مبانی ریاضیات

محسن خانی

۱۴ خرداد ۱۳۹۷

چکیده

جزوه‌ی پیش‌رو حاصل تدریس درس مبانی ریاضیات در نیمسال دوم تحصیلی ۹۷-۹۶ در دانشگاه صنعتی اصفهان است. در این درس کوشیده‌ام تا مبانی ریاضی را، نه به عنوان مبانی مدرک کارشناسیِ ریاضی، بلکه به عنوان یک شاخه از علمِ ریاضی با پیچیدگی‌ها و ظرافتهای آن تدریس کنم. از این رو از تکرار کسالت‌آورِ مفاهیم دبیرستانی خودداری کرده‌ام و وقت درس را بیشتر صرف آشنا کردن دانشجویان با پایه‌های اصل موضوعه‌ای علم ریاضی، منطق و بی‌نهایتها کرده‌ام. جزوه‌ی هر جلسه، پس از تدریس آن به سرعت نوشته شده است و از این رو فرصت بازخوانی دقیق کل جزوه به من دست نداده است. امیدوارم در طی سالهای آینده، اشتباهات جزوه برطرف شوند، جابجائی‌های در آن صورت گیرد و با اعمال ویرایشهائی، جزوه خوش‌خوانتر شود.

این جزوه را به خانم «درسا پیری» تقدیم می‌کنم که زحمت تایپ آن را نیز ایشان کشیده‌اند.

فهرست مطالب

پیشگفتار

پیش از آنکه بخواهیم درباره‌ی مبانی ریاضی، به عنوان یک علم، سخن بگوئیم باید با مفهوم علم (دانش، ساینس) و تفاوت آن با مفهوم دانائی (آگاهی، نالج) آشنا شویم. دانائی، کیفیتی است که در انسان، با استفاده از کسب تجارب یا مطالعه حاصل می‌شود. یک استاد دانشگاه، می‌تواند به سبب مطالعات زیادی که داشته است دانا باشد؛ در عین حال یک کشاورز که در مزرعه کار می‌کند نیز می‌تواند به سبب تجاربی که در زندگی کسب کرده است فرد دانائی باشد. عموماً کسی از دانائی‌های کس دیگر با خبر نیست، مگر این که این دانائی از رفتار یا «سخنان» او قابل برداشت باشد. گاهی دانائی را نمی‌توان به کسان دیگر منتقل کرد. مثلاً ممکن است فرزند کشاورز مثال بالا، از دانائی پدر چیزی بهره نبرد؛ شاید به این دلیل که پدر توانائی تدریس دانائی خود یا روش کسب این دانائی را به او نداشته است. شاید هم، مانند مثال بند بعد، اصولاً انتقال آن دانائی کار دشواری بوده باشد.

یک مثال از دانائی، «عرفان» است. در این نوع از دانائی، شخص نه تنها از طریق تجربه و مطالعه، بلکه شاید به طریق الهام کسب دانائی کرده است. اما باز هم همان مشکل قبلی برقرار است که شاید عارف نتواند دانائی خود را به دیگران منتقل کند. عموماً از سخن عارفان این ادعا برداشت می‌شود که آنها چیزهائی را می‌دانند و می‌بینند که دیگران نمی‌دانند و نمی‌بینند؛ و بدتر از آن، شاید هیچگاه بدان مقامات نرسند که درک کنند!

هر کسی از ظن خود شد یار من

وز درون من نجست اسرار من

از بیت بالا چنین برداشت می‌شود که: «من چیزهائی می‌دانم که دیگران حتی اگر سعی کنند، به ظن خودشان فهمیده‌اند». تفاوت میان دانش و دانائی دقیقاً همین است. دانش به دانائی‌ای گفته می‌شود که با سخن گفتن و نوشتن در یک زبان مشترک و دارای قاعده‌های مشخص (یعنی منطق) قابل انتقال به دیگران است. در دنیای علم هیچگاه نمی‌توان گفت «من چیزهائی می‌دانم که دیگران هرگز نخواهند فهمید». آن چیزها اگر هم وجود داشته باشند، علم محسوب نمی‌شوند. در واقع آن چیزها دقیقاً زمانی علم به حساب می‌آیند که از طریق منطق به نگارش و سخن درآیند و دیگران نیز با خواندشان به دانائی برسند و در صورت امکان بر آنها بیفزایند. بدین صورت است که یک دانائی، نخست به صورت علم درمی‌آید، سپس تبدیل به یک دانائی عمومی می‌شود و دوباره همان به علم تبدیل می‌شود و این روند ادامه می‌یابد.

پس گفتیم که علم به نوعی، همان دانائی به‌صورت‌نوشتاریاگفتاروقابل‌انتقال‌درآمده است. نیز گفتیم که برای انتقال دانائی، یعنی تبدیل آن به علم، نیازمند زبانی مشترک هستیم. زبانی که هر کس که بر آن تسلط یابد، بتواند سخنان و نوشته‌های ما را درک کند. این زبان، همان «منطق» است. در این درس نه تنها با این زبان تا حدی آشنا می‌شویم، بلکه نحوه‌ی سخن گفتن در این زبان را نیز خواهیم آموخت. در واقع، در این درس خواهیم آموخت که تا زمانی که نتوانیم دانسته‌ی خود را به صورت صحیح بنویسیم، این دانسته، علم به حساب نمی‌آید.

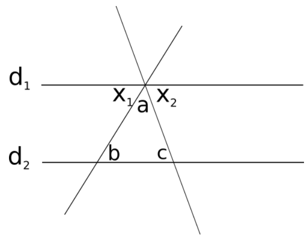
بسیاری از دانشجویان صحیح نوشتن را بلد نیستند. عموماً در برگه‌های امتحانی چیزهائی غیرقابل دنبال‌کردن می‌نویسند ولی مدعی می‌شوند که سوال را فهمیده‌اند و پاسخ را می‌دانند. در این درس، چنین ادعائی از کسی قابل پذیرش نیست. آنچه که دانشجو می‌فهمد دانائی او محسوب می‌شود. در این درس نحوه‌ی انتقال آن دانائی به

صورتی که برای متخصصین قابل فهم باشد، مورد پرسش است. پیشنهاد من به دانشجویان تازه‌وارد، این است که صورت هر سوال را موضوع یک انشاء و پاسخ آن را متن آن بدانند. در واقع در پاسخ هر سوال دانشجو باید مطلبی بنویسد که دارای شروع، بسط و پایان باشد. شروعش صورت سوال است و بیان اینکه این سوال از ما چه می‌خواهد. بسطش بررسی فرضها و نتیجه‌گیری از آنها، و پایان انشاء، رسیدن به خواسته‌ی سوال است.

۱ جلسه‌ی اول

منظور از مبانی ریاضی، مبانی لازم برای کسب مدرک کارشناسی در ریاضیات نیست. بلکه منظور پایه‌ها و مبانی ریاضیات به عنوان یک علم بشری است. بیایید برای شروع، یک قضیه‌ی ریاضی را با هم اثبات کنیم:

قضیه ۱. مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه است.



اثبات.
از آنجا که خطوط $d_{۱}$ و $d_{۲}$ موازی‌اند، داریم:

$$x_{۲} = c \quad , \quad x_{۱} = b \quad (*)$$

می‌دانیم که هر خطی یک زاویه‌ی ۱۸۰ درجه می‌سازد. بنابراین داریم:

$$x_{۱} + a + x_{۲} = ۱۸۰^{o} \quad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود که :

$$a + b + c = ۱۸۰^{o}$$

□

برای اثبات بالا به مواد زیر نیازمند هستیم:

۱. آشنایی با زبان (هم زبان فارسی و هم زبان ریاضی برای اعداد)

۲. آشنایی با نحوه‌ی صحیح استدلال کردن

۳. آشنایی با برخی قضیه‌هایی که قبلا ثابت شده‌اند (دانسته‌های قبلی)

اینکه اگر دو خط $d_{۱}$ و $d_{۲}$ موازی باشند آنگاه زوایای $x_{۱}$ و b برابرند، معادل با یکی از اصول هندسه‌ی اقلیدسی است. ما از این دانسته در اثبات بالا استفاده کردیم. همچنین از این دانسته استفاده کردیم که یک خط، زاویه‌ی ۱۸۰ درجه

می‌سازد. در بخشی از اثبات نیز از $(*)$ و $(**)$ کمک گرفتیم. یعنی گفتیم که می‌شود یکی از آنها را در دیگری جایگذاری کرد. این یک قانون استدلال کردن است.

در درس مبانی ریاضی، به دو جنبه خواهیم پرداخت؛ اول یافتن اصول اولیه ریاضی، و دوم آشنائی با روش صحیح استدلال کردن.

سوال ۱. آیا می‌توان مجموعه‌ای از اصول‌موضوعه نوشت که تمام علم ریاضی بر پایه‌ی آنها نهاده شده باشد؛ یعنی به طوری که هر قضیه‌ای در ریاضی نهایتاً به یکی از آن اصول برسد؟

در درس مبانی ریاضی اصول موضوعه اولیه ریاضی را تبیین خواهیم کرد. هدف دوم ما در این درس آشنایی با زبان مشترک ریاضیدانان و نحوه‌ی صحیح استدلال کردن است. موارد زیر را در این درس بررسی خواهیم کرد:

۱. آشنایی با زبان ریاضی

۲. اصول اولیه ریاضیات

۳. آشنایی با مفاهیم مجموعه و اعداد

۴. آشنایی با بی‌نهایت‌ها

بیایید نخست به زبان ریاضی بپردازیم. زبان ریاضی، منطق ریاضی است. در این درس با دو منطق آشنا خواهیم شد که بخش اعظمی از ریاضیات بر اساس آنها بنا شده است:

۱. منطق گزاره‌ها [۱]

۲. منطق مرتبه‌ی اول [۲]

۱.۱ منطق گزاره‌ها

اشیای اولیه (مواد اولیه‌ی) منطق گزاره‌ها، **گزاره‌های اتمی** هستند که آنها را با حروف p ، q ، h و ... نشان می‌دهیم.
هر گزاره‌ی اتمی را می‌توان یک **جمله‌ی خبری ساده** پنداشت.
مثال:
ـ حسن آدم است.
ـ هوا بارانی است.
ـ تخته‌سیاه، سبز است.
مثال‌های زیر گزاره‌ی اتمی نیستند:
ـ فردا خانه‌ی حسن می‌آیی؟

[۱] propositional logic
[۲] first order logic

به‌به! چه هوای خوبی!
علاوه بر گزاره‌های اتمی در منطق گزاره‌ها علائم کمکی زیر نیز موجودند:

- «و» یا علامت عطف که آن را با $\wedge$ نشان می‌دهیم.
- «یا» یا علامت فصل که آن را با $\vee$ نشان می‌دهیم.
- علامت «آنگاه» که آن را با $\rightarrow$ نشان می‌دهیم.
- علامت «اگروتنهااگر» که آن را با $\leftrightarrow$ نشان می‌دهیم.
- علامت «نقیض» که آن را با $\neg$ نشان می‌دهیم.
- علامت تناقض که آن را با $\perp$ نشان می‌دهیم.

با استفاده از علائم یاد شده می‌توان جملات پیچیده‌تری در منطق گزاره‌ها نوشت:

$$(p_۱ \wedge p_۲) \vee (\neg p_۳ \longrightarrow p_۴) \vee (\neg(\neg p_۵) \longrightarrow p_۲ \wedge p_۳)$$

توجه ۲. هر منطقی دارای دو بخش است:

۱. نحو [۳]

۲. معناشناسی [۴]

یک گزاره، در منطق گزاره‌ها، از لحاظ نحوی فقط یک دنباله از علامتها است. مانند آنچه در بالا نوشته‌ایم. در بخش معناشناسی باید به این گزاره‌ها معنا بخشید.

۲.۱ معنا شناسی منطق گزاره‌ها

در منطق گزاره‌ها هر جمله‌ای یا دارای ارزش درست (T) یا دارای ارزش غلط (F) است. معمولاً در این منطق برای گزاره‌ها **جدول ارزش** کشیده می‌شود.

p	
T	
F	

توجه ۳. علامت‌های $\forall$ و $\exists$ در منطق گزاره‌ها نداریم. متغیر آزاد هم نداریم.

[۳] syntax

[۴] semantics

تعریف ۴. فرض کنید p و q دو گزاره (نه لزوماً اتمی) در منطق گزاره‌ها باشند. عطف p و q که آن را به صورت $p \wedge q$ نشان می‌دهیم؛ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

p	q	q ∧ p
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

فصل دو گزاره‌ی p و q که آن را به صورت $p \vee q$ نشان می‌دهیم؛ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

p	q	q ∨ p
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

توجه ۵. علامت «یا» در بالا، یای مانع جمع **نیست** و از این رو، با «یا» ای که در زبان محاوره‌ای استفاده می‌شود فرق می‌کند. جمله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

یا حسن در خانه بوده است، یا حسین (در صورتی که فقط یک نفر در خانه بوده باشد)

فرض کنید p گزاره‌ی «حسن در خانه است» باشد، و q «گزاره‌ی حسین در خانه است». اگر p و q هر دو درست باشند، گزاره‌ی بالا (در زبان محاوره‌ای) غلط می‌شود؛ در حالی که در جدول بالا دیدیم که در منطق گزاره‌ها، در صورت درست بودن p, q گزاره‌ی $p \vee q$ نیز درست است.

۲ جلسه‌ی دوم

در این جلسه به ادامه‌ی معناشناسیِ منطق گزاره‌ها می‌پردازیم. لازم می‌دانم که دوباره درباره‌ی $p \vee q$ توضیحی بدهم.

توجه ۶. علامت $\vee$ «یای» مانع جمع نیست. در واقع اگر بخواهیم مانع جمع شویم، گزاره‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

سوال ۲ (سوال دانشجویان)**.** معنی کلمه‌ی **جمع** در **یای مانع جمع** چیست؟

جمعِ دو چیز در فارسی یعنی داشتن هر دوی آنها با همدیگر. بیت زیر از حافظ را مثال می‌زنم:
عشق و شباب و رندی، مجموعه‌ی مراد است
چون جمع شد معانی، گوی بیان توان زد

تعریف ۷. اگر p و q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، گزاره‌ی $p \to q$ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود.

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

توجه کنید که در سطر سوم و چهارم جدول ارزش بالا، می‌گوئیم که گزاره‌ی موردنظر به **انتفاء مقدم** درست است. در این حالت به محضِ دیدن فرض، تلاش برای یافتن درستی گزاره منتفی است! (یعنی گزاره درست است). این را در زبان روزمره را هم تا حدودی می‌توان دید. فرض کنید که کسی بگوید که «اگر سنگ سخن بگوید، اسب شتر است». این گزاره، با این که بی‌معنی به نظر می‌رسد، درست است! در واقع ما هیچگاه نیاز به تحقیق این نداریم که اسب شتر است، چون می‌دانیم که سنگ سخن نمی‌گوید! [۵]

تعریف ۸. اگر p و q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، گزاره‌ی $p \leftrightarrow q$ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود.

p	q	p ↔ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

تعریف ۹. اگر p یک گزاره باشد $\neg p$ نیز یک گزاره است و به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

[5] شاید این را هم شنیده باشید که از فرض محال همه چیز نتیجه می‌شود.

p	¬p
T	F
F	T

مثال ۱۰. جدول ارزش گزاره‌ی $\neg p \vee q$ را رسم کنید.

پاسخ.

p	q	¬p ∨ q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

□

توجه ۱۱. ستون آخر جداول ارزش دو گزاره‌ی $p \to q$ و $\neg p \vee q$ یکسانند. در این حالت می‌گوییم که دو گزاره‌ی $p \to q$ و $\neg p \vee q$ با هم **معادلند** (هم‌ارزند) و می نویسیم:

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

توجه ۱۲. عبارت زیر یک **گزاره** در **منطق گزاره‌ها نیست**.

$$(p \to q) \equiv \neg p \vee q$$

اگر خاطرتان باشید، هنگام معرفی نمادهای منطقی هیچگاه نگفتیم که در منطق گزاره‌ها، نماد $\equiv$ هم داریم. علامت $\equiv$ جزو نمادهای منطقی نیست. بنابراین عبارت $(p \to q) \equiv \neg p \vee q$ یک گزاره نیست. در منطق گزاره‌ها چیزی گزاره حساب می‌شود که با نمادهای منطقی (ای که قبلا درباره‌شان صحبت کردیم) ساخته شده باشد. پس می‌گوییم که علامت $\equiv$ یک نماد «فرامنطقی» است که در زبان ریاضی روزمره از آن استفاده می‌کنیم. جمله‌ی زیر یک جمله در زبان روزمره است:

$$(p \to q) \equiv \neg p \vee q$$

معنی آن هم این است که «ستون آخر جدول ارزش گزاره‌ی سمت راست و چپ با هم یکسان است». چنین چیزی را توسط یک گزاره در خودِ منطق گزاره‌ها نمی‌توان نوشت و ما به عنوان موجوداتی که فرای آن منطق هستیم می‌توانیم درباره‌اش صحبت کنیم.

تمرین ۱. نشان دهید که در هر مورد گزاره‌های داده‌شده با هم معادلند:

۱. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

باید برای هر دو گزاره‌ی چپ و راست جدول بکشید و تحقیق کنید که ستون آخر هر دو جدول یکی است. برای کشیدن جدول، مثلاً برای گزاره‌ی سمت راست، باید اول تمام اجزایش برایتان مشخص شود (جدول

زیر را پر کنید)

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$

برای گزاره‌ی سمت چپ نیز به طور مشابه جدول بکشید.

۲. $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

سوال ۳. آیا عبارت $p \to q \equiv \neg p \to \neg q$ درست است؟

راهنمایی. هم با جدول و هم با آوردن مثال نشان دهید که عبارت بالا درست نیست. □

مثال ۱۳. بیایید عبارت $p \to q$ را با هم کمی تحلیل کنیم. توجه کنید که عبارتهای زیر با هم هم‌معنیند:

- $p \to q$
- p شرط کافی برای q است. (اگر p آنگاه q)
- q شرط لازم برای p است. (تنها اگر q آنگاه p).

فرض کنید پدر علی (که حرفهایش همیشه درست است!) به علی گفته است که «اگر درس بخوانی موفق می‌شوی». از حرف پدر علی چه چیزی می‌توان استنباط کرد؟ بیایید این جمله را فرمولبندی ریاضی کنیم:

p : علی درس بخواند

q : علی موفق شود

پس سخن پدر علی، گزاره‌ی زیر است:

$p \to q$

به بیان دیگر، «به نظر پدر علی» درس خواندن شرط کافی برای موفق شدن است.

به نظر می‌آید که پدر علی در مورد عواقب درس نخواندن چیزی ادعا نکرده است؛ در واقع نگفته است که «اگر درس نخوانی موفق نمی‌شوی» یا «**تنها اگر** درس بخوانی موفق می‌شوی». پس گزاره‌ی زیر از سخن پدر علی نتیجه نمی‌شود:

$$\neg p \to \neg q.$$

به بیان دیگر، او نگفته است که **درس خواندن شرط لازم برای موفق شدن است** (به نظر او، از راههای دیگر هم می‌شود موفق شد!).

اما از طرفی دیگر، بنا به جمله‌ی پدر علی، اگر علی موفق نشود، می‌فهمیم که درس نخوانده بوده است. چون اگر درس می‌خواند، موفق شده بود. پس گزاره‌ی زیر از سخن پدر علی نتیجه می‌شود:

$$\neg q \to \neg p.$$

حال فرض کنیم که علی موفق شده است. از این لزوماً نتیجه نمی‌شود که علی درس خوانده است. پدر علی فقط گفته بود که اگر درس بخواند موفق می‌شود، ولی نگفته بود که تنها راه برای موفق شدن درس خواندن است. در واقع او نگفته بود که «موفق می‌شوی اگر و تنها اگر درس بخوانی». پس جمله‌ی زیر نیز از سخن پدر علی نتیجه نمی‌شود:

$$q \to p.$$

سوال ۴. آیا عبارت زیر درست است؟

$$\neg p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

تمرین ۲. جدول زیر را کامل کنید.

p	q	؟
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

گفتیم که $p \equiv q$ یعنی جدول ارزش دو گزاره‌ی p و q به ستون یکسانی ختم می‌شود.

تمرین ۳. نشان دهید که اگر

$$p \equiv q$$

آنگاه ستون آخر در جدول ارزش گزاره‌ی $p \leftrightarrow q$ تنها از علامت T تشکیل شده است.

در تعریف زیر از تمرین بالا ایده گرفته‌ایم.

تعریف ۱۴. ۱. گزاره‌ی p را یک **تاتولوژی** می‌خوانیم، هرگاه همواره (یعنی تحت هر نوع ارزشی که اجزاء آن داشته باشند) درست باشد.

مثال ۱۵. گزاره‌ی $p \vee \neg p$ یک تاتولوژی است.

p	¬p	$\neg p \vee p$
T	F	T
F	T	T

آنچه این مثال بیان کرده است را **اصلِ ردِّ شِقِّ ثالث** می‌خوانند. یعنی حالت سومی نیست، یا خود یک گزاره درست است یا نقیض آن.

۲. می گوییم گزاره‌ی p **مستلزم** گزاره‌ی q است، یا $p \to q$ یک **استلزام منطقی** است. هرگاه $p \to q$ تاتولوژی باشد، در اینصورت می‌نویسیم:

$$p \Rightarrow q$$

توجه ۱۶. علامت $\Rightarrow$ یک نماد منطقی نیست؛ پس عبارت زیر یک گزاره در منطق گزاره‌ها نیست:

$$p \Rightarrow q.$$

عبارت بالا یک جمله در زبان روزمره است بدین معنی که «گزاره‌ی $p \to q$ یک تاتولوژی است».

توجه ۱۷. به جای علامت $\equiv$ گاهی از علامت $\iff$ استفاده خواهیم کرد.

سوال ۵. فرق میان $p \to q$ و $p \Rightarrow q$ چیست؟

پاسخ. عبارت $p \to q$ یک گزاره در منطق گزاره‌ها است؛ ولی $p \Rightarrow q$ یک عبارت **فرا منطقی** در زبان روزمره است. عبارت $p \Rightarrow q$ گزاره محسوب نمی‌شود. $\square$

در زبان روزمره‌ی ریاضیات از کلمه‌ی «**قضیه**» به جای تاتولوژی استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۸. گزاره‌های زیر تاتولوژی هستند:

$$p \to p \tag{۱}$$

$$p \wedge q \to q \wedge p \tag{۲}$$

$$p \to p \wedge p \tag{۳}$$

$$p \wedge q \to q \tag{۴}$$

پس می توان نوشت:

$$p \Rightarrow p \tag{۵}$$

$$p \wedge q \Rightarrow q \wedge p \tag{۶}$$

$$p \Rightarrow p \wedge p \tag{۷}$$

$$p \wedge q \Rightarrow q \tag{۸}$$

توجه ۱۹. داریم $p \equiv q$ (یا $p \iff q$) هرگاه $p \leftrightarrow q$ یک تاتولوژی باشد.

تمرین ۴. ثابت کنید که

۱. $p \Rightarrow p \vee q$

اثبات. باید نشان دهیم که گزاره‌ی $p \to p \vee q$ یک تاتولوژی است.

p	q	$p \vee q$	$p \to p \vee q$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

□

۲. $p \wedge q \Rightarrow p$

۳. $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$

تمرین ۵. قوانین دُمُرگان

۱. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

برای اثبات کردن عبارت بالا باید ثابت کنیم که $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ یک تاتولوژی است.

۲. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

تمرین ۶.

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \tag{۹}$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \tag{۱۰}$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \tag{۱۱}$$

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r \tag{۱۲}$$

$$(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \vee r \to q \vee s) \tag{۱۳}$$

$$(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \wedge r \to q \wedge s) \tag{۱۴}$$

در مورد قضیه‌ی زیر در جلسه‌ی بعد صحبت خواهیم کرد.

قضیه ۲۰. ۱. $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$ قیاس استثنائی [۶]

۲. $(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ نفی تالی [۷]

۳. $(p \to q) \iff (p \wedge \neg q \to \underbrace{\perp}_{(p \wedge \neg p)})$ برهان خُلف [۸]

[۶] modus ponens

[۷] modus tollens

[۸] reductio ad absurdum

۳ جلسه‌ی سوم

پیش از شروع درس یادآوری می‌کنیم که عبارت

$$p \to q$$

یعنی p شرط کافی برای q است، و q شرط لازم برای p است.

مثال ۲۱. شرط لازم برای ورود به دانشگاه شرکت در کنکور است.

q: علی به دانشگاه وارد شده است.

p: علی کنکور داده است.

جمله‌ی شرط لازم برای ورود به دانشگاه، کنکوردادن است، در مورد علی به صورت زیر درمی‌آید:

$$q \to p$$

معادلاً به صورت زیر:

$$\neg p \to \neg q$$

وقتی می‌گوئیم شرط لازم برای ورود به دانشگاه، کنکور دادن است، یعنی اگر کنکور ندهیم، به دانشگاه وارد نمی‌شویم.
این جمله را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:
تنهااگر کنکور دهیم وارد دانشگاه می‌شویم.

مرور درس ۲۲. در جلسه‌ی قبل، با برخی **تاتولوژی‌ها** آشنا شدیم. تاتولوژی‌ها صرف نظر از معنی گزاره‌های به‌کار رفته در آنها همواره درستند. برای اثبات اینکه یک گزاره تاتولوژی است می‌توان جدول ارزش آن را بررسی کرد. اینکه «گزاره‌ی p تاتولوژی است» جمله‌ای فرا منطقی است. تاتولوژی‌ها در واقع قضایایی درباره‌ی منطق گزاره‌ها هستند. برای اثبات تاتولوژی‌های جدید می‌توان از تاتولوژی‌های دیگر استفاده کرد. استفاده از تاتولوژیهای قبل برای اثبات تاتولوژیهای جدید را «**استنتاج**» کردن می‌گویند. [۹]

مثال ۲۳. گزاره‌ی زیر تاتولوژی است.

۱.

$$(p \to q) \wedge p \to q \quad \text{قیاس استثنایی}$$

اثبات. با توجه به تاتولوژی‌های قبلی مانند

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

[۹] البته تعریف دقیق استنتاج کردن، چیزی غیر از این است که آن را در درس منطق ریاضی خواهید آموخت.

داریم:

$$(p \to q) \wedge p \equiv (\neg p \vee q) \wedge p$$

بنا به تاتولوژی‌های قبلی داریم:

$$(\neg p \vee q) \wedge p \equiv p \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$$

حال توجه می‌کنیم که $\bot \equiv p \wedge \neg p$ (جدول بکشید).

توجه کنید که $\bot \vee p \equiv p$ (جدول بکشید). پس داریم:

$$(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

تا اینجا ثابت کردیم که

$$(p \to q) \wedge p \equiv p \wedge q$$

پس برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که

$$p \wedge q \to q$$

اما حکم بالا، خود یک تاتولوژی است که قبلاً آن را ثابت کرده‌ایم. $\square$

۲.

$$\text{نفی تالی} \quad (p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$$

اثبات.

$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p \equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \to \neg p \equiv$$
$$(\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \to \neg p \equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee \underbrace{(\neg q \wedge q)}_{\bot}) \to \neg p \equiv$$
$$\underbrace{(\neg q \wedge \neg p \to \neg p)}_{T}$$

$\square$

۳.

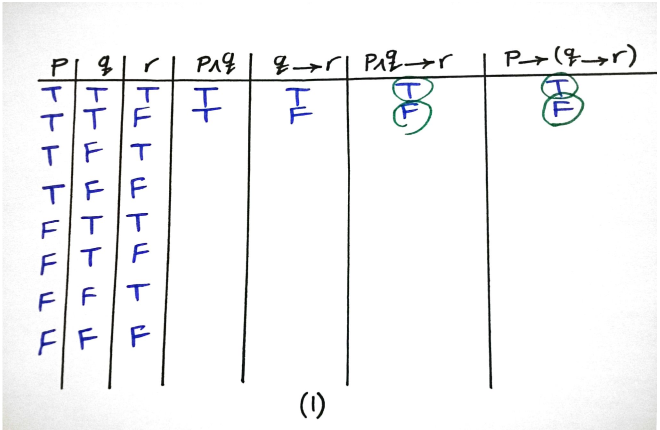
$$\text{برهان خُلف} \quad (p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q \to \bot)$$

اثبات. به عنوان تمرین بر عهده‌ی شما. $\square$

مثال ۲۴. نشان دهید

$$p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$$

پاسخ. می‌خواهیم نشان دهیم که $p \wedge q \to r \leftrightarrow p \to (q \to r)$ یک تاتولوژی است. باید نشان دهیم که دو ستون آخر جدول زیر با هم یکسانند:



p	q	r	$p \wedge q$	$q \to r$	$p \wedge q \to r$	$p \to (q \to r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

(۱)

تکمیل جدول به عهده‌ی شما. □

۱.۳ منطق مرتبه‌ی اول

منطق گزاره‌ها از بیان عبارتهایی مانند زیر ناتوان است:

ـ هر عدد اول بزرگتر از ۲ فرد است.

ـ حداقل دو نفر در کلاسِ ما قد بلندتر از ۱۷۰ سانتی متر دارند.

عبارت‌های بالا در منطق مرتبه‌ی اول (یا منطق محمولات، یا منطق سورها) نوشته شده‌اند. بخش اعظمی از ریاضیات با استفاده از منطق مرتبه‌ی اول قابل بیان است. منطق مرتبه‌ی اول از افزودن اجزاء زیر به منطق گزاره‌ها بدست می‌آید:

۱. متغیرها $x, y, z, \ldots$

۲. روابط و توابع $R(x,y), f(x,y) = z$

۳. سورهای عمومی و وجودی: $\exists$ و $\forall$

۱.۱.۳ نحو منطق مرتبه‌ی اول

ترتیب اهمیت ادوات به صورت زیر است:

۱. $(,)$

۲. $\forall, \exists$

۳. $\neg$

۴. $\wedge, \vee$

۵. $\to, \leftrightarrow$

توجه ۲۵. در میان ادوات هم‌ارزش، آنکه زودتر پدیدار شود، ارجح است.

توجه ۲۶. $\exists$ «سور وجودی» و $\forall$ «سور عمومی» نامیده می‌شوند.

متغیری که در دامنه‌ی سوری قرار بگیرد، متغیر **پای‌بند** نامیده می‌شود. متغیری که در دامنه‌ی هیچ سوری نباشد، متغیر **آزاد** نامیده می‌شود.

مثال ۲۷. در فرمول‌های زیر متغیر آزاد و پای‌بند را مشخص کنید و فرمول مورد نظر را پرانتزگذاری کنید.

۱. $\forall x \quad R_1(x, y) \to \exists y(s(y) \vee R_2(x, y))$

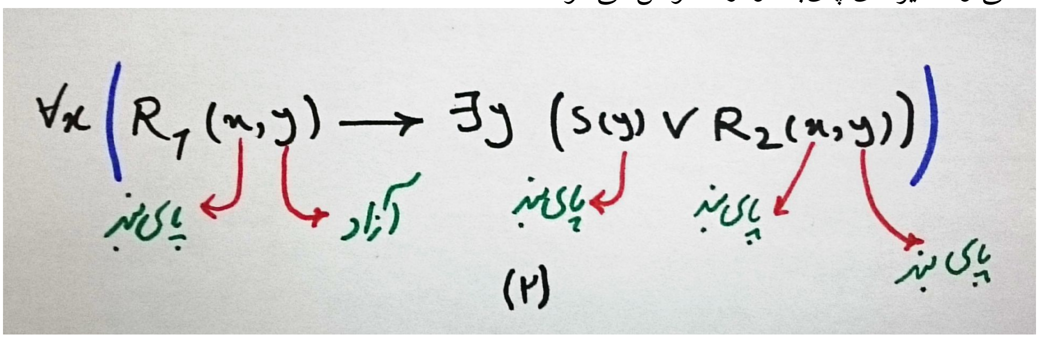
پاسخ. ابتدا پرانتزگذاری می‌کنیم:

$$(\forall x \quad R_1(x, y)) \to \exists y(s(y) \vee R_2(x, y))$$

حال متغیرهای آزاد و پای‌بند را شناسایی می‌کنیم:

$$(\forall x \quad R_1(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \overbrace{y}^{\text{آزاد}})) \to \exists y(s(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}) \vee R_2(\overbrace{x}^{\text{آزاد}}, \underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}))$$

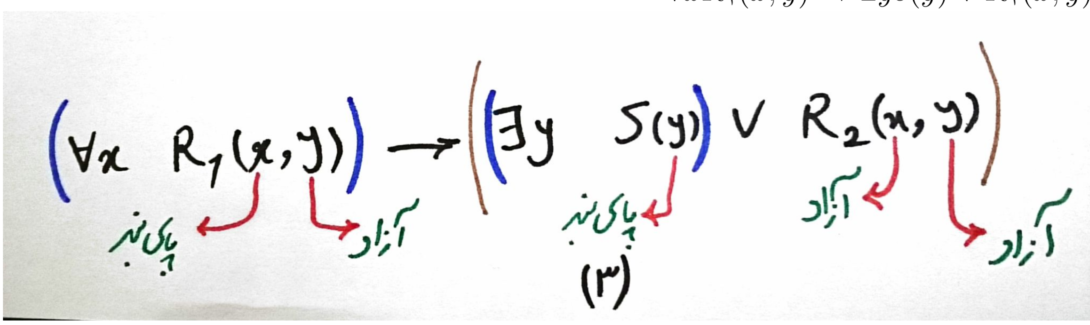
توجه: پرانتزگذاری فرمول بالا فقط به صورت بالا درست است؛ اگر پرانتزگذاری را به صورت زیر انجام دهیم، معنی و متغیرهای پای‌بند و آزاد عوض می‌شوند:



□

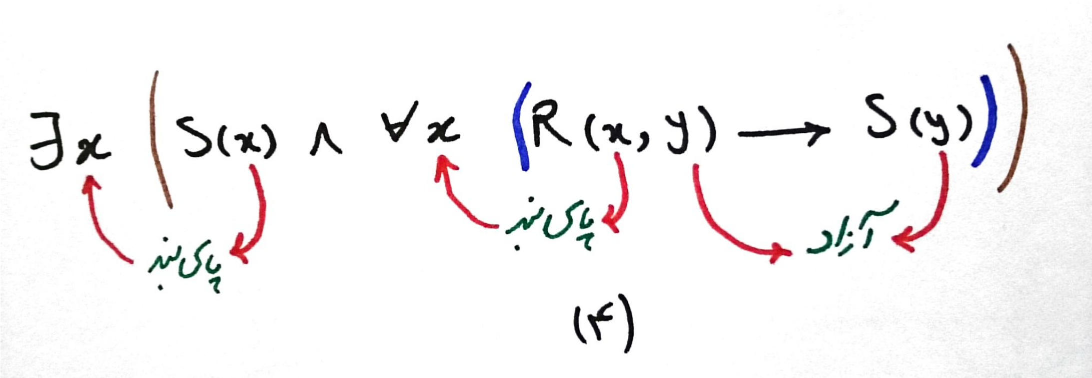
۲. فرمول زیر را پرانتزگذاری کنید:

$\forall x R_1(x, y) \to \exists y s(y) \vee R_2(x, y)$

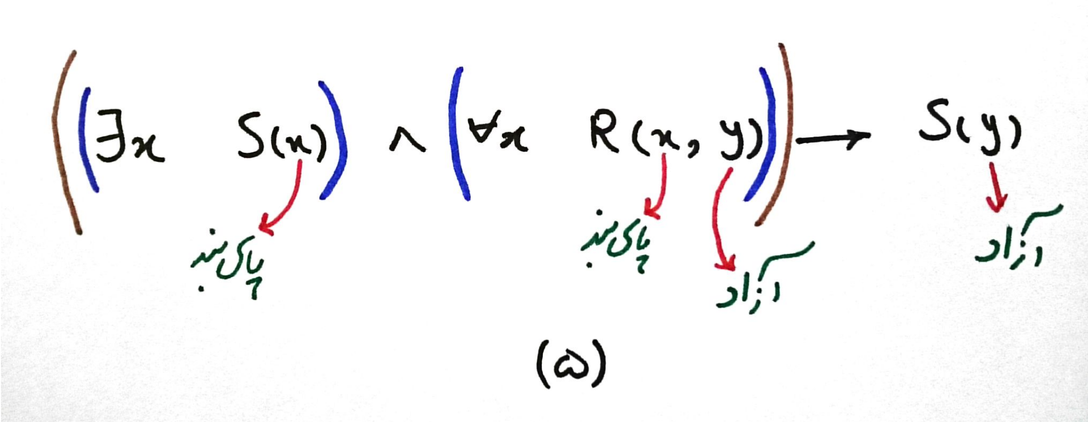


پاسخ. □

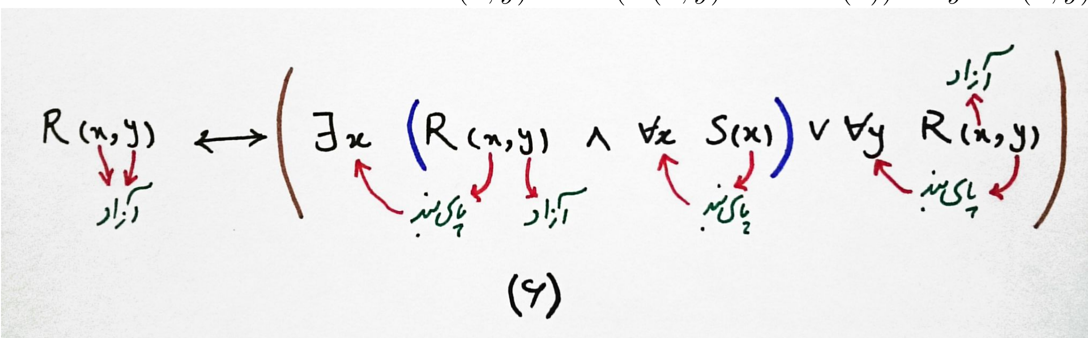
۳. $\exists x(s(x) \wedge \forall x(R(x,y) \to s(y)))$



۴. $\exists x s(x) \wedge \forall x R(x,y) \to s(y)$



۵. $R(x,y) \leftrightarrow \exists x(R(x,y) \wedge \forall x \quad s(x)) \vee \forall y \quad R(x,y)$



توجه ۲۸. در منطق مرتبه‌ی اول بسته به اینکه در مورد چه چیزی صحبت می‌کنیم، به زبان، رابطه یا تابع اضافه می‌کنیم. این را در مثالها بررسی خواهیم کرد.

۲.۳ معناشناسی منطق مرتبه‌ی اول

معناشناسی منطق مرتبه‌ی اول با استفاده از جدول ارزش صورت نمی‌گیرد. در اینجا باید گزاره‌ها و فرمولها را در **جهان** مربوط بدانها ارزیابی کرد. برای مثال، برای بررسی صحت جمله‌ی «در کلاس مبانی ریاضی سه نفر قد بلندتر

از ۱۷۰ سانتی‌متر دارند» باید وارد این کلاس شد، و به دنبال سه نفر گشت که شرط ذکر شده را برآورده کنند.

مثال ۲۹. عبارت زیر را در یک **زبان** مناسب در منطق مرتبه‌ی اول بنویسید.

ـ در کلاس حداقل ۵ دانشجوی خانم وجود دارند.

