.۱۳ ترکیب روابط

فرض کنید $R$ یک رابطه از $A$ به $B$ و $S$ یک رابطه از $B$ به $C$ باشند. آنگاه رابطه‌ی $R \circ S$ را از $A$ به $C$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x,y) \in R \circ S \iff \exists z \in B\Big((x,z) \in R \wedge (z,y) \in S\Big)$$

**مثال ۱۳۱.** فرض کنید روی یک مجموعه از انسانها روابط $R$ و $S$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$(x,y) \in R \iff x \text{ فرزند } y \text{ باشد}$$

$$(x,y) \in S \iff y \text{ برادر } x \text{ باشد}$$

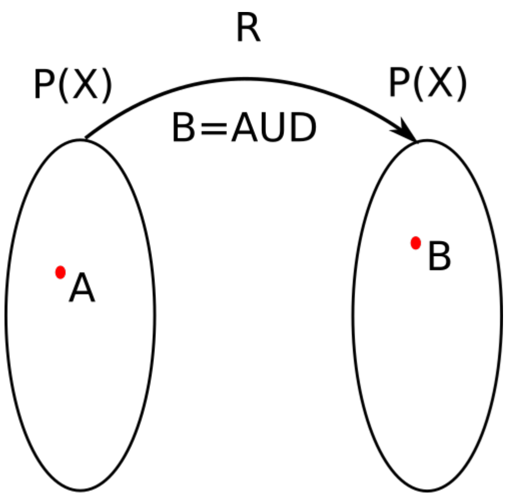
آنگاه داریم:

$$(x,y) \in R \circ S \iff \exists z \quad (x \text{ فرزند } z \text{ باشد}) \wedge (z \text{ برادر } y \text{ باشد})$$

$$\iff x \text{ برادرزاده‌ی } y \text{ باشد.}$$

**تمرین ۱۳۲.** اگر $X$ یک مجموعه باشد و $D \subseteq X$ یک مجموعه‌ی ثابت. دامنه و برد رابطه‌ی زیر را تعیین کنید.

$$R = \{(A,B) | A, B \in P(X), A \cup D = B\}$$



## ۱۴ جلسه‌ی سیزدهم، شنبه

در ابتدای جلسه برای مرور درس قبل یک تمرین حل می‌کنیم:

**تمرین ۱۳۳.** فرض کنید $X'$ یک مجموعه باشد و $D$ یک زیرمجموعه از $X'$ باشد. روی $P(X')$ رابطه‌ی $R$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R(X,Y) \iff Y = X \cup D$$

به بیان دیگر:

$$R = \{(X,Y) | X, Y \in P(X'), Y = X \cup D\}$$

**سوال ۱۳۴.** بُرد رابطه‌ی $R$ را مشخص کنید.

$$Range(R) = \{Y \in P(X') | \exists X \in P(X') \quad (X,Y) \in R\} = \underbrace{\{Y \in P(X') | \exists X \in P(X') \quad Y = X \cup D\}}_{A}$$

قرار دهید:

$$B = \{Y \in P(X') | Y \supseteq D\}$$

ادعا می‌کنیم که

$$Range(R) = B$$

*اثبات.* کافی است نشان دهیم که

$$\text{۱}\, Range(R) \subseteq B$$

و

$$\text{۲}\, B \subseteq Range(R)$$

اثبات ۱. فرض کنید $Y_{\circ} \in Range(R)$ بنا به تعریف مجموعه‌ی $Range(R)$، یک مجموعه‌ی $X_{\circ} \in P(X')$ چنان موجود است که

$$Y_{\circ} = X_{\circ} \cup D$$

از آنجا که $Y_{\circ} = X_{\circ} \cup D$ داریم

$$D \subseteq Y_{\circ}$$

بنابراین

$$Y_{\circ} \in \{Y \in P(X') | D \subseteq Y\} = B$$

پایان اثبات ۱

اثبات ۲. این ادعا را با استنتاج زیر ثابت می‌کنیم:

$$\text{۱} \quad Y_{\circ} \in B \Rightarrow (Y_{\circ} \in P(X')) \wedge (Y_{\circ} \supseteq D)$$

$$(2) \quad Y_\cdot \supseteq D \Rightarrow Y_\cdot = D \cup (Y_\cdot - D)$$

$$(3) \quad Y_\cdot = D \cup (Y_\cdot - D) \Rightarrow \exists X_\cdot \in P(X') \quad D \cup X_\cdot = Y_\cdot$$

$$(4) \quad Y_\cdot \in B \Rightarrow \exists X_\cdot \in P(X') \quad Y_\cdot = D \cup X_\cdot \quad \text{بنا به } (1),(2),(3)$$

$$(5) \quad Y_\cdot \in B \Rightarrow Y_\cdot \in Range(R) \quad \text{بنا به } (4)$$

□

## ۱.۱۴ ویژگی‌های روابط

فرض کنید $R$ رابطه‌ای روی مجموعه‌ی $X$ باشد.

**تعریف ۱۳۵.** رابطه‌ی $R$ را **انعکاسی** [17] می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad xRx$$

**مثال ۱۳۶.** رابطه‌ی تساوی را روی یک مجموعه‌ی دلخواهِ $X$ در نظر بگیرید. داریم

$$\forall x \in X \quad x = x$$

پس این رابطه، انعکاسی است.

**مثال ۱۳۷.** همچنین هر مجموعه‌ای زیر مجموعه‌ی خودش است پس رابطه‌ی $\subseteq$ روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ نیز یک رابطه‌ی انعکاسی است.

**مثال ۱۳۸** (دو مثالِ نقض). رابطه‌ی $\in$ را روی مجموعه‌ی $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ در نظر بگیرید. داریم

$$\emptyset \notin \emptyset$$

پس این رابطه انعکاسی نیست. همچنین اگر روی مجموعه‌ی انسانها، رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy \iff \text{پدرِ } y\text{، } x \text{ باشد}$$

این رابطه نیز غیر انعکاسی است.

**تمرین ۱۳۹.** فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد. تعریف کنید

$$\Delta_X = \{(x,x) | x \in X\}.$$

نشان دهید که رابطه‌ی $R$ روی یک مجموعه‌ی $X$ انعکاسی است اگر و تنها اگر

$$\Delta_X \subseteq R.$$

[17] reflective

**تعریف ۱۴۰.** رابطه‌ی $R$ **ضدِّانعکاسی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad x \not R x$$

توجه کنید که جمله‌ی زیر درست **نیست:**
هر رابطه‌ای که انعکاسی نباشد، ضد انعکاسی است.

**تمرین ۱۴۱.** یک رابطه مثال بزنید که نه انعکاسی باشد و نه ضد انعکاسی.

بیاید رابطه‌ای را که انعکاسی نباشد، غیرانعکاسی بخوانیم. پس:

۱. انعکاسی: $\forall x \quad xRx$

۲. غیر انعکاسی: $\exists x \quad x \not R x$

۳. ضد انعکاسی: $\forall x \quad x \not R x$

**مثال ۱۴۲.** رابطه‌های زیر ضدانعکاسی هستند:

$xRy \Leftrightarrow$ $y$ پدر $x$ است

روی مجموعه‌ی انسانها.

$$xRy \Leftrightarrow x \in y$$

روی یک مجموعه‌ی $P(X)$.

**تعریف ۱۴۳.** رابطه‌ی $R$ روی یک مجموعه‌ی $X$ را **تقارنی** [۱۸] می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \to yRx\Big)$$

**مثال ۱۴۴.** بررسی کنید که رابطه‌های تساوی ($x = y$) و تمایز ($x \neq y$) و مجزا بودن دو مجموعه روابطی تقارنی هستند.
رابطه‌ی مجزا بودن روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$XRY \iff X \cap Y = \emptyset$$

**مثال ۱۴۵** (مثال نقض)**.** نشان دهید که رابطه‌های آمده در مثالِ ۱۳۸ تقارنی نیستند.

**توجه ۱۴۶.** رابطه‌ی $R$ روی یک مجموعه‌ی $X$ غیرتقارنی است (یعنی تقارنی نیست) هرگاه

$$\exists x, y \in X \quad (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R.$$

[۱۸] symmetric

**تعریف ۱۴۷.** رابطه‌ی $R$ روی یک مجموعه‌ی $X$ را **پادتقارنی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \wedge yRx \to x = y\Big)$$

**مثال ۱۴۸.** بررسی کنید که رابطه‌ی $=$ روی یک مجموعه‌ی $X$ و رابطه‌ی $\subseteq$ روی یک مجموعه به صورت $P(X)$ هر دو پادتقارنی هستند.

**مثال ۱۴۹** (مثال نقض). نشان دهید که روابط دوستی و همسن بودن روی یک مجموعه از انسانها پادتقارنی نیستند.

**توجه ۱۵۰.** چنین نیست که هر رابطه‌ای که تقارنی نباشد حتما پادتقارنی است. به عنوان تمرین، یک رابطه مثال بزنید که نه تقارنی باشد و نه پادتقارنی.

**تعریف ۱۵۱.** رابطه‌ی $R$ روی یک مجموعه‌ی $X$ را **متعدّی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y, z \in X \quad \Big(xRy \wedge yRz \to xRz\Big)$$

**مثال ۱۵۲.** بررسی کنید که رابطه‌ی تساوی روی یک مجموعه‌ی $X$، همسن بودن در مجموعه‌ی انسانها، و زیر مجموعه بودن روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ هر سه متعدی هستند.

**مثال ۱۵۳** (مثال نقض). بررسی کنید که رابطه‌ی دوستی روی مجموعه‌ی انسانها و رابطه‌ی

$$xRy \Leftrightarrow \text{است } x \text{ پدر } y$$

روابطی نامتعدی هستند.

**تعریف ۱۵۴** (تام بودن). رابطه‌ی $R$ روی یک مجموعه‌ی $X$ را **تام** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \vee yRx\Big)$$

**مثال ۱۵۵** (مثال نقض). رابطه‌ی پدری.

## ۱۵ چند تمرین

**تمرین ۱۵۶.** نشان دهید که رابطه‌ی $R$ روی مجموعه‌ی $X$ متعدی است اگر و تنها اگر $R \circ R \subseteq R$

*اثبات.* نخست یادآوری می‌کنیم که

$$(x, y) \in R \circ R \iff \exists z \quad R(x, z) \wedge R(z, y)$$

نخست نشان می‌دهیم که اگر رابطه‌ی $R$ متعدی باشد آنگاه

$$R \circ R \subseteq R$$

فرض کنیم $R$ متعدی است و $(x,y) \in R \circ R$. از این که $(x,y) \in R \circ R$ نتیجه می‌شود که

$$\exists z. \quad (x, z.) \in R \wedge (z., y) \in R \quad (*)$$

بنا به $(*)$ و متعدی بودن $R$ نتیجه می‌شود که

$$(x,y) \in R$$

حال ثابت می‌کنیم که اگر $R \circ R \subseteq R$ آنگاه $R$ متعدی است.

فرض: $R \circ R \subseteq R$

حکم:

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

فرض کنید $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ و $R \circ R \subseteq R$. از اینکه $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ نتیجه می‌شود که

$$(x,z) \in R \circ R$$

از فرض $R \circ R \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x,z) \in R.$$

□

**تمرین ۱۵۷.** نشان دهید که رابطه‌ی $R$ روی مجموعه‌ی $X$ انعکاسی است اگر و تنها اگر $\Delta_X \subseteq R$.

*اثبات.* نخست فرض می‌کنیم که $R$ انعکاسی است و ثابت می‌کنیم که

$$\Delta_X \subseteq R$$

فرض کنید $(x,x) \in \Delta_X$. بنا به این که $R$ انعکاسی است نتیجه می‌گیریم که $(x,x) \in R$. پس

$$\Delta_X \subseteq R.$$

حال فرض کنید $\Delta_X \subseteq R$. می‌خواهیم ثابت کنیم که $R$ انعکاسی است. عنصر دلخواه $x. \in X$ را در نظر بگیرید. بنا به تعریف رابطه‌ی قطری [۱۹] داریم:

$$(x., x.) \in \Delta_X$$

حال از فرض $\Delta_X \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x., x.) \in R$$

از آنجا که $x.$ به طور دلخواه انتخاب شده است، نتیجه می‌گیریم که $R$ انعکاسی است. □

[۱۹] رابطه‌ی $\Delta_X$ را رابطه‌ی قطری روی $X$ می‌خوانیم.

**تمرین ۱۵۸.** نشان دهید که تنها رابطه‌ای که هم انعکاسی باشد و هم تقارنی و هم پادتقارنی، رابطه‌ی تساوی است. (پاسخ به عهده‌ی شما).