پاسخ. زبان را $L = \{D(x)\}$ می‌گیریم که در آن D یک محمول تک‌موضعی است به معنی این که x یک دختر است.

$\underbrace{D(x)}_{\text{محمول}} : x$ دختر است.

$$\exists x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ (D(x_۱) \wedge D(x_۲) \wedge D(x_۳) \wedge D(x_۴) \wedge D(x_۵) \wedge \bigwedge_{i,j=۱,\ldots,۵, i\neq j} x_i \neq x_j)$$

□

مثال ۳۰. ـ در کلاس دقیقاً ۵ خانم وجود دارد.

پاسخ. دوباره از همان زبان L در بالا استفاده می‌کنیم:

$$\big(\exists x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ (D(x_۱) \wedge D(x_۲) \wedge D(x_۳) \wedge D(x_۴) \wedge D(x_۵) \wedge \bigwedge_{i,j=۱,\ldots,۵, i\neq j} x_i \neq x_j)\big)$$
$$\wedge \forall x (D(x) \rightarrow (x = x_۱) \vee \ldots \vee (x = x_۵))$$

□

۴ جلسه‌ی چهارم

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی منطق مرتبه‌ی اول به عنوان تعمیمی از منطق گزاره‌ها صحبت کردیم. در منطق مرتبه‌ی اول، وقتی می‌خواهیم درباره‌ی یک جهان مشخص صحبت کنیم، ابتدا یک زبان مناسبِ L انتخاب می‌کنیم که الفبای لازم را در اختیار ما قرار دهد، سپس با استفاده از امکانات زبان L و ادوات منطقی (سورها، آنگاه و غیره) جمله‌ی مورد نظر خود را می‌نویسیم.

توجه ۳۱. در منطق مرتبه‌ی اول، سور روی زیر مجموعه‌ها نداریم.

$$\cancel{\forall A \subseteq B \ldots}$$

مثال ۳۲. در کلاس حداکثر ۵ دانشجوی خانم وجود دارند.
در این مثال، جهان مورد نظر ما «این کلاس» است. یعنی هر متغیری که روی آن سور بزنیم، به عنصری از این جهان اشاره دارد. ابتدا یک زبان مناسب انتخاب می‌کنیم:

$$L = \{D(x)\}$$

سپس **محمول تک‌متغیره‌ی** D را به صورت زیر **تعبیر** می‌کنیم.
$D(x)$ یعنی x خانم است. سپس جمله‌ی مورد نظرخود را می‌نویسیم:

$$\forall x_۱, x_۲, \ldots, x_۶ \quad \Big(D(x_۱) \wedge D(x_۲) \wedge \ldots \wedge D(x_۶) \rightarrow \bigvee_{i,j \in \{۱,\ldots,۶\}}^{i \neq j} x_i = x_j\Big)$$

مثال ۳۳. هر عدد اولِ مخالفِ ۲ فرد است.
در این مثال، جهان ما مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. قرار می‌دهیم: $L\{۱, |, +\}$. فرض می‌کنیم ۱ در زبان، به همان عدد یک در اعداد طبیعی اشاره کند و علامت | تعبیر زیر را داشته باشد:
$x|y$ یعنی عدد x عدد y را عاد می‌کند.

پاسخ.

$$\forall x \quad \Big(\neg(x|۱+۱) \wedge \forall y \quad (y|x \rightarrow (y = x \vee y = ۱)) \rightarrow \neg(۱+۱|x)\Big)$$

□

توجه کنید که همان مثال بالا را در زبان زیر هم می‌توان فرمولبندی کرد:
$L = \{\cdot, |, +, ۱\}$
در اینجا فرض می‌کنیم تعبیر جمع و ضرب موجود در زبان، همان جمع و ضرب اعداد باشد و می‌نویسیم:

$$\forall x \Big(\neg(x = ۱+۱) \wedge \forall y \quad (y|x \rightarrow (y = x \vee y = ۱)) \rightarrow \exists n \quad x = n + n + ۱\Big)$$

توجه کنید که در بالا حق نداشتیم بنویسیم که

$$\exists n \in \mathbb{N} \dots$$

در واقع ما ابتدا مشخص کرده‌ایم که جهان مورد نظرمان $\mathbb{N}$ است.

مثال ۳۴. تمام اعداد اول بزرگتر از ۲ فردند.

همان مثال بالا را به این صورت نوشته‌ایم که اگر عددی اول و زوج باشد، آنگاه برابر با ۲ است. در واقع در اینجا از **معنای** عبارت کمک گرفته‌ایم و جمله‌ای **معادل** با جمله‌ی خواسته شده نوشته‌ایم:

پاسخ.

$$\forall x \quad \Big(\neg(x=۱) \wedge (۱+۱|x) \wedge \big(\forall y \quad (y|x \to y=۱ \vee y=x)\big) \to x=۱+۱\Big)$$

□

مثال ۳۵. تابع f در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است.

$$L=\{۰, f, a, R(x,y,z), >\}$$

جهان: $\mathbf{R}$

تعبیر رابطه‌ی R:

$$|x-y|<z \iff R(x,y,z)$$

پاسخ. آنچه می‌خواهیم عبارت زیر است:

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \quad \big(|x-a|<\delta \to |f(x)-f(a)|<\epsilon\big)$$

که آن را در زبان داده شده به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \quad \Big(R(x,a,\delta) \to R\big(f(x), f(a), \epsilon\big)\Big)$$

توجه ۳۶. این که تابع f در نقطه‌ی a پیوسته است را می‌توان در فرازبان منطقی اینگونه نوشت:

$$\Big(\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\Big) \Leftrightarrow \forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall x \quad \big(|x-a|<\delta \to |f(x)-f(a)|<\epsilon\big)$$

علت این که بین دو عبارت از فِلِش دوخطه استفاده کرده‌ایم این است که این عبارت، در فرازبان منطقی نوشته شده است و از قول خود ماست. در عبارت بالا در واقع داریم می‌گوئیم که از نماد $\lim_{x\to a} f(x)=b$ برای اشاره به عبارت سمت راست استفاده کرده‌ایم.

□

مثال ۳۷. اگر هر کس حداقل دو دوست داشته باشد، آنگاه یک نفر هست که با همه دوست است.

$$L = \{R(x,y)\}$$

جهان: دانشگاه

تعبیر رابطه‌ی $R(x,y)$: x و y با هم دوستند.

پاسخ.

$$\forall x \quad \exists y_۱, y_۲ \quad R(x,y_۱) \land R(x,y_۲) \land \neg(y_۱ = y_۲) \rightarrow \exists z \quad \forall t \quad R(z,t)$$

□

مثال ۳۸. هر کسی که حداقل دو دوست داشته باشد، با همه دوست است.

پاسخ.

$$\forall x \quad \Big(\exists y_۱, y_۲ \quad R(x,y_۱) \land R(x,y_۲) \land \neg(y_۱ = y_۲) \rightarrow \forall z \quad R(x,z)\Big)$$

□

مثال ۳۹. هر کسی دو دوست دارد که آنها تنها یک دوست مشترک دارند.

پاسخ.

$$\forall x \quad \exists y_۱, y_۲ \quad \Bigg(R(x,y_۱) \land R(x,y_۲) \land \neg(y_۱ = y_۲) \land \exists z \quad \Big(R(y_۱,z) \land R(y_۲,z) \land$$
$$\forall t \quad R(t,y_۱) \land R(t,y_۲) \rightarrow (t = z)\Big)\Bigg)$$

جمله‌ی بالا را با توجه به معنای آن می‌توان به صورت زیر بازنوشت:

$$\forall x \quad \Bigg(\exists y_۱, y_۲ \quad R(x,y_۱) \land R(x,y_۲) \land \neg(y_۱ = y_۲) \land \forall z \quad \Big(R(y_۱,z) \land R(y_۲,z) \rightarrow (x = z)\Big)\Bigg)$$

□

مثال ۴۰. هر دو عدد دارای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هستند.

$$L = \{|\}$$

جهان: $\mathbf{N}$

پاسخ.

$$\forall x, y \quad \Bigg(\exists z \quad (z|x) \land (z|y) \land \Big(\forall t \quad (t|x) \land (t|y) \rightarrow (t|z)\Big)\Bigg)$$

□

مثال ۴۱. هر کسی که دوستی داشته باشد، دوست دیگری ندارد.

پاسخ.

$$\forall x \quad \left(\exists y \quad R(x,y) \to \forall z \quad \Big(\neg(y=z) \to \neg R(x,z)\Big)\right)$$

□

۱.۴ عبارت‌های همیشه درست در منطق مرتبه‌ی اول

گفتیم که «تاتولوژی‌ها» در منطق گزاره‌ها، عباراتی هستند که صرف نظر از ارزش گزاره‌های به کار رفته در آنها همواره درستند. برای مثال $p \vee \neg p$ همواره درست است و فرقی نمی‌کند که p چه گزاره‌ای باشد. در واقع تاتولوژیها به نوعی «قوانین استنتاج» هستند. در منطق مرتبه‌ی اول نیز عبارتهای همیشه درست داریم (ولی کمتر از کلمه‌ی تاتولوژی برای آنها استفاده می‌شود). منظور از یک عبارت همیشه درست در منطق مرتبه‌ی اول، عبارتی است که **در هر جهانی که آن عبارت را تعبیر کنیم** درست است. در زیر چند مثال آورده‌ایم:

۱. $\neg\forall x \quad p(x) \equiv \exists x \quad \neg p(x)$

۲. $\neg\exists x \quad p(x) \equiv \forall x \quad \neg p(x)$

۳. $\forall x \quad \Big(p(x) \wedge q(x)\Big) \leftrightarrow \forall x \quad p(x) \wedge \forall x \quad q(x)$

۴. $\exists x \quad \Big(p(x) \vee q(x)\Big) \leftrightarrow \exists x \quad p(x) \vee \exists x \quad q(x)$

سوال ۶. عبارت‌های بالا را ثابت کنید.

اثبات. در زیر اولی را ثابت می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\neg\forall x \quad p(x) \equiv \exists x \quad \neg p(x)$$

فرض کنیم که M یک جهان باشد که گزاره‌های بالا درباره‌ی آن نوشته شده‌اند. فرض کنیم در جهان M داشته باشیم:

$$\neg\forall x \quad p(x)$$

یعنی در جهان M اینگونه نیست که همه‌ی $x \in M$ ویژگی p را داشته باشند. پس عنصری مانند $a \in M$ هست که $\neg p(a)$ پس در جهان ما جمله‌ی زیر درست است:

$$\exists x \quad \neg p(x)$$

اثبات جهت عکس به عهده‌ی شما. □

سوال ۷. آیا عبارت زیر همیشه درست است؟

$$\forall x \quad \big(A(x) \vee B(x)\big) \to \forall x \quad A(x) \vee \forall x \quad B(x)$$

پاسخ. به عنوان مثال اگر جهان ما $M = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد، و تعبیر جملات به صورت زیر باشد:
$A(x) : x \geqslant ۲$ و $B(x) : x \leqslant ۱$. در جهان M داریم:

$$\forall x \quad \big(x \geqslant ۲ \vee x \leqslant ۱\big)$$

اما جمله‌ی زیر در جهان M درست نیست:

$$\forall x \quad x \geq ۲ \quad \vee \quad \forall x \quad x \leq ۱$$

در زیر مثال دیگری نیز آورده‌ایم. فرض کنید:

$$M = \{a, b, c, d, e\}$$

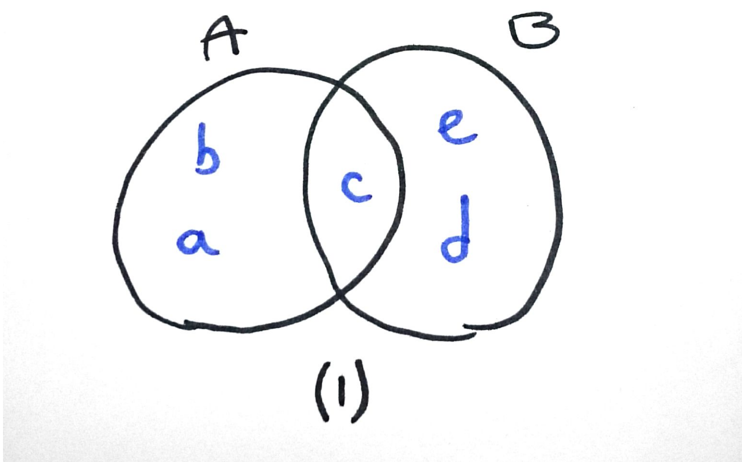
$$A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e\}$$

فرض کنید $A(x)$ به معنی $x \in A$ باشد و $B(x)$ به معنی $x \in B$. داریم

$$\forall x \quad (x \in A \vee x \in B)$$

اما عبارت زیر در جهان ما درست نیست:

$$\forall x \quad x \in A \quad \vee \quad \forall x \quad x \in B$$



$\square$

سوال ۸. آیا عبارت زیر درست است:

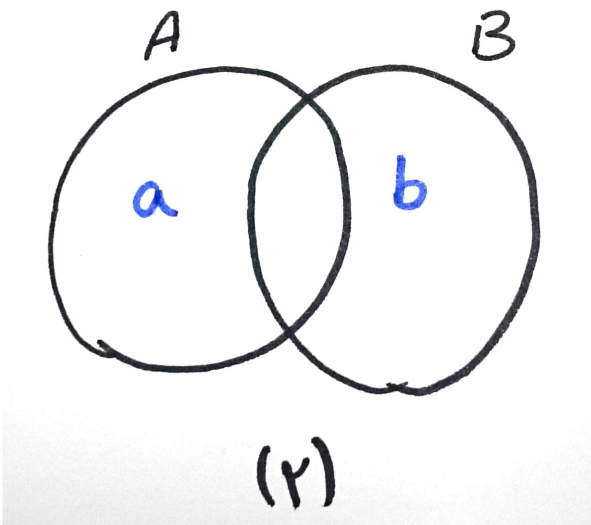
$$\exists x \quad A(x) \wedge \exists x \quad B(x) \to \exists x \quad (A(x) \wedge B(x))$$

پاسخ. جهان را به صورت کشیده شده در شکل زیر در نظر بگیرید. داریم

$$\exists x \quad x \in A$$

$$\exists x \quad x \in B$$

$$\neg(\exists x \quad x \in A \wedge x \in B)$$



$\square$

سوال ۹. آیا عبارت زیر همواره درست است؟

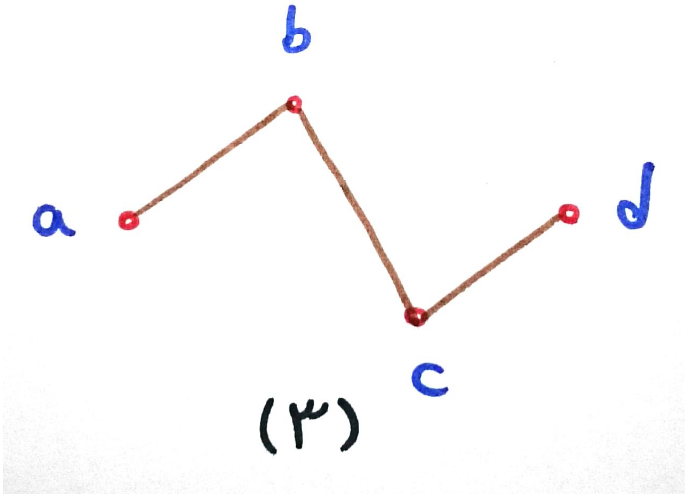
$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y) \to \exists y \quad \forall x \quad R(x,y)$$

پاسخ. جهان را به صورت زیر، مجموعه‌ی رأسهای یک گراف در نظر بگیرید:

$$M = \{a, b, c, d\}$$

و رابطه‌ی R را چنین تعبیر کنید:

$R(x,y)$ یعنی بین x و y یک یال وجود داشته باشد.



در جهان بالا جمله‌ی

$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y)$$

درست است ولی جمله‌ی زیر غلط است:

$$\exists y \quad \forall x \quad R(x,y)$$

$\square$

۵ جلسه‌ی پنجم

کوییز اول. جملات زیر را در زبانِ $L = \{R(x,y)\}$ فرمولبندی کنید:

۱. هر کس که دوستی داشته باشد که با همه دوست است، حداقل با دو نفر دوست نیست.

پاسخ.

$$\forall x \quad \Big(\exists y \quad \big(R(x,y) \wedge \forall z \quad R(y,z)\big) \rightarrow \exists r,s \quad \big(\neg R(x,r) \wedge \neg R(x,s) \wedge \neg(r=s)\big)\Big)$$

□

۲. اگر هر کس حداقل یک دوست داشته باشد، آنگاه دو نفر هستند که با هم دوست نیستند.

پاسخ.

$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y) \rightarrow \exists z,r \quad \neg R(z,r)$$

□

۱.۵ نظریه‌ی مجموعه‌ها

مجموعه را در ریاضیات دبیرستان به صورت زیر تعریف می‌کنند:

مجموعه، گردایه‌ای است از اشیاء معین و متمایز که دارای ویژگی خاصی هستند.

هر چند همه‌ی ما تعریف بالا را به صورت شهودی می‌توانیم بپذیریم ولی در عین حال باید بپذیریم که عبارتهای **گردایه، شیء، دور هم جمع آمدن** و ... ساده‌تر از خودِ مجموعه نیستند! به نظر می‌آید که در تعریف بالا، تنها کلمه‌ی مجموعه با چند کلمه‌ی دیگر جایگزین شده است. شاید این مشکل به ظاهر بزرگ نرسد. در واقع تا اوایل قرن بیستم تعریف شهودی بالا، که آن را به کانتور نسبت می‌دهند، تعریف مورد قبول ریاضیدانان برای مفهوم مجموعه بود. بنابراین از نظر کانتور، اگر $p(x)$ یک ویژگی باشد، هر عبارت به صورت زیر یک مجموعه است:

$$\{x | p(x)\}$$

عبارت بالا، مجموعه‌ی x هائی را نشان می‌دهد که ویژگیِ p را دارا هستند.

در قسمت بعد بررسی کرده‌ایم که مشکل تعریف بالا چه می‌تواند باشد.

۲.۵ پارادوکس راسِل

فرض کنید $p(x)$ ویژگیِ $x \notin x$ باشد:

$$p(x) : x \notin x$$

آنگاه بنا به آنچه در بالا گفتیم، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$A = \{x | x \notin x\}$$

از آنجا که A یک مجموعه است، پس گزاره‌ی $p(x)$ که درمورد مجموعه‌ها نوشته شده است، با جایگذاریِ A به جای x یا باید درست باشد یا غلط؛ به بیان دیگر گزاره‌ی $p(A)$ یا درست است یا غلط (بنا به اصل ردّ شق ثالث). حال درست بودن یا غلط بودن این گزاره را بررسی می‌کنیم.

سوال ۱۰. آیا $A \in A$؟

پاسخ. اگر $A \in A$ آنگاه

$$A \in \{x | x \notin x\}$$

پس $A \notin A$ ↯

پس به نظر می‌آید که A متعلق به A نیست. اما انگار این هم درست نیست: اگر $A \notin A$ آنگاه

$$A \notin \{x | x \notin x\}$$

پس $A \in A$ ↯

رویداد پاردوکس راسل نشان می‌دهد که شهود علمی اولیه ما از مجموعه‌ها، که سالها پایه‌ی بنای کار ریاضیدانان بوده است، شهودی تناقض‌آمیز است. در واقع علم ریاضی، در همین نخستین قدم دچار تناقضی آشکار شده است. از کجا معلوم که سایر بخشهای دیگر ریاضی دچار تناقض نباشند؟ شاید من امروز قضیه‌ای در اتاق کارم ثابت کنم که چند ماه بعد قرار است نقیض آن را اثبات کنم!

از آنجا که علمِ حاویِ تناقض، مطلوب ما نیست، باید برای تعریف مجموعه‌ها، چاره‌ای بجوئیم.

در بخش بعد راهی را که منطق برای رهائی از چنین پارادوکسهائی پیش پای ریاضیدانان گذاشته است معرفی می‌کنیم. پیش از آن در زیر دو نکته را یادآور می‌شویم:

نظریه‌ی مجموعه‌های کانتور را گاهی نظریه‌ی مجموعه‌ی سهل‌انگارانه [۱۰] نیز می‌خوانند.

پارادوکس راسل، که ذهن بسیاری از ریاضیدانان و فیلسوفان را به خود مشغول کرده بود، از نوع پارادوکسهای «ارجاع‌به‌خود» [۱۱] است. در زیر مثال دیگری از چنین پارادوکسها را آورده‌ایم:

مثال ۴۲ (پارادوکس دروغگو)**.** فرض کنید شخصی بگوید «من دروغگو هستم». آیا این شخص دروغگو است یا راستگو؟ اگر راستگو باشد، پس راست گفته است که دروغگو است، پس دروغگو است! اگر دروغگو باشد پس دروغ گفته است که دروغگوست، پس راستگوست!

[۱۰] naive set theory

[۱۱] self-reference

□

۳.۵ روش اصل‌موضوعه‌ای برای تعریف مجموعه

برای رهائی از پارادوکسهائی مانند پاردوکس راسل، ریاضیدانان روش اصل موضوعه‌ای را برای تعریف مجموعه برگزیده‌اند. این روش بر منطق مرتبه‌ی اول استوار است که آن را در جلسات اول معرفی کرده‌ایم.

نخست زبان مرتبه اول زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$L = \{\in\}$$

در روش اصل‌موضوعه‌ای، مجموعه، متغیری مانند $x, y, z, \ldots$ است که از اصول «نظریه‌ی مجموعه‌ها» پیروی کند. همه‌ی این اصول را می‌توان با استفاده از ادوات منطقی و علامت $\in$ نوشت.

بخش اعظمی از ریاضیات امروز بر پایه‌ی **اصول نظریه‌ی مجموعه‌های زرملو ـ فرانکل به علاوه‌ی اصل انتخاب** بنا نهاده شده است. مجموعه‌ی این اصول را ZFC می‌خوانیم. در زیر (و در جلسه‌ی بعد) این اصول را معرفی کرده‌ایم. در طی جلسات آینده، برخی از آنها را به تفصیل بررسی خواهیم کرد و نیز به بررسی این نکته خواهیم پرداخت که آیا در روش اصل موضوعه‌ای هم پارادوکس راسل رخ می‌دهد. توجه کنید که اصول زیر، **از همدیگر نتیجه نمی‌شوند**.

اصول ZFC را در زبان $L = \{\in\}$ و در منطق مرتبه‌ی اول می‌نویسیم:

۱. **اصل وجود:**

بیان غیر رسمی: تهی یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\exists X \quad \forall y \quad \neg(y \in X)$$

از این بعد از نمادِ $X = \emptyset$ به جای فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\forall y \quad \neg(y \in x)$$

پس اصل اول می‌گوید که

$$\exists X \quad X = \emptyset$$

۲. **اصل گسترش:** بیان غیر رسمی: دو مجموعه که اعضای یکسانی داشته باشند، با هم برابرند. بیان رسمی:

$$\forall A, B \quad \Big(\forall x \quad (x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B\Big)$$

۳. **اصل تصریح:**

بیان غیر رسمی: اگر بدانیم که A یک مجموعه است آنگاه اگر $p(x)$ یک ویژگی باشد که در منطق مرتبه‌ی اول بیان شده است، آنگاه عبارت زیر نیز یک مجموعه است.

$$\{x \in A | p(x)\}$$

بیان رسمی:

$$\forall A \quad \exists B \quad \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge p(x))$$

در واقع اگر A یک مجموعه باشد، عبارت زیر بنا به اصل تصریح یک مجموعه است.

$$B = \{x \in A | p(x)\}$$

توجه ۴۳. توجه کنید که در نظریه‌ی مجموعه‌های سهل‌انگارانه، هر عبارتی به صورت زیر را یک مجموعه دانستیم:

$$\{x | p(x)\}$$

در اصل تصریح، یک شرط به بالا اضافه کرده‌ایم: **اگر بدانیم که A یک مجموعه است،** آنگاه عبارت زیر نیز یک مجموعه است:

$$\{x \in A | p(x)\}.$$

۴. **اصل جفت‌سازی:**

بیان غیر رسمی: اگر x و y دو مجموعه باشند، آنگاه $\{x, y\}$ یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\forall x, y \quad \exists A \quad \Big(\forall z \quad z \in A \leftrightarrow (z = x \vee z = y)\Big)$$

۵. **اصل اجتماع:**

بیان غیر رسمی: هر اجتماعی از مجموعه‌ها خود یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\forall A \quad \exists U \quad \forall x \quad \Big(x \in U \leftrightarrow \exists B \quad B \in A \wedge x \in B\Big)$$

اگر U مجموعه‌ی بالا باشد، می‌نویسیم:

$$U = \bigcup A$$

مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{A_۱, A_۲, A_۳\} \quad U = \bigcup A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$$

$$x \in U \leftrightarrow (x \in A_۱) \vee (x \in A_۲) \vee (x \in A_۳)$$

مثال ۴۴. یکی از دانشجویان پرسید که فرق بین اصل جفت‌سازی و اصل اجتماع چیست. در زیر این تفاوت آشکار است:

$$x = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$y = \{۴, ۵, ۶\}$$

$$x \cup y = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

$$\{x, y\} = \{\{۱, ۲, ۳\}, \{۴, ۵, ۶\}\}$$

۶. **اصل مجموعه‌ی توان:**

بیان غیر رسمی: اگر A یک مجموعه باشد، گردایه‌ی تمام زیر مجموعه‌های آن نیز یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\forall A \quad \exists B \quad \left(\forall x \quad x \in B \leftrightarrow \left(\forall z \quad \underbrace{(z \in x \rightarrow z \in A)}_{x \subseteq A}\right)\right)$$

توجه ۴۵. برای یک مجموعه‌ی A، گردایه‌ی تمام زیر مجموعه‌هایش را (که بنا به اصل بالا یک مجموعه است) با $P(A)$ نشان می‌دهیم:

$$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

۷. **اصل جانشانی** [۱۲]:

برای این اصل، به بیان غیر رسمی بسنده می‌کنیم. بیان غیر رسمی: **تصویر** یک مجموعه تحت یک **تابع تعریف‌پذیر** ، مجموعه است. پرداختن به معنی «تابع تعریف‌پذیر» جزو اهداف این درس نیست. دانشجوی علاقه‌مند می‌تواند با این مفهوم در درس «منطق» آشنائی پیدا کند.

۸. **اصل انتظام:**

$$\forall X \quad \left(X \neq \emptyset \rightarrow \exists z \quad z \in X \quad z \cap X = \emptyset\right)$$

در جلسه‌ی بعد این اصل را توضیح خواهیم داد و به باقی اصول نیز خواهیم پرداخت.

---

[۱۲] replacement

۶ جلسه‌ی ششم

اصل انتظام

در جلسه‌ی قبل، با اصل انتظام آشنا شدیم:

$$\forall X \quad \left(X \neq \emptyset \to \exists z \quad z \in X \wedge z \cap X = \emptyset \right)$$

دو نتیجه از اصل انتظام

۱. از اصول ZFC نتیجه می‌شود که:

$$\forall x \quad x \notin x.$$

یعنی عبارتی به صورت زیر (یعنی به صورتی که تعداد آکولادها نامتناهی باشد)، مجموعه **به حساب نمی‌آید:**

$$\left\{ \left\{ \{ \ldots \} \right\} \right\}$$

اثبات این گفته، از اثبات قسمت بعدی نتیجه می‌شود.

۲. به طور کلی‌تر، در نظریه‌ی مجموعه‌ها هیچ دنباله‌ی به صورت زیر پیدا نمی‌شود:

$$a_۱ \ni a_۲ \ni a_۳ \ni \ldots$$

اثبات. فرض کنید که دنباله‌ای نزولی به صورت زیر موجود باشد.

$$a_۱ \ni a_۲ \ni a_۳ \ni \ldots$$

بنا به اصل جانشانی $A = \{a_۱, a_۲, \ldots\}$ یک مجموعه است. [۱۳] بنا به اصل انتظام از آنجا که $A \neq \emptyset$ داریم:

$$\exists z \in A \quad z \cap A = \emptyset$$

فرض کنیم که

$$z = a_k$$

اما $a_{k+۱} \in a_k$ پس

$$\lightning \quad a_{k+۱} \in \underbrace{z \cap A}_{a_k}$$

□

[۱۳] این قسمت اثبات را فعلاً از من بپذیرید. از آنجا که پرداختن به اصل جانشانی به صورت دقیق، جزو اهداف درس نیست، فعلاً توضیح نمی‌دهم که چگونه با اصل جانشانی به این نتیجه رسیده‌ایم.

مثال ۴۶. سعی کنید که اصل انتظام را در مجموعه‌ای نقض کنید، آیا این کار برایتان امکان‌پذیر است؟:

$$A = \Big\{\Big\{\{\{۱, ۲\}\}\Big\}, \Big\{\{۱, ۲\}\Big\}, \{۱, ۲\}\Big\}$$

اصل نهم، اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی

این که جهان هستی متناهی است یا نامتناهی، قابل اثبات نیست. در نظریه‌ی مجموعه‌ها، این که مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد، یک اصل است:

بیان غیر رسمی: یک مجموعه‌ی نامتناهی موجود است.

بیان رسمی این اصل در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها، به شیوه‌ی هوشمندانه‌ی زیر است:

بیان رسمی:

$$\exists X \quad \Big(\emptyset \in X \wedge \forall y \quad \big(y \in X \to y \cup \{y\} \in X\big)\Big)$$

پس مجموعه‌ی X که در اصل بالا بدان اشاره شده است، شامل مجموعه‌ی زیر است:

$$\Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}, \dots\Big\}$$

اصل دهم، اصل انتخاب

فرض کنید $A_۱, A_۲, A_۳$ سه مجموعه‌ی ناتهی باشند؛ پس

$$\exists x_۱, x_۲, x_۳ \quad x_۱ \in A_۱ \wedge x_۲ \in A_۲ \wedge x_۳ \in A_۳$$

یعنی عنصرِ $(x_۱, x_۲, x_۳)$ در مجموعه‌ی $A_۱ \times A_۲ \times A_۳$ واقع است. اما اگر تعداد این مجموعه‌ها نامتناهی باشد، چگونه می‌توان از هر یک از آنها عضوی انتخاب کرد. امکان‌پذیر بودن این امر، خودْ یک اصل است.

بیان غیر رسمی اصل انتخاب: اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد، می‌توان از هر یک از آنها عضوی انتخاب کرد.

بیان رسمی:

$$\forall X \quad \Big(X \neq \emptyset \to \exists f : X \to \bigcup X \quad \forall x \in X \quad f(x) \in x\Big)$$

مثال ۴۷.

$$X = \Big\{\{۱, ۲\}, \{۴, ۵, ۶\}, \{۷, ۸\}, \{۹\}\Big\}$$

$$\bigcup X = \Big\{۱, ۲, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\Big\}$$

$$f : X \to \bigcup X$$

$$f(\{۱, ۲\}) = ۱ \quad f(\{۴, ۵, ۶\}) = ۶, \quad f(\{۷, ۸\}) = ۷, \quad f(\{۹\}) = ۹$$

تابع f در بالا یک مثال از یک تابع انتخاب است. برای مجموعه‌ی X در بالا، توابع انتخاب دیگری نیز موجودند.

۱.۶ بررسی پارادوکس راسل در زداف‌سی

گفتیم که رهیافت اصل‌موضوعه‌ای به نظریه‌ی مجموعه‌ها، برای رهائیدن از پارادوکسهائی مانند پارادوکس راسل برگزیده شده است. در زیر بررسی کرده‌ایم که چرا در زداف‌سی پارادوکس راسل رخ نمی‌دهد. نخست یک مشاهده‌ی مهم داشته باشیم: گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها، خودْ مجموعه نیست.

مشاهده ۴۸. نشان دهید که از اصول ZFC نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها نداریم.

اثبات. راه اول (با استفاده از اصل انتظام). فرض کنیم گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها، یک مجموعه باشد؛ آن را A بنامیم. پس از آنجا که A یک مجموعه است و A گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست پس $A \in A$. اما این با اصل انتظام تناقض دارد.
راه دوم (بدون استفاده از اصل انتظام و با استفاده از اصل تصریح). فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها باشد. بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$B = \{x \in A | x \notin x\}$$

حال دو حالت داریم، یا $B \in B$ یا $B \notin B$. اگر $B \in B$ آنگاه $B \in \{x \in A | x \notin x\}$ پس $B \notin B$. و به طور مشابه اگر $B \notin B$ آنگاه $B \in B$ و این تناقض است. □

معمولاً در ریاضیات برای سخن گفتن درباره‌ی گردایه‌هائی که مجموعه نیستند از کلمه‌ی **کلاس** استفاده می‌شود.

کلاسِ همه‌ی مجموعه‌ها : V

سوال ۱۱. آیا پارادوکس راسل، اصول ZFC را دچار مشکل می‌کند؟

پاسخ. عبارت $\{x | x \notin x\}$، بنا به اصل انتظام، کلاس همه‌ی مجموعه‌هاست. پس مجموعه نیست!

□

[۱۴] در سال اول دانشگاه، هرگز متوجه نمی‌شدم که چرا اصل انتخاب، یک اصل است. با خود می‌گفتم که اصل انتخاب را می‌توان ثابت کرد، پس اصل نیست. اثبات من این بود: فرض کنیم $\{X_i\}_{i \in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. داریم

$$\forall i \in I \quad X_i \neq \emptyset$$

پس فرض کنیم

$$\forall i \quad x_i \in X_i$$

پس $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$! به نظر شما، اشکال استدلال من چه بوده است؟

۲.۶ کار با اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

تعریف ۴۹. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، می‌نویسیم $A \subseteq B$ هرگاه:

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \in B\Big)$$

قضیه ۵۰. مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست؛ به بیان ریاضی:

$$\forall X \quad \emptyset \subseteq X$$

اثبات. باید نشان دهیم که

$$\forall X \forall x \quad \Big(x \in \emptyset \to x \in X\Big)$$

حال فرض کنیم X یک مجموعه باشد، باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad \Big(x \in \emptyset \to x \in X\Big)$$

حال یک مجموعه‌ی دلخواهِ x را در نظر می‌گیریم. باید نشان دهیم که عبارت زیر درست است:

$$x \in \emptyset \to x \in A$$

عبارت بالا به انتفاء مقدم درست است. □

قضیه ۵۱. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$.

اثبات. فرض کنید A ، B و C مجموعه باشند و $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. برای نشان دادن این که $A \subseteq C$ باید عبارت زیر را ثابت کنیم:

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \in C\Big)$$

اگر a یک عضو دلخواه باشد، آنگاه

$$a \in A \to a \in B(۱)$$

از آنجا که $B \subseteq C$ داریم

$$a \in B \to a \in C(۲)$$

پس بنا به تاتولوژیهای بخش قبل، از (۲) ,(۱) نتیجه می‌شود که

$$a \in A \to a \in C.$$

از آنجا که a به دلخواه انتخاب شده است، پس نشان داده‌ایم که

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \in C\Big)$$

یعنی

$$A \subseteq C$$

□

۳.۶ اعداد طبیعی و استقراء

بحث درباره‌ی اعدادا طبیعی را در جلسه‌ی آخر درس دقیق و تکمیل می‌کنیم. در اینجا مبانی لازم برای شناخت اعداد طبیعی را ارائه می‌کنیم و پس از آن، بحثها را با همان شهود مدرسگی‌مان درباره‌ی اعداد طبیعی ادامه می‌دهیم. روشی که زِرمِلو برای تعریف اعداد طبیعی پیشنهاد کرده است، روش زیر است:

$$
\begin{aligned}
&۰ = \emptyset \\
&۱ = \{۰\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \\
&۲ = \{۰, ۱\} = \{\emptyset\} \cup \big\{\{\emptyset\}\big\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&۳ = \{۰, ۱, ۲\} = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

تعریف ۵۲. فرض کنید A یک مجموعه باشد. آن را استقرائی می‌خوانیم هرگاه $\emptyset \in A$ و

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \cup \{x\} \in A\Big)$$

توجه ۵۳. اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی در واقع بیانگر این است که یک مجموعه‌ی استقرائی موجود است.

تعریف ۵۴. هر عنصری (یعنی هر مجموعه‌ای) که متعلق به تمام مجموعه‌های استقرائی باشد، یک **عدد طبیعی** می‌نامیم.

قضیه ۵۵. مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد.
(منظور: یک مجموعه هست که اعضای آن دقیقاً اعداد طبیعی هستند.)

قضیه‌ی بالا را در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد.

توجه ۵۶. در نظریه‌ی مجموعه‌های اصل‌موضوعه‌ای، هر متغیری که درباره‌ی آن صحبت شود، یک مجموعه است. در واقع جهانی که روی آن سور زده می‌شود جهان مجموعه‌هاست. پس برای ما مجموعه و عنصر دو مفهوم متفاوت نیستند. هر عنصری از یک مجموعه، خود نیز یک مجموعه است.

۷ جلسه‌ی هفتم

۱.۷ اعداد طبیعی

در جلسات قبل با اصل موجود یک مجموعه‌ی استقرایی (یا وجود یک مجموعه‌ی نامتناهی) آشنا شدیم:

$$\exists A \quad \Big(\emptyset \in A \wedge \forall x \quad (x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A)\Big)$$

نیز گفتیم که از این ایده، برای تعریف اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&۰ = \emptyset\\
&۱ = \{۰\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}.\\
&۲ = \{۰, ۱\} = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}\\
&۳ = \{۰, ۱, ۲\} = \left\{\emptyset, \Big\{\emptyset\Big\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}\right\}
\end{aligned}$$

تعریف ۵۷. منظور از یک عدد طبیعی، **مجموعه‌ای** است که به همه‌ی مجموعه‌های استقرایی تعلق دارد.

قضیه ۵۸. مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد. (یعنی مجموعه‌ای موجود است که مجموعه های موجود در آن، یا همان اعضای آن، دقیقاً اعداد طبیعی هستند.)

اثبات. بنا به اصل وجودِ یک مجموعه‌ی نامتناهی، یک مجموعه‌ی استقراییِ A موجود است. بنا به اصل تصریح عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{x \in A | \forall y \quad \Big(\big(\underbrace{\emptyset \in y \wedge \forall z \quad (z \in y \rightarrow z \cup \{z\} \in y)}_{\text{اگر } y \text{ استقرایی باشد.}}\big) \rightarrow x \in y\Big)\}$$

□

در واقع، در قضیه‌ی بالا ثابت کرده‌ایم که مجموعه‌ی اعداد طبیعی اشتراک همه‌ی مجموعه‌های استقرائی است. یعنی اگر x طبیعی باشد آنگاه x در تمام مجموعه‌های استقرائی است و اگر x در تمام مجموعه‌های استقرائی باشد، x طبیعی است.

توجه ۵۹. مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با $\mathbf{N}$ نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{N} = \bigcap_{A \text{ استقرایی}} A$$

پس $\mathbf{N}$ کوچکترین مجموعه‌ی استقرائی است.