**تمرین ۱۵۹.** نشان دهید که رابطه‌ی $R$ روی مجموعه‌ی $X$ تام است اگر و تنها اگر

$$R \cup R^{-1} = X \times X$$

*اثبات.* فرض کنیم $R$ تام باشد. اگر $(x_0, y_0) \in X \times X$ آنگاه از آنجا که $R$ تام است یا $(x_0, y_0) \in R$ یا $(y_0, x_0) \in R$. پس یا $(x_0, y_0) \in R$ یا $(x_0, y_0) \in R^{-1}$. از آنجا که $(x_0, y_0)$ به طور دلخواه انتخاب شده است، داریم:

$$X \times X \subseteq R \cup R^{-1}.$$

اثباتِ این که

$$R \cup R^{-1} \subseteq X \times X :$$

می‌دانیم $R$ یک رابطه روی $X$ است پس

$$R \subseteq X \times X$$

می دانیم $R^{-1}$ یک رابطه روی $X$ است پس

$$R^{-1} \subseteq X \times X$$

پس

$$R \cup R^{-1} \subseteq X \times X$$

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که اگر $R$ تام باشد آنگاه

$$X \times X = R \cup R^{-1}.$$

حال فرض کنید

$$X \times X = R \cup R^{-1}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که $R$ تام است. عناصر دلخواه $x_0, y_0 \in X$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم

$$(x_0, y_0) \in X \times X$$

پس

$$(x_0, y_0) \in R \cup R^{-1}$$

پس یا $(x_0, y_0) \in R$ که در اینصورت $x_0 R y_0$ یا $(x_0, y_0) \in R^{-1}$ که در این صورت $y_0 R x_0$ پس رابطه‌ی $R$ تام است. □

**تمرین ۱۶۰.** روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی، رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy \Leftrightarrow x \leq y.$$

رابطه‌ی بالا (رابطه‌ی ترتیب) کدام یک از ویژگی‌های معرفی شده در این درس را دارد؟

# ۱۶ جلسه‌ی چهاردهم، دوشنبه

## ۱.۱۶ رابطه‌ی هم‌ارزی

به رابطه‌ای که ویژگی‌های **انعکاسی، تقارنی و تعدی** داشته باشد، یک **رابطه‌ی هم‌ارزی** گفته می‌شود. از روابط هم‌ارزی برای **تقسیم‌بندی** یک مجموعه استفاده می‌شود. برای مثال، مجموعه‌ی همه‌ی دانشجویان یک کلاس را در نظر بگیرید. رابطه‌ی همقد بودن یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. افراد حاضر در این کلاس را می‌توان بر اساس رابطه‌ی هم‌قد بودن تقسیم‌بندی (یا افراز) کرد. برای این کار کافی است افرادی را که هم‌قد هستند، همگروه کرد. توجه کنید که هر گروه (هر قد)، دارای نماینده‌ای است، اما فرقی نمی‌کند کدام شخص از آن گروه را به عنوان نماینده انتخاب کرد. به بیان دیگر، اگر $x, y$ دو فرد همقد باشند، آنگاه مجموعه‌ی افراد همقدِ $x$ دقیقاً همان مجموعه‌ی افرادِ همقدِ $y$ است. همچنین اگر $x, y$ همقد نباشند، آنگاه مجموعه‌ی افراد همقد با $x$ هیچ اشتراکی با مجموعه‌ی افراد همقد با $y$ ندارد. در سرتاسرِ درس این جلسه، مثال همقد بودن را در ذهن داشته باشید و نمودِ آن را در تمام اثباتها بیابید.

فرض کنید $R$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $X$ باشد. فرض کنید $x_. \in X$ عنصری دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\text{کلاس هم‌ارزی عنصر } x_. \text{ تحت رابطه‌ی } R = [x_.]_R = \{y \in X | yRx\} = \{y \in X | xRy\}$$

فرض کنید که $R$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد. خانواده‌ی زیر از مجموعه‌ها را در نظر بگیرید:

$$\{[x]_R | x \in X\}$$

**قضیه ۱۶۱.** فرض کنید $x_. \not R y_.$ آنگاه

$$[x_.] \cap [y_.] = \emptyset$$

*اثبات.* کافی است بنا به تاتولوژی

$$\neg q \to \neg p \iff p \to q$$

ثابت کنیم که اگر $[x_.] \cap [y_.] \neq \emptyset$ آنگاه $x_. R y_.$. فرض کنید $[x_.] \cap [y_.] \neq \emptyset$. فرض کنید $z_. \in [x_.] \cap [y_.]$. از آنجا که $z_. \in [x_.]$ و $[x_.] = \{y | yRx_.\}$ نتیجه می‌گیریم که

$$z_. R x_. \quad (۱)$$

و به طور مشابه، از اینکه $z_. \in [y_.]$ نتیجه می‌گیریم که

$$z_. R y_. \quad (۲)$$

از آنجا که $R$ تقارنی است از (۱) نتیجه می‌شود که

$$x_. R z_. \quad (۳)$$

بنا به متعدی بودن $R$ از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که

$$x.Ry.$$

بیایید همین اثبات را بار دیگر به صورت استنتاجی بنویسیم:

(۱) $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \quad z \in [x.] \cap [y.]$

فرض می‌کنیم $z. \in [x.] \cap [y.]$

(۲) $z. \in [x.] \cap [y.] \Rightarrow (z. \in [x.]) \wedge (z. \in [y.])$

(۳) $z. \in [x.] \Rightarrow z.Rx.$

(۴) $z. \in [y.] \Rightarrow z.Ry.$

(۵) $z.Rx. \overset{\text{تقارنی}}{\Rightarrow} x.Rz.$

(۶) $(x.Rz.) \wedge (z.Ry.) \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} x.Ry.$

(۷) $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset \Rightarrow x.Ry.$ بنا به ۱ تا ۶

$\square$

**قضیه ۱۶۲.** اگر

$$[x.] \cap [y.] = \emptyset$$

آنگاه

$$x.\not{R}y.$$

*اثبات.* ثابت می‌کنیم که اگر $x.Ry.$ آنگاه

$$[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$$

اگر $x.Ry.$ آنگاه بنا به تعریفِ $[y.]$ داریم

$$x. \in [y.] \quad (۱)$$

همچنین از از آنجا که $R$ انعکاسی است داریم

$$x.Rx.$$

پس

$$x. \in [x.] \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$x. \in [x.] \cap [y.]$$

بنابراین

$$[x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$$

□

**نتیجه ۱۶۳.**

$$x_0 \not R y_0 \iff [x_0] \cap [y_0] = \emptyset$$

$$x_0 R y_0 \iff [x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$$

**قضیه ۱۶۴.** اگر $[x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$ آنگاه

$$[x_0] = [y_0]$$

*اثبات.* فرض کنید که $[x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$. می‌خواهیم ثابت کنیم که در این صورت، $[y_0] \subseteq [x_0]$ و $[x_0] \subseteq [y_0]$.
فرض کنید که $z \in [x_0]$. پس

$$zRx_0 \quad (۱).$$

از آنجا که $[x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$ بنا به قضیه‌ی قبل داریم

$$x_0 R y_0 \quad (۲).$$

بنا به (۱)و(۲) و تعدی، نتیجه می‌گیریم که

$$zRy_0.$$

پس $z \in [y_0]$. از آنجا که $z$ به صورت دلخواه انتخاب شده است، نتیجه می‌گیریم که

$$[x_0] \subseteq [y_0].$$

به طور مشابه شما ثابت کنید که $[y_0] \subseteq [x_0]$. □

فرض کنید که $R$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $X$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$X/R = \{[x] | x \in X\}.$$

توجه کنید که $X/R$ در تعریف بالا یک خانواده از مجموعه‌هاست؛ زیرا برخی از اعضای آن می‌توانند تکراری باشند. همان طور که دیدیم اگر $xRy$ آنگاه $[x] = [y]$. با این حال، این خانواده، در واقع یک مجموعه هم هست زیرا می‌توان تکرارها را در آن نادیده گرفت. **در ادامه‌ی درس $X/R$ را یک مجموعه در نظر گرفته‌ایم.**

**قضیه ۱۶۵.**

$$\bigcup X/R = X$$

**توجه ۱۶۶.** یادآوری می‌کنیم که اگر $A$ یک مجموعه باشد آنگاه

$$\bigcup A = \{x|\exists y \in A \quad x \in y\}$$

همچنین اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x|\exists i \in I \quad x \in A_i\}$$

در قضیه‌ی بالا از نمادگذاری اولی استفاده کرده‌ایم.

*اثبات.* ابتدا نشان می‌دهیم که

$$X \subseteq \bigcup X/R.$$

فرض کنید که $x_\circ \in X$. از آنجا که رابطه‌ی $R$ انعکاسی است داریم $x_\circ R x_\circ$؛ به بیان دیگر

$$x_\circ \in [x_\circ].$$

از آنجا که $[x_\circ] \in X/R$ و $x_\circ \in [x_\circ]$ بنا به توجه بالا نتیجه می‌شود که $x_\circ \in \bigcup X/R$.
حال ثابت می‌کنیم که

$$\bigcup X/R \subseteq X$$

اگر $x_\circ \in \bigcup X/R$ آنگاه $y \in X$ چنان موجود است که $x_\circ \in [y] = \{x \in X|xRy\} \subseteq X$ پس معلوم است که
$x_\circ \in X$. □

توجه کنید که

- $X/R$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های $X$ است.
- هیچ دو عضو از $X/R$ با هم اشتراک ندارند.
- $\bigcup X/R = X$.

به بیان دیگر، $X/R$ یک افراز برای مجموعه‌ی $X$ است. پس از هر رابطه‌ی هم‌ارزیِ $R$ روی یک مجموعه‌ی $X$ به یک افراز برای آن دست می‌یابیم. در درسهای آینده (پس از تعریف دقیق افراز) خواهیم دید که در واقع از هر افراز برای یک مجموعه‌ی $X$ به یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ $R$ روی این مجموعه می‌رسیم به طوری که $X/R$ همان افراز را به دست بدهد. یعنی دو مفهومِ **افراز و رابطه‌ی هم‌ارزی با هم هم‌ارزند.**

افراز $\Leftrightarrow$ رابطه‌ی هم‌ارزی

به بیان دیگر، افرازهای یک مجموعه‌ی $X$ در تناظر یک به یک با روابط هم‌ارزی روی آن هستند؛ یعنی، فرض کنید $A$ مجموعه‌ی همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $X$ باشد و $B$ مجموعه‌ی همه‌ی روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $X$ باشد. تابعِ $f : B \to A$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(R) = X/R$$

تابع بالا، یک به یک و پوشاست. (فعلاً نگران سختی این گفته نباشید. مفاهیم تابع، یک‌به‌یک و پوشا را در درسهای آینده خواهیم دید.)

**مثال ۱۶۷.** روی مجموعه‌ی اعدادِ صحیح، $\mathbb{Z}$، رابطه‌ی $R$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv_{۳} y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = ۳k$$

نشان دهید که رابطه‌ی $R$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و $X/R$ را مشخص کنید.

*پاسخ.* نخست ثابت می‌کنیم که $R$ انعکاسی است. برای هر $x \in \mathbb{Z}$ می‌دانیم که $x \equiv_{۳} x$ پس روشن است که رابطه‌ی $R$ انعکاسی است. حال ثابت می‌کنیم که $R$ تقارنی است. اگر $y \equiv_{۳} x$ آنگاه $y - x = ۳k$ برای یک عددِ $k \in \mathbb{Z}$ و از این رو $x - y = -۳k = ۳(-k)$ یعنی عددِ $k' \in \mathbb{Z}$ موجود است که $x - y = ۳k'$ پس $y \equiv_{۳} x$. حال ثابت می‌کنیم که رابطه‌ی $R$ متعدی است. فرض کنید $xRy, yRz$ پس اعداد صحیحِ $k, k'$ چنان موجودند که

$$y - x = ۳k \quad z - y = ۳k'$$

پس

$$z - x = ۳(k + k')$$

یعنی

$$xRz.$$

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که رابطه‌ی $R$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. حال ادعا می‌کنیم که این رابطه، تنها دارای سه کلاس هم‌ارزی است؛ به بیان دیگر ادعا می‌کنیم که

$$X/R = \{[۰], [۱], [۲]\}$$

فرض کنید که $x$ یک عدد صحیح دلخواه باشد. می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی $x$ بر ۳ یکی از ۰و۱و۲ است. پس $x \in [۰] \cup [۱] \cup [۳]$. به بیان دیگر یا $[x] = [۰]$ یا $[x] = [۱]$ یا $[x] = [۲]$. پس

$$X/R \subseteq \{[۰], [۱], [۲]\}.$$

همچنین واضح است که

$$\{[۰], [۱], [۲]\} \subseteq X/R$$

پس

$$X/R = \{[۰], [۱], [۲]\}.$$

توجه کنید که از آنجا که هیچ دو عدد از میان ۰و۱و۲ با هم به پیمانه‌ی ۳ همنهشت نیستند، اعضایِ

$$[۰], [۱], [۲]$$

هر سه با هم متمایزند؛ یعنی

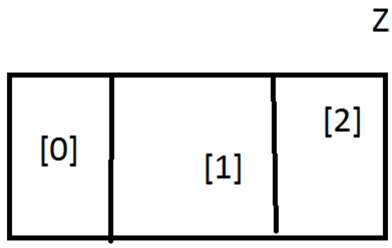
$$[۱] \cap [۲] = \emptyset, [۱] \cap [۰] = \emptyset, [۰] \cap ۲ = \emptyset$$

یعنی مجموعه‌ی

$$X/R$$

دقیقاً دارای سه عضو است. می‌نویسیم:

$$X/R = X/\equiv_۳ = \mathbb{Z}_۳ = \{[۰], [۱], [۲]\} = \{\overline{۰}, \overline{۱}, \overline{۲}\}$$




$\square$

توجه کنید که در مثال بالا، با استفاده از رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۳، مجموعه‌ی اعداد صحیح را به ۳ قسمت افراز کردیم. همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ صفر است با [۰] نشان دادیم؛ همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ برابر با ۱ است با [۱] نشان دادیم؛ و همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ برابر با ۲ است با [۲] نشان دادیم.

**تعمیم ۱۶۸.** برای عدد دلخواهِ $n \in \mathbb{N}$ روی $\mathbb{Z}$ رابطه‌ی $R$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv_n y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = nk$$

نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی با $n$ کلاس است و

$$\mathbb{Z}/R = \{[۰], \dots, [n - ۱]\}.$$

**مثال ۱۶۹.** فرض کنید که $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ یک تابع دومتغیره با دامنه‌ی $D$ باشد. روی $D$ رابطه‌ی زیر را تعریف کنید:

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow f(x, y) = f(x', y')$$

نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و کلاسهای هم‌ارزی آن دقیقاً همان منحنی‌های تراز تابعِ $f$ هستند (یعنی رابطه‌ی بالا، دامنه‌ی تابع را با استفاده از منحنی‌های تراز افراز می‌کند.)

## ۱۷ جلسه‌ی پانزدهم، شنبه

در جلسات قبل گفتیم که اگر $X$ و $Y$ مجموعه باشند، آنگاه هر زیر مجموعه از $P(X \times Y)$ یک رابطه از $X$ به $Y$ است.

**مثال ۱۷۰.** فرض کنید $\mathbf{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد. قرار دهید

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^۲ | y = x^۲\}$$

دقت کنید که $R$ نمونه‌ای از یک رابطه روی $\mathbf{R}$ است.

نیز گفتیم که از میان روابط، روابط هم‌ارزی برای ما اهمیت ویژه‌ای دارند. از آنها می‌شود برای دسته‌بندی (افراز) استفاده کرد. اگر $R$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $X$ باشد تعریف کردیم:

$$X/R = \{[x] | x \in R\}$$

که در آن:

$$[x] = \{y \in X | xRy\}$$

نیز ثابت کردیم که

$$[x] = [y] \iff xRy$$

و

$$[x] \cap [y] = \emptyset \iff x \not{R} y$$

با حذف تکرارها، $X/R$ را به عنوان یک مجموعه در نظر می‌گیریم.

**مثال ۱۷۱.** روی یک مجموعه‌ی $X$ رابطه‌ی تساوی، $(=)$، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

$$R \subseteq X \times X$$

$$xRy \iff x = y$$

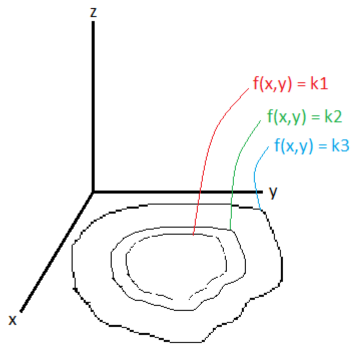
$$X/_{=} = \{[x]_{=} | x \in X\} = \Big\{\{x\} | x \in X\Big\}$$

**مثال ۱۷۲.** اگر

$$z = f(x, y)$$

یک تابع دو متغیره باشد، رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

$$(x, y)R(x', y') \iff f(x, y) = f(x', y')$$




رابطه‌ی فوق یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و $X/R$ مجموعه‌ی تمام منحنی‌های تراز تابع $f$ است (که در واقع افرازی برای دامنه‌ی این تابع هستند).

## ۱.۱۷ افراز و رابطه‌ی آن با رابطه‌ی هم‌ارزی

در خلال جلسات گذشته درباره‌ی افراز صحبت کردیم بدون آنکه آن را رسماً تعریف کرده باشیم. در ادامه‌ی درس، افرازها را خواهیم شناساند و خواهیم دید که مفهوم افراز **در تناظر یک به یک** با مفهومِ رابطه‌ی هم‌ارزی است.

فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد. مجموعه‌ی $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ را یک افراز برای $X$ می‌خوانیم هرگاه

۱. $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B = X$

۲. $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad (A \neq B \rightarrow A \cap B = \emptyset)$

۳. $\forall A \in \mathcal{A} \quad A \neq \emptyset$

**مثال ۱۷۳.** تمام افرازهای مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳\}$ را بنویسید.

*پاسخ.*

$$\{\{۱\}, \{۲, ۳\}\}, \{\{۲\}, \{۱, ۳\}\},$$
$$\{\{۳\}, \{۱, ۲\}\}, \{\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}\},$$
$$\{\{۱, ۲, ۳\}\}$$

□

**مثال ۱۷۴.** یک نمونه افراز از مجموعه‌ی $\mathbf{N} - \{۰\}$ به صورت زیر است

| اعداد فرد | اعداد زوج مخالف صفر |
|---|---|

$$\mathbf{N} - \{۰\} = \{\text{اعداد زوج مخالف صفر}\} \cup \{\text{اعداد فرد}\}$$

از هر رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان به یک افراز رسید:

**قضیه ۱۷۵.** اگر $R$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $X$ باشد، آنگاه $X/R$ یک افراز $X$ است.

*اثبات.* نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی $X/R$ تمام ویژگی‌های یک افراز برای مجموعه‌ی $X$ را داراست.
در جلسه‌ی گذشته گفتیم که

$$\bigcup X/R = X$$

همچنین می‌دانیم که

$$[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$$

زیرا جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که اگر $[x] \neq [y]$ آنگاه $x \not R y$ و از این هم نتیجه می‌شود که

$$[x] \cap [y] = \emptyset$$

همچنین به دلیل آنکه $R$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است پس $R$ انعکاسی است؛ بنابراین برای هر $x \in X$ داریم

$$x \in [x]$$

پس

$$\forall x \in X \quad [x] \neq \emptyset$$

□

در قضیه‌ی بالا دیدیم که از رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان به افراز رسید. در زیر نشان داده‌ایم که هر افراز، از یک رابطه‌ی هم‌ارزی نشأت گرفته است:

**قضیه ۱۷۶.** فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ افرازی برای مجموعه‌ی $X$ باشد. آنگاه یک رابطه‌ی هم‌ارزی $R$ روی $X$ چنان یافت می‌شود که

$$X/R = \mathcal{A}$$

*اثبات.* داشته‌ها: افرازِ $\mathcal{A}$ برای $X$
هدف:
پیدا کردن یک رابطه‌ی $R$ روی $X$ به طوری که

$$X/R = \mathcal{A}$$

بیایید رابطه‌ی $R$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$xRy \iff$$

$\iff$ $x$ و $y$ هر دو در یک مجموعه‌ی یکسان در افراز $\mathcal{A}$ واقع شده باشند؛ یعنی هم‌دسته باشند

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$

**سوال ۱۷۷.** چه چیزهایی باید ثابت کنیم؟

باید ثابت کنیم که

۱. رابطه‌ی $R$ در بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲. $X/R = \mathcal{A}$

اثبات قسمت اول. نخست ثابت می‌کنیم که $R$ انعکاسی است.

فرض کنید $x \in X$ عنصر دلخواهی باشد. آنگاه از آنجا که $X = \bigcup \mathcal{A}$ می‌دانیم که $x \in \bigcup \mathcal{A}$. پس $A \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $x \in A$. پس $x \in A$ و $x \in A$ یعنی $xRx$ پس $R$ انعکاسی است.

دوم ثابت می‌کنیم که $R$ تقارنی است.

فرض کنید $xRy$ آنگاه

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$

به بیان دیگر

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad y, x \in A$$

پس $yRx$ پس $R$ تقارنی است.

سوم ثابت می‌کنیم که $R$ تعدی نیز دارد.

فرض کنید $xRy$ و $yRz$. پس مجموعه‌ی $A \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $x, y \in A$ و مجموعه‌ی $B \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $y, z \in B$ پس داریم

$$y \in A \cap B$$

از آنجا که $\mathcal{A}$ یک افراز است اگر $A \neq B$ آنگاه $A \cap B = \emptyset$. در بالا دیدیم که

$$A \cap B \neq \emptyset$$

بنابراین $A = B$ پس $x, z \in A = B$. یعنی $xRz$.

اثبات قسمت دومِ حکم:

$$X/R = \mathcal{A}$$

توجه کنید که هم $X/R$ و هم $\mathcal{A}$ مجموعه‌هائی از مجموعه‌ها هستند. نخست ثابت می‌کنیم که $\mathcal{A} \subseteq X/R$.

فرض کنید $A \in \mathcal{A}$ می‌دانیم که

$$X/R = \{[x] | x \in X\}$$

کافی است ثابت کنیم که $x. \in X$ چنان موجود است که $A = [x.]$. توجه کنید که $A$ ناتهی است (طبق تعریف افراز). فرض کنید $x.$ یک عضو دلخواه باشد از $A$ باشد. ادعا می‌کنیم که

$$[x.] = A.$$

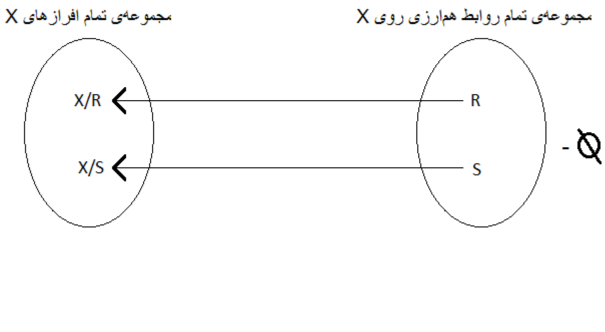
داریم
$$[x_0]=\{y|yRx_0\}=\{y|y,x_0\in A\}=\{y|y\in A\}=A$$
تا اینجا ثابت کردیم که
$$\mathcal{A}\subseteq X/R$$
اثبات اینکه $(*)\quad X/R\subseteq\mathcal{A}$.

فرض کنید $[x_0]\in X/R$. می‌دانیم که $A\in\mathcal{A}$ موجود است که $x_0\in A$؛ زیرا $X/R=\bigcup\mathcal{A}$.) به طور مشابه با بالا ثابت کنید که $[x_0]=A$. پس
$$[x_0]\in\mathcal{A}$$
بنابراین ثابت کردیم که
$$X/R\subseteq\mathcal{A}\quad(**)$$
پس بنا به $(*)$ و $(**)$ داریم $X/R=\mathcal{A}$. $\square$

**تمرین ۱۷۸.** آیا می‌توانید یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ $R$ روی مجموعه‌ی $\mathbf{N}-\{0\}$ تعریف کنید به طوری که
$$\mathbf{N}-\{0\}/R=\{\{\text{اعداد زوج مخالف صفر}\},\{\text{اعداد فرد}\}\}$$

*پاسخ.* رابطه‌ی $R$ را به صورت زیر تعریف کنید:
$$xRy\iff x\equiv_2 y.$$
$\square$

فرض کنید $\mathcal{M}$ مجموعه‌ی تمام روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $X$ باشد. نیز فرض کنید $\mathcal{N}$ مجموعه‌ی تمام افرازهای مجموعه‌ی $X$ باشد. از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}$ یک تابع $f$ را به صورت زیر تعریف کنید: اگر $R\in\mathcal{M}$ آنگاه $f(R)=X/R$. قضیه‌ی ۱۷۶ در واقع به ما می‌گوید که تابع $f$ تابعی پوشاست. در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد که تابعِ $f$ یک‌به‌یک نیز هست.



## ۱۸ جلسه‌ی شانزدهم، دوشنبه

فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد. در جلسات قبل درباره‌ی یک تابع $f$ صحبت کردیم که میانِ مجموعه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $X$ و روابط هم‌ارزی روی این مجموعه، یک تناظر یک به یک ایجاد می‌کند:

$$f : R \mapsto X/R$$

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که تابع $f$ پوشاست؛ یعنی اگر $\mathcal{A}$ یک افراز از مجموعه‌ی $X$ باشد، آنگاه یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ $R$ روی مجموعه‌ی $X$ چنان موجود است که $X/R = \mathcal{A}$. در این جلسه ثابت می‌کنیم که این تابع، یک به یک است. به بیان دیگر:

**قضیه ۱۷۹.** فرض کنید $R$ و $S$ دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه $X$ باشند. اگر

$$X/R = X/S$$

آنگاه

$$R = S.$$

*اثبات.* فرض کنید $R$ و $S$ دو رابطه هم ارزی باشند و

$$X/R = X/S$$

فرض کنید $(x_\circ, y_\circ) \in R$ هدفمان نشان دادن این است که $(x_\circ, y_\circ) \in S$.

از اینکه $(x_\circ, y_\circ) \in R$ نتیجه می گیریم که $x_\circ \, R \, y_\circ$.