قضیه ۶۰ (استقراء روی اعداد طبیعی)**.** فرض کنید $p(x)$ یک ویژگی برای اعداد طبیعی باشد. آنگاه جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست است:

$$p(۰) \wedge \forall x \quad \Big(p(x) \rightarrow p(x+۱)\Big) \rightarrow \forall y \quad p(y)$$

اثبات. فرض کنید جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست باشد.

$$p(۰) \wedge \forall x \quad \big(p(x) \to p(x+۱)\big)$$

هدف: نشان دادن این که جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست است:

$$\forall x \quad p(x)$$

بنا به اصل تصریح عبارت زیر یک مجموعه است:

$$S = \{x \in \mathbf{N} | p(x)\}$$

می‌دانیم که $\quad S \subseteq \mathbf{N} \quad$ ۱

یادآوری ۶۱ (اصل گسترش)**.**

$$A = B \leftrightarrow \forall x \quad (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

به بیان دیگر با توجه به اینکه نماد $\subseteq$ را تعریف کرده‌ایم، اصل گسترش را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

کافیست نشان دهیم که $\mathbf{N} \subseteq S$. در آن صورت برای تمام اعداد طبیعی، حکمِ p درست خواهد بود.

توجه ۶۲. اگر نشان دهیم که S یک مجموعه‌ی استقرائی است آنگاه $\mathbf{N} \subseteq S$.

پس نشان می‌دهیم که S استقرائی است.
اولاً $۰ \in S$. ثانیاً اگر $x \in S$ آنگاه

$$x + ۱ := x \cup \{x\} \in S$$

پس S استقرائی است. پس $\quad \mathbf{N} \subseteq S \quad$ ۲

$$۱, ۲, \text{اصل گسترش} \Rightarrow \mathbf{N} = S$$

□

در قضیه‌ی بالا در واقع «استقراء» را برای اعداد طبیعی ثابت کرده‌ایم. یعنی ثابت کرده‌ایم که اگر p حکمی درباره‌ی اعداد طبیعی باشد و $p(۰)$ برقرار باشد و از برقراری هر $p(x)$ برقراریِ $p(x+۱)$ نتیجه شود، آنگاه حکم مورد نظر برای تمام اعداد طبیعی درست است.
از استقراء گاهی برای **تعریف** های مربوط به اعداد طبیعی نیز استفاده می‌کنیم:

۲.۷ تعریف توان x^n

فرض کنید x یک متغیر (مثلاً یک عدد حقیقی) باشد. توانهای طبیعیِ x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x^0 := 1$$

$$x^{n+1} := x^n.x$$

تعریف ۶۳ (مثال برای استقراء)**.** اگر n یک عدد طبیعی باشد و r یک عدد صحیح تعریف کنید:

$$\begin{aligned} \binom{0}{0} &= 1 \\ \binom{0}{r} &= 0 \quad \forall r \neq 0 \\ \binom{n}{r} &= \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} \end{aligned}$$

تمرین ۷. نشان دهید که (برای هر $0 \leqslant r \leqslant n$) داریم

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

اثبات.

$$\text{حکم} \quad p(n): \quad \forall 0 \leqslant r \leqslant n \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ابتدا بررسی می‌کنیم که حکم در ۰ برقرار است:

$$p(0): \quad \forall \underbrace{0 \leqslant r \leqslant 0}_{r=0} \quad \cancelto{1}{\binom{0}{r}} = \frac{0!}{r!(0-r)!} = 1$$

فرض کنیم که $p(n)$ برقرار باشد، یعنی

$$\forall 0 \leqslant r \leqslant n \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

هدف: نشان دادن اینکه $p(n+1)$ برقرار است.

$$\forall 0 \leqslant r \leqslant n+1 \quad \binom{n+1}{r} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}$$

فرض کنیم $r < n+1$ آنگاه داریم

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{n!}{n!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} =$$

$$\frac{n!(n-r+1) + n! \cdot r}{r!(n-r+1)!} = \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

اثبات حکم هنوز تمام نشده است. تنها چیزی که مانده است این است که نشان دهیم که $\binom{n+1}{n+1} = 1$. این قسمت را به عنوان تمرین به عهده‌ی شما می‌گذاریم. □

تمرین ۸. نشان دهید که

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \binom{n}{n} = 1$$

قضیه ۶۴. فرض کنید که x, y دو متغیر باشند. آنگاه داریم:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

اثبات. حکم $p(n)$ که قرار است با استقراء ثابت شود به صورت زیر است:

$$p(n): \quad (x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

بررسی $p(0)$:

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0$$

حال فرض کنید $p(n)$ برقرار باشد:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y^i x^{n-i}$$

بررسی $p(n+1)$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\left(\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n}y^n\right)$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}x^{n+1}}_{\binom{n+1}{0}x^{n+1}} + \left(\underbrace{\binom{n}{1}x^n y + \binom{n}{0}x^n y}_{\binom{n+1}{1}x^n y}\right) + \left(\underbrace{\binom{n}{2} + \binom{n}{1}}_{\binom{n+1}{2}}\right)x^{n-1}y^2 + \ldots +$$

$$\left(\underbrace{\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}}_{\binom{n+1}{n}}\right)xy^n + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\binom{n+1}{n+1}}y^{n+1}$$

□

منظور از یک مجموعه‌ی n عضوی، مجموعه‌ای مانند مجموعه‌ی زیر است:

$$n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

قضیه ۶۵. تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی $(r \leq n)$ برابر است با

$$\binom{n}{r}.$$

اثبات. فرض کنید $p(n)$ عبارت زیر باشد:
به ازای هر $r \leqslant n$ تعداد زیر مجموعه‌ی های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با

$$\binom{n}{r}.$$

نخست $p(۰)$ را بررسی می‌کنیم: تعداد زیر مجموعه‌های ۰ عضوی یک مجموعه‌ی ۰ عضوی برابر است با

$$\binom{۰}{۰} = ۱$$

حال $p(n + ۱)$ را بررسی می‌نماییم. فرض کنید $p(n)$ درست باشد. فرض کنید $A = \{x_۱, \ldots, x_{n+۱}\}$ یک مجموعه‌ی $n + ۱$ عضوی باشد و فرض کنید $r \leqslant n$. تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی A که شامل $x_{n+۱}$ نیستند برابر است با $\binom{n}{r}$ و تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی A که شامل $x_{n+۱}$ هستند برابر است با

$$\binom{n}{r-۱}.$$

پس تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی $n + ۱$ عضوی برابر است با

$$\binom{n}{r-۱} + \binom{n}{r} = \binom{n+۱}{r}$$

همچنین تعداد زیرمجموعه‌های $n+۱$ عضوی یک مجموعه‌ی $n+۱$ عضوی، یکی است و برابر است با $\binom{n+۱}{n+۱}$. □

قضیه ۶۶. تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با ۲^n.

اثبات. تعداد زیر مجموعه‌های i عضوی آن برابر است با $\binom{n}{i}$. تعداد کل زیر مجموعه‌ها برابر است با

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \ldots + \binom{n}{n-۱} + \binom{n}{n} = (۱ + ۱)^n = ۲^n$$

□

گفتیم که اگر A یک مجموعه باشد، آنگاه بنابراصل وجود مجموعه‌ی توانی، یک مجموعه به نام $p(A)$ موجود است که از زیرمجموعه‌های A تشکیل شده است. قضیه‌ی بالا در واقع می‌گوید که اگر $|A| = n$ آنگاه $|p(A)| = ۲^n$. در واقع تعداد اعضایِ $p(A)$ اکیداً از تعداد اعضایِ A بیشتر است:

$$\big|p(n)\big| = ۲^n$$

به همین علت است که به این اصل «اصل توان» گفته می‌شود. در بخشهای آخرین این درس خواهیم دید که این حکم، برای همه‌ی «کاردینالها» درست است. برای مثال اگر $\aleph_۰$ تعداد اعداد طبیعی باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی برابر است با $۲^{\aleph_۰} > \aleph_۰$. یکی از سوالهای باز در ریاضیات این است که آیا عددی بین $\aleph_۰$ و $۲^{\aleph_۰}$ وجود دارد؟ فعلاً نگران فهمیدن این بند آخر نباشید. بعداً مفصلاً بدان خواهیم پرداخت.

۸ جلسه‌ی هشتم، دوشنبه

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، آنگاه $p(A)$ دارای ۲^n عضو است.[۱۵] وقتی می‌گوییم یک مجموعه n عضو دارد یعنی در **تناظر یک به یک** با مجموعه‌ی

$$n = \{۰, ۱, \dots, n-۱\}$$

است. مثلاً مجموعه‌ی

$$\{\text{حسن}, \text{علی}, \text{حسین}\}$$

دارای سه عضو است، زیرا می‌توان حسن را با ۱ و علی را با ۲ و حسین را با ۳ متناظر کرد:

$$۳ = \{۰, ۱, ۲\}$$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی

$$\mathbf{N} = \{۰, ۱, ۲, \dots\}$$

دارای $\aleph_۰$ عضو است. در بخش‌های آینده این مفاهیم را دقیق توضیح خواهیم داد و خواهیم دید که:

$$|\mathbf{N}| = \aleph_۰$$

$$|\mathbf{Q}| = \aleph_۰$$

$$|\mathbf{R}| = ۲^{\aleph_۰}$$

۱.۸ اجتماع دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. آنگاه یک مجموعه‌ی C موجود است به طوری که

$$\forall x \quad (x \in C \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$$

مجموعه‌ی C را اجتماع دو مجموعه‌ی A, B خوانده آن را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم.

اثبات. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. بنابه اصل جفت‌سازی

$$D = \{A, B\}$$

یک مجموعه است، به بیان بهتر بنا به اصل جفت‌سازی از آنجا که A, B مجموعه‌اند:

$$\exists D \quad \forall x \quad (x \in D \leftrightarrow x = A \vee x = B)$$

[۱۵] Power set of A

حال بنا به اصل اجتماع،

$$\exists E \quad \forall x \quad (x \in E \leftrightarrow \exists y \in D \quad x \in y)$$

پس

$$\forall x \quad (x \in E \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

مجموعه‌ی E در بالا همان $A \cup B$ است. $\square$

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. عبارت زیر، بنا بر اصل تصریح یک مجموعه است:

$$\{x \in A | x \in B\}$$

مجموعه‌ی بالا را با $A \cap B$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۶۷. فرض کنید A, B, X مجموعه باشند و $A, B \subseteq X$. نشان دهید که

۱. $A \cup \emptyset = A$

۲. $A \cap X = A$

۳. $A \cup A = A$

۴. $A \cap A = A$

۵. $A \cup B = B \cup A$

۶. $A \cap B = B \cap A$

۷. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

۸. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

اثبات. مورد دوم: بنا به اصل گسترش، برای این که نشان دهیم که $A \cap X = A$ باید ثابت کنیم که

$$\forall x \quad (x \in A \cap X \leftrightarrow x \in A)$$

مجموعه‌ی دلخواه $x.$ را در نظر بگیرید. باید نشان دهیم:

$$x. \in A \cap X \leftrightarrow x. \in A$$

طبق تعریف اشتراک داریم:

$$x. \in A \cap X \leftrightarrow (x. \in A) \wedge (x. \in X)$$

پس کافی است نشان دهیم که

$$(x_۰ \in A) \wedge (x_۰ \in X) \leftrightarrow x_۰ \in A.$$

می‌دانیم که

$$p \wedge q \to p$$

پس داریم:

$$(x_۰ \in A) \wedge (x_۰ \in X) \to x_۰ \in A$$

همچنین از آنجا که $A \subseteq X$ داریم

$$x_۰ \in A \to x_۰ \in X$$

عبارت زیر تاتولوژی است:

$$(p \to q) \to \big(p \to (p \wedge q)\big)$$

پس

$$x_۰ \in A \to (x_۰ \in A) \wedge (x_۰ \in X)$$

$\square$

تمرین ۹. نشان دهید که

۱. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

۲. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

۳. $A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

۴. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$

۵. $A \cup B = A \cap B \iff A = B$

۶. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

سوال ۱۲. آیا عبارت زیر درست است؟

$$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$$

پاسخ. مثال نقض.

$$A = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$B = \{۲\}$$

$$C = \{۳\}$$

داریم

$$A \cup B = A \cup C \wedge \neg B = C$$

□

تمرین ۱۰. فرض کنید $A, B_1, \ldots, B_n$ مجموعه باشند. با استفاده از استقراء نشان دهید که

$$A \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

و

$$A \cup (B_1 \cap \ldots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap \ldots \cap (A \cup B_n)$$

۲.۸ تفاضل

اگر A و B دو مجموعه باشند،تفاضل نسبی آنها را با $A - B$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A - B = \{x \in A | x \notin B\}$$

احتمالاً در دبیرستان خوانده‌اید که مجموعه‌ای به نام **مجموعه‌ی مرجع** وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند. در زیر درستی این گفته را بررسی می‌کنیم. در جلسات قبل ثابت کردیم که مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

سوال ۱۳. آیا مجموعه‌ای وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها، زیر مجموعه‌ی آن باشند؟

پاسخ. فرض کنید C مجموعه‌ای باشد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند. بنابراین بنا به اصل اجتماع، $\bigcup C$ نیز یک مجموعه است. ادعا می‌کنیم که $\bigcup C$ شامل همه‌ی مجموعه‌هاست، و این تناقض است، زیرا مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.
فرض می‌کنیم A یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم که $A \in \bigcup C$. برای اثبات این ادعا باید نشان دهیم که $D \in C$ موجود است، به طوری که $A \in D$. می دانیم که $\{A\}$ بنا به اصل زوج‌سازی یک مجموعه است و $A \in \{A\}$ ادعا می‌کنیم که $\{A\} \in C$. می‌دانیم که $\{\{A\}\}$ نیز یک مجموعه است. بنا به فرضمان درباره‌ی C داریم

$$\{\{A\}\} \subseteq C$$

پس

$$\{A\} \in C.$$

□

بنابراین این ادعّای دبیرستانی که مجموعه‌ای مرجع وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند درست نیست.

اما نیاز به داشتن یک مجموعه‌ی «به‌اندازه‌ی‌کافی‌بزرگ» را چگونه برطرف کنیم؟ می‌دانیم که اجتماع هر تعداد (کم!) از مجموعه، یک مجموعه است. فرض می‌کنیم که U یک مجموعه باشد که **همه‌ی مجموعه‌هایی که ادامه‌ی این درس درباره‌ی آنها صحبت خواهیم کرد،** زیر مجموعه‌ی آن باشند. کافی است U را اجتماع همه‌ی مجموعه‌هائی بگیریم که در این جزوه بدانها اشاره شده است. پس بیایید U را مجموعه‌ی مرجع بنامیم.

تعریف ۶۸. برای هر مجموعه A تعریف کنید:

$$A^c = U - A$$

تمرین ۱۱. نشان دهید که

$$A - B = A \cap B^c$$

قضیه ۶۹.

۱. $(A^c)^c = A$

۲. $\emptyset^c = U$

۳. $U^c = \emptyset$

۴. $A \cap A^c = \emptyset$

۵. $A \cup A^c = U$

۶. $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$

۷. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

۸. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

مثال ۷۰. نشان دهید که برای هر مجموعه‌ی A ، B و C داریم:

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

پاسخ. بنا به اصل گسترش، کافی است نشان دهیم:

$$(۱) \quad A \cap (B - C) \subseteq (A \cap B) - (A \cap C)$$

و

$$(۲) \quad (A \cap B) - (A \cap C) \subseteq A \cap (B - C)$$

□

اثبات. برای اثبات موارد ۱ و ۲ باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad x \in A \cap (B - C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) - (A \cap C)$$

فرض کنید x یک مجموعه‌ی دلخواه باشد.

$$x \in A \cap (B - C) \iff (x \in A) \wedge (x \in B - C) \iff$$

$$(x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \iff$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \iff$$

$$x \in (A \cap B) \wedge (x \notin A \cap C) \iff$$

$$x \in (A \cap B) - (A \cap C)$$

□

تمرین ۱۲. نشان دهید که

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

تعریف می‌کنیم

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

تمرین ۱۳. فرض کنید که A یک مجموعه باشد و $X = P(A)$. نشان دهید که $(X, \oplus)$ یک گروه آبلی [۱۶] است؛ یعنی موارد زیر را نشان دهید:

۱. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B \in X$

۲. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B = B \oplus A$

۳. $\forall A, B, C \in X \quad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

۴. $\forall A \quad A \oplus \emptyset = A$

۵. $\forall A \quad A \oplus A = \emptyset$

در واقع در تمرین بالا نشان داده‌اید که $\oplus$ ویژگی‌هائی شبیه جمع اعداد دارد. هر چند در بالا این که

$$A \oplus A = \emptyset$$

با درک ما نسبت به جمع اعداد سازگار نیست!

[۱۶] با مفهوم گروه آبلی در درس مبانی جبر آشنا خواهید شد. گروه آبلی یک مجموعه است که روی آن یک عمل جمع وجود دارد که آن عمل ویژگی‌های مطلوب جمع (شبیه ویژگی‌هائی که در این تمرین فهرست شده‌اند) را داراست.

تمرین ۱۴. موارد زیر را ثابت کنید:

۱. $A - B = A - (A \cap B)$

۲. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^c$

۳. $A - B = B^c - A^c$.

۴. $(A - B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

۵. $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

۶. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.

۷. $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

۸. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

۹. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

۱۰. $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

۱۱. اگر $A \subseteq C, B \subseteq C, A \cup B = C, A \cap B = \emptyset$ آنگاه $A = C - B$.

۳.۸ خانواده‌های مجموعه‌ها

فرض کنید Γ یک مجموعه باشد. برای هر $\gamma \in \Gamma$ یک مجموعه‌ی A_γ در نظر بگیرید. عبارت زیر را ، یک خانواده‌ی اندیس‌دار از مجموعه‌ها می‌خوانیم:

$$\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\} = \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$$

معمولاً در ریاضیات در موارد زیر از کلمه‌ی خانواده به جای مجموعه استفاده می‌شود.

۱. خانواده‌ی مورد نظر، مجموعه نباشد: خانواده‌ی همه‌ی مجموعه‌ها
البته در این مورد بهتر است از کلمه‌ی «کلاس» استفاده می‌شود.

۲. برخی از اعضا در خانواده‌ی مورد نظر تکراری باشند: $A_\gamma = A_{\gamma'}$. مانند خانواده‌ی زیر:

$$A = \{a, a, a, a\}$$

در این درس، ما به علت دوم در بالا از کلمه‌ی خانواده استفاده کرده‌ایم، زیرا می‌دانیم که همه‌ی مجموعه‌هائی که درباره‌ی آنها صحبت می‌کنیم زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی مرجع U هستند.
فرض کنید $F = \{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\bigcup F = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \exists\gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

$$\bigcap F = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \forall\gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

مثال ۷۱. قرار دهید

$$\Gamma = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$$

در زیر یک خانواده‌ی متناهی مثال زده‌ایم که توسط Γ اندیس‌گذاری شده است.

$$F = \{A_۰, A_۱, A_۲, A_۳\}$$

داریم:

$$\bigcup F = A_۰ \cup A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$$

$$\bigcap F = A_۰ \cap A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳$$

تمرین ۱۵. خانواده‌ی F در زیر را اندیس گذاری کنید و اجتماع و اشتراک آن را بیابید.

$$\{۱\}, \{۲, ۳\}, \{۳, ۴, ۵\}, \{۴, ۵, ۶, ۷\}, \ldots$$

۹ جلسه‌ی نهم، شنبه

مثال ۷۲. اگر $A \cap B = \emptyset$، $A \cup B = C$، $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آنگاه نشان دهید که

$$A = C - B$$

پاسخ. بنا بر اصل گسترش کافی است اثبات کنیم که

۱. $A \subseteq C - B$ و

۲. $C - B \subseteq A$.

برای اثبات ۱ باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad \big(x \in A \to x \in (C - B)\big) \quad *$$

برای اثبات $*$ کافی است $x_\circ$ دلخواه در نظر گرفته نشان دهیم:

$$x_\circ \in A \to x_\circ \in (C - B)$$

پس فرض می‌کنیم $x_\circ \in A$. از آنجا که طبق فرض صورت سؤال $A \subseteq C$، داریم:

$$x_\circ \in C \quad ☺$$

همچنین داریم:

$$\big(x_\circ \in A \wedge A \cap B = \emptyset \to x_\circ \notin B\big) \quad ☺☺$$

پس بنا به ☺☺ و ☺ داریم

$$x_\circ \in C - B.$$

اثبات ۲

$$x_\circ \in C - B \Rightarrow x_\circ \in C \wedge x_\circ \notin B$$

از آنجا که $C = A \cup B$ پس

$$(x_\circ \in A \cup B) \wedge (x_\circ \notin B) \Rightarrow (x_\circ \in A \vee x_\circ \in B) \wedge (x_\circ \notin B)$$

$$\Rightarrow x_\circ \in A$$

□

۱.۹ ادامه‌ی خانواده‌ی مجموعه‌ها

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی خانواده‌ها صحبت کردیم: برای مثال

$$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

یک خانواده از مجموعه‌ها با مجموعه‌ی اندیسِ Γ است. همچنین تعریف کردیم که

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x\in U|\exists\gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\}$$

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x\in U|\forall\gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\}$$

مثال ۷۳. خانواده‌ی زیر از مجموعه‌ها را اندیس گذاری کنید:

$$\{۱\}, \{۲,۳\}, \{۳,۴,۵\}, \{۴,۵,۶,۷\}, \ldots$$

$$A_n = \{n, n+۱, \ldots, ۲n-۱\} \qquad \Gamma = \mathbf{N} - \{۰\}$$

مثال ۷۴. اشتراک خانواده‌ی زیر از زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}$ را بیابید.

$$(۰,۱) \quad (۰,\frac{۱}{۲}) \quad (۰,\frac{۱}{۳}) \quad (۰,\frac{۱}{۴}) \quad \ldots$$

بیایید خانواده‌ی بالا را به صورت زیر اندیس‌گذاری کنیم:

$$A_n = (۰,\frac{۱}{n}).$$

$$\overset{A_۱}{(۰,۱)} \quad \overset{A_۲}{(۰,\frac{۱}{۲})} \quad \overset{A_۳}{(۰,\frac{۱}{۳})} \qquad \underbrace{\overset{A_۴}{(۰,\frac{۱}{۴})}}_{=\{x\in\mathbf{R}|۰<x<\frac{۱}{۴}\}} \qquad \ldots$$

پس خانواده‌ی زیر از مجموعه‌ها را داریم:

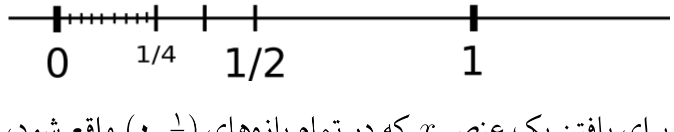
$$F = \{A_n\}_{n\in\mathbf{N}-\{۰\}}$$

اشتراک این خانواده را می‌توانیم با نمادهای زیر نیز نشان دهیم.

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(۰,\frac{۱}{n}) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n = \bigcap F$$

داریم

$$x\in\bigcap(۰,\frac{۱}{n}) \leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad ۰<x<\frac{۱}{n}.$$



برای یافتن یک عنصرِ x که در تمام بازه‌های $(۰,\frac{۱}{n})$ واقع شود، نیاز به اطلاعاتی داریم:

۲.۹ اصل کمال

هر زیرمجموعه‌ی از بالا کراندار از اعداد حقیقی دارای کوچکترین کران بالا و هر زیرمجموعه‌ی از پائین کراندار از اعداد حقیقی دارای بزرگترین کران پائین است. [17]

نتیجه ۷۵ (ویژگی ارشمیدسی). در اعداد حقیقی هیچ عنصری مانند $x > 0$ وجود ندارد بطوری که

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 < x < \frac{1}{n}$$

معادلاً هیچ عدد طبیعی‌ای وجود ندارد به طوری که

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad x > n.$$

اثبات. فرض کنید $x_0 \in \mathbf{R}$ از تمام اعداد طبیعی بزرگتر باشد، پس $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$ دارای یک کران بالا در $\mathbf{R}$ است؛ به بیان دیگر، x_0 یک کران بالا برای $\mathbf{N}$ است. پس بنا به اصل کمال، $x_1 \in \mathbf{R}$ موجود است به طوری که

$$x_1 = \sup \mathbf{N}$$

از این که x_1 کوچکترین کران بالا برای $\mathbb{N}$ است نتیجه می‌شود که $x_1 - 1$ یک کران بالای $\mathbf{N}$ نیست؛ چون اگر باشد، از کوچکترین کران بالا کوچکتر می‌شود و این امکان‌پذیر نیست. پس

$$\exists n \in \mathbf{N} \quad n > x_1 - 1$$

یعنی

$$n + 1 > x_1$$

و این متناقض است با این که x_1 یک کران بالا برای $\mathbf{N}$ است. □

نتیجه ۷۶. بنا به ویژگی ارشمیدسی،

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$$

توجه ۷۷. برای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم

$$\bigcap_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} (0, \frac{1}{i}) = (0, \frac{1}{n})$$

توجه ۷۸. می‌دانیم که

$$(1) \quad A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

[17] هر چند نیازی نیست شما فعلاً به این مطلب فکر کنید، ولی لازم به ذکر است که اصل کمال، اصلی مرتبه‌ی اول نیست. در مرتبه‌ی اول نمی‌توان روی همه‌ی زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی سور زد. سوال: آیا می‌توان عبارتی شاملِ $\forall A \subseteq \mathbb{N} \ldots$ را در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها نوشت؟

همچنین گفتیم که با استقراء می‌توان ثابت کرد که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\text{(۲)} \quad A \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_۱) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

عبارت بالا را می‌توان با استفاده از خانواده‌ها به صورت زیر نوشت:

$$A \cap \bigcup_{i \in \{۱, \ldots, n\}} B_i = \bigcup_{i \in \{۱, \ldots, n\}} (A \cap B_i)$$

حال ادعا می‌کنیم که این حکم را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$\text{(۳)} \quad A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big) = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i)$$

سوال ۱۴. آیا حکم (۳) را می‌توان با استقراء ثابت کرد؟

توجه ۷۹. با استفاده از استقراء می‌توان احکامی مانند احکام زیر را درباره‌ی هر عدد طبیعی ثابت کرد:
برای هر عددِ طبیعیِ n داریم $p(n)$. به عنوان مثال، حکم زیر را می‌توان با استقراء ثابت کرد: برای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم

$$۱ + ۲ + \ldots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

به عنوان مثال دیگر، این حکم که هر عدد طبیعی ناصفر از عدد قبل از خودش بزرگتر است را نیز می‌توان با استقراء ثابت کرد. اما در مورد «مجموعه‌ی اعداد طبیعی» نمی‌توان با استقراء روی اعداد طبیعی حکمی را نتیجه گرفت. برای مثال نمی‌توان حکم زیر را با استقراء ثابت کرد:
مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجموعه‌ای نامتناهی است. حکم (۳) نیز حکمی درباره‌ی یک عددِ طبیعیِ n نیست، پس نمی‌توان آن را با استقراء ثابت کرد.

حکمِ (۳) را به صورت زیر ثابت می‌کنیم:

اثبات (۳). از آنجا که در دو طرف مجموعه داریم بنا به اصل گسترش کافی است نشان دهیم که

۱. $A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i)$ و

۲. $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i) \subseteq A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big)$

یک عنصرِ $x_۰ \in U$ را به صورت دلخواه در نظر بگیرید.

$$x_۰ \in A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big) \Rightarrow (x_۰ \in A) \wedge \big(x_۰ \in \bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big)$$
$$\Rightarrow x_۰ \in A \wedge \big(\exists i_۰ \in \mathbf{N} \quad x_۰ \in B_{i_۰}\big)$$

پس از اینکه $x_۰ \in A \cap (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i)$ نتیجه گرفتیم که $i_۰ \in \mathbf{N}$ موجود است به طوری که

$$x_۰ \in A \cap B_{i_۰}$$

داریم:

$$A\cap B_{i.}\subseteq \bigcup_{i\in \mathbf{N}}\big(A\cap B_i\big)$$

پس

$$x.\in \bigcup_{i\in \mathbf{N}}\big(A\cap B_i\big)$$

اثبات ۲.

$$x.\in \bigcup_{i\in \mathbf{N}}\big(A\cap B_i\big)\Rightarrow \exists i.\in \mathbf{N}\quad x.\in A\cap B_{i.}$$

پس ۳ $x.\in A$ و $x.\in B_{i.}$. از آنجا که $B_{i.}\subseteq \bigcup_{i\in \mathbf{N}} B_i$ پس ۴ $x.\in \bigcup_{i\in \mathbf{N}} B_i$.
از ۳ و ۴ نتیجه می‌شود که

$$x.\in A\cap \big(\bigcup_{i\in \mathbf{N}} B_i\big)$$

□

قضیه ۸۰ (پخش‌پذیری). فرض کنید Γ یک مجموعه‌ی اندیس باشد.

۱. $A\cap \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big)$

۲. $A\cup \big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cup B_\gamma\big)$

قضیه ۸۱.

۱. $\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)^c=\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$

۲. $\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\big)A_\gamma\big)^c=\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$

تمرین ۱۶. فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ و $\{B_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ خانواده‌هایی از مجموعه‌ها باشند، نشان دهید که

$$\text{۱}\quad \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)\cap\big(\bigcup_{\delta\in\Delta} B_\delta\big)=$$
$$\bigcup_{\delta\in\Delta}\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\cap B_\delta\big)=\bigcup_{\delta\in\Delta}\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\cap B_\delta)\big)=$$
$$\bigcup_{\delta\in\Delta}\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\cap B_\delta):=\bigcup_{(\delta,\gamma)\in\Delta\times\Gamma}\big(A_\gamma\cap B_\delta\big)$$

$$\text{۲}\quad \big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)\cup\big(\bigcap_{\delta\in\Delta} B_\delta\big)=$$
$$\bigcap_{\delta\in\Delta}\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\cap B_\delta\big)=\bigcap_{\delta\in\Delta}\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\cup B_\delta)$$

$$③\quad (\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{n} B_j) \overset{\Delta=\{1,\ldots,n\},\Gamma=\{1,\ldots,m\}}{=}$$
$$\bigcup_{j\in\{1,\ldots,n\}} \bigcup_{i\in\{1,\ldots,m\}} (A_i \cap B_j)$$

تمرین ۱۷. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های I باشد به طوری که

$$\bigcup_{k\in L} J_k = I.$$

نشان دهید که

۱. $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L} \bigcup_{j\in J_k} A_j$

۲. $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in L} \bigcap_{j\in J_k} A_j$

۱۰ جلسه‌ی دهم

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که درباره‌ی اعدادِ حقیقی جمله‌ی اول در زیر درست است ولی جمله‌ی دوم نادرست:

۱. $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists r \in \mathbf{R} \quad ۰ < r < \frac{۱}{n}$

۲. $\exists r \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad ۰ < r < \frac{۱}{n}$

گفتیم که جمله‌ی دوم در بالا همان ویژگی ارشمیدسی است.

ویژگی ارشمیدسی:

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (۰, \frac{۱}{n}) = \emptyset$$

سوال ۱۵. آیا $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ ؟

پاسخ. در زیر نشان داده‌ایم که حکم بالا برقرار نیست، هر چند عبارت ۱ در پایین برقرار است. نخست ثابت می‌کنیم که

$$(۱) \quad P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

عبارت بالا را با روش استنتاجی زیر ثابت می‌کنیم:

۱ $c \in P(A) \cup P(B) \to c \in P(A) \vee c \in P(B)$

۲ $c \in P(A) \to c \subseteq A$

۳ $A \subseteq A \cup B$

۴ $c \in P(A) \to c \subseteq A \cup B$ بنا به ۲, ۳

۵ $c \in P(B) \to c \subseteq A \cup B$ تکرار ۲و۳و۴ برای B به جای A

۶ $c \in P(A) \vee c \in P(B) \to c \subseteq A \cup B$ بنا به ۴و۵

۷ $c \in P(A) \cup P(B) \to c \in P(A \cup B).$

حال فرض کنید $c \in P(A \cup B)$. آنگاه $c \subseteq A \cup B$. می‌خواهیم ببینیم که آیا $c \in P(A) \cup P(B)$؟ داریم:

$$** \quad c \in P(A) \cup P(B) \leftrightarrow c \in P(A) \vee c \in P(B)$$

$$\leftrightarrow c \subseteq A \vee c \subseteq B$$

سوال ۱۶. آیا $c \subseteq A \cup B \to (c \subseteq A) \vee (c \subseteq B)$ ؟

حکم بالا غلط است. مثال نقض:

$$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴\}$$

$$A=\{۱,۲\}\quad B=\{۳,۴\}$$

$$c=\{۲,۳\}$$

بنابراین این حکم که

$$P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$$

غلط است. □

۱.۱۰ ادامه‌ی خانواده‌ها

مثال ۸۲. حاصل

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}}(k,k+۱]$$

را بیابید:

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}}(k,k+۱]=(۰,۱]\cup(۱,۲]\cup(۲,۳]\cup\ldots\cup(k,k+۱]\cup\ldots$$
$$=(۰,\infty)=\{x\in\mathbf{R}|x>۰\}$$

مثال ۸۳.

$$① \quad \bigcap_{k\in\mathbf{N}}(-\frac{۱}{k},\frac{۱}{k})$$

$$② \quad \bigcap_{k\in\{۱,۲,\ldots,n\}}(-\frac{۱}{k},\frac{۱}{k})=(-۱,۱)\cap(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})\cap(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})\cap\ldots\cap(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n})$$

نخست نشان می‌دهیم ① مجموعه‌ی تهی است: توجه کنید که

$$x_{\circ}\in\bigcap_{k\in\mathbf{N}}(-\frac{۱}{k},\frac{۱}{k})\to\forall k\in\mathbf{N}\quad x_{\circ}\in(-\frac{۱}{k},\frac{۱}{k})$$
$$\to\quad\star\quad\forall k\in\mathbf{N}\quad -\frac{۱}{k}<x_{\circ}<\frac{۱}{k}$$

فرض کنید $x_{\circ}>۰$. از $\star$ نتیجه می‌گیریم که

$$\forall k\in\mathbf{N}\quad ۰<x_{\circ}<\frac{۱}{k}\quad\text{بنا به ویژگی ارشمیدسی}\ \lightning$$

اگر $x_{\circ}<۰$ آنگاه

$$\forall k\in\mathbf{N}\quad -\frac{۱}{k}<x_{\circ}<۰$$
$$\to\forall k\in\mathbf{N}\quad ۰<-x_{\circ}<\frac{۱}{k}\quad\text{بنا به ویژگی ارشمیدسی}\ \lightning$$

همچنین توجه کنید که حاصلِ ② مجموعه‌ی $(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n})$ است.

مثال ۸۴. قضیه‌ی (دمورگان) $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$ را ثابت کنید.

اثبات. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\underbrace{\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\Big)^c}_{C} = \underbrace{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c}_{D}$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x_\cdot \in C \Leftrightarrow x_\cdot \in \Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\Big)^c$$

$$\Longleftrightarrow\ x_\cdot \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \ \Longleftrightarrow\ \forall\gamma\in\Gamma \quad (x_\cdot \notin A_\gamma)$$

$$\Longleftrightarrow\ \forall\gamma\in\Gamma \quad x_\cdot \in A_\gamma^c \ \Longleftrightarrow\ x_\cdot \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$$

□

مثال ۸۵. قضیه‌ی پخش‌پذیری را ثابت کنید:

اثبات پخش‌پذیری. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$A\cap\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\Big) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x_\cdot \in A\cap\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\Big) \Leftrightarrow x_\cdot \in A \wedge x_\cdot \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$$

$$\Leftrightarrow (x_\cdot \in A)\wedge(\exists\gamma_\cdot\in\Gamma \quad x_\cdot \in B_{\gamma_\cdot})$$

از $(x_\cdot \in A)\wedge(x_\cdot \in B_{\gamma_\cdot})$ نتیجه می‌گیریم که

$$x_\cdot \in A\cap B_{\gamma_\cdot}$$

از آنجا که

$$A\cap B_{\gamma_\cdot} \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$x_\cdot \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$A\cap\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\Big) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

حال می‌خواهیم بدانیم که آیا $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(A\cap B_\gamma\right)\subseteq A\cap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\right)$ نیز برقرار است؟

$$x_0\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(A\cap B_\gamma\right)\Rightarrow\exists\gamma_0\in\Gamma\quad x_0\in A\cap B_{\gamma_0}$$

$$\Rightarrow x_0\in A\wedge x_0\in B_{\gamma_0}\Rightarrow(x_0\in A)\wedge(x_0\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_{\gamma_0})$$

$$\Rightarrow x_0\in A\cap\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\Big)$$

□

۲.۱۰ ضربهای دکارتی

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند و $x\in A$ و $y\in B$. بنا به اصل جفت‌سازی $\{x,y\}$ یک مجموعه است و $\{x\}$ نیز یک مجموعه است. دوباره بنا به اصل جفت‌سازی $\{\{x\},\{x,y\}\}$ یک مجموعه است. این مجموعه را با (x,y) نشان می‌دهیم. پس

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

تمرین ۱۸. نشان دهید که

$$(x_0,y_0)=(x_1,y_1)\iff(x_0=x_1)\wedge(y_0=y_1)$$

ایده‌ی اثبات.

$$\{\{x_0\},\{x_0,y_0\}\}=\{\{x_1\},\{x_1,y_1\}\}$$

$$\{x_0\}=\{x_1\}\Rightarrow x_0=x_1$$

$$\{x_1,y_0\}=\{x_1,y_1\}\Rightarrow y_0=y_1$$

□

تعریف ۸۶. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}$$

تمرین ۱۹. نشان دهید که $A\times B$ یک مجموعه است.

۱۱ جلسه‌ی یازدهم، شنبه

کوییز دوم.

۱. نشان دهید که $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ اگر و تنها اگر $B\subseteq A$ یا $A\subseteq B$.

پاسخ. حکم: (۱) اگر $B\subseteq A$ یا $A\subseteq B$ آنگاه $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.
و (۲) اگر $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ آنگاه یا $B\subseteq A$ یا $A\subseteq B$.

اثبات (۲). برای اثبات مورد دوم عبارت معادل زیر را ثابت می‌کنیم:

اگر نه $B\subseteq A$ و نه $A\subseteq B$ آنگاه $P(A\cup B)\neq P(A)\cup P(B)$.

اگر $B\not\subseteq A$ و $A\not\subseteq B$ آنگاه

$$\exists y\in B-A$$

و

$$\exists x\in A-B.$$

فرض کنید $y_\circ\in B-A$ و $x_\circ\in A-B$. حال توجه کنید که

$$\{x_\circ,y_\circ\}\notin P(A),\quad \{x_\circ,y_\circ\}\notin P(B)\quad \{x_\circ,y_\circ\}\in P(A\cup B).$$

اثبات (۲). اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A\cup B=B$ و $P(A)\subseteq P(B)$ (چرا؟). پس

$$P(A\cup B)=P(B)=P(A)\cup P(B)$$

$\square$

۲. نشان دهید که ویژگی ارشمیدسی، از اصل کمال نتیجه می‌شود. (جزوه‌ی جلسات قبل را نگاه کنید).

تمرین ۲۰. نشان دهید که جمله‌های زیر با هم معادلند.