از آنجا که $x_\circ \, R \, y_\circ$ بنا به این که $R$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی نتیجه می‌گیریم که : $[x_\circ]_R = [y_\circ]_R$

از آنجا که $X/R = X/S$ نتیجه می‌گیریم که عنصر $z_\circ$ موجود است به طوریکه $[x_\circ]_R = [y_\circ]_R = [z_\circ]_S$

می دانیم که $x_\circ \in [x_\circ]_R$ پس $x_\circ \in [z_\circ]_S$

به طور مشابه $y_\circ \in [z_\circ]_S$

پس $x_\circ \, S \, z_\circ \, S \, y_\circ$

حال بنا به تعدی رابطه $S$ داریم:

$$x_\circ \, S \, y_\circ$$

پس $(x_\circ, y_\circ) \in S$. پس ثابت شد که $R \subseteq S$. اثبات این که $S \subseteq R$ به طور کاملاً مشابه است. $\square$

پس اثبات قضیه‌ی مهم زیر در اینجا به پایان رسید:

**قضیه ۱۸۰.** میان افرازهای یک مجموعه و روابط هم‌ارزی روی آن، یک تناظر یک به یک وجود دارد. [۲۰]

[۲۰] برای کسی که این قضیه را فرا بگیرد و شفاهاً در اتاق کار من ثابت کند، یک نمره‌ی کامل در نظر گرفته‌ام.

بگذارید بحث رابطه‌ی هم‌ارزی را با یک نکته به پایان ببریم.
گفتیم که اگر $A$ یک افراز باشد، آنگاه رابطه هم ارزی $R$ موجود است به طوریکه $X/R = A$. حکم قضیه‌ی این است که یک رابطه‌ی هم‌ارزی موجود است که فلان ویژگی را دارد. این نوع احکام عموماً دارای دو نوع اثبات هستند: اثبات وجودی، و اثبات ساختی. در اثبات وجودی، تنها ثابت می‌کنیم که آن موجودی در پی آن هستیم موجود است، ولی شاید نتوانیم دقیقاً آن موجود را مشخص کنیم. در اثبات ساختی، موجود مورد نظر را به طور دقیق پیدا می‌کنیم. به نظر شما، اثباتی که برای حکم فوق آمد، ساختی بود یا وجودی؟

## ۱.۱۸ مقدمه‌ای بر مفاهیم هم‌توانی و متناهی و نامتناهی

مفهوم همتوانی را باید بعد از مفهوم تابع درس داد؛ ولی از آنجا که می‌دانم همه‌ی شما با مفهوم تابع آشنا هستید و برای جلوگیری از یکنواخت شدن درس، مفهوم تابع را دانسته فرض می‌کنم و نخست چند کلمه درباره‌ی همتوانی، متناهی و نامتناهی سخن می‌گویم. در جلسات بعد مفهوم تابع را دقیقاً توضیح خواهم داد و دوباره به مفاهیم یادشده بازخواهم گشت. در واقع آنچه در ادامه آمده است، مقدمه‌ای است برای بحثهای پیش رو در این درس.

دو مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{\text{علی، حسن، حسین}\}$$

و

$$B = \{۰, ۱, ۲\}$$

با این که ایندو به ظاهر خیلی متفاوت به نظر می‌رسند ولی از نظر «اندازه» با هم برابرند. در واقع این طور به نظر می‌آید که اگر نامها را در مجموعه‌ی بالا عوض کنیم، به یک کپی از مجموعه‌ی پائین می‌رسیم؛ یعنی اگر علی را۰ و حسن را ۱ و حسین را ۲ بنامیم، به مجموعه‌ی پائین می‌رسیم. اصطلاحاً در این موقع می‌گوئیم که این دو مجموعه **همتوان** هستند. بیائید همین نکته را دقیقتر بیان کنیم. فرض کنید $f$ یک تابع از $A$ به $B$ باشد به طوری که

$$f(\text{علی}) = ۰, f(\text{حسن}) = ۱, f(\text{حسین}) = ۲$$

تابع $f$ هم یک به یک است و هم‌پوشا. در واقع این تابع، یک تابع «تغییر نام» است.

**تعریف ۱۸۱.** دو مجموعه‌ی دلخواهِ $X, Y$ را همتوان می‌خوانیم هرگاه تابعی یک به یک و پوشا از $X$ به $Y$ موجود باشد.

وقتی دو مجموعه همتوان هستند در واقع، می‌توان اینگونه اندیشید که هر دو یک مجموعه هستند که اعضایش دو صورت مختلف نامگذاری شده‌اند.
در درسهای پیشین با مفهوم اعداد طبیعی آشنا شدید: گفتیم که بنا به اصل وجود مجموعه‌ی استقرائی یک مجموعه‌ی استقرائی موجود است. ثابت کردیم که کوچکترین مجموعه‌ی استقرائي نیز موجود است که آن را مجموعه‌ی اعداد

طبیعی می‌خوانیم و با $\mathbb{N}$ نشان می دهیم. به بیان دیگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای اعضای زیر است:

$$\begin{aligned} &۰ = \emptyset \\ &۱ = \{۰\} \\ &\vdots \\ &n = \{۰, \ldots, n-۱\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

**تعریف ۱۸۲.** ۱. می‌گوئیم مجموعه‌ی $X$ دارای $n$ عضو است هرگاه همتوان با مجموعه‌ی $\{۰, ۱, \ldots, n-۱\}$ باشد؛ یعنی یک تابع یک به یک و پوشا بین $n$ و $X$ موجود باشد.

۲. می‌گوئیم مجموعه‌ی $X$ متناهی است هرگاه یک عددِ $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $X$ با $n$ همتوان باشد. در واقع مجموعه‌ی $X$ متناهی است هرگاه یک عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که مجموعه‌ی $X$ دارای $n$ عضو باشد.

پس تا اینجا مجموعه‌های متناهی را شناختیم. اما مجموعه‌ی نامتناهی چه می‌تواند باشد؟

**تعریف ۱۸۳.** مجموعه‌ی $X$ را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه متناهی نباشد (!).

**قضیه ۱۸۴.** مجموعه‌ی اعداد طبیعی نامتناهی است.

دوست دارم پیش از ورود کردن جدی تر به بحث، کمی بحث فلسفی بکنیم: اصل عمومیِ ششم اقلیدس برای ورود به اصول هندسه‌ی اقلیدسی این است که «همواره یک کُل از جزء خودش بزرگتر است». برای آشنا شدن با اصول اقلیدس پیوند زیر را مطالعه کنید:

https://www.math.ust.hk/~mabfchen/Math4221/Euclidean%20Geometry.pdf

پس، از نظر اقلیدس، هیچ کُلّی نمی‌تواند «هم‌اندازه» با جزئی از خودش باشد. گفتیم که دو مجموعه‌ی $X$ و $Y$ را همتوان، یعنی هم‌اندازه، می‌خوانیم هرگاه بین آنها یک تابع یک به یک و پوشا موجود باشد. مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathbb{N} = \{۰, ۱, ۲, \ldots, \}$$

مجموعه‌ی اعداد زوج، جزئی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی است:

$$E = \{۰, ۲, ۴, \ldots\}$$

حال تابعِ $f : \mathbb{N} \to E$ را در نظر بگیرید که $f(x) = ۲.x$. به نظر می‌آید که با استفاده از این تابع می‌توان نشان داد که مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $E$ هم‌اندازه هستند. در واقع $E$ تنها یک نام‌گذاری دیگر برای $\mathbb{N}$ است. به نظر می‌آید که در اینجا اصل اقلیدس رد شده است. [21] علت چنین اتفاقی، اصل «وجود مجموعه‌ی نامتناهی» است. این که مجموعه‌ای

[21] اقلیدس با چه پیش‌فرضی اصل خود را نوشته است که ما آن پیش‌فرض را نداریم؟

نامتناهی وجود داشته باشد، یا این که جهان هستی متناهی باشد یا نامتناهی، تأثیر بزرگی بر ایدئولوژی و روش زندگی ما دارد. بسیاری از براهین خداشناسی نیز، مانند برهان علیت، بر این استوارند که گیتی، مجموعه‌ای متناهی است.
با فرض پذیرفتن وجود مجموعه‌ی نامتناهی، **می‌توان نشان داد که مجموعه‌ی $X$ نامتناهی است اگروتنهااگر با جزئی از خودش هم‌اندازه باشد.** مثلاً مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ به این علت نامتناهی است که هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد زوج است. توجه کنید که مجموعه‌ی اعداد فرد هم، هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد زوج است. پس مجموعه‌ی اعداد طبیعی، از دو مجموعه ساخته شده است که هم‌اندازه‌ی خودش هستند! در جلسات آینده با این اتفاقات عجیب و غریب بیشتر آشنا خواهیم شد. فعلاً بحث را با پارادوکس «هتل هیلبرت»، که بیان دیگری برای گفته‌ی بالاست، پی می‌گیریم.
فرض کنید که یک هتل داریم که به اندازه‌ی اعداد طبیعی اتاق دارد و همه‌ی اتاقهای آن پُر است. اگر یک مسافر جدید بیاید آیا می‌شود او را هم در هتل جای داد؟ به نظر می‌آید که بشود: کافی است که به هر کس بگوئیم که یک اتاق جلوتر برود تا اتاق شماره‌ی ۱ خالی شود! حال همان هتل را در نظر بگیرید و فرض کنید به اندازه‌ی اعداد طبیعی مسافر جدید وارد شود که نیازمند جا هستند. در این صورت هم هتل برای آنها جا دارد: کافی است که هر کس که در اتاق $n$ است به اتاق $۲n$ برود. در این صورت اتاقهای فرد خالی می شوند و مسافران جدید می‌توانند وارد آنها شوند. حال اگر به‌اندازه‌ی اعداد طبیعی اتوبوس بیایند که هر کدام حاوی به اندازه‌ی اعداد طبیعی مسافرند، آیا باز هم هتل برای آنها جا دارد؟ بررسی این قسمت به عهده‌ی شما. (فیلمهای زیر را ببینید)

https://www.youtube.com/watch?v=faQBrAQ87l4

https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

گفتیم که مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای است که زیرمجموعه‌ای ازآن هم‌اندازه با خودِ مجموعه شود. اگر جهان هستی نامتناهی باشد، بخشی از جهان شبیه به کُلِّ جهان است. آن بخش نیز بخشی شبیه به خود دارد! بنابراین چه بسا نامتناهی کُپی از خودِ ما و سیاره‌ی ما در جاهای دیگر گیتی وجود داشته باشد و این جهانها به صورت موازی در جریان باشند.

## ۲.۱۸ ورود به بحث، توابع

نخستین ترکیب سازنده‌ی مباحث بالا، مفهوم تابع است. می‌دانم که در دبیرستان با توابع آشنا شده‌اید، ولی بد نیست دوباره این مفهوم را با هم مرور کنیم. تا کنون مسیر زیر را پی گرفته‌ایم:
معرفی اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها
معرفی ضرب مجموعه‌ها و مفهوم رابطه
و اکنون معرفی مفهوم تابع، به عنوان نوعی رابطه.

**تعریف ۱۸۵.** فرض کنید $R$ یک رابطه از مجموعه $X$ به $Y$ باشد. رابطه‌ی $R$ را یک تابع می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad \forall y_1, y_2 \in Y \quad (xRy_1 \wedge xRy_2 \to y_1 = y_2)$$

برای نشان دادن چنین تابعی از نمادهایی مانند $f$، $g$، ... استفاده می کنیم. مثلا اگر رابطه $R$ یک تابع و $(x, y) \in$

$R$ باشند، می نویسیم

$$f: \quad X \to Y$$

$$x \mapsto y$$

به تفاوت پیکانهای بالا توجه کنید. اگر $f$ یک تابع متناظر با رابطه $R$ باشد، می‌نویسیم: $\Gamma(f) = R$ به بیان دیگر، $\Gamma(f)$ که آن را «گراف تابع $f$) می‌خوانیم، مجموعه‌ی زیر است:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

**توجه ۱۸۶.** از این به بعد وقتی می گوییم $f$ تابع است، منظورمان این است که $f$ یک تابع تمام است؛ یعنی اگر $f$ از رابطه $R$ آمده باشد، آنگاه $DomR = X$.

اگر $f : X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه $X$ را دامنه $f$ می خوانیم و مجموعه زیر را بُردِ $f$:

$$\{f(x) | x \in X\}$$

**توجه ۱۸۷.** بنا بر آنچه گفتیم اگر $f : X \to Y$ تابع باشد، آنگاه

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \quad f(x) = y.$$

**مثال ۱۸۸.** فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد و $R$ یک رابطه هم ارزی روی $X$. عمل زیر یک تابع است:

$$f : X \to X/R$$

$$x \mapsto [x]_R$$

تعریف : تابع $f : X \to Y$ را یک به یک می خوانیم هرگاه

$$\forall x_۱, x_۲ \in X \quad \big(f(x_۱) = f(x_۲) \to x_۱ = x_۲\big)$$

به بیان دیگر

$$\forall x_۱, x_۲ \in X \quad \big(x_۱ \neq x_۲ \to f(x_۱) \neq f(x_۲)\big)$$

**سوال ۱۸۹.** آیا تابع مثال ۱۸۸ در حالت کلی یک به یک است؟

پاسخ سوال بالا منفی است. اگر مجموعه‌ی $X$ دارای دو عضوِ متفاوتِ $x_۱, x_۲$ باشد که با هم در رابطه باشند، آنگاه $[x_۱]_R = [x_۲]_R$.

**مثال ۱۹۰.** فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد و $B \subseteq X$ یک زیرمجموعه باشد. عمل زیر یک تابع از $P(X)$ به $P(X)$ است :

$$f : P(X) \to P(X)$$

$$A \mapsto A \cup B$$

**تعریف ۱۹۱.** تابع $f: X \to Y$ را پوشا می خوانیم هرگاه :

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y$$

**تمرین ۱۹۲.** نشان دهید که تابع مثال ۱۹۰ یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد اگر و تنها اگر $B = \emptyset$

*اثبات.* نشان می دهیم تابع $f$ در مثال ۲ یک به یک است اگر و تنها اگر $B = \emptyset$. بقیه‌ی اثبات را نیز به عهده‌ی شما می‌گذارم.

اگر $B \neq \emptyset$ آنگاه $B$ دارای حداقل دو زیر مجموعه‌ي $A_1, A_2$ است به طوری که $A_1 \neq A_2$. داریم:

$$f(A_1) = f(A_2) = B$$

پس $f$ یک به یک نیست.

اگر $B = \emptyset$ آنگاه برای هر $A \in X$ داریم

$$f(A) = A$$

واضح است که $f$ یک به یک است.

□

## ۱۹ جلسه‌ی هفدهم ، دوشنبه ۹۷/۱/۲۷

**تمرین ۱۹۳.** فرض کنید $R$ و $S$ دو رابطه هم ارزی باشند روی مجموعه $X$. نشان دهید که $R \circ S$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $X$ است اگر و تنها اگر $R \circ S = S \circ R$. [۲۲]

### ۱.۱۹ ادامه‌ی مبحث توابع

**مثال ۱۹۴.** فرض کنید $X$ و $Y$ دو مجموعه باشند و $b \in Y$ عنصر ثابتی باشد. عمل زیر یک تابع است:

$$f : X \to Y$$

$$x \mapsto b.$$

به تابع بالا، یک تابع ثابت گفته می‌شود. نشان دهید که تابع بالا در حالت کلی یک به یک و پوشا نیست.

**مثال ۱۹۵.** فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد و $A \subseteq X$ یک زیرمجموعه‌ی ثابت باشد. عمل زیر یک تابع است:

$$f : A \to X$$

$$x \mapsto x$$

تابع بالا را تابع **مشمولیت** می‌خوانیم. در این مثال اگر $A = X$ آنگاه تابع $f$ را همانی می خوانیم و آن را با $id_X$ نشان می‌دهیم.

$$id_X : X \to x$$

$$x \mapsto x$$

**مثال ۱۹۶.** فرض کنید $X$ یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. تابع $f$ را از $P(X) \times P(X)$ به $P(X)$ با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$f : P(X) \times P(X) \to P(X)$$

$$(A, B) \mapsto A \cup B$$

آیا تابع فوق یک به یک است؟

اگر $f$ یک به یک باشد آنگاه باید از

$$f(A_۱, B_۱) = f(A_۲, B_۲)$$

نتیجه شود که

$$(A_۱, B_۱) = (A_۲, B_۲)$$

[۲۲] هر که این تمرین را بدون نگاه کردن به جزوه و به صورت کاملاً بدون اشکال در اتاق من به صورت شفاهی حل کند، ۱ نمره می‌گیرد. تمرین، دشوار نیست، ولی نحوه‌ی نوشتن پاسخ جزو اهداف است.

یعنی از

$$A_۱ \cup B_۱ = A_۲ \cup B_۲$$

باید نتیجه شود که $A_۱ = A_۲, B_۱ = B_۲$

فرض کنید $A_۱ \neq \emptyset$. داریم: $f(A_۱, \emptyset) = f(\emptyset, A_۱)$. ولی $(A_۱, \emptyset) \neq (\emptyset, A_۱)$. پس این تابع یک به یک نیست.

تابع مثال قبل پوشاست. فرض کنید $Y \in P(X)$. برای اثبات پوشا بودن تابع، باید مجموعه‌های $A, B \in P(X)$ را طوری پیدا کنیم که $f(A, B) = Y$.

واضح است که $Y \cup \emptyset = f(Y, \emptyset) = Y$

**مثال ۱۹۷.** فرض کنید $X, Y$ دو مجموعه باشند. عمل زیر را در نظر بگیرید:

$$\pi_X : X \times Y \to X$$

$$(x, y) \mapsto x$$

عمل بالا یک تابع است که بدان **تابع تصویر روی مؤلفه‌ی اول** گفته می‌شود. نشان دهید که تابع $\pi_x$ یک به یک نیست، ولی پوشاست.

به طور مشابه تابع

$$\pi_y : (X, Y) \to Y$$

$$(x, y) \mapsto y$$

تعریف می‌شود که آن را تابع تصویر روی مؤلفه‌ی دوم می‌خوانیم.

**تعریف ۱۹۸.**
- فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ یک زیرمجموعه‌ی دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f(A) : \{f(x) | x \in A\}$$

- فرض کنید $B \subseteq Y$؛ تعریف می‌کنیم:

$$f^{-۱}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

**توجه ۱۹۹.** ادعا نکرده‌ایم که $f$ دارای وارون است. مبادا نماد $f^{-۱}$ موجب ابهام شود.

**توجه ۲۰۰.** نشان دهید که $A \subseteq f^{-۱}(f(A))$.

فرض ها :

$$f : X \to Y$$

تابع است و

$$A \subseteq X.$$

برای آنکه ثابت کنیم $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ باید ثابت کنیم که

$$\forall x \in X \quad \big(x \in A \rightarrow x \in f^{-1}(f(A))\big)$$

فرض می کنیم $x_0 \in A$ عنصر دلخواهی باشد باید ثابت کنیم

$$x_0 \in f^{-1}(f(A))$$

و طبق تعریفِ $f^{-1}$ برای این منظور باید ثابت کنیم که

$$f(x_0) \in f(A)$$

و این طبق تعریفِ $f$ واضح است زیرا $x_0 \in A$.

**سوال ۲۰۱.** آیا لزوماً $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$؟

می‌دانیم که

$$x_0 \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x_0) \in f(A)$$

در مثال زیر نشان داده‌ایم که عبارت بیان شده لزوماًبرقرار نیست. فرض کنید

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

و تابع

$$f : X \rightarrow X$$

را چنان در نظر بگیرید که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) = 1$. فرض کنید

$$A = \{1, 2\}.$$

داریم

$$f(A) = \{1\}$$

$$f^{-1}(f(A)) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

**تمرین ۲۰۲.** نشان دهید اگر $f$ یک به یک باشد $f^{-1}(f(A)) = A$

**تمرین ۲۰۳.** فرض کنید $f : X \rightarrow Y$ یک تابع باشد و $B \subseteq Y$ نشان دهید $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

**تمرین ۲۰۴.** نشان دهید اگر $f$ پوشا باشد آنگاه $f(f^{-1}(B)) = B$

**تمرین ۲۰۵.** فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع دلخواه باشد. نشان دهید که

$$A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

$$C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

**تمرین ۲۰۶.** نشان دهید که تابع $f : X \to Y$ یک به یک است اگر و تنها اگر

$$\forall A, B \subseteq X \quad f(A - B) = f(A) - f(B).$$

*اثبات.* فرض کنیم $f : X \to Y$ یک به یک باشد و $A_0, B_0$ دو مجموعه دلخواه از $X$ باشند. باید نشان دهیم

$$f(A_0 - B_0) = f(A_0) - f(B_0)$$

پس باید نشان دهیم که

$$f(A_0 - B_0) \subseteq f(A_0) - f(B_0)$$

و

$$f(A_0) - f(B_0) \subseteq f(A_0 - B_0)$$

اثبات عبارت اول:

فرض می کنیم $y_0 \in f(A_0 - B_0)$ بنابراین $x_0 \in A_0 - B_0$ چنان موجود است که $f(x_0) = y_0$.

ازآنجا که $x_0 \in A_0$ داریم $f(x_0) \in f(A_0)$

از آنجا که $x_0 \notin B_0$ ادعا می کنیم $f(x_0) \notin f(B_0)$

اثبات ادعا : اگر $f(x_0) \in f(B_0)$ آنگاه $x'_0 \in B_0$ موجود است به طوریکه $f(x'_0) = f(x_0)$ از آنجا که تابع $f$ یک به یک است

$$x_0 = x'_0 \in B_0.$$

و این با فرض $x_0 \notin B_0$ تناقض دارد. پس $f(x_0) \notin f(B_0)$. پس $f(x_0) \in f(A_0) - f(B_0)$. اثبات عبارت دوم و اثبات قسمت عکس این مسأله به عهده‌ی شما. □

**تمرین ۲۰۷.** فرض کنید $D \subseteq X \times Y$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. نشان دهید که

$$\pi_X(D) = \{x \in X | \exists y \in Y \quad (x, y) \in D\}.$$

# ۲۰ جلسه‌ی هجدهم، شنبه

## ۱.۲۰ توابع

**توجه ۲۰۸.** به یک تابعِ یک به یک و پوشا، یک **تناظر یک به یک** یا یک تابع **دوسوئي** گفته می‌شود.

**قضیه ۲۰۹.** اگر تابع $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد، آنگاه تابع یکتای $g : Y \to X$ چنان موجود است که

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

و

$$\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = y$$

.

**توجه ۲۱۰.** تابع $g$ در قضیه‌ی بالا را تابع وارون $f$ می‌خوانیم و با $f^{-1}$ نمایش می‌دهیم.

*اثبات.* فرض کنیم $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد. عمل $g : Y \to X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
ـ عنصر دلخواه $y_0 \in Y$ را در نظر بگیرید. از آنجا که $f$ پوشاست، عنصر $x_0 \in X$ چنان موجود است که $.f(x_0) = y_0$

ـ تعریف می کنیم: $g(y_0) = x_0$. توجه کنید که

۱. $Dom(g) = Y$

۲. $g$ یک تابع از $Y$ به $X$ است.

برای اثبات مورد دوم باید نشان دهیم که هرگاه $y_1 = y_2$ آنگاه $.g(y_1) = g(y_2)$

فرض کنید $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. از فرض $y_1 = y_2$ نتیجه می‌شود که $f(x_1) = f(x_2)$ . از آنجا که $f$ یک به یک است داریم $x_1 = x_2$. پس $.g(y_1) = g(y_2)$

**تمرین ۲۱۱.** نشان دهید $g$ یک به یک و پوشاست.

اثبات اینکه

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

فرض کنید $x_0 \in X$ عنصر دلخواهی باشد. اگر $y_0 = f(x_0)$ طبق تعریف داریم

$$g(y_0) = x_0$$

یعنی

$$g \circ f(x_0) = x_0$$

اثبات این که

$$\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = id_Y$$

به عهده‌ی شما.

اثبات یکتایی. فرض کنید $g_1 : Y \to X$ و $g_2 : Y \to X$ به گونه‌ای باشند که $f \circ g_1(y) = Id_Y$ و $g_1 \circ f(x) = Id_X$ و $f \circ g_2(y) = Id_Y$ و $g_2 \circ f(x) = Id_X$. باید ثابت کنیم که $g_1 = g_2$. برای این منظور باید نشان می‌دهیم:

$$\forall y \in Y \quad g_1(y) = g_2(y).$$

فرض کنید $y_0 \in Y$ عنصری دلخواه باشد. باید نشان دهیم که

$$g_1(y_0) = g_2(y_0)$$

از آنجا که $f$ پوشاست، عنصر $x_0 \in X$ چنان موجود است که

$$f(x_0) = y_0$$

داریم:

$$g_1(y_0) = g_1\big(f(x_0)\big)$$

بنا به فرض $g_1 \circ f(x) = Id_X$ داریم:

$$g_1(y_0) = g_1\big(f(x_0)\big) = x_0$$

و بنا به فرض $g_2 \circ f(x) = Id_X$ داریم:

$$g_2(y_0) = g_2\big(f(x_0)\big) = x_0$$

پس $g_1(y_0) = g_2(y_0)$. □

**تمرین ۲۱۲.** نشان دهید که اگر تابعی یک به یک از $X$ به $Y$ موجود باشد آنگاه تابعی پوشا از $Y$ به $X$ موجود است.

**قضیه ۲۱۳.** اگر از $X$ به $Y$ یک تابع پوشا موجود باشد آنگاه یک تابع یک به یک از $Y$ به $X$ موجود است.

*اثبات.* تابع $g : Y \to X$ را به صورت زیر تعریف کنید.
فرض کنید $y_0 \in Y$. قرار دهید:

$$A_0 = f^{-1}(y_0) = \{x \in X | f(x) = y_0\}$$

خانواده‌ی نامتناهی زیر از مجموعه‌ها را در نظر بگیرید:

$$\{f^{-1}(y_0)\}_{y_0\in Y}$$

بنا به اصل انتخاب یک تابع انتخاب از $Y$ به $\{f^{-1}(y_0)\}_{y_0\in Y}$ موجود است به طوری که

$$g(y_0)\in f^{-1}(y_0)$$

پس

$$f:I\to\bigcup A_i\Rightarrow f(i)\in A_i$$

در اثبات قضیه‌ی بالا از اصل انتخاب استفاده کردیم.