۱. هیچ $x_\circ\in\mathbf{R}$ وجود ندارد که

$$\forall n\in\mathbf{N}\quad x_\circ\in(\circ,\frac{1}{n})$$

۲. هیچ $x_\circ\in\mathbf{R}$ وجود ندارد که $\forall n\in\mathbf{N}\quad x_\circ>n$

۱.۱۱ ادامه‌ی درسِ ضربهای دکارتی

گفتیم که اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه

$$\underbrace{A \times B}_{\text{حاصلضرب دکارتی}} = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$$

نیز مفهوم زوج مرتب را با استفاده از مجموعه‌ها به صورت زیر تعریف کردیم:

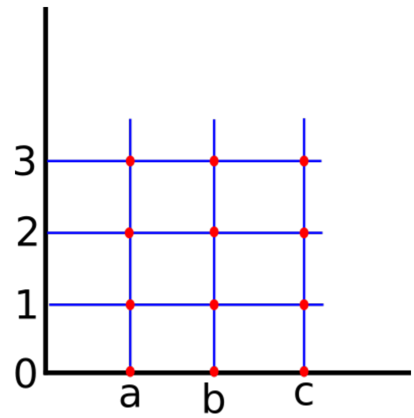
$$(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$$

برای مثال اگر

$$A = \{a,b,c\} \quad B = \{۰,۱,۲,۳\}$$

آنگاه

$$A \times B = \{(a,۰),(a,۱),(a,۲),(a,۳),(b,۰),(b,۱),(b,۲),(b,۳),(c,۰),(c,۱),(c,۲),(c,۳)\}$$



قضیه ۸۷.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

اثبات.

$$(x,y) \in A \times (B \cap C) \iff (x \in A \wedge y \in B \cap C) \iff (x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C)$$

$$\overset{p \leftrightarrow p \wedge p}{\iff} (x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \iff \Big((x,y) \in A \times B\Big) \wedge \Big((x,y) \in A \times C\Big)$$

$$\iff (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

□

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

اثبات عبارت بالا را به عنوان تمرین رها می‌کنم.

قضیه ۸۸.

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

اثبات. در زیر اثباتی استنتاجی برای حکم بالا ارائه کرده‌ایم.

(۱۵) $(x,y) \in A \times (B - C) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B - C)$

(۱۶) $x \in A \wedge y \in B - C \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C$

(۱۷) $x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \Rightarrow (x,y) \in A \times B$

(۱۸) $x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \Rightarrow (x,y) \notin A \times C$

(۱۹) بنا به موارد ۱۵ تا ۱۸ $(x,y) \in A \times (B - C) \Rightarrow (x,y) \in (A \times B) - (A \times C)$

اثبات برگشت:

(۲۰) $(x,y) \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \notin A \times C$

(۲۱) $(x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B$

(۲۲) $(x,y) \notin A \times C \Rightarrow (x \notin A) \vee (y \notin C)$

(۲۳) $(x \in A \wedge y \in B) \wedge ((x \notin A) \vee (y \notin C)) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C).$

(۲۴) بنا به موارد ۲۰ تا ۲۳ $(x,y) \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times (B - C).$

□

تمرین ۲۱. نشان دهید که

$$(A \times B) - (C \times D) = \Big((A - C) \times B\Big) \cup \Big(A \times (B - D)\Big)$$

سوال ۱۷. آیا $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$؟

پاسخ. فرض کنید که $A, D \neq \emptyset$ و $x. \in A, y. \in D$. آنگاه

$$(x., y.) \notin (A \times B) \cup (C \times D)$$

اما

$$(x., y.) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$$

□

۲.۱۱ رابطه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. به هر زیر مجموعه از $P(A \times B)$ یک رابطه از A به B می‌گوییم. فرض کنید X یک مجموعه باشد. منظور از یک رابطه روی X یک زیر مجموعه از $P(X \times X)$ است.
فرض کنید $R \subseteq P(A \times B)$ یک رابطه از A به B باشد. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$Dom(R) = \{x \in A | \exists y \in B \quad (x,y) \in R\}$$

$$Range(R) = \{y \in B | \exists x \in A \quad (x,y) \in R\}$$

نمادگذاری ۸۹. به جای

$$(x,y) \in R$$

گاهی می‌نویسیم:

$$xRy$$

۱۲ جلسه‌ی دوازدهم، دوشنبه

۱.۱۲ مرور

تمرین ۲۲. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$، خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های I به طوری که $\bigcup_{k\in L} J_k = I$. ثابت کنید که

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$$

پاسخ. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$① \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$$

$$② \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

در این جا اولی را ثابت می‌کنیم و دومی را به عنوان تمرین به عهده‌ی شما می‌نهیم.

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists i_\circ \in I \quad x \in A_{i_\circ} \tag{۲۵}$$

$$(i_\circ \in I) \wedge (I = \bigcup_{k\in L} J_k) \Rightarrow \exists k_\circ \in L \quad i_\circ \in J_{k_\circ} \tag{۲۶}$$

$$(x \in A_{i_\circ}) \wedge (i_\circ \in J_{k_\circ}) \Rightarrow x \in \bigcup_{j\in J_{k_\circ}} A_j \tag{۲۷}$$

$$(k_\circ \in L) \wedge x \in \bigcup_{j\in J_{k_\circ}} A_j \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \tag{۲۸}$$

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \quad \text{بنا به ۱و۲و۳و۴} \tag{۲۹}$$

□

تمرین ۲۳. آیا $P(A\times B) = P(A)\times P(B)$؟

۲.۱۲ روابط

مفهوم رابطه در زبان روزمره آنقدر پرکاربرد است که شاید هنگام استفاده آن به تعریف دقیق آن توجه نکرده باشیم: رابطه‌ی پدر و فرزندی، پسرخاله و دخترخاله بودن، همسن‌وسال‌بودن و امثالهم. برای مصارف ریاضی، باید رابطه را دقیق تعریف کنیم:

منظور از یک رابطه از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، یک زیرمجموعه از $P(A\times B)$ است. نیز منظور از یک رابطه روی مجموعه‌ی X یک رابطه از X به X است.

توجه ۹۰. اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد لزوماً دامنه‌ی R تمام X نیست. برای مثال روی مجموعه‌ی اعضای یک خانواده‌ی مشخص، دامنه‌ی رابطه‌ی x پدرِ y است، تنها یک عضو دارد.

۱.۲.۱۲ رابطه‌ی تساوی

فرض کنید X یک مجموعه باشد. رابطه‌ی زیر را رابطه‌ی تساوی روی X می‌خوانیم:

$$R = \{(x,y) | x \in X, y \in X, x = y\}$$

رابطه‌ی تساوی (که آن را رابطه‌ی قطری نیز می‌خوانیم) را می‌توان به صورت زیر هم نمایش داد:

$$xRy \iff x = y$$

این رابطه را با Δ نیز گاهی نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات مجموعه مورد نظر را نیز به صورت اندیس می‌نویسیم تا مشخص شود که تساوی روی چه مجموعه‌ای منظور ماست. پس به طور خلاصه:

$$\Delta_X = \{(x,x) | x \in X\}$$

۲.۲.۱۲ رابطه‌ی تعلق

رابطه‌ی تعلق را با $\in$ نشان می‌دهیم.

$$xRy \iff x \in y$$

فرض کنید X یک مجموعه باشد و $P(x)$ مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های آن. رابطه‌ی تعلق رابطه‌ای از X به $P(X)$ است که به صورت بالا تعریف می‌شود. به بیان دیگر:

$$R = \{(x,y) | x \in X, y \in P(X), x \in Y\}.$$

توجه کنید که دامنه‌ی این رابطه، X است و بُرد آن برابر است با $P(X) - \{\emptyset\}$. (این گفته را تحقیق کنید).

۳.۲.۱۲ رابطه‌ی مشمولیت

فرض کنید X یک مجموعه باشد. روی $P(X)$ رابطه‌ی مشمولیت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ARB \iff A \subseteq B$$

به بیان دیگر

$$R = \{(x,y) | x \in P(X), y \in P(X), x \subseteq y\}$$

۴.۲.۱۲ معکوس یک رابطه

اگر R یک رابطه از A به B باشد، رابطه‌ی $R^{-۱}$ را از B به A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x,y) \in R^{-۱} \iff (y,x) \in R$$

۵.۲.۱۲ ترکیب روابط

فرض کنید R یک رابطه از A به B و S یک رابطه از B به C باشند. آنگاه رابطه‌ی $R \circ S$ را از A به C به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x, y) \in R \circ S \iff \exists z \in B\Big((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\Big)$$

مثال ۹۱. فرض کنید روی یک مجموعه از انسانها روابط R و S به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$(x, y) \in R \iff \text{باشد } y \text{ فرزند } x$$

$$(x, y) \in S \iff \text{باشد } x \text{ برادر } y$$

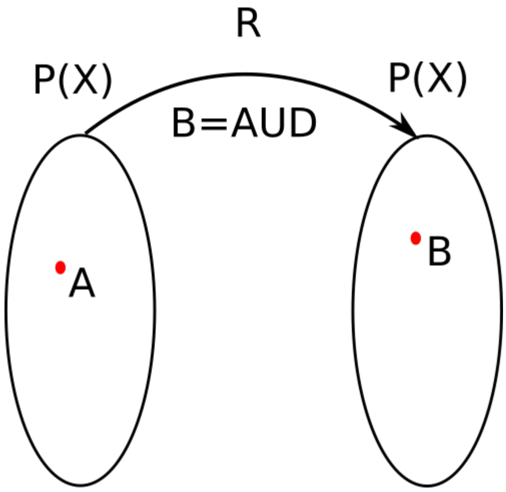
آنگاه داریم:

$$(x, y) \in R \circ S \iff \exists z \quad (\text{باشد } z \text{ فرزند } x) \wedge (\text{باشد } y \text{ برادر } z)$$

$$\iff \text{باشد. } y \text{ برادرزاده‌ی } x$$

تمرین ۲۴. اگر X یک مجموعه باشد و $D \subseteq X$ یک مجموعه‌ی ثابت. دامنه و برد رابطه‌ی زیر را تعیین کنید.

$$R = \{(A, B) | A, B \in P(X), A \cup D = B\}$$



۱۳ جلسه‌ی سیزدهم، شنبه

در ابتدای جلسه برای مرور درس قبل یک تمرین حل می‌کنیم:

تمرین ۲۵. فرض کنید X' یک مجموعه باشد و D یک زیرمجموعه از X' باشد. روی $P(X')$ رابطه‌ی R را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R(X,Y) \iff Y = X \cup D$$

به بیان دیگر:

$$R = \{(X,Y) | X, Y \in P(X'), Y = X \cup D\}$$

سوال ۱۸. بُرد رابطه‌ی R را مشخص کنید.

$$Range(R) = \{Y \in P(X') | \exists X \in P(X') \quad (X,Y) \in R\} = \underbrace{\{Y \in P(X') | \exists X \in P(X') \quad Y = X \cup D\}}_{A}$$

قرار دهید:

$$B = \{Y \in P(X') | Y \supseteq D\}$$

ادعا می‌کنیم که

$$Range(R) = B$$

اثبات. کافی است نشان دهیم که

$$\text{۱}\; Range(R) \subseteq B$$

و

$$\text{۲}\; B \subseteq Range(R)$$

اثبات ۱. فرض کنید $Y_{۰} \in Range(R)$ بنا به تعریف مجموعه‌ی $Range(R)$، یک مجموعه‌ی $X_{۰} \in P(X')$ چنان موجود است که

$$Y_{۰} = X_{۰} \cup D$$

از آنجا که $Y_{۰} = X_{۰} \cup D$ داریم

$$D \subseteq Y_{۰}$$

بنابراین

$$Y_{۰} \in \{Y \in P(X') | D \subseteq Y\} = B$$

پایان اثبات ۱

اثبات ۲. این ادعا را با استنتاج زیر ثابت می‌کنیم:

$$\text{۱} \quad Y_{۰} \in B \Rightarrow (Y_{۰} \in P(X')) \wedge (Y_{۰} \supseteq D)$$

$$(۲) \quad Y_۰ \supseteq D \Rightarrow Y_۰ = D \cup (Y_۰ - D)$$

$$(۳) \quad Y_۰ = D \cup (Y_۰ - D) \Rightarrow \exists X_۰ \in P(X') \quad D \cup X_۰ = Y_۰$$

$$(۴) \quad Y_۰ \in B \Rightarrow \exists X_۰ \in P(X') \quad Y_۰ = D \cup X_۰ \quad \text{بنا به } (۱),(۲),(۳)$$

$$(۵) \quad Y_۰ \in B \Rightarrow Y_۰ \in Range(R) \quad \text{بنا به } (۴)$$

□

۱.۱۳ ویژگی‌های روابط

فرض کنید R رابطه‌ای روی مجموعه‌ی X باشد.

تعریف ۹۲. رابطه‌ی R را **انعکاسی** [۱۸] می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad xRx$$

مثال ۹۳. رابطه‌ی تساوی را روی یک مجموعه‌ی دلخواهِ X در نظر بگیرید. داریم

$$\forall x \in X \quad x = x$$

پس این رابطه، انعکاسی است.

مثال ۹۴. همچنین هر مجموعه‌ای زیر مجموعه‌ی خودش است پس رابطه‌ی $\subseteq$ روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ نیز یک رابطه‌ی انعکاسی است.

مثال ۹۵ (دو مثالِ نقض). رابطه‌ی $\in$ را روی مجموعه‌ی $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ در نظر بگیرید. داریم

$$\emptyset \notin \emptyset$$

پس این رابطه انعکاسی نیست. همچنین اگر روی مجموعه‌ی انسانها، رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy \iff \text{پدرِ } y \text{ ،} x \text{ باشد}$$

این رابطه نیز غیر انعکاسی است.

تمرین ۲۶. فرض کنید X یک مجموعه باشد. تعریف کنید

$$\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}.$$

نشان دهید که رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X انعکاسی است اگر و تنها اگر

$$\Delta_X \subseteq R.$$

[۱۸] reflective

تعریف ۹۶. رابطه‌ی R **ضدِّانعکاسی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad x \not{R} x$$

توجه کنید که جمله‌ی زیر درست **نیست:**
هر رابطه‌ای که انعکاسی نباشد، ضد انعکاسی است.

تمرین ۲۷. یک رابطه مثال بزنید که نه انعکاسی باشد و نه ضد انعکاسی.

بیاید رابطه‌ای را که انعکاسی نباشد، غیرانعکاسی بخوانیم. پس:

۱. انعکاسی: $\forall x \quad xRx$

۲. غیر انعکاسی: $\exists x \quad x \not{R} x$

۳. ضد انعکاسی: $\forall x \quad x \not{R} x$

مثال ۹۷. رابطه‌های زیر ضدانعکاسی هستند:

$$xRy \Leftrightarrow \text{پدر } x \text{ است } y$$

روی مجموعه‌ی انسانها.

$$xRy \Leftrightarrow x \in y$$

روی یک مجموعه‌ی $P(X)$.

تعریف ۹۸. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **تقارنی** [۱۹] می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \to yRx\Big)$$

مثال ۹۹. بررسی کنید که رابطه‌های تساوی ($x = y$) و تمایز ($x \neq y$) و مجزا بودن دو مجموعه روابطی تقارنی هستند.
رابطه‌ی مجزا بودن روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$XRY \iff X \cap Y = \emptyset$$

مثال ۱۰۰ (مثال نقض). نشان دهید که رابطه‌های آمده در مثالِ ۹۵ تقارنی نیستند.

توجه ۱۰۱. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X غیرتقارنی است (یعنی تقارنی نیست) هرگاه

$$\exists x, y \in X \quad (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R.$$

[۱۹] symmetric

تعریف ۱۰۲. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **پادتقارنی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \wedge yRx \rightarrow x = y\Big)$$

مثال ۱۰۳. بررسی کنید که رابطه‌ی $=$ روی یک مجموعه‌ی X و رابطه‌ی $\subseteq$ روی یک مجموعه به صورت $P(X)$ هر دو پادتقارنی هستند.

مثال ۱۰۴ (مثال نقض)**.** نشان دهید که روابط دوستی و همسن بودن روی یک مجموعه از انسانها پادتقارنی نیستند.

توجه ۱۰۵. چنین نیست که هر رابطه‌ای که تقارنی نباشد حتما پادتقارنی است. به عنوان تمرین، یک رابطه مثال بزنید که نه تقارنی باشد و نه پادتقارنی.

تعریف ۱۰۶. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **متعدّی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y, z \in X \quad \Big(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz\Big)$$

مثال ۱۰۷. بررسی کنید که رابطه‌ی تساوی روی یک مجموعه‌ی X، همسن بودن در مجموعه‌ی انسانها، و زیر مجموعه بودن روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ هر سه متعدی هستند.

مثال ۱۰۸ (مثال نقض)**.** بررسی کنید که رابطه‌ی دوستی روی مجموعه‌ی انسانها و رابطه‌ی

$$xRy \Leftrightarrow \text{است } x \text{ پدر } y$$

روابطی نامتعدی هستند.

تعریف ۱۰۹ (تام بودن)**.** رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **تام** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \vee yRx\Big)$$

مثال ۱۱۰ (مثال نقض)**.** رابطه‌ی پدری.

۲.۱۳ چند تمرین

تمرین ۲۸. نشان دهید که رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X متعدی است اگر و تنها اگر $R \circ R \subseteq R$

اثبات. نخست یادآوری می‌کنیم که

$$(x, y) \in R \circ R \iff \exists z \quad R(x, z) \wedge R(z, y)$$

نخست نشان می‌دهیم که اگر رابطه‌ی R متعدی باشد آنگاه

$$R \circ R \subseteq R$$

فرض کنیم R متعدی است و $(x,y) \in R \circ R$. از این که $(x,y) \in R \circ R$ نتیجه می‌شود که

$$\exists z. \quad (x, z.) \in R \wedge (z., y) \in R \quad (*)$$

بنا به $(*)$ و متعدی بودن R نتیجه می‌شود که

$$(x,y) \in R$$

حال ثابت می‌کنیم که اگر $R \circ R \subseteq R$ آنگاه R متعدی است.
فرض: $R \circ R \subseteq R$
حکم:

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

فرض کنید $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ و $R \circ R \subseteq R$. از اینکه $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ نتیجه می‌شود که

$$(x,z) \in R \circ R$$

از فرض $R \circ R \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x,z) \in R.$$

□

تمرین ۲۹. نشان دهید که رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X انعکاسی است اگر و تنها اگر $\Delta_X \subseteq R$.

اثبات. نخست فرض می‌کنیم که R انعکاسی است و ثابت می‌کنیم که

$$\Delta_X \subseteq R$$

فرض کنید $(x,x) \in \Delta_X$. بنا به این که R انعکاسی است نتیجه می‌گیریم که $(x,x) \in R$. پس

$$\Delta_X \subseteq R.$$

حال فرض کنید $\Delta_X \subseteq R$. می‌خواهیم ثابت کنیم که R انعکاسی است. عنصر دلخواه $x. \in X$ را در نظر بگیرید.
بنا به تعریف رابطه‌ی قطری [۲۰] داریم:

$$(x., x.) \in \Delta_X$$

حال از فرض $\Delta_X \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x., x.) \in R$$

از آنجا که $x.$ به طور دلخواه انتخاب شده است، نتیجه می‌گیریم که R انعکاسی است. □

[۲۰] رابطه‌ی Δ_X را رابطه‌ی قطری روی X می‌خوانیم.

تمرین ۳۰. نشان دهید که تنها رابطه‌ای که هم انعکاسی باشد و هم تقارنی و هم پادتقارنی، رابطه‌ی تساوی است. (پاسخ به عهده‌ی شما).

تمرین ۳۱. نشان دهید که رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X تام است اگر و تنها اگر

$$R \cup R^{-1} = X \times X$$

اثبات. فرض کنیم R تام باشد. اگر $(x_0, y_0) \in X \times X$ آنگاه از آنجا که R تام است یا $(x_0, y_0) \in R$ یا $(y_0, x_0) \in R$. پس یا $(x_0, y_0) \in R$ یا $(x_0, y_0) \in R^{-1}$. از آنجا که (x_0, y_0) به طور دلخواه انتخاب شده است، داریم:

$$X \times X \subseteq R \cup R^{-1}.$$

اثباتِ این که

$$R \cup R^{-1} \subseteq X \times X :$$

می‌دانیم R یک رابطه روی X است پس

$$R \subseteq X \times X$$

می دانیم R^{-1} یک رابطه روی X است پس

$$R^{-1} \subseteq X \times X$$

پس

$$R \cup R^{-1} \subseteq X \times X$$

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که اگر R تام باشد آنگاه

$$X \times X = R \cup R^{-1}.$$

حال فرض کنید

$$X \times X = R \cup R^{-1}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که R تام است. عناصر دلخواه $x_0, y_0 \in X$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم

$$(x_0, y_0) \in X \times X$$

پس

$$(x_0, y_0) \in R \cup R^{-1}$$

پس یا $(x_0, y_0) \in R$ که در اینصورت $x_0 R y_0$ یا $(x_0, y_0) \in R^{-1}$ که در این صورت $y_0 R x_0$. پس رابطه‌ی R تام است. □

تمرین ۳۲. روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی، رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy \Leftrightarrow x \leq y.$$

رابطه‌ی بالا (رابطه‌ی ترتیب) کدام یک از ویژگی‌های معرفی شده در این درس را دارد؟

۱۴ جلسه‌ی چهاردهم، دوشنبه

۱.۱۴ رابطه‌ی هم‌ارزی

به رابطه‌ای که ویژگی‌های **انعکاسی، تقارنی و تعدی** داشته باشد، یک **رابطه‌ی هم‌ارزی** گفته می‌شود. از روابط هم‌ارزی برای **تقسیم‌بندی** یک مجموعه استفاده می‌شود. برای مثال، مجموعه‌ی همه‌ی دانشجویان یک کلاس را در نظر بگیرید. رابطه‌ی همقد بودن یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. افراد حاضر در این کلاس را می‌توان بر اساس رابطه‌ی هم‌قد بودن تقسیم‌بندی (یا افراز) کرد. برای این کار کافی است افرادی را که هم‌قد هستند، همگروه کرد. توجه کنید که هر گروه (هر قد)، دارای نماینده‌ای است، اما فرقی نمی‌کند کدام شخص از آن گروه را به عنوان نماینده انتخاب کرد. به بیان دیگر، اگر x,y دو فرد همقد باشند، آنگاه مجموعه‌ی افراد همقدِ x دقیقاً همان مجموعه‌ی افرادِ همقدِ y است. همچنین اگر x,y همقد نباشند، آنگاه مجموعه‌ی افراد همقد با x هیچ اشتراکی با مجموعه‌ی افراد همقد با y ندارد. در سرتاسرِ درس این جلسه، مثال همقد بودن را در ذهن داشته باشید و نمودِ آن را در تمام اثباتها بیابید.

فرض کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. فرض کنید $x_0 \in X$ عنصری دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:

کلاس هم‌ارزی عنصر x_0 تحت رابطه‌ی R $= [x_0]_R = \{y \in X | yRx_0\} = \{y \in X | x_0Ry\}$

فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد. خانواده‌ی زیر از مجموعه‌ها را در نظر بگیرید:

$$\{[x]_R | x \in X\}$$

قضیه ۱۱۱. فرض کنید $x_0 \not R y_0$. آنگاه

$$[x_0] \cap [y_0] = \emptyset$$

اثبات. کافی است بنا به تاتولوژی

$$\neg q \to \neg p \iff p \to q$$

ثابت کنیم که اگر $[x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$ آنگاه $x_0 R y_0$. فرض کنید $[x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$. فرض کنید $z_0 \in [x_0] \cap [y_0]$. از آنجا که $[x_0] = \{y | yRx_0\}$ و $z_0 \in [x_0]$ نتیجه می‌گیریم که

$$z_0 R x_0 \quad (۱)$$

و به طور مشابه، از اینکه $z_0 \in [y_0]$ نتیجه می‌گیریم که

$$z_0 R y_0 \quad (۲)$$

از آنجا که R تقارنی است از (۱) نتیجه می‌شود که

$$x_0 R z_0 \quad (۳)$$

بنا به متعدی بودن R از ۲ و ۳ نتیجه می‌شود که

$$x.Ry.$$

بیایید همین اثبات را بار دیگر به صورت استنتاجی بنویسیم:

۱ $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \quad z \in [x.] \cap [y.]$

فرض می‌کنیم $z. \in [x.] \cap [y.]$

۲ $z. \in [x.] \cap [y.] \Rightarrow (z. \in [x.]) \wedge (z. \in [y.])$

۳ $z. \in [x.] \Rightarrow z.Rx.$

۴ $z. \in [y.] \Rightarrow z.Ry.$

۵ $z.Rx. \overset{\text{تقارنی}}{\Rightarrow} x.Rz.$

۶ $(x.Rz.) \wedge (z.Ry.) \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} x.Ry.$

۷ $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset \Rightarrow x.Ry.$ بنا به ۱ تا ۶

$\square$

قضیه ۱۱۲. اگر

$$[x.] \cap [y.] = \emptyset$$

آنگاه

$$x.\not{R}y.$$

اثبات. ثابت می‌کنیم که اگر $x.Ry.$ آنگاه

$$[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$$

اگر $x.Ry.$ آنگاه بنا به تعریفِ $[y.]$ داریم

$$x. \in [y.] \quad (۱)$$

همچنین از از آنجا که R انعکاسی است داریم

$$x.Rx.$$

پس

$$x. \in [x.] \quad (۲)$$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که

$$x. \in [x.] \cap [y.]$$

بنابراین

$$[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \emptyset$$

$\square$

نتیجه ۱۱۳.

$$x_\circ \not R y_\circ \iff [x_\circ] \cap [y_\circ] = \emptyset$$

$$x_\circ R y_\circ \iff [x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \emptyset$$

قضیه ۱۱۴. اگر $[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \emptyset$ آنگاه

$$[x_\circ] = [y_\circ]$$

اثبات. فرض کنید که $[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \emptyset$. می‌خواهیم ثابت کنیم که در این صورت، $[x_\circ] \subseteq [y_\circ]$ و $[y_\circ] \subseteq [x_\circ]$.
فرض کنید که $z \in [x_\circ]$. پس

$$zRx_\circ \quad (۱).$$

از آنجا که $[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \emptyset$ بنا به قضیه‌ی قبل داریم

$$x_\circ R y_\circ \quad (۲).$$

بنا به (۱)و(۲) و تعدی، نتیجه می‌گیریم که

$$zRy_\circ.$$

پس $z \in [y_\circ]$. از آنجا که z به صورت دلخواه انتخاب شده است، نتیجه می‌گیریم که

$$[x_\circ] \subseteq [y_\circ].$$

به طور مشابه شما ثابت کنید که $[y_\circ] \subseteq [x_\circ]$. $\square$

فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. تعریف می‌کنیم:

$$X/R = \{[x] | x \in X\}.$$

توجه کنید که X/R در تعریف بالا یک خانواده از مجموعه‌هاست؛ زیرا برخی از اعضای آن می‌توانند تکراری باشند. همان طور که دیدیم اگر xRy آنگاه $[x] = [y]$. با این حال، این خانواده، در واقع یک مجموعه هم هست زیرا می‌توان تکرارها را در آن نادیده گرفت. **در ادامه‌ی درس X/R را یک مجموعه در نظر گرفته‌ایم.**

قضیه ۱۱۵.

$$\bigcup X/R = X$$

توجه ۱۱۶. یادآوری می‌کنیم که اگر A یک مجموعه باشد آنگاه

$$\bigcup A = \{x | \exists y \in A \quad x \in y\}$$

همچنین اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x | \exists i \in I \quad x \in A_i\}$$

در قضیه‌ی بالا از نمادگذاری اولی استفاده کرده‌ایم.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که

$$X \subseteq \bigcup X/R.$$

فرض کنید که $x_\circ \in X$. از آنجا که رابطه‌ی R انعکاسی است داریم $x_\circ R x_\circ$؛ به بیان دیگر

$$x_\circ \in [x_\circ].$$

از آنجا که $[x_\circ] \in X/R$ و $x_\circ \in [x_\circ]$ بنا به توجه بالا نتیجه می‌شود که $x_\circ \in \bigcup X/R$.
حال ثابت می‌کنیم که

$$\bigcup X/R \subseteq X$$

اگر $x_\circ \in \bigcup X/R$ آنگاه $y \in X$ چنان موجود است که $x_\circ \in [y] = \{x \in X | xRy\} \subseteq X$ پس معلوم است که $x_\circ \in X$. $\square$

توجه کنید که

- X/R مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X است.
- هیچ دو عضو از X/R با هم اشتراک ندارند.
- $\bigcup X/R = X$.

به بیان دیگر، X/R یک افراز برای مجموعه‌ی X است. پس از هر رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی یک مجموعه‌ی X به یک افراز برای آن دست می‌یابیم. در درسهای آینده (پس از تعریف دقیق افراز) خواهیم دید که در واقع از هر افراز برای یک مجموعه‌ی X به یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی این مجموعه می‌رسیم به طوری که X/R همان افراز را به دست بدهد. یعنی دو مفهومِ **افراز و رابطه‌ی هم‌ارزی با هم هم‌ارزند.**

افراز $\Leftrightarrow$ رابطه‌ی هم‌ارزی

به بیان دیگر، افرازهای یک مجموعه‌ی X در تناظر یک به یک با روابط هم‌ارزی روی آن هستند؛ یعنی، فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی X باشد و B مجموعه‌ی همه‌ی روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. تابعِ $f: B \to A$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(R) = X/R$$

تابع بالا، یک به یک و پوشاست. (فعلاً نگران سختی این گفته نباشید. مفاهیم تابع، یک‌به‌یک و پوشا را در درسهای آینده خواهیم دید.)

مثال ۱۱۷. روی مجموعه‌ی اعدادِ صحیح، $\mathbb{Z}$، رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv_۳ y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = ۳k$$

نشان دهید که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و X/R را مشخص کنید.

پاسخ. نخست ثابت می‌کنیم که R انعکاسی است. برای هر $x \in \mathbb{Z}$ می‌دانیم که $x \equiv_۳ x$ پس روشن است که رابطه‌ی R انعکاسی است. حال ثابت می‌کنیم که R تقارنی است. اگر $y \equiv_۳ x$ آنگاه $y - x = ۳k$ برای یک عددِ $k \in \mathbb{Z}$ و از این رو $x - y = -۳k = ۳(-k)$ یعنی عددِ $k' \in \mathbb{Z}$ موجود است که $x - y = ۳k'$ پس $y \equiv_۳ x$. حال ثابت می‌کنیم که رابطه‌ی R متعدی است. فرض کنید xRy, yRz پس اعداد صحیحِ k, k' چنان موجودند که

$$y - x = ۳k \quad z - y = ۳k'$$

پس

$$z - x = ۳(k + k')$$

یعنی

$$xRz.$$

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. حال ادعا می‌کنیم که این رابطه، تنها دارای سه کلاس هم‌ارزی است؛ به بیان دیگر ادعا می‌کنیم که

$$X/R = \{[۰], [۱], [۲]\}$$

فرض کنید که x یک عدد صحیح دلخواه باشد. می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی x بر ۳ یکی از ۰و۱و۲ است. پس $x \in [۰] \cup [۱] \cup [۳]$. به بیان دیگر یا $[x] = [۰]$ یا $[x] = [۱]$ یا $[x] = [۲]$. پس

$$X/R \subseteq \{[۰], [۱], [۲]\}.$$

همچنین واضح است که

$$\{[۰], [۱], [۲]\} \subseteq X/R$$

پس

$$X/R = \{[۰], [۱], [۲]\}.$$

توجه کنید که از آنجا که هیچ دو عدد از میان ۰و۱و۲ با هم به پیمانه‌ی ۳ همنهشت نیستند، اعضایِ

$$[۰], [۱], [۲]$$

هر سه با هم متمایزند؛ یعنی

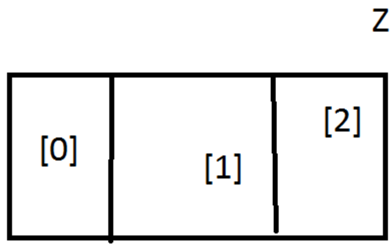
$$[۱] \cap [۲] = \emptyset, [۱] \cap [۰] = \emptyset, [۰] \cap ۲ = \emptyset$$

یعنی مجموعه‌ی

$$X/R$$

دقیقاً دارای سه عضو است. می‌نویسیم:

$$X/R = X/\equiv_{۳} = \mathbb{Z}_{۳} = \{[۰], [۱], [۲]\} = \{\overline{۰}, \overline{۱}, \overline{۲}\}$$



□

توجه کنید که در مثال بالا، با استفاده از رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۳، مجموعه‌ی اعداد صحیح را به ۳ قسمت افراز کردیم. همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ صفر است با [۰] نشان دادیم؛ همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ برابر با ۱ است با [۱] نشان دادیم؛ و همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ برابر با ۲ است با [۲] نشان دادیم.

تعمیم ۱۱۸. برای عدد دلخواهِ $n \in \mathbb{N}$ روی $\mathbb{Z}$ رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv_n y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = nk$$

نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی با n کلاس است و

$$\mathbb{Z}/R = \{[۰], \dots, [n - ۱]\}.$$

مثال ۱۱۹. فرض کنید که $f : \mathbb{R}^{۲} \to \mathbb{R}$ یک تابع دومتغیره با دامنه‌ی D باشد. روی D رابطه‌ی زیر را تعریف کنید:

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow f(x, y) = f(x', y')$$

نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و کلاسهای هم‌ارزی آن دقیقاً همان منحنی‌های تراز تابعِ f هستند (یعنی رابطه‌ی بالا، دامنه‌ی تابع را با استفاده از منحنی‌های تراز افراز می‌کند.)

۱۵ جلسه‌ی پانزدهم، شنبه

در جلسات قبل گفتیم که اگر X و Y مجموعه باشند، آنگاه هر زیر مجموعه از $P(X \times Y)$ یک رابطه از X به Y است.

مثال ۱۲۰. فرض کنید $\mathbf{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد. قرار دهید

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{۲} | y = x^{۲}\}$$

دقت کنید که R نمونه‌ای از یک رابطه روی $\mathbf{R}$ است.

نیز گفتیم که از میان روابط، روابط هم‌ارزی برای ما اهمیت ویژه‌ای دارند. از آنها می‌شود برای دسته‌بندی (افراز) استفاده کرد. اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد تعریف کردیم:

$$X/R = \{[x] | x \in R\}$$

که در آن:

$$[x] = \{y \in X | xRy\}$$

نیز ثابت کردیم که

$$[x] = [y] \iff xRy$$

و

$$[x] \cap [y] = \emptyset \iff x \not R y$$

با حذف تکرارها، X/R را به عنوان یک مجموعه در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۲۱. روی یک مجموعه‌ی X رابطه‌ی تساوی، $(=)$، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

$$R \subseteq P(X \times X)$$

$$xRy \iff x = y$$

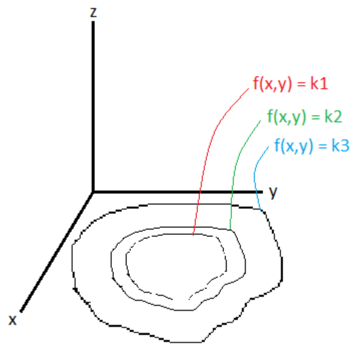
$$X/_{=} = \{[x]_{=} | x \in X\} = \Big\{\{x\} | x \in X\Big\}$$

مثال ۱۲۲. اگر

$$z = f(x, y)$$

یک تابع دو متغیره باشد، رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

$$(x, y)R(x', y') \iff f(x, y) = f(x', y')$$



رابطه‌ی فوق یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و X/R مجموعه‌ی تمام منحنی‌های تراز تابع f است (که در واقع افرازی برای دامنه‌ی این تابع هستند).

۱.۱۵ افراز و رابطه‌ی آن با رابطه‌ی هم‌ارزی

در خلال جلسات گذشته درباره‌ی افراز صحبت کردیم بدون آنکه آن را رسماً تعریف کرده باشیم. در ادامه‌ی درس، افرازها را خواهیم شناساند و خواهیم دید که مفهوم افراز **در تناظر یک به یک** با مفهومِ رابطه‌ی هم‌ارزی است.
فرض کنید X یک مجموعه باشد. مجموعه‌ی $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ را یک افراز برای X می‌خوانیم هرگاه

۱. $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{B\in\mathcal{A}} B = X$

۲. $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad (A \neq B \to A \cap B = \emptyset)$

۳. $\forall A \in \mathcal{A} \quad A \neq \emptyset$

مثال ۱۲۳. تمام افرازهای مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳\}$ را بنویسید.

پاسخ.

$$\{\{۱\}, \{۲, ۳\}\}, \{\{۲\}, \{۱, ۳\}\},$$
$$\{\{۳\}, \{۱, ۲\}\}, \{\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}\},$$
$$\{\{۱, ۲, ۳\}\}$$

□

مثال ۱۲۴. یک نمونه افراز از مجموعه‌ی $\mathbb{N} - \{۰\}$ به صورت زیر است

اعداد فرد	اعداد زوج مخالف صفر

$\mathbb{N} - \{۰\} = \{$اعداد زوج مخالف صفر$\} \cup \{$اعداد فرد$\}$

از هر رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان به یک افراز رسید:

قضیه ۱۲۵. اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد، آنگاه X/R یک افراز X است.

اثبات. نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی X/R تمام ویژگی‌های یک افراز برای مجموعه‌ی X را داراست.
در جلسه‌ی گذشته گفتیم که

$$\bigcup X/R = X$$

همچنین می‌دانیم که

$$[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$$

زیرا جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که اگر $[x] \neq [y]$ آنگاه $x \not R y$ و از این هم نتیجه می‌شود که

$$[x] \cap [y] = \emptyset$$

همچنین به دلیل آنکه R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است پس R انعکاسی است؛ بنابراین برای هر $x \in X$ داریم

$$x \in [x]$$

پس

$$\forall x \in X \quad [x] \neq \emptyset$$

□

در قضیه‌ی بالا دیدیم که از رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان به افراز رسید. در زیر نشان داده‌ایم که هر افراز، از یک رابطه‌ی هم‌ارزی نشأت گرفته است:

قضیه ۱۲۶. فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ افرازی برای مجموعه‌ی X باشد. آنگاه یک رابطه‌ی هم‌ارزی R روی X چنان یافت می‌شود که

$$X/R = \mathcal{A}$$

اثبات. داشته‌ها: افرازِ $\mathcal{A}$ برای X
هدف:
پیدا کردن یک رابطه‌ی R روی X به طوری که

$$X/R = \mathcal{A}$$

بیایید رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$xRy \iff$$

$\iff$ x و y هر دو در یک مجموعه‌ی یکسان در افراز $\mathcal{A}$ واقع شده باشند؛ یعنی هم‌دسته باشند

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$

سوال ۱۹. چه چیزهایی باید ثابت کنیم؟

باید ثابت کنیم که

۱. رابطه‌ی R در بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲. $X/R = \mathcal{A}$

اثبات قسمت اول. نخست ثابت می‌کنیم که R انعکاسی است.

فرض کنید $x \in X$ عنصر دلخواهی باشد. آنگاه از آنجا که $X = \bigcup \mathcal{A}$ می‌دانیم که $x \in \bigcup \mathcal{A}$. پس $A \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $x \in A$. پس $x \in A$ و $x \in A$ یعنی xRx پس R انعکاسی است.

دوم ثابت می‌کنیم که R تقارنی است.

فرض کنید xRy آنگاه

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$

به بیان دیگر

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad y, x \in A$$

پس yRx پس R تقارنی است.

سوم ثابت می‌کنیم که R تعدی نیز دارد.

فرض کنید xRy و yRz. پس مجموعه‌ی $A \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $x, y \in A$ و مجموعه‌ی $B \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $y, z \in B$ پس داریم

$$y \in A \cap B$$

از آنجا که $\mathcal{A}$ یک افراز است اگر $A \neq B$ آنگاه $A \cap B = \emptyset$. در بالا دیدیم که

$$A \cap B \neq \emptyset$$

بنابراین $A = B$ پس $x, z \in A = B$. یعنی xRz.

اثبات قسمت دومِ حکم:

$$X/R = \mathcal{A}$$

توجه کنید که هم X/R و هم $\mathcal{A}$ مجموعه‌هائی از مجموعه‌ها هستند. نخست ثابت می‌کنیم که $\mathcal{A} \subseteq X/R$.

فرض کنید $A \in \mathcal{A}$ می‌دانیم که

$$X/R = \{[x] | x \in X\}$$

کافی است ثابت کنیم که $x_. \in X$ چنان موجود است که $A = [x_.]$. توجه کنید که A ناتهی است (طبق تعریف افراز). فرض کنید $x_.$ یک عضو دلخواه باشد از A باشد. ادعا می‌کنیم که

$$[x_.] = A.$$

داریم

$$[x_0] = \{y | yRx_0\} = \{y | y, x_0 \in A\} = \{y | y \in A\} = A$$

تا اینجا ثابت کردیم که

$$\mathcal{A} \subseteq X/R$$

اثبات اینکه $(*)$ $\quad X/R \subseteq \mathcal{A}$.

فرض کنید $[x_0] \in X/R$. می‌دانیم که $A \in \mathcal{A}$ موجود است که $x_0 \in A$؛ زیرا $X/R = \bigcup \mathcal{A}$.) به طور مشابه با بالا ثابت کنید که $[x_0] = A$. پس

$$[x_0] \in \mathcal{A}$$

بنابراین ثابت کردیم که

$$X/R \subseteq \mathcal{A} \quad (**)$$

پس بنا به $(*)$ و $(**)$ داریم $X/R = \mathcal{A}$. □

تمرین ۳۳. آیا می‌توانید یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی مجموعه‌ی $\mathbf{N} - \{0\}$ تعریف کنید به طوری که

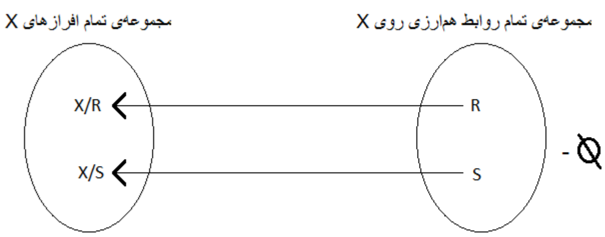
$$\mathbf{N} - \{0\}/R = \{\{\text{اعداد زوج مخالف صفر}\}, \{\text{اعداد فرد}\}\}$$

پاسخ. رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \iff x \equiv_2 y.$$

□

فرض کنید $\mathcal{M}$ مجموعه‌ی تمام روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. نیز فرض کنید $\mathcal{N}$ مجموعه‌ی تمام افرازهای مجموعه‌ی X باشد. از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}$ یک تابع f را به صورت زیر تعریف کنید: اگر $R \in \mathcal{M}$ آنگاه $f(R) = X/R$. قضیه‌ی ۱۲۶ در واقع به ما می‌گوید که تابع f تابعی پوشاست. در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد که تابعِ f یک‌به‌یک نیز هست.



۱۶ جلسه‌ی شانزدهم، دوشنبه

فرض کنید X یک مجموعه باشد. در جلسات قبل درباره‌ی یک تابع f صحبت کردیم که میانِ مجموعه‌ی افرازهای مجموعه‌ی X و روابط هم‌ارزی روی این مجموعه، یک تناظر یک به یک ایجاد می‌کند:

$$f : R \mapsto X/R$$

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که تابع f پوشاست؛ یعنی اگر $\mathcal{A}$ یک افراز از مجموعه‌ی X باشد، آنگاه یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی مجموعه‌ی X چنان موجود است که $X/R = \mathcal{A}$. در این جلسه ثابت می‌کنیم که این تابع، یک به یک است. به بیان دیگر:

قضیه ۱۲۷. فرض کنید R و S دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه X باشند. اگر

$$X/R = X/S$$

آنگاه

$$R = S.$$

اثبات. فرض کنید R و S دو رابطه هم ارزی باشند و

$$X/R = X/S$$

فرض کنید $(x_0, y_0) \in R$ هدفمان نشان دادن این است که $(x_0, y_0) \in S$.

از اینکه $(x_0, y_0) \in R$ نتیجه می گیریم که $x_0 \, R \, y_0$.

از آنجا که $x_0 \, R \, y_0$ بنا به این که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی نتیجه می‌گیریم که : $[x_0]_R = [y_0]_R$

از آنجا که $X/R = X/S$ نتیجه می‌گیریم که عنصر z_0 موجود است به طوریکه $[x_0]_R = [y_0]_R = [z_0]_S$

می دانیم که $x_0 \in [x_0]_R$ پس $x_0 \in [z_0]_S$

به طور مشابه $y_0 \in [z_0]_S$

پس $x_0 \, S \, z_0 \, S \, y_0$

حال بنا به تعدی رابطه S داریم:

$$x_0 \, S \, y_0$$

پس $(x_0, y_0) \in S$. پس ثابت شد که $R \subseteq S$. اثبات این که $S \subseteq R$ به طور کاملاً مشابه است. □

پس اثبات قضیه‌ی مهم زیر در اینجا به پایان رسید:

قضیه ۱۲۸. میان افرازهای یک مجموعه و روابط هم‌ارزی روی آن، یک تناظر یک به یک وجود دارد. [۲۱]

[۲۱] برای کسی که این قضیه را فرا بگیرد و شفاهاً در اتاق کار من ثابت کند، یک نمره‌ی کامل در نظر گرفته‌ام.

بگذارید بحث رابطه‌ی هم‌ارزی را با یک نکته به پایان ببریم.
گفتیم که اگر A یک افراز باشد، آنگاه رابطه هم ارزی R موجود است به طوریکه $X/R = A$. حکم قضیه‌ی این است که یک رابطه‌ی هم‌ارزی موجود است که فلان ویژگی را دارد. این نوع احکام عموماً دارای دو نوع اثبات هستند: اثبات وجودی، و اثبات ساختی. در اثبات وجودی، تنها ثابت می‌کنیم که آن موجودی در پی آن هستیم موجود است، ولی شاید نتوانیم دقیقاً آن موجود را مشخص کنیم. در اثبات ساختی، موجود مورد نظر را به طور دقیق پیدا می‌کنیم. به نظر شما، اثباتی که برای حکم فوق آمد، ساختی بود یا وجودی؟

۱.۱۶ مقدمه‌ای بر مفاهیم هم‌توانی و متناهی و نامتناهی

مفهوم همتوانی را باید بعد از مفهوم تابع درس داد؛ ولی از آنجا که می‌دانم همه‌ی شما با مفهوم تابع آشنا هستید و برای جلوگیری از یکنواخت شدن درس، مفهوم تابع را دانسته فرض می‌کنم و نخست چند کلمه درباره‌ی همتوانی، متناهی و نامتناهی سخن می‌گویم. در جلسات بعد مفهوم تابع را دقیقاً توضیح خواهم داد و دوباره به مفاهیم یادشده بازخواهم گشت. در واقع آنچه در ادامه آمده است، مقدمه‌ای است برای بحثهای پیش رو در این درس.
دو مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{\text{علی، حسن، حسین}\}$$

و

$$B = \{۰, ۱, ۲\}$$

با این که ایندو به ظاهر خیلی متفاوت به نظر می‌رسند ولی از نظر «اندازه» با هم برابرند. در واقع این طور به نظر می‌آید که اگر نامها را در مجموعه‌ی بالا عوض کنیم، به یک کپی از مجموعه‌ی پائین می‌رسیم؛ یعنی اگر علی را۰ و حسن را ۱ و حسین را ۲ بنامیم، به مجموعه‌ی پائین می‌رسیم. اصطلاحاً در این موقع می‌گوئیم که این دو مجموعه **همتوان** هستند. بیائید همین نکته را دقیقتر بیان کنیم. فرض کنید f یک تابع از A به B باشد به طوری که

$$f(\text{علی}) = ۰, f(\text{حسن}) = ۱, f(\text{حسین}) = ۲$$

تابع f هم یک به یک است و هم‌پوشا. در واقع این تابع، یک تابع «تغییر نام» است.

تعریف ۱۲۹. دو مجموعه‌ی دلخواهِ X, Y را همتوان می‌خوانیم هرگاه تابعی یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد.

وقتی دو مجموعه همتوان هستند در واقع، می‌توان اینگونه اندیشید که هر دو یک مجموعه هستند که اعضایش دو صورت مختلف نامگذاری شده‌اند.
در درسهای پیشین با مفهوم اعداد طبیعی آشنا شدید: گفتیم که بنا به اصل وجود مجموعه‌ی استقرائی یک مجموعه‌ی استقرائی موجود است. ثابت کردیم که کوچکترین مجموعه‌ی استقرائي نیز موجود است که آن را مجموعه‌ی اعداد

طبیعی می‌خوانیم و با $\mathbb{N}$ نشان می دهیم. به بیان دیگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای اعضای زیر است:

$$\begin{aligned}
&۰ = \emptyset \\
&۱ = \{۰\} \\
&\vdots \\
&n = \{۰, \ldots, n - ۱\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

تعریف ۱۳۰. ۱. می‌گوئیم مجموعه‌ی X دارای n عضو است هرگاه همتوان با مجموعه‌ی $\{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$ باشد؛ یعنی یک تابع یک به یک و پوشا بین n و X موجود باشد.

۲. می‌گوئیم مجموعه‌ی X متناهی است هرگاه یک عددِ $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که X با n همتوان باشد. در واقع مجموعه‌ی X متناهی است هرگاه یک عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که مجموعه‌ی X دارای n عضو باشد.

پس تا اینجا مجموعه‌های متناهی را شناختیم. اما مجموعه‌ی نامتناهی چه می‌تواند باشد؟

تعریف ۱۳۱. مجموعه‌ی X را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه متناهی نباشد (!).

قضیه ۱۳۲. مجموعه‌ی اعداد طبیعی نامتناهی است.

دوست دارم پیش از ورود کردن جدی تر به بحث، کمی بحث فلسفی بکنیم: اصل عمومیِ ششم اقلیدس برای ورود به اصول هندسه‌ی اقلیدسی این است که «همواره یک کُل از جزء خودش بزرگتر است». برای آشنا شدن با اصول اقلیدس پیوند زیر را مطالعه کنید:

https://www.math.ust.hk/~mabfchen/Math4221/Euclidean%20Geometry.pdf

پس، از نظر اقلیدس، هیچ کُلّی نمی‌تواند «هم‌اندازه» با جزئی از خودش باشد. گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان، یعنی هم‌اندازه، می‌خوانیم هرگاه بین آنها یک تابع یک به یک و پوشا موجود باشد. مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathbb{N} = \{۰, ۱, ۲, \ldots, \}$$

مجموعه‌ی اعداد زوج، جزئی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی است:

$$E = \{۰, ۲, ۴, \ldots\}$$

حال تابعِ $f : \mathbb{N} \to E$ را در نظر بگیرید که $f(x) = ۲.x$. به نظر می‌آید که با استفاده از این تابع می‌توان نشان داد که مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و E هم‌اندازه هستند. در واقع E تنها یک نام‌گذاری دیگر برای $\mathbb{N}$ است. به نظر می‌آید که در اینجا اصل اقلیدس رد شده است. [۲۲] علت چنین اتفاقی، اصل «وجود مجموعه‌ی نامتناهی» است. این که مجموعه‌ای

[۲۲] اقلیدس با چه پیش‌فرضی اصل خود را نوشته است که ما آن پیش‌فرض را نداریم؟

نامتناهی وجود داشته باشد، یا این که جهان هستی متناهی باشد یا نامتناهی، تأثیر بزرگی بر ایدئولوژی و روش زندگی ما دارد. بسیاری از براهین خداشناسی نیز، مانند برهان علیت، بر این استوارند که گیتی، مجموعه‌ای متناهی است.
با فرض پذیرفتن وجود مجموعه‌ی نامتناهی، **می‌توان نشان داد که مجموعه‌ی X نامتناهی است اگروتنهااگر با جزئی از خودش هم‌اندازه باشد.** مثلاً مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ به این علت نامتناهی است که هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد زوج است. توجه کنید که مجموعه‌ی اعداد فرد هم، هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد زوج است. پس مجموعه‌ی اعداد طبیعی، از دو مجموعه ساخته شده است که هم‌اندازه‌ی خودش هستند! در جلسات آینده با این اتفاقات عجیب و غریب بیشتر آشنا خواهیم شد. فعلاً بحث را با پارادوکس «هتل هیلبرت»، که بیان دیگری برای گفته‌ی بالاست، پی می‌گیریم.
فرض کنید که یک هتل داریم که به اندازه‌ی اعداد طبیعی اتاق دارد و همه‌ی اتاقهای آن پُر است. اگر یک مسافر جدید بیاید آیا می‌شود او را هم در هتل جای داد؟ به نظر می‌آید که بشود: کافی است که به هر کس بگوئیم که یک اتاق جلوتر برود تا اتاق شماره‌ی ۱ خالی شود! حال همان هتل را در نظر بگیرید و فرض کنید به اندازه‌ی اعداد طبیعی مسافر جدید وارد شود که نیازمند جا هستند. در این صورت هم هتل برای آنها جا دارد: کافی است که هر کس که در اتاق n است به اتاق $2n$ برود. در این صورت اتاقهای فرد خالی می شوند و مسافران جدید می‌توانند وارد آنها شوند. حال اگر به‌اندازه‌ی اعداد طبیعی اتوبوس بیایند که هر کدام حاوی به اندازه‌ی اعداد طبیعی مسافرند، آیا باز هم هتل برای آنها جا دارد؟ بررسی این قسمت به عهده‌ی شما. (فیلمهای زیر را ببینید)

https://www.youtube.com/watch?v=faQBrAQ87l4

https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

گفتیم که مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای است که زیرمجموعه‌ای ازآن هم‌اندازه با خودِ مجموعه شود. اگر جهان هستی نامتناهی باشد، بخشی از جهان شبیه به کُلِّ جهان است. آن بخش نیز بخشی شبیه به خود دارد! بنابراین چه بسا نامتناهی کُپی از خودِ ما و سیاره‌ی ما در جاهای دیگر گیتی وجود داشته باشد و این جهانها به صورت موازی در جریان باشند.

۲.۱۶ ورود به بحث، توابع

نخستین ترکیب سازنده‌ی مباحث بالا، مفهوم تابع است. می‌دانم که در دبیرستان با توابع آشنا شده‌اید، ولی بد نیست دوباره این مفهوم را با هم مرور کنیم. تا کنون مسیر زیر را پی گرفته‌ایم:

معرفی اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

معرفی ضرب مجموعه‌ها و مفهوم رابطه

و اکنون معرفی مفهوم تابع، به عنوان نوعی رابطه.

تعریف ۱۳۳. فرض کنید R یک رابطه از مجموعه X به Y باشد. رابطه‌ی R را یک تابع می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad \forall y_1, y_2 \in Y \quad (xRy_1 \wedge xRy_2 \rightarrow y_1 = y_2)$$

برای نشان دادن چنین تابعی از نمادهایی مانند f, g ,... استفاده می کنیم. مثلا اگر رابطه R یک تابع و $(x,y) \in$

R باشند، می نویسیم

$$f: \quad X \to Y$$

$$x \mapsto y$$

به تفاوت پیکانهای بالا توجه کنید. اگر f یک تابع متناظر با رابطه R باشد، می‌نویسیم: $\Gamma(f) = R$ به بیان دیگر، $\Gamma(f)$ که آن را «گراف تابع f» می‌خوانیم، مجموعه‌ی زیر است:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

توجه ۱۳۴. از این به بعد وقتی می گوییم f تابع است، منظورمان این است که f یک تابع تمام است؛ یعنی اگر f از رابطه R آمده باشد، آنگاه $DomR = X$.

اگر $f : X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه X را دامنه f می خوانیم و مجموعه زیر را بُردِ f:

$$\{f(x) | x \in X\}$$

توجه ۱۳۵. بنا بر آنچه گفتیم اگر $f : X \to Y$ تابع باشد، آنگاه

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \quad f(x) = y.$$

مثال ۱۳۶. فرض کنید X یک مجموعه باشد و R یک رابطه هم ارزی روی X. عمل زیر یک تابع است:

$$f : X \to X/R$$
$$x \mapsto [x]_R$$

تعریف : تابع $f : X \to Y$ را یک به یک می خوانیم هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \big(f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2\big)$$

به بیان دیگر

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \big(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)\big)$$

سوال ۲۰. آیا تابع مثال ۱۳۶ در حالت کلی یک به یک است؟

پاسخ سوال بالا منفی است. اگر مجموعه‌ی X دارای دو عضوِ متفاوتِ x_1, x_2 باشد که با هم در رابطه باشند، آنگاه $[x_1]_R = [x_2]_R$.

مثال ۱۳۷. فرض کنید X یک مجموعه باشد و $B \subseteq X$ یک زیرمجموعه باشد. عمل زیر یک تابع از $P(X)$ به $P(X)$ است :

$$f : P(X) \to P(X)$$

$$A \mapsto A \cup B$$

تعریف ۱۳۸. تابع $f : X \to Y$ را پوشا می خوانیم هرگاه :

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y$$

تمرین ۳۴. نشان دهید که تابع مثال ۱۳۷ یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد اگر و تنها اگر $B = \emptyset$

اثبات. نشان می دهیم تابع f در مثال ۲ یک به یک است اگر و تنها اگر $B = \emptyset$. بقیه‌ی اثبات را نیز به عهده‌ی شما می‌گذارم.

اگر $B \neq \emptyset$ آنگاه B دارای حداقل دو زیر مجموعه‌ي $A_۱, A_۲$ است به طوری که $A_۱ \neq A_۲$. داریم:

$$f(A_۱) = f(A_۲) = B$$

پس f یک به یک نیست.

اگر $B = \emptyset$ آنگاه برای هر $A \in X$ داریم

$$f(A) = A$$

واضح است که f یک به یک است.

□

۱۷ جلسه‌ی هفدهم ، دوشنبه ۹۷/۱/۲۷

تمرین ۳۵. فرض کنید R و S دو رابطه هم ارزی باشند روی مجموعه X. نشان دهید که $R \circ S$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X است اگر و تنها اگر $R \circ S = S \circ R$.[۲۳]

۱.۱۷ ادامه‌ی مبحث توابع

مثال ۱۳۹. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند و $b \in Y$ عنصر ثابتی باشد. عمل زیر یک تابع است:

$$f : X \to Y$$

$$x \mapsto b.$$

به تابع بالا، یک تابع ثابت گفته می‌شود. نشان دهید که تابع بالا در حالت کلی یک به یک و پوشا نیست.

مثال ۱۴۰. فرض کنید X یک مجموعه باشد و $A \subseteq X$ یک زیرمجموعه‌ی ثابت باشد. عمل زیر یک تابع است:

$$f : A \to X$$

$$x \mapsto x$$

تابع بالا را تابع **مشمولیت** می‌خوانیم. در این مثال اگر $A = X$ آنگاه تابع f را همانی می خوانیم و آن را با id_X نشان می‌دهیم.

$$id_X : X \to x$$

$$x \mapsto x$$

مثال ۱۴۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. تابع f را از $P(X) \times P(X)$ به $P(X)$ با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$f : P(X) \times P(X) \to P(X)$$

$$(A, B) \mapsto A \cup B$$

آیا تابع فوق یک به یک است؟

اگر f یک به یک باشد آنگاه باید از

$$f(A_۱, B_۱) = f(A_۲, B_۲)$$

نتیجه شود که

$$(A_۱, B_۱) = (A_۲, B_۲)$$

[۲۳] هر که این تمرین را بدون نگاه کردن به جزوه و به صورت کاملاً بدون اشکال در اتاق من به صورت شفاهی حل کند، ۱ نمره می‌گیرد. تمرین، دشوار نیست، ولی نحوه‌ی نوشتن پاسخ جزو اهداف است.

یعنی از

$$A_۱ \cup B_۱ = A_۲ \cup B_۲$$

باید نتیجه شود که $A_۱ = A_۲, B_۱ = B_۲$

فرض کنید $A_۱ \neq \emptyset$. داریم: $f(A_۱, \emptyset) = f(\emptyset, A_۱)$. ولی $(A_۱, \emptyset) \neq (\emptyset, A_۱)$. پس این تابع یک به یک نیست.

تابع مثال قبل پوشاست. فرض کنید $Y \in P(X)$. برای اثبات پوشا بودن تابع، باید مجموعه‌های $A, B \in P(X)$ را طوری پیدا کنیم که $f(A, B) = Y$.

واضح است که $Y \cup \emptyset = f(Y, \emptyset) = Y$

مثال ۱۴۲. فرض کنید X, Y دو مجموعه باشند. عمل زیر را در نظر بگیرید:

$$\pi_X : X \times Y \to X$$

$$(x, y) \mapsto x$$

عمل بالا یک تابع است که بدان **تابع تصویر روی مؤلفه‌ی اول** گفته می‌شود. نشان دهید که تابع π_x یک به یک نیست، ولی پوشاست.

به طور مشابه تابع

$$\pi_y : (X, Y) \to Y$$

$$(x, y) \mapsto y$$

تعریف می‌شود که آن را تابع تصویر روی مؤلفه‌ی دوم می‌خوانیم.

تعریف ۱۴۳.

- فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ یک زیرمجموعه‌ی دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f(A) : \{f(x) | x \in A\}$$

- فرض کنید $B \subseteq Y$؛ تعریف می‌کنیم:

$$f^{-۱}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

توجه ۱۴۴. ادعا نکرده‌ایم که f دارای وارون است. مبادا نماد $f^{-۱}$ موجب ابهام شود.

توجه ۱۴۵. نشان دهید که $A \subseteq f^{-۱}(f(A))$.

فرض ها :

$$f : X \to Y$$

تابع است و

$$A \subseteq X.$$

برای آنکه ثابت کنیم $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ باید ثابت کنیم که

$$\forall x \in X \quad \big(x \in A \to x \in f^{-1}(f(A))\big)$$

فرض می کنیم $x_0 \in A$ عنصر دلخواهی باشد باید ثابت کنیم

$$x_0 \in f^{-1}(f(A))$$

و طبق تعریفِ f^{-1} برای این منظور باید ثابت کنیم که

$$f(x_0) \in f(A)$$

و این طبق تعریفِ f واضح است زیرا $x_0 \in A$.

سوال ۲۱. آیا لزوماً $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$؟

می‌دانیم که

$$x_0 \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x_0) \in f(A)$$

در مثال زیر نشان داده‌ایم که عبارت بیان شده لزوماًبرقرار نیست. فرض کنید

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

و تابع

$$f : X \to X$$

را چنان در نظر بگیرید که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) = 1$. فرض کنید

$$A = \{1, 2\}.$$

داریم

$$f(A) = \{1\}$$

$$f^{-1}(f(A)) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

تمرین ۳۶. نشان دهید اگر f یک به یک باشد $f^{-1}(f(A)) = A$

تمرین ۳۷. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $B \subseteq Y$ نشان دهید $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

تمرین ۳۸. نشان دهید اگر f پوشا باشد آنگاه $f(f^{-1}(B)) = B$

تمرین ۳۹. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع دلخواه باشد. نشان دهید که

$$A\subseteq B\subseteq X\Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$$

$$C\subseteq D\Rightarrow f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(D^c)=(f^{-1}(D))^c$$

$$f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$$

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$$

$$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$$

تمرین ۴۰. نشان دهید که تابع $f:X\to Y$ یک به یک است اگر و تنها اگر

$$\forall A,B\subseteq X\quad f(A-B)=f(A)-f(B).$$

اثبات. فرض کنیم $f:X\to Y$ یک به یک باشد و A_0,B_0 دو مجموعه دلخواه از X باشند. باید نشان دهیم

$$f(A_0-B_0)=f(A_0)-f(B_0)$$

پس باید نشان دهیم که

$$f(A_0-B_0)\subseteq f(A_0)-f(B_0)$$

و

$$f(A_0)-f(B_0)\subseteq f(A_0-B_0)$$

اثبات عبارت اول:

فرض می کنیم $y_0\in f(A_0-B_0)$ بنابراین $x_0\in A_0-B_0$ چنان موجود است که $f(x_0)=y_0$.

ازآنجا که $x_0\in A_0$ داریم $f(x_0)\in f(A_0)$

از آنجا که $x_0\notin B_0$ ادعا می کنیم $f(x_0)\notin f(B_0)$

اثبات ادعا : اگر $f(x_0)\in f(B_0)$ آنگاه $x'_0\in B_0$ موجود است به طوریکه $f(x'_0)=f(x_0)$ از آنجا که تابع f یک به یک است

$$x_0=x'_0\in B_0.$$

و این با فرض $x_0\notin B_0$ تناقض دارد. پس $f(x_0)\notin f(B_0)$. پس $f(x_0)\in f(A_0)-f(B_0)$. اثبات عبارت دوم و اثبات قسمت عکس این مسأله به عهده‌ی شما. □

تمرین ۴۱. فرض کنید $D\subseteq X\times Y$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. نشان دهید که

$$\pi_X(D)=\{x\in X|\exists y\in Y\quad (x,y)\in D\}.$$

۱۸ جلسه‌ی هجدهم، شنبه

۱.۱۸ توابع

توجه ۱۴۶. به یک تابعِ یک به یک و پوشا، یک **تناظر یک به یک** یا یک تابع **دوسوئي** گفته می‌شود.

قضیه ۱۴۷. اگر تابع $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد، آنگاه تابع یکتای $g : Y \to X$ چنان موجود است که

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

و

$$\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = y$$

.

توجه ۱۴۸. تابع g در قضیه‌ی بالا را تابع وارون f می‌خوانیم و با f^{-1} نمایش می‌دهیم.

اثبات. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد. عمل $g : Y \to X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
ـ عنصر دلخواه $y_0 \in Y$ را در نظر بگیرید. از آنجا که f پوشاست، عنصر $x_0 \in X$ چنان موجود است که $f(x_0) = y_0$.
ـ تعریف می کنیم: $g(y_0) = x_0$. توجه کنید که

۱. $Dom(g) = Y$

۲. g یک تابع از Y به X است.

برای اثبات مورد دوم باید نشان دهیم که هرگاه $y_1 = y_2$ آنگاه $g(y_1) = g(y_2)$.

فرض کنید $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. از فرض $y_1 = y_2$ نتیجه می‌شود که $f(x_1) = f(x_2)$. از آنجا که f یک به یک است داریم $x_1 = x_2$. پس $g(y_1) = g(y_2)$.

تمرین ۴۲. نشان دهید g یک به یک و پوشاست.

اثبات اینکه

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

فرض کنید $x_0 \in X$ عنصر دلخواهی باشد. اگر $y_0 = f(x_0)$ طبق تعریف داریم

$$g(y_0) = x_0$$

یعنی

$$g \circ f(x_0) = x_0$$

اثبات این که

$$\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = id_Y$$

به عهده‌ی شما.

اثبات یکتایی. فرض کنید $g_1 : Y \to X$ و $g_2 : Y \to X$ به گونه‌ای باشند که $f \circ g_1(y) = Id_Y$ و $g_1 \circ f(x) = Id_X$ و $f \circ g_2(y) = Id_Y$ و $g_2 \circ f(x) = Id_X$. باید ثابت کنیم که $g_1 = g_2$. برای این منظور باید نشان می‌دهیم:

$$\forall y \in Y \quad g_1(y) = g_2(y).$$

فرض کنید $y_0 \in Y$ عنصری دلخواه باشد. باید نشان دهیم که

$$g_1(y_0) = g_2(y_0)$$

از آنجا که f پوشاست، عنصر $x_0 \in X$ چنان موجود است که

$$f(x_0) = y_0$$

داریم:

$$g_1(y_0) = g_1\big(f(x_0)\big)$$

بنا به فرض $g_1 \circ f(x) = Id_X$ داریم:

$$g_1(y_0) = g_1\big(f(x_0)\big) = x_0$$

و بنا به فرض $g_2 \circ f(x) = Id_X$ داریم:

$$g_2(y_0) = g_2\big(f(x_0)\big) = x_0$$

پس $g_1(y_0) = g_2(y_0)$. □

تمرین ۴۳. نشان دهید که اگر تابعی یک به یک از X به Y موجود باشد آنگاه تابعی پوشا از Y به X موجود است.

قضیه ۱۴۹. اگر از X به Y یک تابع پوشا موجود باشد آنگاه یک تابع یک به یک از Y به X موجود است.

اثبات. تابع $g : Y \to X$ را به صورت زیر تعریف کنید.
فرض کنید $y_0 \in Y$. قرار دهید:

$$A_0 = f^{-1}(y_0) = \{x \in X | f(x) = y_0\}$$

خانواده‌ی نامتناهی زیر از مجموعه‌ها را در نظر بگیرید:

$$\{f^{-1}(y_0)\}_{y_0 \in Y}$$

بنا به اصل انتخاب یک تابع انتخاب از Y به $\{f^{-1}(y_0)\}_{y_0 \in Y}$ موجود است به طوری که

$$g(y_0) \in f^{-1}(y_0)$$

پس

$$f : I \to \bigcup A_i \Rightarrow f(i) \in A_i$$

در اثبات قضیه‌ی بالا از اصل انتخاب استفاده کردیم.

اصل انتخاب

فرض کنید $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. حاصلضرب این خانواده را با نماد $\Pi_{i \in I} A_i$ نمایش می‌دهیم.

$$\Pi_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} | x_i \in A_i\}$$

به بیان دیگر هر عنصر از $\Pi_{i \in I} A_i$ تابعی از I به $\cup A_i$ است.

$$\overset{a_1 \in A_1}{1} \quad \overset{a_2 \in A_2}{2} \quad \overset{a_3 \in A_3}{3} \quad \ldots \quad \overset{a_i \in A_i}{i}$$

اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه

$$\Pi_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌ها باشد، تابعی موجود است که از هر یک از آنها یک عنصر بر می‌دارد.

$$\exists f \quad f(i) \in A_i$$

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

□

۲.۱۸ ادامه‌ی همتوانی

گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان می‌خوانیم و می‌نویسیم:

$$X \cong Y$$

هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد.
همتوانی یک رابطه‌ی هم ارزی روی کلاس مجموعه‌هاست.

۱. اگر X یک مجموعه باشد آنگاه $X \cong X$

۲. اگر $Y \cong X$ آنگاه $X \cong Y$

۳. اگر $Y \cong X$ و $Z \cong Y$ آنگاه $Z \cong X$

رابطه‌ی همتوانی ($\cong$) کلاس همه‌ی مجموعه‌ها را افراز می‌کند. کلاس مجموعه‌ی X را با $\mathbf{card}(X)$ نشان می‌دهیم.
مجموعه‌ی X را متناهی می‌نامیم هرگاه $n \in \mathbf{N}$ موجود باشد به طوری که

$$X \cong n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$$

اگر $X \cong n$ می نویسیم

$$\mathbf{card}(X) = n$$

$[X]$	$\ldots$	۲	۱	$\emptyset$

شکل بالا افراز تمام مجموعه‌ها را به کلاس کاردینال‌ها نشان می دهد .در این افراز اولین خانه از سمت چپ نشان دهنده‌ی کلاس همه‌ی مجموعه‌های صفر عضوی است. خانه‌ی بعد از آن (حرکت به سمت راست) نشان دهنده‌ی کلاس همه‌ی مجموعه‌های یک عضوی است و بقیه نیز به همین ترتیب.

$$۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, \underbrace{\mathbf{card}(\mathbf{N})}_{=\aleph_۰}, \ldots$$

می‌دانیم که

$$n \ncong \mathbf{N}$$

تعریف ۱۵۰. می‌نویسیم

$$\mathbf{card}(\mathbf{N}) = \aleph$$

اگر $X \cong Y$ می‌گوییم X, Y هم‌اندازه هستند.

در ادامه‌ی درس با این اعداد جدید بیشتر آشنا خواهیم شد و جمع و ترتیب آنها را نیز تعریف خواهیم کرد.
مجموعه‌ی X را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه متناهی نباشد.

قضیه ۱۵۱. (درصورت پذیرش اصل انتخاب) مجموعه‌ی X نامتناهی است هرگاه $Y \subsetneq X$ موجود باشد به طوری که $X \cong Y$.

۱۹ جلسه‌ی نوزدهم، دوشنبه

۱.۱۹ متناهی و نامتناهی، شمارا و ناشمارا

در جلسه‌ی گذشته مفهوم همتوانی را تعریف کردیم. گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان می‌خوانیم، و این را به صورت $X \cong Y$ نشان دادیم، هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد. واژه‌ی معادل همتوانی، هم‌اندازه بودن، یا هم‌کاردینال بودن است. پس در صورتی که دو مجموعه‌ی X, Y همتوان باشند از هر سه نماد زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$$

یا

$$|X| = |Y|$$

یا

$$X \cong Y.$$

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد زوج همتوان هستند.

$$E \cong \mathbf{N}$$

$$\begin{array}{cccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \dots \end{array}$$

گفتیم که یک مجموعه‌ی دلخواهِ X را **متناهی** می‌نامیم هرگاه همتوان با یک مجموعه‌ی $n = \{۰, ۱, \dots, n-۱\}$ باشد؛ یعنی هرگاه $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که

$$X \cong \{۰, ۱, \dots, n\}.$$

همچنین یک مجموعه‌ی دلخواهِ X را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه با هیچ $n \in \mathbb{N}$ همتوان نباشد؛ به بیان دیگر هرگاه متناهی نباشد.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با هیچ عدد طبیعی‌ای همتوان نیست (شما ثابت کنید) و از این رو، مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی، نامتناهی است. در بالا به نکته‌ی جالب دیگری اشاره کردیم: مجموعه‌ی اعداد طبیعی با یک زیرمجموعه‌ی سره از خودش (مجموعه‌ی اعداد زوج) همتوان است. در زیر با استفاده از این نکته، می‌خواهیم یک مشخصه‌ی کلی برای مجموعه‌های نامتناهی بیان کنیم.

گفتیم که یکی از اصول کلی علمی اقلیدس این بوده است که همواره کُل از جزء خودش بزرگتر است. این گفته، برای مجموعه‌های متناهی بوضوح درست است. انگار، دنیای اقلیدس دنیائی متناهی بوده است که در آن اصل یادشده مورد پذیرش بوده است؛ زیرا در دنیای نامتناهی‌ها (مانند مثال اعداد طبیعی) اصل یادشده به نظر درست نمی‌آید.

در قضیه‌ی زیر نشان داده‌ایم که به طور کلی، یک مجموعه‌ی داده‌شده‌ی X نامتناهی است اگروتنهااگر با بخشی از خودش همتوان باشد.

قضیه ۱۵۲. (در صورت پذیرش اصل انتخاب) مجموعه‌ی X نامتناهی است اگر و تنها اگر $Y \subsetneqq X$ موجود باشد، به طوری که $X \cong Y$.

اثبات. فرض کنید مجموعه‌ی X نامتناهی باشد. عنصر $x_0 \in X$ را انتخاب کنید. مجموعه‌ی $X - \{x_0\}$ ناتهی است. پس عنصر $x_1 \in X - \{x_0\}$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $x_0, \dots, x_n$ انتخاب شده باشند. دوباره $X - \{x_0, \dots, a_n\}$ ناتهی است پس می‌توان $x_{n+1} \in X - \{x_0, \dots, x_n\}$ را انتخاب کرد. بدین‌سان یک دنباله‌ی $A = \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ از اعضای X انتخاب کرده‌ایم. واضح است که $X - \{x_0\}$ زیرمجموعه‌ی سره‌ای از X است. اگر ادعای زیر را ثابت کنیم، یک طرف حکم ثابت شده است.
ادعا: $X \cong X - \{x_0\}$
برای اثبات ادعا کافی است یک تابع یک به یک و پوشا مانند

$$f : X \to X - \{x_0\}$$

پیدا کنیم. اگر $x \in X$ آنگاه یا $x \in A$ یا $x \notin A$. اگر $x \in A$ آنگاه یک $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $x = x_n$. پس نگاشت f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x_{n+1} & x = x_n \in A \\ x & x \notin A \end{cases}$$

ثابت کنید که تابع f یک به یک و پوشاست.

برای اثبات سمت دیگر قضیه باید نشان دهیم که هیچ مجموعه‌ی متناهی‌ای با جزئی از خودش همتوان نیست. این را نیز به راحتی می‌توان با استقراء ثابت کرد (بررسی کنید). □

نتیجه ۱۵۳. مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ نامتناهی است. (چون با بخشی از خودش همتوان است.)

$$\begin{array}{lcccccc} \mathbf{N}: & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \dots \\ \mathrm{E}: & ۰ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \dots \end{array}$$

تا کنون فهمیدیم که مجموعه‌ها، به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند؛ مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌های نامتناهی. یک سوال طبیعی این است که آیا مجموعه‌های نامتناهی، همه هم‌اندازه‌ی هم هستند؟ در بالا دیدیم که $\mathbf{N}$ و $\mathbf{E}$ هم‌اندازه‌ی هم هستند؛ پس پرسیدن این سوال طبیعی است.

۲.۱۹ دسته‌بندی نامتناهی‌ها

تعریف ۱۵۴. مجموعه‌ی X را **شمارای نامتناهی** می‌خوانیم هرگاه $X \cong \mathbf{N}$. در اینصورت می‌نویسیم:

$$\mathbf{card}(X) = \aleph_0$$

عبارت سمت راست بالا، الف‌صفر نام دارد. الف، حرف اول الفبای عبری است.

تعریف ۱۵۵. مجموعه‌ی X را **ناشمارای نامتناهی** می‌خوانیم هرگاه نامتناهی باشد ولی شمارا نباشد.

به تعریف ۱۵۴ دقت کنید. بنا به این تعریف، یک مجموعه‌ی داده شده، شمارای نامتناهی است هرگاه تابعی یک به یک و پوشا از $\mathbf{N}$ بدان مجموعه موجود باشد. به بیان دیگر، یک مجموعه‌ی X شمارای نامتناهی است هرگاه اعضای آن را بتوان توسط یک دنباله به صورت زیر نوشت:

$$X = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

خودِ مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ پس بدین دلیل شماراست که می‌توان نوشت:

$$\mathbf{N} = \{n\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

همچنین مجموعه‌ی اعداد زوج شماراست زیرا

$$\mathbf{E} = \{۲n\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

حال طبیعی است از خودمان بپرسیم که آیا مجموعه‌ای پیدا می‌شود که نامتناهی باشد ولی اعضای آن را نتوان به صورت یک دنباله شمرد؟ تعریف ۱۵۵ انگار جواب این سوال را داده است! به مثال زیر دقت کنید:

مثال ۱۵۶. نشان دهید که بازه‌ی (۰, ۱)، به عنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی، ناشمارای نامتناهی است.

اثبات. اثبات این که این بازه، ناشماراست با شما؛ می‌توانید برای اثبات از قضیه‌ی ۱۵۹ استفاده کنید.

هر عدد در بازه‌ی (۰, ۱) را می‌توان با یک بسط اعشاریِ شمارای نامتناهی نمایش داد. مثلاً

۰/۱۲۳۷۹۱۲...