**اصل انتخاب**

فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. حاصلضرب این خانواده را با نماد $\Pi_{i\in I}A_i$ نمایش می‌دهیم.

$$\Pi_{i\in I}A_i=\{(x_i)_{i\in I}|x_i\in A_i\}$$

به بیان دیگر هر عنصر از $\Pi_{i\in I}A_i$ تابعی از $I$ به $\cup A_i$ است.

$$\overset{a_1\in A_1}{1}\quad\overset{a_2\in A_2}{2}\quad\overset{a_3\in A_3}{3}\quad\ldots\quad\overset{a_i\in A_i}{i}$$

اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه

$$\Pi_{i\in I}A_i\neq\emptyset$$

به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌ها باشد، تابعی موجود است که از هر یک از آنها یک عنصر بر می‌دارد.

$$\exists f\quad f(i)\in A_i$$

$$f:I\to\bigcup_{i\in I}A_i$$

$\square$

## ۲.۲۰ ادامه‌ی همتوانی

گفتیم که دو مجموعه‌ی $X$ و $Y$ را همتوان می‌خوانیم و می‌نویسیم:

$$X\cong Y$$

هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا از $X$ به $Y$ موجود باشد.
همتوانی یک رابطه‌ی هم ارزی روی کلاس مجموعه‌هاست.

۱. اگر $X$ یک مجموعه باشد آنگاه $X \cong X$

۲. اگر $Y \cong X$ آنگاه $X \cong Y$

۳. اگر $Y \cong X$ و $Z \cong Y$ آنگاه $Z \cong X$

رابطه‌ی همتوانی ($\cong$) کلاس همه‌ی مجموعه‌ها را افراز می‌کند. کلاس مجموعه‌ی $X$ را با $\mathbf{card}(X)$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی $X$ را متناهی می‌نامیم هرگاه $n \in \mathbf{N}$ موجود باشد به طوری که

$$X \cong n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$$

اگر $X \cong n$ می نویسیم

$$\mathbf{card}(X) = n$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | ۱ | ۲ | $\ldots$ | $[X]$ |

شکل بالا افراز تمام مجموعه‌ها را به کلاس کاردینال‌ها نشان می دهد .در این افراز اولین خانه از سمت چپ نشان دهنده‌ی کلاس همه‌ی مجموعه‌های صفر عضوی است. خانه‌ی بعد از آن (حرکت به سمت راست) نشان دهنده‌ی کلاس همه‌ی مجموعه‌های یک عضوی است و بقیه نیز به همین ترتیب.

$$۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, \underbrace{\mathbf{card}(\mathbf{N})}_{=\aleph_۰}, \ldots$$

می‌دانیم که

$$n \ncong \mathbf{N}$$

**تعریف ۲۱۴.** می‌نویسیم

$$\mathbf{card}(\mathbf{N}) = \aleph$$

اگر $X \cong Y$ می‌گوییم $X, Y$ هم‌اندازه هستند.

در ادامه‌ی درس با این اعداد جدید بیشتر آشنا خواهیم شد و جمع و ترتیب آنها را نیز تعریف خواهیم کرد. مجموعه‌ی $X$ را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه متناهی نباشد.

**قضیه ۲۱۵.** (درصورت پذیرش اصل انتخاب) مجموعه‌ی $X$ نامتناهی است هرگاه $Y \subsetneq X$ موجود باشد به طوری که $X \cong Y$.

# ۲۱ جلسه‌ی نوزدهم، دوشنبه

## ۱.۲۱ متناهی و نامتناهی، شمارا و ناشمارا

در جلسه‌ی گذشته مفهوم همتوانی را تعریف کردیم. گفتیم که دو مجموعه‌ی $X$ و $Y$ را همتوان می‌خوانیم، و این را به صورت $X \cong Y$ نشان دادیم، هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا از $X$ به $Y$ موجود باشد. واژه‌ی معادل همتوانی، هم‌اندازه بودن، یا هم‌کاردینال بودن است. پس در صورتی که دو مجموعه‌ی $X, Y$ همتوان باشند از هر سه نماد زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$$

یا

$$|X| = |Y|$$

یا

$$X \cong Y.$$

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد زوج همتوان هستند.

$$E \cong \mathbf{N}$$

$$\begin{array}{cccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \dots \end{array}$$

گفتیم که یک مجموعه‌ی دلخواهِ $X$ را **متناهی** می‌نامیم هرگاه همتوان با یک مجموعه‌ی $n = \{۰, ۱, \dots, n - ۱\}$ باشد؛ یعنی هرگاه $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که

$$X \cong \{۰, ۱, \dots, n\}.$$

همچنین یک مجموعه‌ی دلخواهِ $X$ را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه با هیچ $n \in \mathbb{N}$ همتوان نباشد؛ به بیان دیگر هرگاه متناهی نباشد.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با هیچ عدد طبیعی‌ای همتوان نیست (شما ثابت کنید) و از این رو، مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی، نامتناهی است. در بالا به نکته‌ی جالب دیگری اشاره کردیم: مجموعه‌ی اعداد طبیعی با یک زیرمجموعه‌ی سره از خودش (مجموعه‌ی اعداد زوج) همتوان است. در زیر با استفاده از این نکته، می‌خواهیم یک مشخصه‌ی کلی برای مجموعه‌های نامتناهی بیان کنیم.

گفتیم که یکی از اصول کلی علمی اقلیدس این بوده است که همواره کُل از جزء خودش بزرگتر است. این گفته، برای مجموعه‌های متناهی بوضوح درست است. انگار، دنیای اقلیدس دنیائی متناهی بوده است که در آن اصل یادشده مورد پذیرش بوده است؛ زیرا در دنیای نامتناهی‌ها (مانند مثال اعداد طبیعی) اصل یادشده به نظر درست نمی‌آید.

در قضیه‌ی زیر نشان داده‌ایم که به طور کلی، یک مجموعه‌ی داده‌شده‌ی $X$ نامتناهی است اگروتنهااگر با بخشی از خودش همتوان باشد.

**قضیه ۲۱۶.** (در صورت پذیرش اصل انتخاب) مجموعه‌ی $X$ نامتناهی است اگر و تنها اگر $Y \subsetneqq X$ موجود باشد، به طوری که $Y \cong X$.

*اثبات.* فرض کنید مجموعه‌ی $X$ نامتناهی باشد. عنصر $x_۰ \in X$ را انتخاب کنید. مجموعه‌ی $X - \{x_۰\}$ ناتهی است. پس عنصر $x_۱ \in X - \{x_۰\}$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $x_۰, \dots, x_n$ انتخاب شده باشند. دوباره $X - \{x_۰, \dots, a_n\}$ ناتهی است پس می‌توان $x_{n+۱} \in X - \{x_۰, \dots, x_n\}$ را انتخاب کرد. بدین‌سان یک دنباله‌ی $A = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ از اعضای $X$ انتخاب کرده‌ایم. واضح است که $X - \{x_۰\}$ زیرمجموعه‌ی سره‌ای از $X$ است. اگر ادعای زیر را ثابت کنیم، یک طرف حکم ثابت شده است.

ادعا: $X \cong X - \{x_۰\}$

برای اثبات ادعا کافی است یک تابع یک به یک و پوشا مانند

$$f : X \to X - \{x_۰\}$$

پیدا کنیم. اگر $x \in X$ آنگاه یا $x \in A$ یا $x \notin A$. اگر $x \in A$ آنگاه یک $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $x = x_n$. پس نگاشت $f$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x_{n+۱} & x = x_n \in A \\ x & x \notin A \end{cases}$$

ثابت کنید که تابع $f$ یک به یک و پوشاست.

برای اثبات سمت دیگر قضیه باید نشان دهیم که هیچ مجموعه‌ی متناهی‌ای با جزئی از خودش همتوان نیست. این را نیز به راحتی می‌توان با استقراء ثابت کرد (بررسی کنید). $\square$

**نتیجه ۲۱۷.** مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ نامتناهی است. (چون با بخشی از خودش همتوان است.)

$$\begin{array}{lllllll} \mathbf{N}: & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \dots \\ \mathrm{E}: & ۰ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \dots \end{array}$$

تا کنون فهمیدیم که مجموعه‌ها، به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند؛ مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌های نامتناهی. یک سوال طبیعی این است که آیا مجموعه‌های نامتناهی، همه هم‌اندازه‌ی هم هستند؟ در بالا دیدیم که $\mathbf{N}$ و $\mathbf{E}$ هم‌اندازه‌ی هم هستند؛ پس پرسیدن این سوال طبیعی است.

## ۲۲ دسته‌بندی نامتناهی‌ها

**تعریف ۲۱۸.** مجموعه‌ی $X$ را **شمارای نامتناهی** می‌خوانیم هرگاه $X \cong \mathbf{N}$. در اینصورت می‌نویسیم:

$$\mathbf{card}(X) = \aleph_۰.$$

عبارت سمت راست بالا، الف‌صفر نام دارد. الف، حرف اول الفبای عبری است.

**تعریف ۲۱۹.** مجموعه‌ی $X$ را **ناشمارای نامتناهی** می‌خوانیم هرگاه نامتناهی باشد ولی شمارا نباشد.

به تعریف ۲۲۶ دقت کنید. بنا به این تعریف، یک مجموعه‌ی داده شده، شمارای نامتناهی است هرگاه تابعی یک به یک و پوشا از $\mathbf{N}$ بدان مجموعه موجود باشد. به بیان دیگر، یک مجموعه‌ی $X$ شمارای نامتناهی است هرگاه اعضای آن را بتوان توسط یک دنباله به صورت زیر نوشت:

$$X = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

خودِ مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ پس بدین دلیل شماراست که می‌توان نوشت:

$$\mathbf{N} = \{n\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

همچنین مجموعه‌ی اعداد زوج شماراست زیرا

$$\mathbf{E} = \{۲n\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

حال طبیعی است از خودمان بپرسیم که آیا مجموعه‌ای پیدا می‌شود که نامتناهی باشد ولی اعضای آن را نتوان به صورت یک دنباله شمرد؟ تعریف ۲۲۷ انگار جواب این سوال را داده است! به مثال زیر دقت کنید:

**مثال ۲۲۰.** نشان دهید که بازه‌ی $(۰, ۱)$، به عنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی، ناشمارای نامتناهی است.

*اثبات.* اثبات این که این بازه، ناشماراست با شما؛ می‌توانید برای اثبات از قضیه‌ی ۲۳۱ استفاده کنید.

هر عدد در بازه‌ی $(۰, ۱)$ را می‌توان با یک بسط اعشاریِ شمارای نامتناهی نمایش داد. مثلاً

$$۰/۱۲۳۷۹۱۲\ldots$$

$$۰/۱۱۹۹۹۹۹\ldots$$

توجه کنید که عددی مانند

$$۰/۱۲$$

را توسط بسطِ

$$۰,۱۹۹۹۹۹۹۹\ldots$$

نشان می‌دهیم. بنابراین هر عدد حقیقی را می‌توان به طور یکتا با بسطی شمارا نشان داد (فهم دقیق این گفته، نیازمند گذراندن یک دوره‌ی آنالیز مقدماتی است).

حال یه برهان خلف فرض کنید بازه‌ی $(۰, ۱)$ شمارا باشد. پس میان $\mathbf{N}$ و بازه‌ی $(۰, ۱)$ تناظر یک به یکی مانند زیر برقرار است.

$$\begin{array}{lllllll}
۰ & \to & ۰, a_{۰۰} & a_{۰۱} & a_{۰۲} & a_{۰۳} & \dots \\
۱ & \to & ۰, a_{۱۰} & a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \dots \\
۲ & \to & ۰, a_{۲۰} & a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \dots \\
\vdots & & & & & & \\
\mathrm{n} & \to & ۰, a_{n۰} & a_{n۱} & a_{n۲} & a_{n۳} & \dots
\end{array}$$

از آنجا که تناظر بالا یک به یک است، پس تمام اعداد حقیقی در بالا لیست شده‌اند.

عدد زیر را در نظر بگیرید.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ... | عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۲۲}$ | عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۱۱}$ | عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۰۰}$ | /صفر |

عدد بالا در بازه‌ی $(۰, ۱)$ است اما در لیست بالا گنجانده نشده است. پس این فرض که همه‌ی اعداد موجود در بازه‌ی $(۰, ۱)$ در بالا لیست شده‌اند، درست نیست. بنابراین بازه‌ی $(۰, ۱)$ ناشماراست. $\square$

پس دیدیم که بازه‌ی $(۰, ۱)$ شمارای نامتناهی است. در واقع، این بازه از تمام اعداد طبیعی بیشتر عنصر دارد و اعضایش آنقدر زیاد است که نمی‌توان آنها را توسط یک دنباله‌ی شمارا نمایش داد.

**لم ۲۲۱.** اگر $a \neq b$ آنگاه

$$(a, b) \cong (۰, ۱).$$

*اثبات.* کافی است یک تناظر یک به یک بین بازه‌ی $(a, b)$ و بازه‌ی $(۰, ۱)$ پیدا کنیم. برای این کار، کافی است معادله‌ی خطی را بیابیم که از نقاط $(a, ۰)$ و $(b, ۱)$ می‌گذرد. $\square$

پس همه‌ی بازه‌های باز، هم‌اندازه‌اند و همه‌ی آنها نامتناهی و ناشمارا هستند. در زیر نشان داده‌ایم که کُلِّ $\mathbb{R}$ نیز هم‌اندازه‌ی بازه‌ی $(۰, ۱)$ است. پس $\mathbb{R}$ ناشمارای نامتناهی است.