۰/۱۱۹۹۹۹۹...

توجه کنید که عددی مانند

۰/۱۲

را توسط بسطِ

۰,۱۹۹۹۹۹۹۹...

نشان می‌دهیم. بنابراین هر عدد حقیقی را می‌توان به طور یکتا با بسطی شمارا نشان داد (فهم دقیق این گفته، نیازمند گذراندن یک دوره‌ی آنالیز مقدماتی است).

حال به برهان خلف فرض کنید بازه‌ی $(0,1)$ شمارا باشد. پس میان $\mathbf{N}$ و بازه‌ی $(0,1)$ تناظر یک به یکی مانند زیر برقرار است.

$$\begin{array}{lllllll}
0 & \to & 0,a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \ldots \\
1 & \to & 0,a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\
2 & \to & 0,a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\
\vdots & & & & & & \\
\mathrm{n} & \to & 0,a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots
\end{array}$$

از آنجا که تناظر بالا یک به یک است، پس تمام اعداد حقیقی در بالا لیست شده‌اند.

عدد زیر را در نظر بگیرید.

/صفر	عددی بین صفر تا ۹ به غیر از a_{00}	عددی بین صفر تا ۹ به غیر از a_{11}	عددی بین صفر تا ۹ به غیر از a_{22}	$\ldots$

عدد بالا در بازه‌ی $(0,1)$ است اما در لیست بالا گنجانده نشده است. پس این فرض که همه‌ی اعداد موجود در بازه‌ی $(0,1)$ در بالا لیست شده‌اند، درست نیست. بنابراین بازه‌ی $(0,1)$ ناشماراست. $\square$

پس دیدیم که بازه‌ی $(0,1)$ شمارای نامتناهی است. در واقع، این بازه از تمام اعداد طبیعی بیشتر عنصر دارد و اعضایش آنقدر زیاد است که نمی‌توان آنها را توسط یک دنباله‌ی شمارا نمایش داد.

لم ۱۵۷. اگر $a \neq b$ آنگاه

$$(a,b) \cong (0,1).$$

اثبات. کافی است یک تناظر یک به یک بین بازه‌ی (a,b) و بازه‌ی $(0,1)$ پیدا کنیم. برای این کار، کافی است معادله‌ی خطی را بیابیم که از نقاط $(a,0)$ و $(b,1)$ می‌گذرد. $\square$

پس همه‌ی بازه‌های باز، هم‌اندازه‌اند و همه‌ی آنها نامتناهی و ناشمارا هستند. در زیر نشان داده‌ایم که کُلِّ $\mathbb{R}$ نیز هم‌اندازه‌ی بازه‌ی $(0,1)$ است. پس $\mathbb{R}$ ناشمارای نامتناهی است.

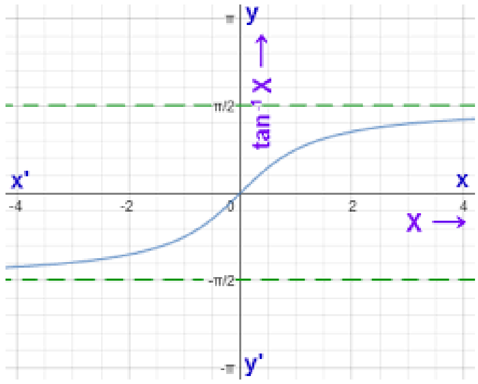
مثال ۱۵۸. $\mathbf{R} \cong (0,1)$

پاسخ. بنا به لم قبل کافی است یک بازه پیدا کنیم که با $\mathbb{R}$ همتوان باشد. تابعِ

$$f(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

یک تابع یک به یک و پوشاست. پس

$$\mathbb{R} \cong (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cong (0,1)$$



□

در جلسات آینده اندازه‌ی مجموعه‌های مختلفی را بررسی خواهیم کرد.

خلاصه‌ی درس: مجموعه‌ها یا متناهیند یا نامتناهی. مجموعه‌های نامتناهی یا شمارا هستند یا ناشمارا.

درس را با قضیه‌ی زیر به پایان می‌بریم:

قضیه ۱۵۹. مجموعه‌ی دلخواهِ X نامتناهی است اگروتنها اگر شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی باشد.

اثبات. اثبات قضیه‌ی ۱۵۲ را (به دقت) بخوانید. اگر X یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی A که در اثبات قضیه‌ی یادشده ساخته شد، شمارای نامتناهی است و $A \subseteq X$. □

۲۰ جلسه‌ی بیستم، شنبه

۱.۲۰ بررسی بیشتر مجموعه‌های شمارا

در جلسات قبل، دسته‌بندی زیر را برای مجموعه‌ها، بر حسب سایز، معرفی کردیم:

$$\text{مجموعه‌ها}\begin{cases}\text{متناهی}\\[2ex] \text{نامتناهی}\begin{cases}\text{شمارا} & \cong \mathbb{N}\\ \text{ناشمارا} & \ncong \mathbb{N}\end{cases}\end{cases}$$

گفتیم که مجموعه‌ی X را شمارا می‌گویند هرگاه بتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$X = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

مثال ۱۶۰. در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که $\mathbf{R} \ncong \mathbf{N}$؛ زیرا $(۰,۱) \cong (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \cong \mathbf{R}$. و با برهان قطری کانتور ثابت کردیم که $(۰,۱)$ ناشماراست.

در ادامه‌ی جلسه، مثالهای بیشتری از مجموعه‌های شمارا خواهیم دید. **توجه کنید که در این جزوه، منظورمان از شمارا، شمارای نامتناهی است.**

مثال ۱۶۱. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی شمارا باشند و $A \cap B = \emptyset$. آنگاه $A \cup B$ نیز شماراست.

اثبات. فرض کنید $\{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ شمارشی برای A باشد و $\{y_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ شمارشی برای B باشد. داریم:

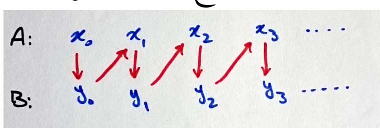
$$A \cup B = \{x_۰, y_۰, x_۱, y_۱, x_۲, y_۲, x_۳, y_۳, \ldots\}$$

تابع $f : \mathbf{N} \to A \cup B$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(۲i) = x_i$$

$$f(۲i + ۱) = y_i$$

دقت کنید که تابع بالا، مجموعه‌ی $A \cup B$ را به صورت زیر می‌شمارد:



بررسی کنید که تابع f یک به یک و پوشاست. □

توجه ۱۶۲. در مثال بالا مجموعه‌ی A را با اعداد زوج و مجموعه‌ی B را با اعداد فرد متناظر کردیم. از این رو $A \cup B$ با مجموعه‌ی اعداد طبیعی متناظر شد و از اینجا فهمیدیم که شماراست.

مثال ۱۶۳. مجموعه‌ی اعداد صحیح، $\mathbf{Z}$، شماراست.

اثبات. داریم

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \underbrace{\mathbf{Z}^-}_{\text{اعداد صحیح منفی}}$$

و می‌دانیم که

$$\mathbf{N} \cap \mathbf{Z}^- = \emptyset$$

بنا به مثال قبل، کافی است نشان دهیم که $\mathbf{Z}^-$ شماراست.

$$\mathbf{Z}^- = \{-\overset{\cdot}{۱}, -\overset{۱}{۲}, -\overset{۲}{۳}, -\overset{۳}{۴}, \ldots\}$$

تابع $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}^-$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$x \overset{f}{\mapsto} -x - ۱$$

تابع بالا یک به یک و پوشاست. پس $\mathbf{Z}^-$ شماراست. پس $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^- \cup \mathbf{N}$ شماراست. $\square$

در مثال بعد می‌بینیم که اگر یک عنصر به مجموعه‌ای شمارا اضافه کنیم، مجموعه‌ی حاصل همچنان شماراست. چند مثال بعدی در واقع بیان ریاضی همان پارادوکس هتل هیلبرت است که در جلسات گذشته درباره‌اش صحبت کردیم.

مثال ۱۶۴. فرض کنید A یک مجموعه‌ی شمارا باشد و $x \notin A$. آنگاه $A \cup \{x\}$ هم شماراست.

اثبات. از آنجا که A شماراست داریم

$$A \cong \mathbf{N}$$

یعنی

$$A = \{x_۰, x_۱, x_۲, \ldots\}$$

می‌نویسیم:

$$A \cup \{x\} = \{x, x_۰, x_۱, x_۲, \ldots\}$$

تابع $f : \mathbf{N} \to A \cup \{x\}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(۰) = x$$

$$f(i) = x_{i+۱}$$

بررسی کنید که تابع بالا یک به یک و پوشاست. $\square$

مثال ۱۶۵. اگر A شمارا باشد و $x \in A$ آنگاه $A - \{x\}$ هم شماراست.

اثبات. فرض کنید

$$A = \{x_{۰}, x_{۱}, x_{۲}, \ldots\}$$

و فرض کنید عنصر برداشته شده $x = x_n$ باشد.

$$A - \{x\} = \{x_{۰}, x_{۱}, \ldots, x_{n-۱}, x_{n+۱}, \ldots\}$$

تابع $f : \mathbf{N} \to A - \{x_n\}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} ۰ &\to x_{۰} \\ &\vdots \\ x_{n-۱} &\to x_{n-۱} \\ x_i &\to x_{i+۱} \quad i \geq n \end{aligned}$$

تابع بالا یک به یک و پوشاست. □

مثال ۱۶۶. فرض کنید A شماراست و $x_{۰}, \ldots, x_n \notin A$ نشان دهید که $A \cup \{x_{۰}, \ldots, x_n\}$ شماراست.

اثبات. به عهده‌ی شما (از استقراء کمک بگیرید). □

مثال ۱۶۷. اگر A شمارا باشد و $x_{۱}, \ldots, x_n \in A$ آنگاه $A - \{x_{۱}, \ldots, x_n\}$ هم شماراست.

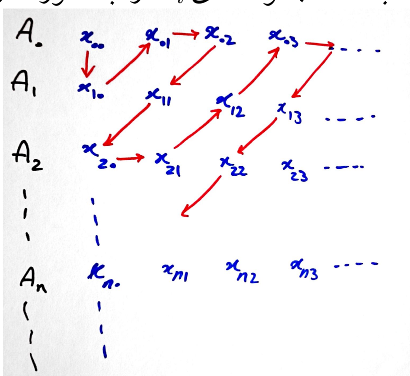
اثبات مثال بالا نیز با استفاده از استقراء آسان است.

مثال ۱۶۸. اگر $A_{۱}, \ldots, A_n$ مجموعه‌هایی شمارا باشند به طوری که $A_i \cap A_j = \emptyset$ (برای هر $۱ \leqslant i, j \leqslant n$) آنگاه $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i$ شماراست.

مثال بالا را نیز با استقراء ثابت کنید. در مثال زیر گفته‌ایم که اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارا، مجموعه‌ای شماراست.

مثال ۱۶۹. فرض کنید $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌ی شماراست و برای هر $i \neq j \in \mathbb{N}$ داریم $A_i \cap A_j = \emptyset$. آنگاه $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i$ شماراست.

اثبات. مجموعه‌های A_i را به صورت زیر بشمارید:



با استفاده از مسیری که در شکل بالا مشخص شده است، $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ را بشمارید. (برای کسی که ضابطه‌ی نگاشت مورد نظر از $\mathbb{N}$ به $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ را پیدا کند نمره‌ای در نظر گرفته‌ام!) $\square$

سوال ۲۲. آیا حکم مثال قبل را می‌شد با استقراء ثابت کرد؟

پاسخ سؤال بالا منفی است. دقت کنید که با استقراء می‌توان درباره‌ی اعداد طبیعی حکم ثابت کرد **نه درباره‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی.** اگر $p(\circ)$ درست باشد و از درستی $p(n)$ بتوان درستی $p(n+1)$ را نتیجه گرفت، آنگاه نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد طبیعیِ n حکم $p(n)$ درست است. مثلاً با استقرا می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعیِ n اجتماعِ n مجموعه‌ی شمارا، شماراست. اما اثبات این که اجتماع تعدادی شمارا مجموعه‌ی شمارا شماراست، با استقراء روی اعداد طبیعی ممکن نیست.

گفته‌ی بالا از لحاظ فلسفی نیز دارای بار معنائی است. وقتی در درون یک جهان از استقراء استفاده می‌کنیم، حکمی درباره‌ی اعضای آن جهان نتیجه می‌گیریم نه حکمی درباره‌ی کُلِّ آن جهان یا بیرون آن! مثال صف را در نظر بگیرید. فرض کنید صفی شمارا از افراد پیش روی شماست. نفر اول چشمان آبی دارد و از این که نفر n ام چشمان آبی دارد می‌توان نتیجه گرفت که نفر $n+1$ ام نیز چشمان آبی دارد. ازاین تنها نتیجه می‌شود که هر کس که در این صف قرار دارد دارای چشمان آبی است؛ اما نمی‌توان نتیجه گرفت که خودِ صف هم دارای چشم است و چشمان آن آبی است!

بگذریم! پس ثابت کردیم که اگر $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های شمارا باشد آنگاه $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i$ شماراست.

مثال ۱۷۰. مجموعه‌ی $\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\{(x,y)|x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$ شماراست.

اثبات. داریم

$$\{\circ\}\times\mathbf{N}=\{(\circ,\circ)(\circ,1)(\circ,2)\ldots\}$$
$$\{1\}\times\mathbf{N}=\{(1,\circ)(1,1)(1,2)\ldots\}$$
$$\vdots$$

می‌دانیم که

$$\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\{n\}\times\mathbf{N}$$

شماراست. گفتیم که اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارائی که دو به دو متمایزند، شماراست. $\square$

مثال ۱۷۱. اگر X و Y شمارا باشند آنگاه $X\times Y$ هم شماراست. (همان اثبات بالا).

مثال ۱۷۲. هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbf{N}$ شماراست.

اثبات. فرض کنید $A\subseteq\mathbf{N}$ نامتناهی باشد. هر زیر مجموعه از $\mathbf{N}$ دارای یک کوچکترین عضو است. فرض کنید $x_\circ$ کوچکترین عضو A باشد. حال فرض کنید $x_\circ,\ldots,x_n$ پیدا شده باشند؛ x_{n+1} را کوچکترین عضو $A-\{x_\circ,\ldots,x_n\}$ بگیرید. تابع زیر را از $\mathbf{N}$ به A در نظر بگیرید.

$$f(i)=x_i$$

اثبات پوشا بودن f: فرض کنید t عنصر دلخواهی از A باشد. پس $t = n$ یک عدد طبیعی است. تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از n برابر با n است. پس حداکثر پس از طی n مرحله در بالا به t می‌رسیم؛ به بیان دیگر از میان $f(۰), \ldots, f(n-۱)$ حتما یکی برابر با t خواهد بود. □

مثال ۱۷۳. مجموعه‌ی $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ شماراست. (منظورمان از $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ اعداد گویای بزرگتر یا مساوی صفر است.)

اثبات.

$$\mathbf{Q}^{\geqslant ۰} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbf{N}, (a,b) = ۱\}$$

$\ldots$					۰		
$\ldots$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۱}$		
$\ldots$	$\frac{۲}{۵}$		$\frac{۲}{۳}$		$\frac{۲}{۱}$	$\leftarrow$	مخرج اعداد فرد هستند پس شماراست.
$\ldots$	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۳}{۴}$		$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۱}$	$\leftarrow$	شمارا
$\ldots$	$\frac{۴}{۵}$		$\frac{۴}{۳}$		$\frac{۴}{۱}$	$\leftarrow$	شمارا

همان طور که در بالا به طور نادقیق گفته‌ایم، $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست. پس $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ شماراست.
آیا می‌توانید اثبات بالا را دقیق کنید؟ □

در جلسات آینده اثبات دیگری نیز برای مثال بالا ارائه خواهیم کرد.

مثال ۱۷۴. مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.

اثبات. داریم

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\leq} \cup \mathbb{Q}^{<۰}$$

دو مجموعه‌ی سمت راست شمارایند و اشتراکشان تهی است. □

مثال ۱۷۵. مجموعه‌ی $\mathbf{Q}^c$ (اعداد گنگ) ناشماراست.

اثبات. اگر $\mathbf{Q}^c$ شمارا باشد آنگاه $\mathbb{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^c$ شماراست که این تناقض است. $\lightning$ □

۲۱ جلسه‌ی بیست‌ویکم، تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی

در جلسه‌ی قبل مثالهائی زیادی از مجموعه‌های شمارا دیدیم. گفتیم که X شماراست هرگاه

$$X \cong \{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$$

و گفتیم که در این صورت می‌نویسیم:

$$\mathbf{card}(X) = \aleph_{\circ}$$

با یک برهان قطری، ثابت کردیم که

$$\mathbf{card}[\circ, 1] \neq \aleph_{\circ}$$

آنچه را که در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم، می‌توانیم به صورت زیر به زبان کاردینالها بنویسیم:

اجتماع یک مجموعه‌ی شمارا با یک مجموعه‌ی n عضوی، شماراست:

$$\aleph_{\circ} + n = \aleph_{\circ}$$

اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست:

$$\aleph_{\circ} + \aleph_{\circ} = \aleph_{\circ}$$

اجتماع شمارا تا مجموعه‌ی شمارا، شماراست؛ به بیان دیگر، حاصلضرب دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست:

$$\underbrace{\aleph_{\circ} + \aleph_{\circ} + \dots}_{\text{بار}\,\aleph_{\circ}} = \aleph_{\circ} \times \aleph_{\circ} = \aleph_{\circ}$$

به بیان دیگر:

$$\aleph_{\circ} \times \aleph_{\circ} = \mathbf{card}(\mathbf{N}\times\mathbf{N}) = \mathbf{card}(\mathbf{N}) = \aleph_{\circ}$$

توجه ۱۷۶. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. گفتیم که $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$ یعنی تابعی یک به یک و پوشا از X به Y موجود است.

در ادامه‌ی درس می‌خواهیم روی اندازه‌ی مجموعه‌ها، ترتیب تعریف کنیم و مشخص کنیم که در چه صورت می‌گوئیم که اندازه‌ی یک مجموعه، از دیگری بیشتر است.

تعریف ۱۷۷. می‌نویسیم $\mathbf{card}(X) \leqslant \mathbf{card}(Y)$ یا $X \leq Y$ هرگاه تابعی یک به یک (و نه لزوماً پوشا) از X به Y موجود باشد.

مثال ۱۷۸. برای هر عدد طبیعی n داریم $n < \aleph_{\circ}$؛ زیرا تابعی یک به یک از $\{\circ, 1, \dots, n-1\}$ به $\mathbf{N}$ موجود است.

$$\underbrace{\{\circ, 1, \dots, n-1\}}_{=n} \xrightarrow{f} \mathbf{N}$$

می‌دانیم که اگر n و m دو عدد طبیعی باشند، آنگاه اگر

$$(m \leqslant n) \wedge (n \leqslant m)$$

آنگاه

$$m = n$$

سوال ۲۳. آیا مشابه عبارت بالا برای ترتیب کاردینالها هم برقرار است؟ یعنی اگر

$$\mathbf{card}(X) \leqslant \mathbf{card}(Y)$$

و

$$\mathbf{card}(Y) \leqslant \mathbf{card}(X)$$

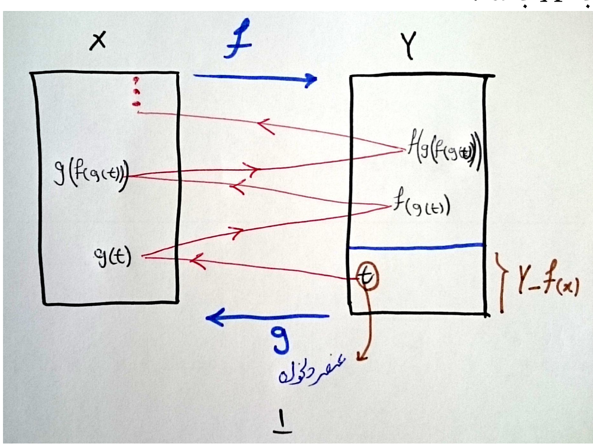
آیا لزوماً $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$؟

آنچه در سؤال بالا پرسیده شده است، بیان دیگری از قضیه‌ی زیر است:

قضیه ۱۷۹ (کانتور_برنشتاین)**.** فرض کنید یک تابع یک به یک از X به Y موجود باشد و یک تابع یک به یک از Y به X موجود باشد. آنگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود است.

برای قضیه‌ی کانتور برنشتاین اثباتهای مختلفی وجود دارد که می‌توانید آنها را صفحه‌ی ویکی‌پدیای فارسی بیابید. در اینجا سعی کرده‌ام اثباتی را بیاورم که قابل فهمتر باشد. [24] این قضیه، یکی از مهمترین قضایائی است که در این درس ثابت کرده‌ایم و از این رو برای کسی که اثبات این قضیه را نیز دقیق یاد بگیرد یک نمره قائل خواهم بود.

اثبات. اگر X و Y متناهی و به ترتیب دارای اندازه‌های m و n باشند، باشند، آنگاه وجود تابع یک به یک از X به Y معادلِ $n \leq m$ و وجود تابع یک به یک از Y به X معادل $m \leq n$ است. از این دو نتیجه می‌شود که $m = n$.
این که یکی متناهی باشد و دیگری نامتناهی ممکن نیست، زیرا از یک مجموعه‌ی نامتناهی نمی‌توان تابعی یک‌به‌یک به یک مجموعه‌ی متناهی تعریف کرد.
پس فرض کنیم ایندو نامتناهی باشند. فرض کنید f تابعی یک به یک از X به Y باشد و g تابعی یک به یک از Y به X باشد.

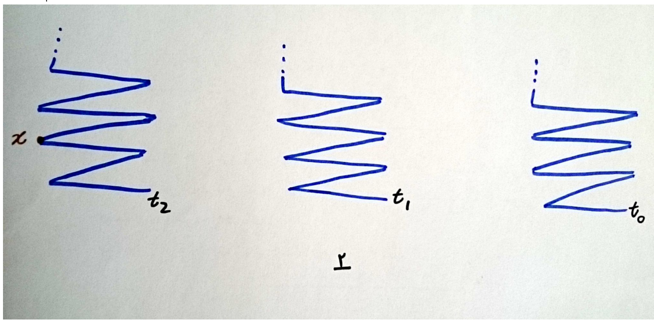


[24] البته آن صفحه را نیز من نوشته‌ام!

فرض کنید t یک عنصر دلخواهی در $Y-f(X)$ باشد. مطابق شکل بالا، دنباله‌ی زیر را بسازید:

$$t \to g(t) \to f\big(g(t)\big) \to g\Big(f\big(g(t)\big)\Big) \to f\bigg(g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)\bigg) \to \dots$$

این کار را برای همه‌ی tهای موجود در $Y-f(X)$ انجام دهید.



ادعای اول. هر کدام از دنباله‌های نوشته شده در بالا نامتناهی است؛ یعنی از سمت چپ و راست هیچگاه در طولی متناهی متوقف نمی‌شوند.

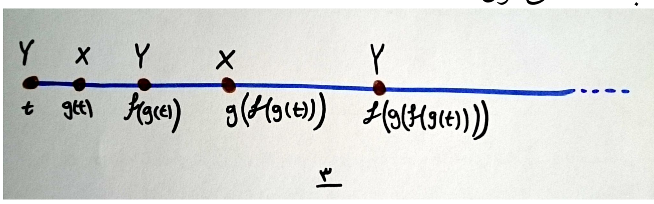
ادعای دوم. دنباله‌های بالا هیچ اشتراکی با هم ندارند. یعنی جملات سمت چپ یکی با دیگری جملات سمت راست یکی با دیگری اشتراکی ندارد.

فرض کنید ادعاهای اول و دوم هر دو ثابت شده باشند. تابع $h : X \to Y$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{اگر } x \text{ در سمت چپ یکی از دنباله‌های یادشده باشد.} \\ f(x) & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

ادعای سوم. تابع h یک به یک و پوشاست.

اثبات ادعای اول.



برای سادگی نشان می‌دهیم که جمله‌ی اول و سوم هیچگاه با هم برابر نیستند. فرض کنید

$$f\big(g(t)\big) = f\bigg(g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)\bigg)$$

آنگاه از آنجا که f یک به یک است داریم:

$$g(t) = g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)$$

حال از آنجا که g یک به یک است داریم

$$\underbrace{t}_{\in Y-f(X)} = \underbrace{f\big(g(t)\big)}_{\in f(X)} \quad \lightning$$

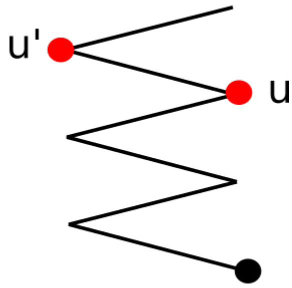
عبارت بالا، تناقض آمیز است. با همین ایده می‌توانید نشان دهید که هیچ دو جمله‌ی واقع در یک طرف یکسان از دنباله‌ی بالا با هم برابر نیستند. ادعای دوم نیز به طور کاملاً مشابه ثابت می‌شود.

اثبات ادعای سوم. می‌خواهیم ثابت کنیم تابع h یک به یک و پوشاست.

$$h(x) = \begin{cases} g^{-۱}(x) & \text{اگر } x \text{ در سمت چپ یکی از دنباله‌های یادشده باشد.} \\ f(x) & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

اثبات پوشابودن. عنصر دلخواه $u \in Y$ را در نظر بگیرید. اگر یک زیگزاک، مشابه شکل زیر، از u بگذرد آنگاه داریم:

$$u = h(u')$$



اگر هیچ زیگزاگی از u نگذرد معلوم می‌شود که $u \notin Y - f(X)$؛ زیرا در غیر این صورت u شروع یک زیگزاگ خواهد بود. پس $u \in f(X)$ یعنی $\exists u' \in X \quad f(u') = u$. اثبات یک به یک بودن تابعِ h به عهده‌ی شما. $\square$

در جلسات بعد کاربردهائی از قضیه‌ی بالا را خواهیم دید. در ادامه‌ی درس هدفمان این است که بدانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی دلخواه چقدر است.

در جلسات اول درس دیدیم که اگر X یک مجموعه‌ی متناهی و دارای n عضو باشد، آنگاه

$$|P(X)| = ۲^n$$

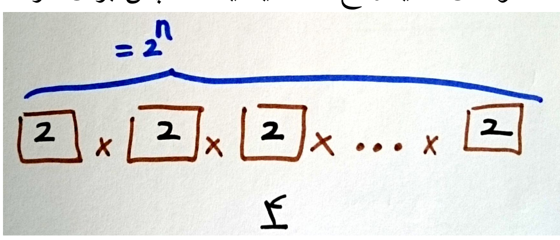
اثبات. قبلا ثابت کردیم که

$$|P(X)| = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \ldots + \binom{n}{n} = (۱ + ۱)^n = ۲^n$$

توجه کنید که بسط دوجمله‌ایِ $\binom{n}{m}$ در واقع نشان دهنده‌ی تعداد زیرمجموعه‌های m عضویِ مجموعه‌ی n عضوی مورد نظر ماست.

برای گفته‌ی بالا می‌توان اثباتی آماری نیز ارائه کرد.

فرض کنید بخواهیم تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی n عضویِ X را بشماریم. هر عنصر دلخواه در X در یک مجموعه‌ی A یا واقع است یا نیست. پس برای هر عضو دو حالت موجود است.



به بیان دیگر، برای این که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی را بشماریم، کافی است تعداد دنباله‌های به طول n را بشماریم که از ۱ ,۰ ساخته شده‌اند. یعنی هر عضوی را که بخواهیم در زیرمجموعه‌ی مورد نظرمان باشد، با شماره‌ی ۱ و هر عضوی را که نخواهیم با شماره‌ی ۰ مشخص کنیم. □

در ادامه‌ی درس می‌خواهیم ایده‌ی اثبات بالا را تعمیم دهیم.

تعریف ۱۸۰. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$X^Y = \text{ مجموعه‌ی همه‌ی توابعِ از } Y \text{ به } X$$

بنابراین برای مثال $۲^{\mathbf{N}}$ یا همان $\{۰, ۱\}^{\mathbf{N}}$ برابر است با مجموعه‌ی همه‌ی توابع از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی $\{۰, ۱\}$.

قضیه ۱۸۱.

$$|P(\mathbf{N})| = |۲^{\mathbf{N}}|$$

به بیان دیگر

$$\mathbf{card}\big(P(\mathbf{N})\big) = ۲^{\aleph_۰}$$

اثبات. باید یک تابع یک و پوشای h را از $P(\mathbf{N})$ به $\{۰, ۱\}^{\mathbf{N}}$ تعریف کنیم. تابع h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: فرض کنید $A \in P(\mathbf{N})$ یعنی $A \subseteq \mathbf{N}$. باید $h(A)$ خود تابعی از $\mathbf{N}$ به $\{۰, ۱\}$ باشد. تابع $h(A)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$h(A)(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

بررسی کنید که تابع h یک به یک و پوشاست. دوباره یادآوری می‌کنم که h مجموعه‌ی A را به تابعِ $h(A)$ می‌برد و تابع $h(A)$ به صورت بالاست. □

در واقع تابع بالا نیز برای تعیین زیرمجموعه‌های $\mathbf{N}$ به این صورت عمل کرده است که اگر بخواهیم عضوی در مجموعه‌ی مورد نظر باشد، آن را با ۱ و در غیر این صورت با ۰ مشخص کرده‌ایم. برای مثال در شکل زیر، یکی از زیرمجموعه‌های $\mathbf{N}$ را مشخص کرده‌ایم:

$$\begin{array}{ccccccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \dots \end{array}$$

تا اینجا ثابت کردیم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، برابر است با تعداد توابعِ از مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی $\{۰, ۱\}$. گفتیم که این را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۲^{\aleph_۰} = \big(P(\mathbf{N})\big)$$

در مثال بعدی نشان داده‌ایم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، در واقع برابر با تعداد اعداد حقیقی است:

مثال ۱۸۲.

$$|\mathbf{R}| = ۲^{\aleph_۰} = \mathbf{card}(۰, ۱) = \mathbf{card}(\mathbf{R})$$

اثبات. هر عدد حقیقی در بازه‌ی $(۰, ۱)$ دارای یک بسط اعشاری شمارا در مبنای ۲ است. برای مثال عبارت زیر یکی از این اعداد است:

$$۰/۰۱۰۱۱۰\ldots$$

تعداد اینگونه بسطها برابر است با تعداد دنباله‌های ۰ و ۱ به طول اعداد طبیعی و تعداد این دنباله‌ها برابر است با تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\{۰, ۱\}$. (این اثبات را دقیق کنید). $\square$

نتیجه ۱۸۳. در جلسات قبل نشان دادیم که تعداد اعداد حقیقی برابر است با اندازه‌ی بازه‌ی $(۰, ۱)$ و این بازه ناشماراست. پس از آنجا که $|(۰, ۱)| = ۲^{\aleph_۰}$ پس $۲^{\aleph_۰} \neq \aleph_۰$.

پس تا اینجا به این نکته‌ی مهم رسیدیم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی ناشماراست و از این رو با $\aleph_۰$ برابر نیست.

لم ۱۸۴. $\aleph_۰ \lneqq ۲^{\aleph_۰}$

اثبات. در بالا گفتیم که تساوی برقرار نیست. برای این که نامساوی برقرار باشد، کافی است یک تابع یک به یک از $\mathbf{N}$ به $P(\mathbf{N})$ پیدا کنیم. تابع زیر، جواب می‌دهد:

$$x \to \{x\}$$

$\square$

۲۲ جلسه‌ی بیست‌ودوم، تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهی اعداد طبیعی

در جلسه‌ی گذشته با قضیه‌ی مهم کانتور ــ برنشتاین آشنا شدیم:

قضیه ۱۸۵ (قضیه‌ی کانتور ــ برنشتاین)**.** اگر $X \leqslant Y$ و $Y \leqslant X$ آنگاه $X = Y$.

در این جلسه می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهیِ اعداد طبیعی را بیابیم. نخست تعداد زیرمجموعه‌های متناهی آن را در مثال زیر حساب می‌کنیم و می‌بینیم که تعداد زیرمجموعه‌های متناهی اعداد طبیعی برابر با اندازه‌ی اعداد طبیعی است.

مثال ۱۸۶. تعداد زیر مجموعه‌های متناهیِ $\mathbf{N}$ شماراست.

اثبات. تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی $\mathbf{N}$ برابر $\aleph_0$ است. ادعا می‌کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbf{N}$ نیز برابر است با $\aleph_0$.
اثبات ادعا. می‌دانیم که تعداد زوج مرتب‌های (a, b) که $a, b \in \mathbf{N}$ بزرگتریامساوی تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbf{N}$ است، زیرا

$$|\{a, b\}| \leqslant |\{(a, b), (b, a)\}|$$

قبلاً ثابت کرده‌ایم که $\mathbf{N}^2$ هم‌اندازه‌ی $\mathbf{N}$ است. پس

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی } \mathbf{N} \leqslant \aleph_0.$$

حال دقت می‌کنیم که

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی } \mathbf{N} \geqslant \aleph_0.$$

برای اثبات این گفته به یک تابع یک به یک از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbf{N}$ نیازمندیم؛ تابعی که کار زیر را بکند:

$$\mathbf{N} \to \{\text{تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی}\}$$

$$n \mapsto \text{زیر مجموعه‌ی دو عضوی}$$

تعریف می‌کنیم:

$$f(n) = \{n, n+1\}$$

$$0 \to \{0, 1\}$$
$$1 \to \{1, 2\}$$
$$2 \to \{2, 3\}$$
$$3 \to \{3, 4\}$$
$$\vdots$$

تابع بالا یک به یک است.

حال ادعا می‌کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های n عضویِ $\mathbf{N}$ برابر $\aleph_0$ است.

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های } n \text{ عضوی } \mathbf{N} \leqslant |\mathbf{N}^n| = |\{(x_1, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{N}\}|$$

کافی است نشان دهیم که

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های } n \text{عضوی } \mathbf{N} \geqslant \aleph_0$$

تابع یک به یکِ f از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی زیر مجموعه‌های n عضوی $\mathbf{N}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \{x, x+1, \ldots, x+n-1\}$$

بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های n عضوی $\mathbf{N}$ برابر با $\aleph_0$ است.

پس مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های متناهی اعداد طبیعی

$\mathbf{N}$ اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست؛ و از این رو شماراست.

$$\underbrace{\{\text{تک عضوی}\} \cup \{\text{دو عضوی}\} \cup \ldots \cup}_{\text{شمارا}}$$

$\square$

سوال ۲۴. تعداد **زیرمجموعه‌های نامتناهی** $\mathbf{N}$ چندتاست؟

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی } \mathbf{N} + \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های متناهی } \mathbf{N}}_{\text{شمارا}} = \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های } \mathbf{N}}_{\text{ناشمارا}}$$

بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی $\mathbf{N}$ برابر **نیست** با $\aleph_0$. زیرا قبلاً ثابت کرده‌ایم که اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست، و مجموعه‌ی سمت چپ در بالا شمارا نیست. برای تعیین تعداد دقیق زیرمجموعه‌های نامتناهیِ $\mathbf{N}$ به لم زیر نیازمندیم.

لم ۱۸۷. فرض کنید A شمارا باشد و B یک مجموعه‌ی نامتناهی دلخواه باشد و $A \cap B = \emptyset$. آنگاه $|A \cup B| = |B|$.
به بیان دیگر اگر κ یک کاردینال نامتناهی دلخواه باشد آنگاه

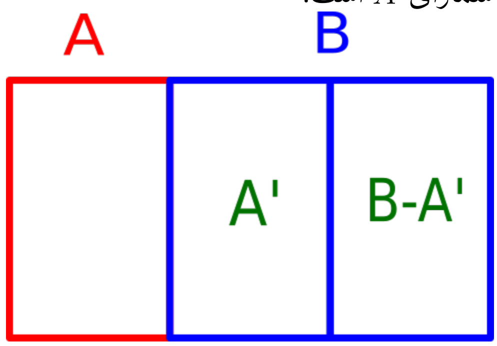
$$\kappa + \aleph_0 = \kappa$$

پس به طور ویژه

$$2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$$

توجه کنید که لم بالا بر اصل انتخاب استوار است.

اثبات. از آنجا که B نامتناهی است، بنا بر آنچه در جلسات پیش ثابت کرده‌ایم، B شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارای A' است.



از آنجا که A, A' هر دو شمارا هستند داریم:

$$A \cup A' \cong A'$$

پس

$$A \cup B = (A \cup A') \cup (B - A') \cong A' \cup (B - A') \cong B$$

$\square$

توجه ۱۸۸. در جلسات آینده ثابت خواهیم کرد که به طور کلّی اگر $|A| \geq |B|$ آنگاه

$$|A \cup B| = |B|$$

به بیان دیگر

$$\underbrace{\kappa}_{\text{کاردینال}} + \underbrace{\lambda}_{\text{کاردینال}} = \max\{\kappa, \lambda\}$$

گفتیم که

$$\underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی } \mathbf{N}}_{?} + \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های متناهی } \mathbf{N}}_{\aleph_0} = \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های } \mathbf{N}}_{2^{\aleph_0}}$$

پس تعداد زیر مجموعه‌های **نامتناهی** $\mathbf{N}$ برابر با $2^{\aleph_0}$ است. (زیرا اگر تعداد آنها کاردینالی غیر از $2^{\aleph_0}$ مانند κ باشد، آنگاه حاصل جمع بالا نیز κ می‌شود.

تا کنون آموخته‌ایم که مجموعه‌های هم‌اندازه ی اعداد طبیعی، نامتناهی هستند و به آنها شمارا می‌گویند. نیز آموختیم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی نامتناهی است، ولی از تعداد اعضای اعداد طبیعی اکیداً بیشتر است (برابر است با تعداد اعداد حقیقی). یعنی دو نامتناهی معرفی کرده‌ایم که هم‌اندازه‌ی هم نیستند. تفاوت قائل شدن برای اندازه‌ی نامتناهی‌ها تنها در ریاضیات قابل فهم است. یک سوال طبیعی این است که آیا نامتناهی‌های دیگری نیز وجود دارند؟ مثلاً آیا مجموعه‌ای بزرگتر از مجموعه‌ی اعداد حقیقی نیز وجود دارد؟

سوال ۲۵. غیر از $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ چه اندازه‌های دیگری وجود دارند؟

یک سوال طبیعی دیگر را در زیر نوشته‌ایم. این سوال، سالها ذهن کانتور را به خود مشغول کرده بود. از دید تاریخی نیاز به ذکر است که رویکرد کانتور به نامتناهی‌ها و مقایسه‌ی آنها با هم، در میان هم‌عصرانش بسیار مطرود بود. کانتور همه‌ی سالهای پایانی عمر خود را صرف سوال زیر کرد. وی در آن سالها از مشکلات روحی فراوانی رنج برد.

توجه ۱۸۹. تاکنون ثابت کرده‌ایم

$$\underbrace{\aleph_0}_{|\mathbf{N}|} \lneqq \underbrace{2^{\aleph_0}}_{|\mathbf{R}|}$$

سوال ۲۶. آیا مجموعه‌ای پیدا می‌شود که اندازه‌ی آن از اندازه‌ی اعداد طبیعی بیشتر و از اندازه‌ی اعداد حقیقی کمتر باشد؟ به بیان دیگر آیا عددی هست که $\aleph_0$ بیشتر و از $2^{\aleph_0}$ کمتر باشد؟

فرضیه‌ی پیوستار

عددی بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ وجود ندارد.

توجه ۱۹۰. هر چند برای درک جملات پیش رو نیازمند گذراندن درس منطق هستید ولی به طور گذرا اشاره می‌کنم که فرضیه‌ی پیوستار از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها مستقل است. یعنی با اصولی که در ابتدای این ترم برای نظریه‌ی مجموعه‌ها نوشتیم این فرضیه نه قابل اثبات است و نه قابل رد.

با این حال کانتور قضیه‌ی زیبای دیگری نیز دارد: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه‌ی دلخواه، همواره از تعداد اعضای آن بیشتر است. به بیان دیگر اگر κ یک کاردینال دلخواه باشد، آنگاه $\kappa < 2^\kappa$. (این گفته را برای $\kappa = \aleph_0$ قبلاً ثابت کرده‌ایم.) بدینسان همواره یک نامتناهیِ بزرگتر از یک نامتناهی داده شده موجود است:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \dots$$

قضیه ۱۹۱ (کانتور)**.** همواره $|P(X)| \gneqq |X|$.

اثبات. اولاً $|2^X| \geqslant |X|$ زیرا تابع زیر یک به یک است.

$$f : X \to P(X)$$

$$n \to \{n\}$$

در ادامه‌ی ثابت می‌کنیم که هیچ تابع یک به یک و پوشایی بین X و $P(X)$ وجود ندارد. به بیان دیگر $|X| \neq |P(X)|$.

به طور کلی‌تر ادعا می‌کنیم که هیچ تابع $g : X \to P(X)$ پوشا نیست. فرض کنید تابع g به صورت بالا داده شده باشد. ادعا می‌کنیم که g مجموعه‌ی زیر را نمی‌پوشاند:

$$P(X) \ni A = \{x \in X | x \notin g(x)\}$$

اگر تابع g پوشا باشد، آنگاه عنصر $t_0 \in X$ موجود است به طوری که

$$g(t_0) = A$$

حال اگر $t_0 \in g(t_0)$ آنگاه $t_0 \notin g(t_0)$ و اگر $t_0 \notin g(t_0)$ آنگاه $t_0 \in g(t_0)$. این تناقض نشان می‌دهد که تابع g نمی‌تواند پوشا باشد. $\square$

ثابت کردیم که

$$\underbrace{|\text{تعداد زیر مجموعه‌های } X|}_{|2^X|} \gneqq |X|$$

سوال طبیعی دیگر درباره‌ی اندازه‌ها این است آیا لزوماً اندازه‌ی دو مجموعه‌ی نامتناهی با هم قابل مقایسه است؟ به بیان دیگر اگر X, Y دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، آیا لزوماً یا تابعی یک به یک از X به Y و یا تابعی یک به یک از Y به X موجود است؟

در جلسات آینده خواهیم توانست مطالب زیر را ثابت کنیم:

۱. اگر X و Y دو مجموعه باشند آنگاه یا $|Y| \leqslant |Y|$ یا $|Y| \leqslant |X|$.

۲. اگر κ و λ دو کاردینال باشند (یعنی دو سایز مجموعه باشند) آنگاه

$$\underbrace{\kappa + \lambda}_{|X \cup Y|} = \underbrace{\kappa \cdot \lambda}_{|X \cdot Y|} = \max\{\kappa, \lambda\}$$

برای اثبات آنچه در بالا نوشته‌ایم به درک بهتری از اصل انتخاب و معادلهای آن (بالاخص لم زرن) محتاجیم.

۲۳ جلسه‌ی بیست و سوم، دوشنبه

در جلسات قبل درباره‌ی مجموعه‌های نامتناهی بسیار سخن گفتیم. فهمیدیم که نامتناهی‌ها نیز اندازه‌های مختلف دارند و از هر نامتناهی، یک نامتناهی بزرگ‌تر هم پیدا می‌شود. فهمیدیم که کوچکترین نامتناهی، هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. این که اندازه‌ی اولین نامتناهی بعد از اندازه‌ی اعداد طبیعی چیست، هنوز دانسته نیست و فرضیه‌ی پیوستار در همین باره است. فرضیه‌ی پیوستار بیانگر این است که اولین نامتناهی بزرگ‌تر از اعداد طبیعی، هم‌اندازه‌ی اعداد حقیقی است.

در این جلسه می‌خواهیم کمی هم درباره‌ی متناهی صحبت کنیم.

۱.۲۳ مجموعه‌های متناهی

مجموعه‌ی A را متناهی می‌نامیم هرگاه عدد n موجود باشد به طوری که

$$A \cong \{۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱\}$$

توجه ۱۹۲. (درصورت پذیرش اصل انتخاب) مجموعه‌ی A متناهی است اگر و تنها اگر

$$|A| \lneqq \aleph_۰.$$

توجه بالا بیانگر این است که اولین مجموعه‌ی نامتناهی، هم‌اندازه‌ی اعداد طبیعی است و هر مجموعه‌ای که از مجموعه‌ی اعداد طبیعی اکیداً کوچکتر باشد، متناهی است.

اثبات. قبلا ثابت کردیم که اگر A نامتناهی باشد آنگاه A دارای زیر مجموعه‌ای شماراست. یعنی $|A| \geqslant \aleph_۰$. □

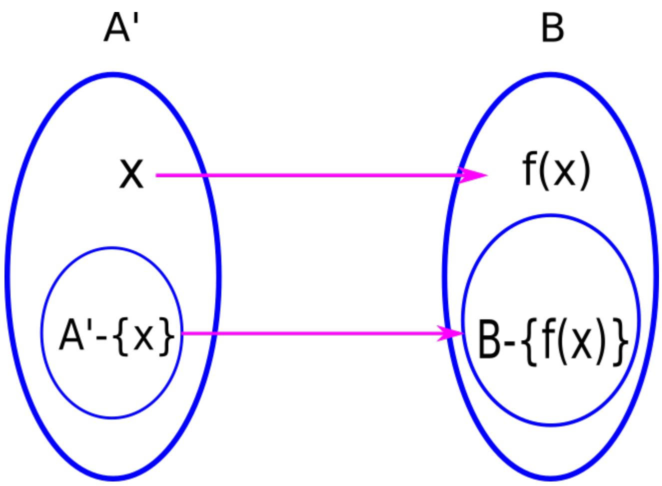
قضیه ۱۹۳. اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد و B یک مجموعه‌ی دلخواه و $f : A \to B$ تابعی پوشا باشد آنگاه B نیز متناهی است و $|B| \leqslant |A|$.

اثبات. حکم را با استقراء روی $|A|$ ثابت می‌کنیم. اگر $|A| = ۰$ آنگاه $A = \emptyset$ پس $B = \emptyset$. یعنی $|B| \leqslant |A| = ۰$. فرض کنیم حکم برای $|A| = n$ درست باشد. فرض کنید که $|A'| = n + ۱$ و تابع $f : A' \to B$ پوشا باشد. عنصر $x \in A'$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $f(A' - \{x\})$ تمام $B - \{f(x)\}$ را می‌پوشاند. بنا به فرض استقراء $|B - \{f(x)\}| \leqslant |A' - \{x\}|$ به بیان دیگر

$$|B| - ۱ \leq |A| - ۱$$

و در نتیجه داریم

$$|B| \leqslant |A'|$$



□

لم ۱۹۴. اگر A و B متناهی باشند و $|A| = |B|$ و $f : B \to A$ پوشا باشد، آنگاه f یک به یک است.

اثبات. فرض کنید f یک به یک نباشد و عناصر $x_۱, x_۲ \in B$ موجود باشند به طوری که

$$f(x_۱) = f(x_۲) = y \in A$$

می‌دانیم که تابع f از $B - \{x_۱, x_۲\}$ به $A - \{y\}$ پوشاست. پس بنا به لم قبل

$$|A - \{y\}| \leqslant |B - \{x_۱, x_۲\}|$$

یعنی

$$|A| - ۱ \leqslant |B| - ۲$$

بنابراین

$$|A| \leqslant |B| - ۱$$

و این نتیجه با فرض $|A| = |B|$ متناقض است. □

لم ۱۹۵. فرض کنید A یک مجموعه‌ی دلخواه و B یک مجموعه‌ی متناهی باشند. فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع یک به یک باشد. آنگاه A نیز متناهی است و $|A| \leqslant |B|$.

اثبات. می‌دانیم که $|A| = |f(A)|$ زیرا تابع f یک به یک است. و نیز می‌دانیم که $f(A) \subseteq B$ پس

$$|B| \geqslant |f(A)| = |A|$$

□

نتیجه ۱۹۶. اگر A و B متناهی باشند و $|A| = |B|$ و تابع $f : A \to B$ یک به یک باشد آنگاه تابع f پوشاست.

همه‌ی این لمها را گفتیم تا به نتیجه‌ی جالب زیر برسیم: بین دو مجموعه‌ی متناهی هم‌اندازه، پوشا بودن یک تابع و یک‌به‌یک بودن آن با هم معادلند:

نتیجه ۱۹۷. اگر $|B| = |A|$ و A و B متناهی باشند موارد زیر با هم معادلند:

۱. تابع $f : A \to B$ پوشاست.

۲. تابع $f : A \to B$ یک به یک است.

۳. تابع $f : A \to B$ دو سوئی است.

نتیجه ۱۹۸. اگر B متناهی باشد و $A \subseteq B$ آنگاه A هم متناهی است. (زیرا تابع همانی از A به B تابعی یک به یک است).

نتیجه ۱۹۹. اگر A نامتناهی باشد و $B \supseteq A$ آنگاه B نامتناهی است. (عکسِ نقیض جمله‌ی بالا).

نتیجه ۲۰۰. (اصل لانه‌ی کبوتری) اگر A و B متناهی باشند و $|B| \leqslant |A|$ و $f : A \to B$ یک تابع باشد آنگاه

$$\exists x_۱, x_۲ \in A \quad f(x_۱) = f(x_۲).$$

.

با استقراء می‌توان اصول شمارشی زیادی برای مجموعه‌های متناهی ثابت کرد. چند تا از آنها را در زیر آورده‌ایم.

توجه ۲۰۱. اگر A و B متناهی باشند

۱. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

۲. $|A \times B| = |A| \times |B|$ (این را با اصول شمارشی آمار و احتمال نیز به آسانی می‌توان ثابت کرد: برای هر عضو در A به اندازه‌ی $|B|$ انتخاب داریم)

۳. $|A^B| = |A|^{|B|}$ (این را نیز با اصول احتمال می‌توان ثابت کرد. به اندازه‌ی $|A|$ جعبه داریم که می‌خواهیم آنها را با عناصر B پر کنیم.) یادآوری می‌کنم که با A^B مجموعه‌ی همه‌ی توابع از B به A را نشان می‌دهیم.

۴. $|P(A)| = ۲^{|A|}$ (برای هر عنصر در A دو حالت داریم، یا در زیرمجموعه‌ی مورد نظر موجود است و یا نیست، بنابراین $۲^{|A|}$ زیرمجموعه به دست می‌آوریم).

بحث درباره‌ی اندازه‌ی مجموعه‌ها را فعلاً با چند تمرین زیر رها می‌کنیم؛ هر چند در جلسات آینده می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A, B همواره یا $A \leqslant B$ و یا $B \leqslant A$. یعنی برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B با یک تابع یک به یک از A به B موجود است یا یک تابع یک به یک از B به A موجود است. یعنی اندازه‌ی دو مجموعه‌ی داده شده همواره با هم قابل مقایسه است. برای اثبات این گفته نیازمند معرفی مفاهیم جدیدی هستیم.

تمرین ۴۴. نشان دهید که

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

تمرین ۴۵. نشان دهید که تعداد بازه‌های دو به دو مجزا در اعداد حقیقی، شماراست.

تمرین ۴۶. نشان دهید که تعداد دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی شماراست.

تمرین ۴۷. عدد $x \in \mathbb{R}$ را یک عدد جبری می‌گوئیم هرگاه یک چندجمله‌ای f با ضرایب در اعداد گویا موجود باشد، به طوری که $f(x) = 0$. نشان دهید که تعداد اعداد جبری شماراست.

تمرین ۴۸. فرض کنید که اندازه‌ی مجموعه‌های A, B برابر با $2^{\aleph_0}$ باشد و ایندو با هم اشتراکی نداشته باشند. نشان دهید که اندازه‌ی $A \cup B$ برابر با $2^{\aleph_0}$ است.

تمرین ۴۹. برای مجموعه‌های دلخواهِ X, Y, Z که در آن $Y \cap Z = \emptyset$ نشان دهید که

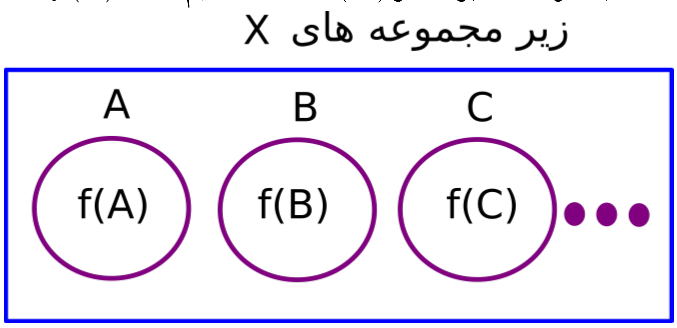
$$X^Y \times X^Z \cong X^{Y \cup Z}$$

$$(X^Y)^Z \cong X^{Y \times Z}$$

۲.۲۳ اصل انتخاب و لمِ زُرن

۱.۲.۲۳ اصل انتخاب

اصل انتخاب را در جلسات قبل دیده‌ایم. خوب است با چند بیان مختلف از این اصل آشنا شویم: اگر به تعداد نامتناهی مجموعه داشته باشیم، تابعی به نام یک تابع انتخاب موجود است که از هر یک از این مجموعه‌ها عنصری انتخاب می‌کند. به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه یک تابع $f : I \to \bigcup_{i\in I}$ موجود است به طوری که برای هر $i \in I$ داریم $f(i) \in A_i$. به بیان معادل اگر X یک مجموعه‌ی ناتهیِ دلخواه باشد و $P(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های آن باشد. آنگاه تابعی مانند f از $P(X) - \{\emptyset\}$ به X موجود است به طوری که برای هر $A \in P(X)$ داریم $f(A) \in A$.



$$P(X) \xrightarrow{f} X$$

$$f(A) \in A$$

$$f(B) \in B$$

$$f(C) \in C \ldots$$

باز به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه $\Pi_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. توجه کنید که طبق تعریف حاصلضرب نامتناهی مجموعه، داریم:

$$(x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I} A_i \iff \forall i \quad x_i \in A_i$$

(من نیز در سال اول کارشناسی اصل انتخاب را درک نمی‌کردم. در واقع برای آن «اثبات» زیر را داشتم و از این رو با خود می‌گفتم که چیزی که به این آسانی اثبات می‌شود، دیگر نباید اصلش خواند! استدلال ساده‌لوحانه‌ی آن زمانم را در زیر نوشته‌ام. شما ایرادش را بگویید:
اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه

$$\forall i \in I \quad A_i \neq \emptyset$$

بنابراین

$$\forall i \in I \exists x_i \quad x_i \in A_i$$

پس بنا به تعریف

$$(x_i)_{i\in I} \in \prod A_i$$

!) همان طور که در استدلال بالا می‌بینید، اصل انتخاب آنقدر برای ما بدیهی به نظر می‌رسد که گاهی نمی‌توانیم تشخیص دهیم که آیا از آن در اثباتیا استفاده کرده‌ایم یا نه. در ریاضیات سطوح بالاتر، بررسی این که کدام اثباتها بر اصل انتخاب استوارند مهم است. گاهی می‌کوشیم که در صورت ممکن برای برخی از آنها اثباتی بیاوریم که در آن از اصل انتخاب استفاده نشده باشد.
لم زرن، در ابتدا به عنوان اصلی جایگزین اصل انتخاب (یا اصل خوش‌ترتیبی) ارائه شده بود، اما بعدها ثابت شد که این اصل در واقع معادل اصل انتخاب است. یعنی اصل انتخاب از لم زرن و باقی اصول نتیجه می‌شود و لم زرن از اصل انتخاب و باقی اصول نتیجه می‌شود. با این حال، فرمول‌بندی لم زرن به گونه‌ای است که کاربرد آن در بسیاری شاخه‌های ریاضی، بالاخص جبر، بسیار مشهودتر از اصل انتخاب است. برای ورود به بحث لم زرن، نیازمند مقدمات بخش بعدی هستیم.

۲.۲.۲۳ مجموعه‌های مرتب

رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X را یک **رابطه‌ی ترتیبی** می‌خوانیم هرگاه R انعکاسی، **پادتقارنی** و متعدی باشد. معمولاً در این صورت به جای xRy می‌نویسیم $x \leqslant y$. اگر R یک رابطه‌ی ترتیبی روی X باشد، (X, R) را یک مجموعه‌ی مرتب می‌خوانیم.

مثال ۲۰۲. ساختارِ $(\mathbf{N}, \leqslant)$، یعنی مجموعه‌ی اعداد طبیعی با ترتیب معمولش(همان ترتیبی که شما از ریاضی مقدماتی به خاطر دارید) یک مجموعه‌ی مرتب است، زیرا

$$\forall x \quad x \leqslant x$$

$$\forall x, y \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant x \rightarrow x = y$$

$$\forall x, y, z \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant z \rightarrow x \leqslant z$$

توجه ۲۰۳. ترتیب روی اعداد طبیعی تام (یا خطی) است. یعنی

$$\forall x, y \in \mathbf{N} \quad x \leqslant y \vee y \leqslant x$$

تعریف ۲۰۴. مجموعه‌ی مرتب $(X, \leqslant)$ را مرتب خطی (مرتب تام) می‌نامیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$$

در غیر این صورت $(X, \leqslant)$ را مرتب جزئی می‌نامیم.

دقت کنید که هم در مجموعه‌ی مرتب جزئی و هم در مجموعه‌ی مرتب خطی عبارت زیر درست است:

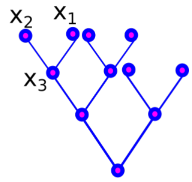
$$\forall x, y \quad (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$$

ولی تفاوت این است که در مجموعه‌ی مرتب خطی جمله‌ی زیر درست است ولی در مجموعه‌ی مرتب جزئی جمله‌ی زیر لزوماً درست نیست:

$$\forall x, y \quad (x \leq y \vee y \leq x)$$

یعنی در یک مجموعه‌ی مرتب جزئی ممکن است دو عنصرِ x, y پیدا شوند که با هم قابل مقایسه نباشند (یعنی هیچیک از دیگری بیشتر یا کمتر نباشد). مجموعه‌ی مرتب خطی را می‌توان به صورت یک زنجیر تجسم کرد که ممکن است نامتناهی باشد:

مجموعه‌ی مرتب جزئی را می‌توان به صورت درختی تجسم کرد:



در شکل بالا $x_۳$ با هر یک از عناصر $x_۱$ و $x_۲$ قابل مقایسه است و از آنها کمتر است، ولی عناصر $x_۲$ و $x_۱$ قابل مقایسه با هم نیستند. همچنین $x_۲$ با آخرین نقطه سمت راست درخت قابل مقایسه نیست. عنصر پایین درخت با همه‌ی عناصر قابل مقایسه و از همه‌ی آنها کمتر است. دقت کنید که درخت بالا می‌تواند از بالا و پائین نامتناهی باشد و نیز ممکن است در جاهائی از آن شکل لوزی نیز داشته باشیم.

درباره‌ی مجموعه‌های مرتب جزئی در جلسه‌ی آینده بیشتر صحبت خواهیم کرد.

امتحان اول

توجه. غیر از سوال اول، پاسخ‌های سوالات و استدلالها را به صورت انشائی و دقیق بنویسید. از نوشتن فرمولها پشت سر هم و بدون هیچ توضیحی خودداری کنید.

منطق و بیان

سوال ۲۷. فرض کنید که عبارت $A(x,y)$ به معنی این باشد که «x عموی y است» و $D(x,y)$ به این معنی باشد که «x دائی y است». جملات زیر را در منطق مرتبه‌ی اول فرمولبندی کنید:

۱. عموی هر کس، دائی‌های او را می‌شناسد.

۲. هر کس عموئی دارد که دائی‌های او را می‌شناسد.

مجموعه‌ها

سوال ۲۸. درباره‌ی پارادوکس راسل، توضیح کوتاهی دهید که معلوم شود آن را فهمیده‌اید.

سوال ۲۹. نشان دهید که $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ اگروتنهااگر $B \subseteq A$ یا $A \subseteq B$.

روابط و توابع

سوال ۳۰. فرض کنید X یک مجموعه باشد. مجموعه‌های A, B را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$A =$ مجموعه‌ی همه‌ی روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X

$B =$ مجموعه‌ی همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی X

یک تابعِ یک به یک و پوشا از A به B معرفی کنید و پوشا بودن آن را ثابت کنید.

سوال ۳۱. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. ثابت کنید که f پوشاست اگروتنهااگر تابع $g : Y \to X$ موجود باشد به طوری که $f \circ g = id_Y$. در کدام سمت اثبات به اصل انتخاب نیاز دارید؟

همتوانی و کاردینالها

سوال ۳۲. فرض کنید X, Y, Z سه مجموعه باشند. همتوانی زیر را ثابت کنید:

$$(X^Y)^Z \cong X^{Y \times Z}$$

سوال ۳۳. فرض کنید X یک مجموعه باشد. ثابت کنید که

$$P(X) \cong \{۰, ۱\}^X$$

سوال ۳۴. نشان دهید که

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

۲۴ جلسه‌ی بیست و چهارم، مجموعه‌های مرتب و لم زُرن

۱.۲۴ مجموعه‌های مرتب

در جلسه‌ی قبل با مجموعه‌های مرتب آشنا شدیم. یادآوری می‌کنم که:

تعریف ۲۰۵. مجموعه‌ی X را به همراه رابطه‌ی $\leqslant$ یک مجموعه‌ی مرتب می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad x \leqslant x$$

$$\forall x, y \in X \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant x \to x = y$$

$$\forall x, y, z \in X \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant z \to x \leqslant z$$

وقتی می‌گوییم $(X, \leqslant)$ مرتب جزئی است یعنی جمله‌ی زیر در آن لزوماً درست نیست.

$$\forall x, y \in X \quad x \leqslant y \vee y \leqslant x$$

یعنی هر دو عضو داده شده، لزوماً با هم قابل مقایسه نیستند.

دقت کنید که معمولاً یک رابطه‌ی ترتیب را با علامت $\leq$ نشان می‌دهیم، ولی منظورمان این نیست که اعضای مجموعه، عدد هستند. اعضای مجموعه می‌توانند هر چیزی باشند و رابطه‌ی $\leq$ فقط باید دارای ویژگی‌های انعکاسی، پادتقارنی و تعدی باشد.

مثال ۲۰۶. روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$x \overset{\bullet}{\leqslant} \leftrightarrow x|y$$

سوال ۳۵. نشان دهید رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی ترتیبی است.

پاسخ. می‌دانیم که

$$(۱)\ \forall x \in \mathbf{N} \quad x|x$$

$$(۲)\ \forall x, y \in \mathbf{N} \quad x|y \wedge y|x \to x = y$$

$$(۳)\ \forall x, y, z \in \mathbf{N} \quad x|y \wedge y|z \to x|z$$

پس $|$ (عاد کردن) یک رابطه‌ی ترتیبی است.

توجه ۲۰۷. داریم ۱۳ $\overset{\bullet}{\nleqslant}$ ۲ زیرا ۱۳∤۲ و همچنین ۲ $\overset{\bullet}{\nleqslant}$ ۱۳ زیرا ۲∤۱۳.
پس رابطه‌ی ترتیبی فوق خطی (تام) نیست.

□

مثال ۲۰۸. فرض کنید X یک مجموعه باشد. روی $P(X)$ رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$A \leqslant B \iff A \subseteq B$$

ادعا: $(P(X), \subseteq)$ یک مجموعه‌ی مرتب است.

پاسخ. می‌دانیم که عبارتهای زیر درستند:

$$\forall A \in P(X) \quad A \subseteq A$$

$$\forall A, B \in P(X) \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A \to A = B$$

$$\forall A, B, C \in P(X) \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C$$

پس رابطه‌ی فوق یک رابطه‌ی ترتیبی است.
فرض کنیم X دارای دو عضو a, b باشد که $a \neq b$ آنگاه

$$\{a\} \nsubseteq \{b\}$$

$$\{b\} \nsubseteq \{a\}$$

پس $(P(X), \subseteq)$ مرتب خطی نیست. □

مثال ۲۰۹. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. قرار دهید

$\mathcal{A} =$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع جزئی از Y به X

به بیان دیگر تابع f در $\mathcal{A}$ است هرگاه دامنه‌ی آن زیرمجموعه‌ای از Y و برد آن زیرمجموعه‌ای از X باشد. می‌خواهیم روی $\mathcal{A}$ یک رابطه ی ترتیبی تعریف کنیم. فرض کنید $f, g \in \mathcal{A}$. تعریف کنید

$$f \leqslant g \iff dom(f) \subseteq dom(g) \wedge \underbrace{g|_{dom(f)} = f}_{\text{تحدید توابع}}$$

به بیان دیگر می گوئیم تابع f از تابع g کمتر است هرگاه دامنه‌ی آن زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی g باشد و تابع g تعمیمی از تابع f باشد (یعنی

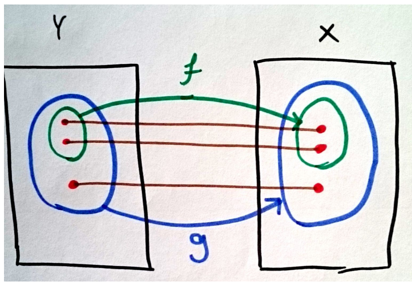
$$\forall x \in dom(f) \quad f(x) = g(x).$$

) به بیان دیگر تابع f از تابع g کمتر است هرگاه

$$\Gamma f \subseteq \Gamma g$$

یادآوری می‌کنم که

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x) | x \in dom(f)\}.$$



مثلاً اگر $\Gamma f = \{(a,b),(c,d)\}$ آنگاه g می‌تواند به صورت زیر باشد

$$\Gamma g = \{(a,b),(c,d),(h,k)\}$$

تمرین ۵۰. نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی ترتیبی است ولی لزوماً خطی نیست.

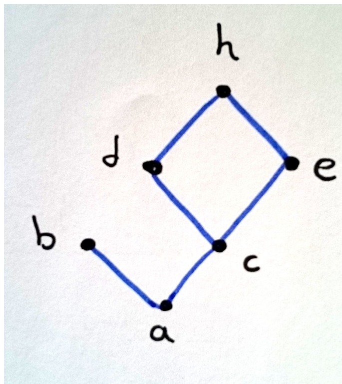
مثال ۲۱۰. روی مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e\}$ ترتیب زیر را تعریف کنید:

$$a \leqslant b, a \leqslant c \quad , \quad a \leqslant d, a \leqslant e$$

$$c \leqslant d, c \leqslant e$$

به بیان دیگر رابطه‌ی ترتیبی زیر را در نظر بگیرید:

$$\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(c,d),(c,e),(a,h),(d,h),(c,h)\}$$



رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت بالا در یک درخت نمایش داد.

تعریف ۲۱۱. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد. عنصر $a \in X$ را عنصر ماکزیمم (یا بیشینه) می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad x \leqslant a$$

دقت کنید که در تعریف ماکزیمم دو نکته نهفته است: اولاً هر عنصری با عنصر ماکزیمم قابل مقایسه است و ثانیاً هر عنصری از آن کمتر است. برای این که یک مجموعه، ماکزیمم داشته باشد نیازی نیست که همه‌ی اعضایش با هم قابل مقایسه باشند.

مثال ۲۱۲. در ساختار $(\{۴,۶,۱۲\},|)$، عدد ۱۲ ماکزیمم است زیرا

$$۴|۱۲$$

$$۶|۱۲$$

$$۱۲|۱۲$$

مثال ۲۱۳. مجموعه‌ی اعداد طبیعی با ترتیب عادی خود، دارای ماکزیمم (بیشینه) نیست.

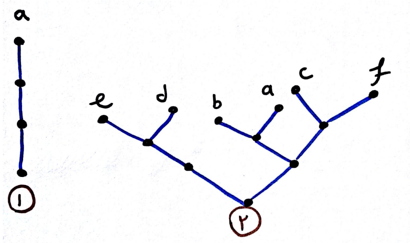
مثال ۲۱۴. در $(P(X),\subseteq)$ مجموعه‌ی X ماکزیمم است.

در مجموعه‌های مرتب جزئی مفهوم مهم دیگری به نام ماکزیمال بودن را نیز داریم:

تعریف ۲۱۵. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد. عنصر $a\in X$ را یک عنصر ماکزیمال (بیشینال) می‌خوانیم

$$\nexists x\in X \quad x\geqslant a$$

دقت کنید که: هیچ عنصری ازعنصر ماکزیمال بیشتر نیست. اما عنصر ماکزیمال لزوماً با همه‌ی عناصر قابل



مقایسه نیست. هر عنصری که با عنصر ماکزیمال قابل مقایسه باشد، از آن کمتر است.

سوال ۳۶. آیا در شکل ۲ عنصر a ماکزیمم است؟ خیر، زیرا a یا b قابل مقایسه نیست.

در شکل ۲ تمامی عناصر $\{a,b,c,d,e,f\}$ ماکزیمال هستند ولی هیچ یک ماکزیمم نیستند.

تمرین ۵۱. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. نقیض جمله‌های زیر را بنویسید.

$$\forall x\in X \quad x\leqslant a$$

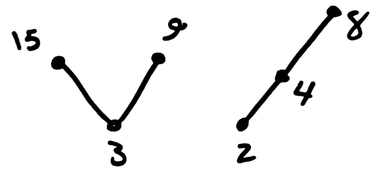
$$\nexists x\in X \quad x\geq a$$

پاسخ. نقیض جمله‌ی اول به صورت زیر است:

$$\exists x\in X \quad \Big(x\geqslant a \vee \underbrace{\big(\neg(x\leqslant a)\wedge\neg(x\geqslant a)\big)}_{\text{قابل مقایسه نیستند.}}\Big)$$

□

مثال ۲۱۶. در $\left(\{۳, ۹, ۱۵, ۲, ۴, ۸\}, |\right)$ عناصر $۸, ۱۵, ۹$ ماکزیمال هستند ولی هیچ یک ماکزیمم نیستند.



تعریف ۲۱۷. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد و $A \subseteq X$. عنصر $a \in X$ را یک کران بالا برای A می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in A \quad x \leqslant a$$

توجه ۲۱۸. در تعریف بالا، ممکن است a در $X - A$ باشد. اگر $a \in A$ آنگاه a عنصر ماکزیمم است.

مثال ۲۱۹. مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{R}, \leqslant)$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $A = (۰, ۱)$. مجموعه‌ی کران‌های بالای A برابر است با

$$\{x \in \mathbf{R}, ۱ \leqslant x\}$$

در مثال بالا هیچ کدام از کران‌های بالای A در A واقع نشده است.

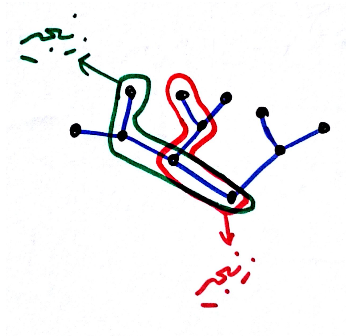
توجه ۲۲۰. اگر $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد و $A \subseteq X$ و $a \in X$ یک کران بالا برای A باشد و $a \in A$ آنگاه a عنصر ماکزیمم A است.

توجه ۲۲۱. ساختار $(P(X), \subseteq)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های متناهی X باشد. تنها کران بالا برای این مجموعه، خود X است و این کران بالا در A نیست.

توجه ۲۲۲. در $(\mathbf{N}, |)$ مجموعه‌ی اعداد اول دارای کران بالا نیست.

حال همه‌ی مواد لازم برای بیان لم زُرن را در اختیار داریم:
فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرتب جزئی متناهی باشد؛ یعنی X یک درخت متناهی باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که X دارای عنصر یا عناصر ماکزیمال است. کافی است هر یک از شاخه‌های درخت را طی کنیم تا به یکنقطه‌ی انتهائي برسیم. عناصر انتهای هر شاخه، ماکزیمال هستند. حال اگر X یک مجموعه‌ی مرتب نامتناهی باشد، یعنی یک درخت نامتناهی باشد، وجود یا عدم وجود عناصر ماکزیمال در آن به راحتی قابل تشخیص نیست. لم زرن یک محک برای تشخیص وجود عناصر ماکزیمال به دست می‌دهد.

تعریف ۲۲۳. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. مجموعه‌ی $A \subseteq X$ را یک زنجیر در X می‌نامیم هرگاه $(A, \leqslant)$ مرتب خطی باشد.



توجه کنید که زنجیرها لزوماً شمارا نیستند یعنی همیشه نمی‌توان آنها را به صورت $\{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ نمایش داد. امکان دارد اندازه‌ی یک زنجیر ناشمارا باشد. مهم فقط این است که همه‌ی عناصر مجموعه‌ی مورد نظر با هم قابل مقایسه باشند.

۲.۲۴ لم زُرن

قضیه ۲۲۴ (لم زُرن)**.** فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی ناتهیِ مرتب جزئی باشد. فرض کنید هر زنجیر $A \subseteq X$ دارای یک کران بالا در X باشد. آنگاه X دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال است.

توجه ۲۲۵. در فرض لم زرن ادعا **نکرده‌ایم** که هر زنجیر دارای عنصر ماکزیمم است.

توجه ۲۲۶. لم زرن ابزار بسیار قدرتمندی در بسیاری اثباتهای ریاضیاتی، خصوصا در علم جبر است. در ابتدا این لم به عنوان جایگزینی برای اصل انتخاب ارائه شده بود اما بعدها ثابت شد که این لم با اصل انتخاب معادل است. یعنی با استفاده از اصل انتخاب و سایر اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها لم زرن ثابت می‌شود و نیز با استفاده از لم زرن و بقیه‌ی اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌توان اصل انتخاب را ثابت کرد. در منطق این گفته را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$ZF + Zorn \vdash C(= Choice)$$

$$ZFC \vdash Zorn$$

به دانشجویانی که علاقه‌مند به فهم دقیق علامتهای بالا هستند پیشنهاد می‌کنم درس منطق ریاضی را در ترم آینده بگیرند.

در جلسه‌ی آینده اصل انتخاب را با استفاده از لم زرن ثابت خواهیم کرد و چند نمونه کاربرد این لم را خواهیم دید. توجه کنید که «زُرن» را در برخی کتابها، به صورت تسرن می‌نویسند؛ بدین علت که z در زبان آلمانی، «تْزْ» خوانده می‌شود.

۲۵ جلسه‌ی بیست و پنجم، دوشنبه، لم زُرن

سرانجام به لم زرن، یکی از مهمترین قضایای درس مبانی ریاضی و یکی از پایه‌ای‌ترین قضایای علم ریاضی می‌رسیم. این لم شرایطی را مشخص می‌کند که طی آنها یک مجموعه‌ی مرتب دارای عنصر ماکزیمال است.

۱.۲۵ لم زُرن

قضیه ۲۲۷. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک **مجموعه‌ی مرتب ناتهی** باشد. اگر هر زنجیرِ $A \subseteq X$ دارای یک کران بالا در X باشد، آنگاه X دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال است.

توجه ۲۲۸. لم زُرن با اصل انتخاب معادل است.

برای این که توجه بالا ثابت شود باید نشان دهیم که لم زرن از اصل انتخاب نتیجه می‌شود و اصل انتخاب از لم زرن. اثبات هر دوی این قضایا شیرین و خواندنی است، ولی با توجه به سطح آمادگی کلاس، تنها به اثبات دومی که ساده‌تر است اکتفا می‌کنم. **در ضمن اثبات این قضیه نیز جزو مفاد امتحان شفاهی و دارای نمره‌ی ویژه است.**

قضیه ۲۲۹. اصل انتخاب از لم زُرن نتیجه می‌شود.

بگذارید یک بار دیگر اصل انتخاب را یادآوری کنم:
اصل انتخاب. اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه یک تابع $f : I \to \bigcup A_i$ موجود است به طوری که

$$\forall i \in I \quad f(i) \in A_i$$

توجه ۲۳۰. اگر A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد برای انتخاب یک عنصر در A نیازی به اصل انتخاب نداریم. همچنین اگر $\{A_i\}_{i=۱,\dots,n}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌ها باشد، برای انتخاب عناصرِ $a_i \in A_i$ نیازی به اصل انتخاب نداریم. تنها وقتی که خانواده‌ی مورد نظر نامتناهی است به این اصل نیاز است.

اثبات قضیه‌ی ۲۲۹ . فرض کنید لم زُرن درست باشد. مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathcal{A} = \{(f, J) | J \subseteq I \text{ و } f : J \to \bigcup_{i\in I} A_i \text{ یک تابع است} \text{ و } \forall j \in J \quad f(j) \in A_j\}$$

به بیان دیگر $\mathcal{A}$ مجموعه‌ی همه‌ی **توابعِ جزئیِ** انتخاب است (که به همراه دامنه‌شان نوشته شده‌اند).
ادعا: $\mathcal{A} \neq \emptyset$

اثبات. فرض کنید $i_\circ \in I$. از آنجا که $A_{i_\circ} \neq \emptyset$ فرض کنید $a_{i_\circ} \in A_{i_\circ}$. تابع زیر در $\mathcal{A}$ است.

$$\{i_\circ\} \xrightarrow{f} \bigcup A_{i_\circ}$$

$$i_\circ \mapsto a_{i_\circ}$$

به بیان دیگر

$$(f,\{i_\circ\})\in\mathcal{A}$$

$\square$

پایان اثبات ادعا

روی $\mathcal{A}$ ترتیب زیر را تعریف می‌کنیم

$$(f_1,J_1)\leqslant(f_2,J_2)\iff(j_1\subseteq j_2\wedge f_2|_{J_1}=f_1)$$

به بیان دیگر

$$(f_1,J_1)\leqslant(f_2,J_2)\iff J_1\subseteq J_2\wedge\forall j\in J_1\quad f_1(j)=f_2(j)$$

به بیان دیگر

$$(f_1,J_1)\leqslant(f_2,J_2)\iff\underbrace{\Gamma f_1}_{\{(i,f_1(i))|i\in J_1\}}\subseteq\underbrace{\Gamma f_2}_{\{(i,f_2(i))|i\in J_2\}}$$

تمرین ۵۲. نشان دهید که رابطه‌ی بالا رابطه‌ی ترتیبی است. (یعنی انعکاسی، پادتقارنی و متعدی است).

پس تا اینجا (با فرض این که تمرین بالا را حل کنید) دیدیم که مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ یک مجموعه‌ی مرتب ناتهی است. حال در ادامه نشان می‌دهیم که هر زنجیر در این مجموعه، دارای یک کران بالاست، یعنی این مجموعه در شرط لم زرن صدق می‌کند.