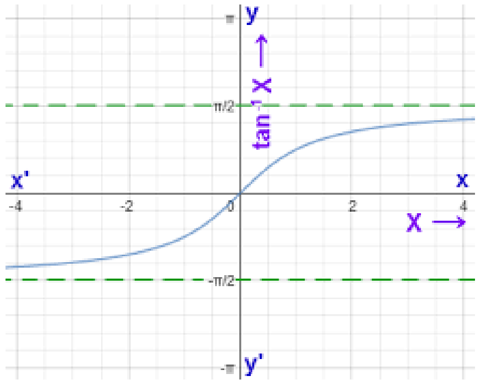
**مثال ۲۲۲.** $\mathbf{R} \cong (۰, ۱)$

*پاسخ.* بنا به لم قبل کافی است یک بازه پیدا کنیم که با $\mathbb{R}$ همتوان باشد. تابعِ

$$f(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$$

یک تابع یک به یک و پوشاست. پس

$$\mathbb{R} \cong (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \cong (۰, ۱)$$




□

در جلسات آینده اندازه‌ی مجموعه‌های مختلفی را بررسی خواهیم کرد.

| |
|---|
| خلاصه‌ی درس: مجموعه‌ها یا متناهیند یا نامتناهی. مجموعه‌های نامتناهی یا شمارا هستند یا ناشمارا. |

درس را با قضیه‌ی زیر به پایان می‌بریم:

**قضیه ۲۲۳.** مجموعه‌ی دلخواهِ $X$ نامتناهی است اگروتنها اگر شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی باشد.

*اثبات.* اثبات قضیه‌ی ۲۲۴ را (به دقت) بخوانید. اگر $X$ یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $A$ که در اثبات قضیه‌ی یادشده ساخته شد، شمارای نامتناهی است و $A \subseteq X$. □

# ۲۳ جلسه‌ی نوزدهم، دوشنبه

## ۱.۲۳ متناهی و نامتناهی، شمارا و ناشمارا

در جلسه‌ی گذشته مفهوم همتوانی را تعریف کردیم. گفتیم که دو مجموعه‌ی $X$ و $Y$ را همتوان می‌خوانیم، و این را به صورت $X \cong Y$ نشان دادیم، هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا از $X$ به $Y$ موجود باشد. واژه‌ی معادل همتوانی، هم‌اندازه بودن، یا هم‌کاردینال بودن است. پس در صورتی که دو مجموعه‌ی $X, Y$ همتوان باشند از هر سه نماد زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$$

یا

$$|X| = |Y|$$

یا

$$X \cong Y.$$

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد زوج همتوان هستند.

$$E \cong \mathbf{N}$$

$$\begin{array}{cccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \ldots \end{array}$$

گفتیم که یک مجموعه‌ی دلخواهِ $X$ را **متناهی** می‌نامیم هرگاه همتوان با یک مجموعه‌ی $n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$ باشد؛ یعنی هرگاه $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که

$$X \cong \{۰, ۱, \ldots, n\}.$$

همچنین یک مجموعه‌ی دلخواهِ $X$ را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه با هیچ $n \in \mathbb{N}$ همتوان نباشد؛ به بیان دیگر هرگاه متناهی نباشد.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با هیچ عدد طبیعی‌ای همتوان نیست (شما ثابت کنید) و از این رو، مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی، نامتناهی است. در بالا به نکته‌ی جالب دیگری اشاره کردیم: مجموعه‌ی اعداد طبیعی با یک زیرمجموعه‌ی سره از خودش (مجموعه‌ی اعداد زوج) همتوان است. در زیر با استفاده از این نکته، می‌خواهیم یک مشخصه‌ی کلی برای مجموعه‌های نامتناهی بیان کنیم.

گفتیم که یکی از اصول کلی علمی اقلیدس این بوده است که همواره کُل از جزء خودش بزرگتر است. این گفته، برای مجموعه‌های متناهی بوضوح درست است. انگار، دنیای اقلیدس دنیائی متناهی بوده است که در آن اصل یادشده مورد پذیرش بوده است؛ زیرا در دنیای نامتناهی‌ها (مانند مثال اعداد طبیعی) اصل یادشده به نظر درست نمی‌آید.

در قضیه‌ی زیر نشان داده‌ایم که به طور کلی، یک مجموعه‌ی داده‌شده‌ی $X$ نامتناهی است اگروتنهااگر با بخشی از خودش همتوان باشد.

**قضیه ۲۲۴.** (در صورت پذیرش اصل انتخاب) مجموعه‌ی $X$ نامتناهی است اگر و تنها اگر $Y \subsetneqq X$ موجود باشد، به طوری که $Y \cong X$.

*اثبات.* فرض کنید مجموعه‌ی $X$ نامتناهی باشد. عنصر $x_۰ \in X$ را انتخاب کنید. مجموعه‌ی $X - \{x_۰\}$ ناتهی است. پس عنصر $x_۱ \in X - \{x_۰\}$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $x_۰, \dots, x_n$ انتخاب شده باشند. دوباره $X - \{x_۰, \dots, a_n\}$ ناتهی است پس می‌توان $x_{n+۱} \in X - \{x_۰, \dots, x_n\}$ را انتخاب کرد. بدین‌سان یک دنباله‌ی $A = \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ از اعضای $X$ انتخاب کرده‌ایم. واضح است که $X - \{x_۰\}$ زیرمجموعه‌ی سره‌ای از $X$ است. اگر ادعای زیر را ثابت کنیم، یک طرف حکم ثابت شده است.
ادعا: $X \cong X - \{x_۰\}$
برای اثبات ادعا کافی است یک تابع یک به یک و پوشا مانند

$$f : X \to X - \{x_۰\}$$

پیدا کنیم. اگر $x \in X$ آنگاه یا $x \in A$ یا $x \notin A$. اگر $x \in A$ آنگاه یک $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $x = x_n$.
پس نگاشت $f$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x_{n+۱} & x = x_n \in A \\ x & x \notin A \end{cases}$$

ثابت کنید که تابع $f$ یک به یک و پوشاست.

برای اثبات سمت دیگر قضیه باید نشان دهیم که هیچ مجموعه‌ی متناهی‌ای با جزئی از خودش همتوان نیست. این را نیز به راحتی می‌توان با استقراء ثابت کرد (بررسی کنید). $\square$

**نتیجه ۲۲۵.** مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ نامتناهی است. (چون با بخشی از خودش همتوان است.)

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{N}: & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \; \dots \\ \mathrm{E}: & ۰ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ \; \dots \end{array}$$

تا کنون فهمیدیم که مجموعه‌ها، به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند؛ مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌های نامتناهی. یک سوال طبیعی این است که آیا مجموعه‌های نامتناهی، همه هم‌اندازه‌ی هم هستند؟ در بالا دیدیم که $\mathbf{N}$ و $\mathbf{E}$ هم‌اندازه‌ی هم هستند؛ پس پرسیدن این سوال طبیعی است.

## ۲۴ دسته‌بندی نامتناهی‌ها

**تعریف ۲۲۶.** مجموعه‌ی $X$ را **شمارای نامتناهی** می‌خوانیم هرگاه $X \cong \mathbf{N}$. در اینصورت می‌نویسیم:

$$\mathbf{card}(X) = \aleph_۰.$$

عبارت سمت راست بالا، الف‌صفر نام دارد. الف، حرف اول الفبای عبری است.

**تعریف ۲۲۷.** مجموعه‌ی $X$ را **ناشمارای نامتناهی** می‌خوانیم هرگاه نامتناهی باشد ولی شمارا نباشد.

به تعریف ۲۲۶ دقت کنید. بنا به این تعریف، یک مجموعه‌ی داده شده، شمارای نامتناهی است هرگاه تابعی یک به یک و پوشا از $\mathbf{N}$ بدان مجموعه موجود باشد. به بیان دیگر، یک مجموعه‌ی $X$ شمارای نامتناهی است هرگاه اعضای آن را بتوان توسط یک دنباله به صورت زیر نوشت:

$$X = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

خودِ مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ پس بدین دلیل شماراست که می‌توان نوشت:

$$\mathbf{N} = \{n\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

همچنین مجموعه‌ی اعداد زوج شماراست زیرا

$$\mathbf{E} = \{۲n\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

حال طبیعی است از خودمان بپرسیم که آیا مجموعه‌ای پیدا می‌شود که نامتناهی باشد ولی اعضای آن را نتوان به صورت یک دنباله شمرد؟ تعریف ۲۲۷ انگار جواب این سوال را داده است! به مثال زیر دقت کنید:

**مثال ۲۲۸.** نشان دهید که بازه‌ی (۱ ,۰)، به عنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی، ناشمارای نامتناهی است.

*اثبات.* اثبات این که این بازه، ناشماراست با شما؛ می‌توانید برای اثبات از قضیه‌ی ۲۳۱ استفاده کنید.
هر عدد در بازه‌ی (۱ ,۰) را می‌توان با یک بسط اعشاریِ شمارای نامتناهی نمایش داد. مثلاً

$$۰/۱۲۳۷۹۱۲\ldots$$

$$۰/۱۱۹۹۹۹۹\ldots$$

توجه کنید که عددی مانند

$$۰/۱۲$$

را توسط بسطِ

$$۰,۱۹۹۹۹۹۹۹\ldots$$

نشان می‌دهیم. بنابراین هر عدد حقیقی را می‌توان به طور یکتا با بسطی شمارا نشان داد (فهم دقیق این گفته، نیازمند گذراندن یک دوره‌ی آنالیز مقدماتی است).

حال به برهان خلف فرض کنید بازه‌ی $(۰, ۱)$ شمارا باشد. پس میان $\mathbf{N}$ و بازه‌ی $(۰, ۱)$ تناظر یک به یکی مانند زیر برقرار است.

$$\begin{array}{lllllll}
۰ & \rightarrow & ۰, a_{۰۰} & a_{۰۱} & a_{۰۲} & a_{۰۳} & \dots \\
۱ & \rightarrow & ۰, a_{۱۰} & a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \dots \\
۲ & \rightarrow & ۰, a_{۲۰} & a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \dots \\
\vdots & & & & & & \\
\mathrm{n} & \rightarrow & ۰, a_{n۰} & a_{n۱} & a_{n۲} & a_{n۳} & \dots
\end{array}$$

از آنجا که تناظر بالا یک به یک است، پس تمام اعداد حقیقی در بالا لیست شده‌اند.

عدد زیر را در نظر بگیرید.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| /صفر | عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۰۰}$ | عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۱۱}$ | عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۲۲}$ | $\dots$ |

عدد بالا در بازه‌ی $(۰, ۱)$ است اما در لیست بالا گنجانده نشده است. پس این فرض که همه‌ی اعداد موجود در بازه‌ی $(۰, ۱)$ در بالا لیست شده‌اند، درست نیست. بنابراین بازه‌ی $(۰, ۱)$ ناشماراست. $\square$

پس دیدیم که بازه‌ی $(۰, ۱)$ شمارای نامتناهی است. در واقع، این بازه از تمام اعداد طبیعی بیشتر عنصر دارد و اعضایش آنقدر زیاد است که نمی‌توان آنها را توسط یک دنباله‌ی شمارا نمایش داد.

**لم ۲۲۹.** اگر $a \neq b$ آنگاه

$$(a, b) \cong (۰, ۱).$$

*اثبات.* کافی است یک تناظر یک به یک بین بازه‌ی $(a, b)$ و بازه‌ی $(۰, ۱)$ پیدا کنیم. برای این کار، کافی است معادله‌ی خطی را بیابیم که از نقاط $(a, ۰)$ و $(b, ۱)$ می‌گذرد. $\square$

پس همه‌ی بازه‌های باز، هم‌اندازه‌اند و همه‌ی آنها نامتناهی و ناشمارا هستند. در زیر نشان داده‌ایم که کُلِّ $\mathbb{R}$ نیز هم‌اندازه‌ی بازه‌ی $(۰, ۱)$ است. پس $\mathbb{R}$ ناشمارای نامتناهی است.

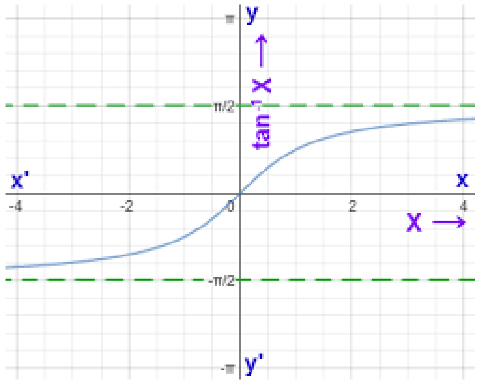
**مثال ۲۳۰.** $\mathbf{R} \cong (۰, ۱)$

*پاسخ.* بنا به لم قبل کافی است یک بازه پیدا کنیم که با $\mathbb{R}$ همتوان باشد. تابعِ

$$f(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$$

یک تابع یک به یک و پوشاست. پس

$$\mathbb{R} \cong (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \cong (۰, ۱)$$




□

در جلسات آینده اندازه‌ی مجموعه‌های مختلفی را بررسی خواهیم کرد.

| |
|---|
| خلاصه‌ی درس: مجموعه‌ها یا متناهیند یا نامتناهی. مجموعه‌های نامتناهی یا شمارا هستند یا ناشمارا. |

درس را با قضیه‌ی زیر به پایان می‌بریم:

**قضیه ۲۳۱.** مجموعه‌ی دلخواهِ $X$ نامتناهی است اگروتنها اگر شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی باشد.

*اثبات.* اثبات قضیه‌ی ۲۲۴ را (به دقت) بخوانید. اگر $X$ یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $A$ که در اثبات قضیه‌ی یادشده ساخته شد، شمارای نامتناهی است و $A \subseteq X$. □

# ۲۵ جلسه‌ی بیستم، شنبه

## ۱.۲۵ بررسی بیشتر مجموعه‌های شمارا

در جلسات قبل، دسته‌بندی زیر را برای مجموعه‌ها، بر حسب سایز، معرفی کردیم:

$$\text{مجموعه‌ها}\begin{cases}\text{متناهی}\\ \text{نامتناهی}\begin{cases}\text{شمارا} & \cong \mathbb{N}\\ \text{ناشمارا} & \ncong \mathbb{N}\end{cases}\end{cases}$$

گفتیم که مجموعه‌ی $X$ را شمارا می‌گویند هرگاه بتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$X = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

**مثال ۲۳۲.** در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که $\mathbf{N} \ncong \mathbf{R}$؛ زیرا $(0,1) \cong (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \cong \mathbf{R}$. و با برهان قطری کانتور ثابت کردیم که $(0,1)$ ناشماراست.

در ادامه‌ی جلسه، مثالهای بیشتری از مجموعه‌های شمارا خواهیم دید. **توجه کنید که در این جزوه، منظورمان از شمارا، شمارای نامتناهی است.**

**مثال ۲۳۳.** فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه‌ی شمارا باشند و $A\cap B=\emptyset$. آنگاه $A\cup B$ نیز شماراست.

*اثبات.* فرض کنید $\{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ شمارشی برای $A$ باشد و $\{y_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ شمارشی برای $B$ باشد. داریم:

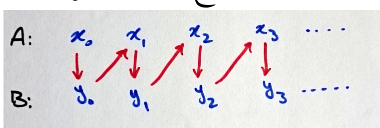
$$A\cup B=\{x_0,y_0,x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,\dots\}$$

تابع $f:\mathbf{N}\to A\cup B$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(2i)=x_i$$

$$f(2i+1)=y_i$$

دقت کنید که تابع بالا، مجموعه‌ی $A\cup B$ را به صورت زیر می‌شمارد:




بررسی کنید که تابع $f$ یک به یک و پوشاست. □

**توجه ۲۳۴.** در مثال بالا مجموعه‌ی $A$ را با اعداد زوج و مجموعه‌ی $B$ را با اعداد فرد متناظر کردیم. از این رو $A\cup B$ با مجموعه‌ی اعداد طبیعی متناظر شد و از اینجا فهمیدیم که شماراست.

**مثال ۲۳۵.** مجموعه‌ی اعداد صحیح، $\mathbf{Z}$، شماراست.

*اثبات.* داریم

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \underbrace{\mathbf{Z}^-}_{\text{اعداد صحیح منفی}}$$

و می‌دانیم که

$$\mathbf{N} \cap \mathbf{Z}^- = \emptyset$$

بنا به مثال قبل، کافی است نشان دهیم که $\mathbf{Z}^-$ شماراست.

$$\mathbf{Z}^- = \{\overset{0}{-1}, \overset{1}{-2}, \overset{2}{-3}, \overset{3}{-4}, \ldots\}$$

تابع $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}^-$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$x \overset{f}{\mapsto} -x - 1$$

تابع بالا یک به یک و پوشاست. پس $\mathbf{Z}^-$ شماراست. پس $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^- \cup \mathbf{N}$ شماراست. $\square$

در مثال بعد می‌بینیم که اگر یک عنصر به مجموعه‌ای شمارا اضافه کنیم، مجموعه‌ی حاصل همچنان شماراست. چند مثال بعدی در واقع بیان ریاضی همان پارادوکس هتل هیلبرت است که در جلسات گذشته درباره‌اش صحبت کردیم.

**مثال ۲۳۶.** فرض کنید $A$ یک مجموعه‌ی شمارا باشد و $x \notin A$. آنگاه $A \cup \{x\}$ هم شماراست.

*اثبات.* از آنجا که $A$ شماراست داریم

$$A \cong \mathbf{N}$$

یعنی

$$A = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$$

می‌نویسیم:

$$A \cup \{x\} = \{x, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$$

تابع $f : \mathbf{N} \to A \cup \{x\}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(0) = x$$

$$f(i) = x_{i+1}$$

بررسی کنید که تابع بالا یک به یک و پوشاست. $\square$

**مثال ۲۳۷.** اگر $A$ شمارا باشد و $x \in A$ آنگاه $A - \{x\}$ هم شماراست.

*اثبات.* فرض کنید

$$A = \{x_۰, x_۱, x_۲, \dots\}$$

و فرض کنید عنصر برداشته شده $x = x_n$ باشد.

$$A - \{x\} = \{x_۰, x_۱, \dots, x_{n-۱}, x_{n+۱}, \dots\}$$

تابع $f : \mathbf{N} \to A - \{x_n\}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید.

$$۰ \to x_۰$$

$$\vdots$$

$$x_{n-۱} \to x_{n-۱}$$

$$i \to x_{i+۱} \quad i \geq n$$

تابع بالا یک به یک و پوشاست. $\square$

**مثال ۲۳۸.** فرض کنید $A$ شماراست و $x_۰, \dots, x_n \notin A$ نشان دهید که $A \cup \{x_۰, \dots, x_n\}$ شماراست.

*اثبات.* به عهده‌ی شما (از استقراء کمک بگیرید). $\square$

**مثال ۲۳۹.** اگر $A$ شمارا باشد و $x_۱, \dots, x_n \in A$ آنگاه $A - \{x_۱, \dots, x_n\}$ هم شماراست.

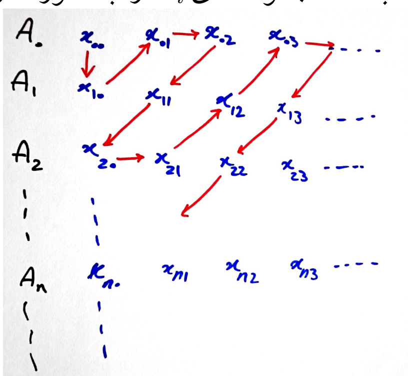
اثبات مثال بالا نیز با استفاده از استقراء آسان است.

**مثال ۲۴۰.** اگر $A_۱, \dots, A_n$ مجموعه‌هایی شمارا باشند به طوری که $A_i \cap A_j = \emptyset$ (برای هر $۱ \leqslant i, j \leqslant n$ ) آنگاه $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i$ شماراست.

مثال بالا را نیز با استقراء ثابت کنید. در مثال زیر گفته‌ایم که اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارا، مجموعه‌ای شماراست.

**مثال ۲۴۱.** فرض کنید $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌ی شماراست و برای هر $i \neq j \in \mathbb{N}$ داریم $A_i \cap A_j = \emptyset$. آنگاه $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i$ شماراست.

*اثبات.* مجموعه‌های $A_i$ را به صورت زیر بشمارید:



با استفاده از مسیری که در شکل بالا مشخص شده است، $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ را بشمارید. (برای کسی که ضابطه‌ی نگاشت مورد نظر از $\mathbb{N}$ به $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ را پیدا کند نمره‌ای در نظر گرفته‌ام!) □

**سوال ۲۴۲.** آیا حکم مثال قبل را می‌شد با استقراء ثابت کرد؟

پاسخ سؤال بالا منفی است. دقت کنید که با استقراء می‌توان درباره‌ی اعداد طبیعی حکم ثابت کرد **نه درباره‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی.** اگر $p(۰)$ درست باشد و از درستی $p(n)$ بتوان درستی $p(n+۱)$ را نتیجه گرفت، آنگاه نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد طبیعیِ $n$ حکم $p(n)$ درست است. مثلاً با استقرا می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعیِ $n$ اجتماعِ $n$ مجموعه‌ی شمارا، شماراست. اما اثبات این که اجتماع تعدادی شمارا مجموعه‌ی شمارا شماراست، با استقراء روی اعداد طبیعی ممکن نیست.

گفته‌ی بالا از لحاظ فلسفی نیز دارای بار معنائی است. وقتی در درون یک جهان از استقراء استفاده می‌کنیم، حکمی درباره‌ی اعضای آن جهان نتیجه می‌گیریم نه حکمی درباره‌ی کُلِّ آن جهان یا بیرون آن! مثال صف را در نظر بگیرید. فرض کنید صفی شمارا از افراد پیش روی شماست. نفر اول چشمان آبی دارد و از این که نفر $n$ ام چشمان آبی دارد می‌توان نتیجه گرفت که نفر $n+۱$ ام نیز چشمان آبی دارد. ازاین تنها نتیجه می‌شود که هر کس که در این صف قرار دارد دارای چشمان آبی است؛ اما نمی‌توان نتیجه گرفت که خودِ صف هم دارای چشم است و چشمان آن آبی است!

بگذریم! پس ثابت کردیم که اگر $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های شمارا باشد آنگاه $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i$ شماراست.

**مثال ۲۴۳.** مجموعه‌ی $\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\{(x,y)|x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$ شماراست.

*اثبات.* داریم

$$\{۰\}\times\mathbf{N}=\{(۰,۰)(۰,۱)(۰,۲)\ldots\}$$

$$\{۱\}\times\mathbf{N}=\{(۱,۰)(۱,۱)(۱,۲)\ldots\}$$

$$\vdots$$

می‌دانیم که

$$\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\{n\}\times\mathbf{N}$$

شماراست. گفتیم که اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارائی که دو به دو متمایزند، شماراست. □

**مثال ۲۴۴.** اگر $X$ و $Y$ شمارا باشند آنگاه $X\times Y$ هم شماراست. (همان اثبات بالا).

**مثال ۲۴۵.** هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbf{N}$ شماراست.

*اثبات.* فرض کنید $A\subseteq\mathbf{N}$ نامتناهی باشد. هر زیر مجموعه از $\mathbf{N}$ دارای یک کوچکترین عضو است. فرض کنید $x_۰$ کوچکترین عضو $A$ باشد. حال فرض کنید $x_۰,\ldots,x_n$ پیدا شده باشند؛ $x_{n+۱}$ را کوچکترین عضو $A-\{x_۰,\ldots,x_n\}$ بگیرید. تابع زیر را از $\mathbf{N}$ به $A$ در نظر بگیرید.

$$f(i)=x_i$$

اثبات پوشا بودن $f$: فرض کنید $t$ عنصر دلخواهی از $A$ باشد. پس $t = n$ یک عدد طبیعی است. تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از $n$ برابر با $n$ است. پس حداکثر پس از طی $n$ مرحله در بالا به $t$ می‌رسیم؛ به بیان دیگر از میان $f(۰), \ldots, f(n-۱)$ حتما یکی برابر با $t$ خواهد بود. $\square$

**مثال ۲۴۶.** مجموعه‌ی $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ شماراست. (منظورمان از $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ اعداد گویای بزرگتر یا مساوی صفر است.)

*اثبات.*

$$\mathbf{Q}^{\geqslant ۰} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbf{N}, (a,b) = ۱\}$$

$$\begin{array}{cccccccl}
\cdots & & & & & ۰ & & \\
\cdots & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۱} & & \\
\cdots & \frac{۲}{۵} & & \frac{۲}{۳} & & \frac{۲}{۱} & \leftarrow & \text{مخرج اعداد فرد هستند پس شماراست.} \\
\cdots & \frac{۳}{۵} & \frac{۳}{۴} & & \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۱} & \leftarrow & \text{شمارا} \\
\cdots & \frac{۴}{۵} & & \frac{۴}{۳} & & \frac{۴}{۱} & \leftarrow & \text{شمارا}
\end{array}$$

همان طور که در بالا به طور نادقیق گفته‌ایم، $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست. پس $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ شماراست.
آیا می‌توانید اثبات بالا را دقیق کنید؟ $\square$

در جلسات آینده اثبات دیگری نیز برای مثال بالا ارائه خواهیم کرد.

**مثال ۲۴۷.** مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.

*اثبات.* داریم

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\leq} \cup \mathbb{Q}^{<۰}$$

دو مجموعه‌ی سمت راست شمارایند و اشتراکشان تهی است. $\square$

**مثال ۲۴۸.** مجموعه‌ی $\mathbf{Q}^c$ (اعداد گنگ) ناشماراست.

*اثبات.* اگر $\mathbf{Q}^c$ شمارا باشد آنگاه $\mathbb{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^c$ شماراست که این تناقض است. $\lightning$ $\square$