فرض کنید $\{(f_k,J_k)\}_{k\in K}$ زنجیری در $\mathcal{A}$ باشد. ادعا می‌کنیم که این زنجیر در $\mathcal{A}$ یک کران بالا دارد. زوجِ $(h,L)\in\mathcal{A}$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم و ادعا می‌کنیم که این زوج، کران بالای زنجیر یادشده است. فرض کنید h یک تابع باشد که دامنه‌ی آن، مجموعه‌ی $\bigcup J_k$ است. همچنین فرض کنید که ضابطه‌ی این تابع به صورت زیر باشد:

$$x\in J_k\Rightarrow\quad h(x)=f_k(x)$$

تمرین ۵۳. نشان دهید که $(h,L)\in\mathcal{A}$ و برای هر تابعِ (f_k,J_k) در زنجیر یادشده داریم $(f_k,J_k)\leq(h,L)$.

پس $\mathcal{A}$ شرایط استفاده از لم زرن را داراست. پس بنا به لم زُرن، $\mathcal{A}$ دارای یک عنصر ماکزیمال است. فرض کنید (P,Q) عنصر ماکزیمالِ $\mathcal{A}$ باشد. کافی است ثابت کنیم که

$$Q=I$$

اگر عبارت بالا ثابت شود، از آنجا که $(P,Q)\in\mathcal{A}$ و بنا به نحوه‌ی تعریفِ $\mathcal{A}$ تابع $P:I\to\bigcup A_i$ یک تابع انتخاب خواهد بود.

فرض کنید $Q\neq I$ و $i\in I-Q$. فرض کنید $a_i\in A_i$ عنصر دلخواهی باشد. داریم

$$\underbrace{P\cup\{(i,a_i)\}}_{R}\in\mathcal{A}$$

و

$$P \lneqq R$$

و این با ماکزیمال بودن P متناقض است. $\square$

بیایید یک بار دیگر اثبات را مرور کنیم. فرض کنیم لم زرن درست باشد، می‌خواهیم نشان دهیم که اصل انتخاب درست است. فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و به دنبال یک تابع انتخاب از I به $\bigcup A_i$ هستیم. نخست مجموعه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{A} = \{(f,J) | J \subseteq I, \quad \forall j \in J \quad f(j) \in A_j \text{ و یک تابع است } f : J \to \bigcup_{i\in I} A_i\}$$

روی مجموعه‌ی بالا یک ترتیب تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با آن ترتیب، مجموعه بالا یک مجموعه‌ی ناتهی مرتب است. سپس نشان می‌دهیم که هر زنجیر با آن ترتیب دارای یک کران بالاست، پس مجموعه‌ی بالا در شرایط لم زرن صدق می‌کند، پس عنصر ماکزیمال دارد. عنصر ماکزیمال این مجموعه، همان تابع انتخابی است که در پی آن هستیم.

این بخش از درس را با یک قضیه‌ی خیلی زیبا به پایان می‌برم. می‌دانیم که اعداد طبیعی همیشه با هم قابل مقایسه‌اند؛ یعنی اگر m, n دو عدد طبیعی باشند همواره یا $m \leq n$ یا $n \leq n$. در درسهای گذشته با اعداد جدیدی به نام کاردینالها آشنا شدیم و برای آنها یک ترتیب تعریف کردیم. گفتیم که اگر u, v دو کاردینال باشند و $u = card(A)$ و $v = card(B)$ آنگاه می‌گوییم $u \leq v$ هرگاه یک تابع یک به یک از A به B موجود باشد. حال طبیعی است از خودمان بپرسیم که آیا لزوماً دو کاردینال با هم قابل مقایسه‌اند؟ به بیان دیگر اگر A, B دو مجموعه باشند آیا لزوماً یا تابعی یک به یک از A به B موجود است یا تابعی یک به یک از B به A؟ پاسخ سوال بالا (در نتیجه‌ی لم زرن) مثبت است.

قضیه ۲۳۱. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی دلخواه باشند. آنگاه یا $X \leqslant Y$ یا $Y \leqslant X$.

اثبات. مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\mathcal{A} = \{(f,Z) | Z \subseteq X, \quad \text{یک تابع یک به یک است } f : Z \to Y\}$$

توجه کنید که $\mathcal{A} \neq \emptyset$. علت: فرض کنید

$$y_{\circ} \in Y \quad , \quad z_{\circ} \in X$$

آنگاه تابع $f = \{(z_{\circ}, y_{\circ})\}$ در $\mathcal{A}$ است. به بیان دقیقتر

$$(f, \{z_{\circ}\}) \in \mathcal{A}$$

ترتیب زیر را روی $\mathcal{A}$ تعریف کنید.

$$(f_1, Z_1) \leqslant (f_2, Z_2) \iff \Gamma f_1 \subseteq \Gamma f_2$$

فرض کنید $\{(f_j, Z_j)\}_{j\in J}$ زنجیری در A باشد آنگاه این زنجیر دارای یک کران بالا در $\mathcal{A}$ است که این کران بالا، مشابه قضیه‌ی قبل تابعی است که گرافش $\bigcup \Gamma f_j$ است. پس $\mathcal{A}$ دارای یک عنصر ماکزیمال است. فرض کنید

$$P : Z \to Y$$

عنصر ماکزیمال مورد نظر باشد. به بیان دیگر فرض کنید $(P, Z) \in \mathcal{A}$ ماکزیمال باشد. اگر $Z = X$ حکم اثبات شده است، یعنی تابع یک به یکِ P از X به Y پیدا شده است و این مطلوب قضیه است زیرا در این صورت $X \leq Y$. اگر $Z \neq X$ آنگاه از دو حال خارج نیست.

۱. یا P پوشاست.

۲. یا P پوشا نیست.(مثلا P عنصر $y \in Y$ را نمی‌پوشاند.)

در حالتی که P پوشا نیست، فرض کنید $x \in X - Z$. حال $P \cup \{(x, y)\} \in \mathcal{A}$ و این ماکزیمال بودن P را نقض می‌کند.
حال اگر P پوشا باشد آنگا بنا به قضایای قبل یک تابع یک به یک از Y به X موجود است؛ یعنی $Y \leqslant X$. پس نشان دادیم که یا $X \leq Y$ یا $Y \leq X$. $\square$

قضیه‌ی بالا نیز جزو امتحان شفاهی خواهد بود.

۲۶ کاردینالها، ج بیست و ششم

پیش از آنکه وارد بحث کاردینالها شویم، بیایید آنچه را که تا کنون یادگرفته‌ایم به سرعت مرور کنیم. گفتیم که در درس مبانی ریاضی قرار است که علم ریاضی را از اصول اولیه و پایه‌ای آن دوباره معرفی کنیم. برای این کار نخست به زبان این علم نیازمندیم که همان منطق است. با دو نوع منطق آشنا شدیم:

۱. منطق گزاره‌ها (جبر بولی)

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$$

در این منطق، گزاره‌ها تنها دارای ارزش درست و غلط هستند و ارزش گزاره‌های پیچیده‌تر با استفاده از جدول ارزش مشخص می‌شود.

۲. منطق مرتبه‌ی اول (منطق محمولات) که از افزودن دو علامت

$$\forall x \exists y$$

به منطق گزاره‌ها به دست می‌آید. گفتیم که عمده‌ی ریاضیات (به ویژه نظریه‌ی مجموعه‌ها)بر پایه‌ی این منطق بنا شده است.

در زیر چند نمونه جمله‌نویسی در این منطق را دوباره با هم تمرین می‌کنیم:

مثال ۲۳۲. ۱. هر کسی عموئی دارد.

$$\forall x \quad \exists y \quad A(y,x)$$

۲. کسی هست که عموی همه است.

$$\exists y \quad \forall x \quad A(y,x)$$

۳. اگر همه‌ی افراد عمو داشته باشند، همه‌ی افراد دائی دارند.

$$\forall x \quad \exists y \quad A(y,x) \rightarrow \forall x \quad \exists y \quad D(y,x)$$

۴. هر کسی که عمو داشته باشد، دائی دارد.

$$\forall x \quad \big(\exists y \quad A(y,x) \rightarrow \exists z \quad D(x,y)\big)$$

پس از آن وارد بحث نظریه‌ی مجموعه‌ها شدیم. همه‌ی پدیده‌های ریاضی مانند تابع، رابطه، گروه، میدان و غیره منشأ نظریه‌ی مجموعه‌ای دارند. بنابراین لازم است که ریاضی‌دان تکلیف خود را نخست با مجموعه معلوم کند. گفتیم که تعریف شهودی ساده‌انگارانه برای مجموعه‌ها، ما را به تناقض راسل دچار می‌کند. از این رو به رویکرد اصل‌موضوعه‌ای برای مجموعه‌ها روی آوردیم. در این رویکرد، مجموعه یک متغیرِ $x, y, z, \ldots$ است که از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها پیروی کند. اصول زدافسی را به عنوان اصول پذیرفته شده برای مجموعه ها معرفی کردیم.

یکی از این اصول، **اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی** بود. گفتیم که به محض پذیرفتن این اصل، متوجه می‌شویم که اگر نامتناهی وجود داشته باشد، نامتناهی‌ها نیز اندازه‌های متفاوتی خواهند داشت. در ادامه‌ی درس می‌خواهیم این گفته را بیشتر توضیح دهیم.

۱.۲۶ کاردینالها یا اعداد اصلی

روی کلاس همه‌ی مجموعه‌ها رابطه‌ی زیر را تعریف می‌کنیم.

$X \cong Y \iff$ یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد.

ویژگی‌های رابطه‌ی $\cong$:

۱.

$$\forall X \quad X \cong X$$

تابع همانی از X به X یک به یک و پوشاست.

۲.

$$\forall X, Y \quad (X \cong Y \to Y \cong X)$$

اگر $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد آنگاه $f^{-1} : Y \to X$ یک به یک و پوشاست.

۳.

$$\forall X, Y, Z \quad (X \cong Y \wedge Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z)$$

فرض کنید توابع $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ یک به یک و پوشا باشند. آنگاه $gof : X \to Z$ یک به یک و پوشاست. (ثابت کنید.) پس رابطه‌ی $\cong$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. از این رو، این رابطه، کلاس همه‌ی مجموعه‌ها را افراز می‌کند:

$\ldots$	$[Y]$	$[X]$	$\ldots$

تعریف ۲۳۳. کلاس هر مجموعه‌ی X را در رابطه‌ی هم‌ارزی بالا با $\mathbf{card}X$ نشان می‌دهیم و هر کلاس در بالا را یک **کاردینال** می‌نامیم. پس هرگاه بگوئیم $\mathbf{card}X$ برابر است با $\mathbf{card}Y$ یعنی

$$X \cong Y$$

کلاسهای هم‌ارزی رابطه‌ی بالا به صورت زیر هستند:

۱. کلاس مجموعه‌ی تهی که آن را با ۰ نشان می‌دهیم.

۲. کلاس همه‌ی مجموعه‌های تک عضوی که آن را با ۱ نشان می‌دهیم.

۳. $\vdots$

۴. کلاس همه‌ی مجموعه‌های n عضوی که آن را با n نشان می‌دهیم.

۵. کلاس همه‌ی مجموعه‌های شمارا، مانند $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ که آن را با $\aleph_0$ نمایش می‌دهیم.

۶. اگر فرضیه‌ی پیوستار درست باشد، اولین کلاس بعدی، کلاس مجموعه‌های هم‌اندازه‌ی اعداد حقیقی است.

۷. تعداد این کلاسها نامتناهی است. اگر A در یک کلاس واقع شده باشد آنگاه $P(A)$ در کلاسی متفاوت واقع است.

۲.۲۶ حساب کاردینالها

منظور از حساب کاردینالها، بررسی اعمال اصلی و ترتیب روی آنهاست. فرض کنید α و β دو کاردینال باشند و فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$. تعریف می‌کنیم

$$\alpha \leqslant \beta \iff \exists \overset{\text{یک به یک}}{\overset{\uparrow}{f}} : X \to Y$$

دقت کنید که رابطه‌ی ترتیب در بالا، خوش‌تعریف است؛ یعنی با انتخاب مجموعه‌های X, Y بستگی ندارد. در زیر این گفته را اثبات کرده‌ایم.

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(X')$ و $\beta = \mathbf{card}(Y) = \mathbf{card}(Y')$ و فرض کنید $f : X \to Y$ یک به یک است.

$$X' \cong X \to Y \cong Y'$$

بنابراین

$$X' \leq Y' \Leftrightarrow X \leq Y.$$

$\square$

۱.۲.۲۶ ترتیب کاردینالها

رابطه‌ی $\leq$ در بالا واقعاً یک رابطه‌ی ترتیبی است؛ یعنی ویژگی‌های زیر را داراست:

۱.

$$\forall \alpha \quad \alpha \leqslant \alpha$$

۲.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \quad (\alpha \leqslant \beta \wedge \beta \leqslant \gamma \to \alpha \leqslant \gamma)$$

برای اثبات فرض کنید

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

$$\gamma = \mathbf{card}(Z)$$

و دیاگرام زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

۳. اگر $\beta \leqslant \alpha$ و $\alpha \leqslant \beta$ آنگاه $\alpha = \beta$. (قضیه‌ی کانتور ـ برنشتاین)

۲.۲.۲۶ جمع کاردینالها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ ، $\beta = \mathbf{card}(Y)$ و $X \cap Y = \emptyset$. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\alpha + \beta = \mathbf{card}(X \cup Y)$$

دقت کنید که تعریف بالا نیز به انتخاب X, Y بستگی ندارد.

۱. در جلسات گذشته ثابت کرده‌ایم که

$$\aleph_0 + n = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$[n] + [m] = n + m$$

۲. اگر $\alpha \lneqq \aleph_0$ آنگاه $\exists n \in \mathbf{N}$ به طوری که $\alpha = n$. مجموعه‌ی زیر ماکزیمم ندارد.

$$\{\alpha | \alpha \lneqq \aleph_0\}$$

اگر $\alpha < \aleph_0$ آنگاه α را متناهی و اگر $\alpha \geqslant \aleph_0$ آنگاه α را نامتناهی می‌نامیم.

۳.۲.۲۶ ضرب کاردینالها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند به طوری که

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \times \beta = \mathbf{card}(X \times Y)$$

توجه ۲۳۴.

$$\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$$

علت:

$$X \times Y \xrightarrow{h} Y \times X$$

$$h(x, y) = (y, x)$$

مثال ۲۳۵. ثابت کنید $\alpha \times 1 = \alpha$.

اثبات.

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\alpha \times 1 = \mathbf{card}(X \times 1) = \mathbf{card}(X) \times \{a\}$$

کافی است نشان دهیم که

$$\underbrace{X \times \{a\}}_{\{(x,a) | x \in X\}} \cong X$$

تابع زیر ما را به هدف می‌رساند:

$$(x, a) \mapsto x$$

$\square$

لم ۲۳۶. اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\gamma \leqslant \lambda$ آنگاه

$$\alpha \times \gamma \leqslant \beta \times \lambda$$

فرض کنید

اثبات.

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

$$\gamma = \mathbf{card}(Z)$$

$$\lambda = \mathbf{card}(W)$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$Z \xrightarrow{g} W$$

آنگاه تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$h : X \times Z \to Y \times W$$

$$(x, z) \mapsto \big(f(x), g(z)\big)$$

$\square$

مثال ۲۳۷. در جلسات قبل ثابت کردیم که

$$\aleph_۰ \times ۱ = \aleph_۰$$

$$\aleph_۰ \times n = \aleph_۰$$

$$\aleph_۰ \times \aleph_۰ = \aleph_۰$$

در اینجا برای مورد آخر، اثبات دیگری ارائه می‌کنیم.

اثبات. می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \cong \mathbf{N}$$

با استفاده از قضیه‌ی کانتور برنشتاین کافی است نشان دهیم

$$(۱) \quad \mathbf{N} \leqslant \mathbf{N} \times \mathbf{N}$$

$$(۲) \quad \mathbf{N} \times \mathbf{N} \leqslant \mathbf{N}$$

اثبات اولی.

$$\mathbf{N} \xrightarrow{f} \mathbf{N} \times \mathbf{N}$$

$$n \mapsto (n, n)$$

بررسی کنید که تابع بالا یک به یک است. اثبات دومی.

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

$$(n, m) \mapsto ۲^n \times ۳^m$$

بررسی کنید که تابع بالا یک به یک است. بنابراین

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \cong \mathbf{N}$$

یعنی

$$\aleph_۰ \times \aleph_۰ = \aleph_۰$$

$\square$

۴.۲.۲۶ توان کاردینالها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند و $\alpha = \mathbf{card}(X), \beta = \mathbf{card}(Y)$. تعریف می‌کنیم

$$\alpha^{\beta} = \mathbf{card}\big(X^{Y}\big).$$

یادآوری می‌کنیم که X^Y مجموعه‌ی تمامی توابع از Y به X است.
اگر $\alpha = \mathbf{card}(X)$ آنگاه

$$۲^{\alpha} = \mathbf{card}(\{۰, ۱\}^{X})$$

در جلسات قبل ثابت کردیم که

$$\mathbf{card}(\{۰, ۱\}^{X}) = \mathbf{card}\big(P(X)\big)$$

پس

$$۲^{\alpha} = \mathbf{card}\big(P(X)\big)$$

همچنین در جلسات قبل ثابت کرده‌ایم که

$$|\mathbf{R}| = |(a, b)| = |(۰, ۱)| = ۲^{\aleph_۰} = |P(\mathbf{N})|$$

توجه ۲۳۸. در جلسات قبل قضیه‌ی کانتور را ثابت کردیم که می‌گفت $|P(X)| > |X|$ پس به بیان کاردینالی داریم:

$$۲^{\alpha} > \alpha$$

مانند اعداد طبیعی، توانرسانی کاردینالها با جمع و ضرب آنها سازگار است:

قضیه ۲۳۹.

$$\alpha^{\beta} \times \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$$

به بیان دیگر

$$X^{Y} \times X^{Z} \cong X^{Y \cup Z}$$

(با فرض اینکه $Y \cap Z = \emptyset$)

اثبات.

هدف. پیدا کردن یک تابع یک به یک و پوشا (که نامش را H گذاشته‌ایم) از $X^Y \times X^Z$ به $X^{Y \cup Z}$.
دامنه‌ی تابع H قرار است به صورت زیر باشد.

$$Dom(H) = \{(f, g) | f : Y \to X, g : Z \to X\}$$

هدف. تعریف $H(f, g)$.

قرار است $H(f,g) \in X^{Y\cup Z}$ یعنی

$$H(f,g) : Y \cup Z \to X$$

پس $H(f,g)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$H(f,g)(t) = \begin{cases} f(t) & t \in Y \\ g(t) & t \in Z \end{cases}$$

به بیان خلاصه‌تر

$$H(f,g) : Y \cup Z \to X$$

$$(f,g) \mapsto H(f,g)$$

$$H(f,g)(t) = \begin{cases} f(t) & t \in Y \\ g(t) & t \in Z \end{cases}$$

بررسی یک به یک و پوشا بودن تابع بالا به عهده‌ی شما. $\square$

تمرین ۵۴. • تعداد توابعِ از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ را بیابید. (به بیان دیگر حاصلِ $\aleph_0^{\aleph_0}$ را محاسبه کنید.)

- یکبار با استفاده از قوانین ضرب کاردینالها و یکبار به طور مستقیم نشان دهید که

$$\mathbf{N} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R} \qquad \mathbf{R} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$$

- نشان دهید که هر اجتماع شمارا از مجموعه‌های متناهی، شماراست.

- نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.

۲۷ جلسه‌ی بیست‌وهفتم، ادامه‌ی کاردینالها و اصل خوش‌ترتیبی

۱.۲۷ ادامه‌ی کاردینالها

در درسهای گذشته، اثباتی نادقیق برای شمارا بودن مجموعه‌ی اعداد گویا آوردیم. در اینجا با استفاده از قضیه‌ی کانتور – برنشتاین، اثباتی دقیق و ساده ارائه می‌کنیم. عموماً پیدا کردن یک تابع یک به یک و پوشا برای اثبات همتوانی دو مجموعه، کار آسانی نیست. ولی بنا به قضیه‌ی کانتور برنشتاین، اگر توابعی یک به یک از هر یک به دیگری پیدا کنیم، آن دو مجموعه همتوان خواهند بود.

مثال ۲۴۰. نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.

$$Q = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbf{N}, (a, b) = ۱\}$$

پاسخ. می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\mathbf{card}(Q) = \aleph_۰.$$

برای این منظور کافی است نشان دهیم که

$$(۱) \quad \mathbf{card}(Q) \leqslant \aleph_۰$$

$$(۲) \quad \aleph_۰ \leqslant \mathbf{card}(Q)$$

اثبات (۲). تابع همانی $id : \begin{matrix} \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \\ x \mapsto x \end{matrix}$ یک تابع یک به یک است. بنابراین $\aleph_۰ \leqslant \mathbf{card}(Q)$.

توجه ۲۴۱. در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ شماراست.

پس برای اثباتِ $\mathbf{card}(Q) \leqslant \aleph_۰$ کافی است تابعی یک به یک از $\mathbf{Q}$ به $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ بیابیم.

تمرین ۵۵. نشان دهید که تابع زیر از $\mathbf{Q}$ به $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ یک به یک است.

$$f(\frac{x}{y}) = (x, y)$$

که در بالا فرض کرده‌ایم که ب‌م‌مِ x, y برابر با یک باشد. دقت کنید که عبارت سمت راست، زوج مرتب متشکل از x, y است.

□

توانی که برای کاردینالها تعریف کردیم، موافق انتظار، با ضرب کاردینالها سازگار است:

لم ۲۴۲. فرض کنید α, β, γ سه کاردینال باشند آنگاه

$$\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta \times \gamma}$$

اثبات. فرض کنید

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

$$\gamma = \mathbf{card}(Z)$$

کافی است ثابت کنیم که

$$\left(X^Y\right)^Z \cong X^{Y\times Z}$$

برای این منظور کافی است یک تابع یک به یک و پوشا (مثلا به نام H)از $\left(X^Y\right)^Z$ به $X^{Y\times Z}$ بیابیم. فرض کنید $f \in \left(X^Y\right)^Z$. پس f تابعی از Z به X^Y است.

هدف. تعریف $H(f)$.

توجه ۲۴۳. قرار است که $H(f) \in X^{Y\times Z}$. یعنی $H(f)$ باید تابعی از $Z \times Y$ به X باشد. پس باید برای هر $(y,z) \in Y \times X$ بتوانیم $H(f)(y,z) \in X$ را تعریف کنیم.

$$f : Z \to X^Y$$

$$\forall z. \in Z \quad f(z) \in X^Y$$

$$\forall z. \in Z \quad f(z) : Y \to X$$

$$y \mapsto f(z)(y)$$

پسِ برای تعریفِ

$$H(f)(\overset{۲}{\overset{\uparrow}{y}}\ ,\ \overset{۱}{\overset{\uparrow}{z}}\ )$$

۱ z را به f می‌دهیم.
۲ y را به $f(z) : Y \to X$ می‌دهیم.
به بیان دیگر، ضابطه‌ی تابع مورد نظر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$H(f)(z,y) : Z \times Y \to X$$

$$(z,y) \mapsto f(z)(y)$$

□

مثال ۲۴۴. نشان دهید که $\mathbf{N} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$. به بیان دیگر $\aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$.

اثبات. راه حل اول. تابع زیر را از $\mathbf{R}$ به $[۰, ۱) \times \mathbf{Z}$ تعریف کنید.

$$x \mapsto (\lfloor x \rfloor, x - \lfloor x \rfloor)$$

به عنوان تمرین نشان دهید که تابع فوق یک به یک و پوشا است. می‌دانیم که $\mathbf{Z} \cong \mathbf{N}$ و $\mathbf{R} \cong [۰, ۱)$. پس ثابت کردیم که $\mathbf{R} \cong \mathbf{N} \times \mathbf{R}$.

راه حل دوم. کافی است نشان دهیم که

۱. $۲^{\aleph_۰} \leqslant \aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰}$

۲. $\aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰} \leqslant ۲^{\aleph_۰}$

اثبات ۱.

$$۲^{\aleph_۰} = ۱ \times ۲^{\aleph_۰} \leqslant \aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰}$$

اثبات ۲.

$$\aleph_۰ \leqslant ۲^{\aleph_۰}$$

پس

$$\aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰} \leqslant ۲^{\aleph_۰} \times ۲^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰ + \aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$$

$\square$

مثال ۲۴۵. نشان دهید که $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$.

اثبات. راه حل اول.

$$۲^{\aleph_۰} \times ۲^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰ + \aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$$

راه حل دوم. می‌دانیم که $|\mathbf{R}|$ برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی، و تعداد زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی با تعداد زیر مجموعه‌های اعداد زوج برابر است و آن هم با تعداد زیرمجموعه‌های اعداد فرد برابر است. در زیر نشان خواهیم داد که:

زیر مجموعه‌های اعداد فرد $\times$ زیر مجموعه‌های اعداد زوج $\cong$ زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی

کافی است تابع زیر را در نظر بگیریم

$$A \mapsto (A \cap \mathbf{N}_E, A \cap \mathbf{N}_O)$$

که در آن N_E اعداد زوج و N_O اعداد فرد را نشان می‌دهند. E اعداد زوج و O اعداد فرد هستند. به طور مثال فرض کنید مجموعه‌ی

$$\{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

را داشته باشیم آنگاه

$$\{1,2,3,4\} \mapsto \big(\{1,3\},\{2,4\}\big)$$

□

مثال ۲۴۶. تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ را بیابید.

پاسخ. کافی است $\aleph_0^{\aleph_0}$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$(1)\quad \aleph_0^{\aleph_0} \leqslant \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\times\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

$$(2)\quad 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0}$$

پس

$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

پس تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ برابر است با $|\mathbf{R}|$. به بیان دیگر تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ برابر است با تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی $\{0,1\}$. □

مبحث کاردینالها را در همین جا ختم می‌کنیم.

۲.۲۷ اصل خوش ترتیبی

اصل خوش‌ترتیبی یکی از اصول مهم ریاضی است که قضایای بسیاری با استفاده از آن ثابت می‌شوند. این اصل در واقع معادل اصل انتخاب و از این رو معادل با لم زُرن است. پس می‌توان یکی از اینها را اصل فرض کرد و بقیه را قضیه دانست.

تعریف ۲۴۷. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب خطی باشد. (یعنی یک مجموعه‌ی مرتب باشد که همه‌ی اعضای آن با هم قابل مقایسه‌اند). می‌گوییم $(X,\leqslant)$ خوش ترتیب است هرگاه هر زیر مجموعه از X دارای یک مینی‌موم باشد (به بیان دیگر هر زیرمجموعه‌ای یک عضو ابتدا داشته باشد).

مثال ۲۴۸. $(\mathbf{N},\leqslant)$ خوش ترتیب است.

مثال ۲۴۹. $(\mathbf{R},\leqslant)$ خوش ترتیب نیست. برای مثال بازه‌ی $(0,1)\subseteq\mathbf{R}$ دارای مینی‌موم نیست. همچنین $(-\infty,0)$ مینی‌موم ندارد.

قضیه ۲۵۰ (اصل خوش ترتیبی)**.** فرض کنید X یک مجموعه باشد. می‌توان یک ترتیبِ $\leqslant_X$ روی X تعریف کرد، به طوری که $(X,\leqslant)$ خوش ترتیب باشد.

دقت کنید که $\mathbb{R}$ با ترتیب معمولی خودش، خوشترتیب نیست؛ ولی بنا به اصل خوشترتیبی می‌توان یک ترتیب دیگر روی آن در نظر گرفت که با آن ترتیب، خوش ترتیب باشد.
گفتیم که اصل خوشترتیبی با اصل انتخاب معادل است. در این دوره فرصت اثبات این گفته را نداریم و تنها نتیجه شدن اصل انتخاب از اصل خوشترتیبی را، که ساده تر است، اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲۵۱. اصل انتخاب از اصل خوش ترتیبی نتیجه می‌شود.

اثبات. فرض کنید اصل خوش ترتیبی درست باشد. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد.

هدف. تعریف یک تابع $f : I \to \bigcup A_i$ به طوری که $f(i) \in A_i \quad \forall i \in I$.

از آنجا که اصل خوش ترتیبی را داریم، می‌دانیم که روی هر A_i یک ترتیب $\leqslant_i$ وجود دارد به طوری که $(A_i, \leqslant_i)$ خوش ترتیب است. پس تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(i) = \min_{\leqslant_i} A_i$$

□

برای اثبات اصل انتخاب با استفاده از خوشترتیبی، تابع انتخاب را تابعی در نظر گرفته‌ایم که از هر مجموعه، مینی‌موم آن را برمی‌دارد. در اینجا دیگر تابع انتخاب دارای یک ضابطه است و وجودش به اصل انتخاب نیازی ندارد. اصل خوشترتیبی همچنین با لم زرن معادل است. در زیر نشان داده‌ایم که چگونه با استفاده از لم زرن می‌توان اصل خوشترتیبی را ثابت کرد.

قضیه ۲۵۲. لم زُرن اصل خوش ترتیبی را نتیجه می‌دهد.

اثبات.

یادآوریِ **لم زُرن.** فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی و ناتهی باشد به طوری که هر زنجیر $A \subseteq X$ دارای کران بالا در X باشد. آنگاه X دارای یک عنصرِ ماکزیمال است.

فرض کنیم لم زُرن درست باشد و Y یک مجموعه‌ی دلخواه باشد.

هدف. تعریف یک ترتیب روی Y به طوری که $(Y, \leqslant_Y)$ یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد.

مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{A} = \{(B, \leqslant_B) | \text{یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد.} \ (B, \leqslant_B) \ \text{و} \ B \subseteq Y\}$$

ادعا: $\mathcal{A}$ ناتهی است.
فرض کنید $y_\cdot \in Y$. روی $\{y_\cdot\}$ ترتیب زیر را در نظر بگیرید:

$$y_\cdot \leqslant y_\cdot$$

مجموعه‌ی $\{y_0\}$ به همراه ترتیبِ بالا در $\mathcal{A}$ است. پس $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
قدم دوم. تعریف یک ترتیب روی $\mathcal{A}$. تعریف کنید:

$$(B_1, \leqslant_{B_1}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_2, \leqslant_{B_2}) \iff (B_1 \subseteq B_2) \wedge \text{ باشد } \leqslant_{B_1} \text{ گسترشی از ترتیب } \leqslant_{B_2} \wedge$$

$$\wedge \forall b_1 \in B_1 \forall b_2 \in B_2 \quad b_1 \leq_{B_2} b_2$$

یعنی

$$(B_1 \subseteq B_2) \wedge \forall x, y \in B_1 \quad (x \leqslant_{B_1} y \to x \leqslant_{B_2} y)$$

$$\wedge \forall b_1 \in B_1 \forall b_2 \in B_2 \quad b_1 \leq_{B_2} b_2$$

قدم سوم. هر زنجیر در $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای کران بالا در $\mathcal{A}$ است. فرض کنید

$$(B_1, \leqslant_{B_1}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_2, \leqslant_{B_2}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_3, \leqslant_{B_3}) \leqslant_{\mathcal{A}} \dots$$

یک زنجیر دلخواه در $\mathcal{A}$ باشد. [25] ادعا: این زنجیر دارای کران بالا در $\mathcal{A}$ است.
قرار دهید $B = \bigcup B_i$ روی B ترتیب زیر را تعریف کنید.

$$x \leqslant_B y \leftrightarrow \exists i \quad x, y \in B_i \quad x \leqslant_{B_i} y$$

تمرین ۵۶. نشان دهید که $(B, \leqslant_B) \in \mathcal{A}$ و همچنین نشان دهید که $(B, \leqslant_B)$ یک کران بالا برای زنجیر یادشده است.

توجه کنید که قسمت سختِ تمرین بالا نشان دادن این است که هر زیرمجموعه از B دارای یک مینیموم است. فرض کنید $C \subseteq B$. می‌خواهیم عنصر مینی‌مومِ C را بیابیم. از آنجا که $C \subseteq \bigcup B_i$ واضح است که i وجود دارد به طوری که

$$C \cap B_i \neq \emptyset.$$

می‌دانیم که $C \cap B_i \subseteq B_i$ پس از آنجا که B_i خوش‌ترتیب است، $C \cap B_i$ دارای یک عنصر مینی‌موم است. فرض کنیم نام این عنصر t باشد. ادعا می‌کنیم که $t = \min C$. فرض کنید $y \in C$ عنصر دلخواهی باشد. کافی است نشان دهیم که $t \leq y$.

از آنجا که $y \in C \subseteq \bigcup B_i$ می‌دانیم که $i_1 \in I$ وجود دارد به طوری که $y \in B_{i_1}$. از آنجا که B_i ها زنجیر می‌سازند، یا $B_i \subseteq B_{i_0}$ یا $B_{i_0} \subseteq B_i$. اگر $B_i \subseteq B_{i_0}$ آنگاه هر عنصر در B_i از تمام عناصرِ B_{i_0} کمتر است، پس $t \leq y$. اگر $B_{i_0} \subseteq B_i$ آنگاه $C \cap B_{i_0} \subseteq C \cap B_i$ و از این رو $\min C \cap B_i$ از تمامِ عناصرِ $C \cap B_{i_0}$ از جمله y کمتر است. (دقت کنید که اگر $M \subseteq N$ آنگاه $\min N \leq \min M$.)

[25] زنجیرها می‌توانند ناشمارا باشند و اینجا تنها برای سادگی، زنجیر را شمارا گرفته‌ایم.

پس (بعد از حل تمرین بالا) هر زنجیر در $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای کران بالاست . بنا به لم زُرن $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای عنصر ماکزیمال بنام $(C, \leqslant_C)$ است.

ادعا: $C = Y$.

اثبات ادعا: فرض کنید $y_\circ \in Y - C$.

هدف. پیدا کردن یک عنصر بزرگتر از $(C, \leqslant_C)$ در $\mathcal{A}$. قرار دهید $C' = C \cup \{y_\circ\}$ و فرض کنید $\forall c \in C \quad y_\circ \geqslant c$ آنگاه $(C', \leqslant_{C'}) \in \mathcal{A}$ و $(C', \leqslant_{C'}) \gneqq_{\mathcal{A}} (C, \leqslant_C)$ و این تناقض با ماکزیمال بودن C دارد.

$\square$

دقت کنید که در بالا با استفاده از لم زرن ثابت کردیم که روی هر مجموعه‌ای می‌توان یک ترتیب تعریف کرد که مجموعه‌ی مورد نظر با آن خوشترتیب باشد. در اثبات بالا، تنها وجود یک ترتیب را ثابت کردیم بی آنکه کوچکترین ایده‌ای درباره‌ی چگونگی این ترتیب به دست بدهیم. این نوع اثباتها از توانائیِ بالای لم زرن ناشی می‌شوند. در واحدهای جبری (احتمالاً در ترمهای آینده) قضایای فراوانی را خواهید دید که همه بر پایه‌ی لم زرن بنا شده‌اند.

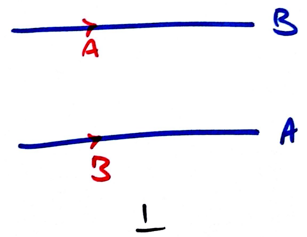
۲۸ جلسه‌ی بیست و هشتم، دوشنبه

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی اصل خوشترتیبی صحبت کردیم. گفتیم که بنا به این اصل اگر A یک مجموعه‌ی دلخواه باشد آنگاه می‌توان یک رابطه‌ی ترتیبی $\leqslant_A$ روی A تعریف کرد به طوری که $(A, \leqslant_A)$ خوشترتیب باشد.

تمرین ۵۷. نشان دهید که ساختار $(A, \leqslant)$ خوش ترتیب است اگر و تنها اگر هیچ دنباله‌ی نزولیِ نامتناهی‌ای مانند دنباله‌ی زیر از اعضای A یافت نشود.

$$a_1 \geqslant_A a_2 \geqslant_A a_3 \geqslant_A \dots$$

اصل خوشترتیبی مقدمه‌ی مقوله‌ی مهم دیگری در نظریه‌ی مجموعه‌ها، به نام اُردینالها است. قصد ندارم وارد مبحثِ اردینالها شوم، ولی توضیحی چند درباره‌ی آنها می‌دهم. به معرفی عمیقتر آنها را در درس منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها در ترم آینده خواهم پرداخت.
گفتیم که بنا اصل خوشترتیبی هر مجموعه‌ای را می‌توان دارای ترتیبی فرض کرد که با آن ترتیب خوشترتیب باشد. اگر $(A, \leqslant_A)$ و $(B, \leqslant_B)$ خوش ترتیب باشند آنگاه (بنا به قضیه‌ای)یا A بخشی آغازین از B است یا B بخشی آغازین از A است.



منظور از این که A بخش آغازینِ B است، عبارت زیر است:

$$\exists y \in B \quad A = \{x | x \leqslant y\}$$

پس مجموعه‌های خوشترتیب همه مانند اعداد پشت سر هم قابل مرتب شدن‌اند. به اعدادی که از این طریق حاصل می‌شوند، اعداد ترتیبی، یا **اردینالها** گفته می‌شود. برخی از اردینالها را در زیر نوشته‌ام.

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega, \omega+\omega+\omega, \dots, \omega.\omega, \omega.\omega+1, \dots, \omega.\omega+\omega, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots$$

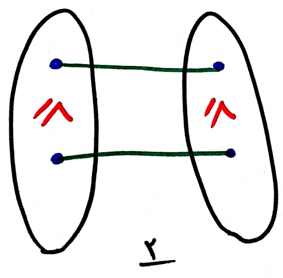
دقت کنید که اردینالهای $\omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega$ و بسیاری اردینالهای دیگر بعد از آن، از لحاظ کاردینالی همه برابر با $\aleph_0$ هستند. به بیان دیگر اگر ترتیب روی آنها در نظر گرفته نشود، همه، هم‌اندازه با $\aleph_0$ هستند. اما وقتی پای ترتیب به میان می‌آید، $\omega + 1$ دارای عنصری است که از همه‌ی عناصرِ ω بزرگتر است؛ پس $\omega + 1$ از لحاظ اردینالی با ω برابر نیست. حساب اردینالها داستان مفصل خود را دارد: روی آنها هم جمع و ضرب و توان تعریف می‌شود و این اعمال، با آنهائی که برای کاردینالها تعریف کردیم کاملاً متفاوتند. در زیر، تعریف دقیقتری برای اردینالها ارائه کرده‌ام.

تعریف ۲۵۳. اگر X و Y دو مجموعه باشند می‌گوییم X و Y یک اُردینال یکسان هستند (یا دارای نوع ترتیبیِ یکسانند) هر گاه

$$\exists \quad \overset{\text{یک به یک و پوشا}}{\overset{\uparrow}{f}} \quad : (X, \leqslant_X) \to (Y, \leqslant_Y)$$

به طوری که

$$\forall x, x' \in X \quad \Big(x \leqslant_X x' \to f(x) \leqslant_Y f(x')\Big)$$



پس این که دو مجموعه دارای نوع ترتیبی یکسان هستند، یعنی هم تعداد اعضای آنها برابر باشند و هم ترتیب اعضا یکسان باشد. تعریف بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی به دست می‌دهد که هر کلاس رابطه‌ی بالا را یک **اُردینال** می‌نامیم. بیش از این درباره‌ی اردینالها سخن نمی‌گویم و به عنوان آخرین بخش این درس، به بررسی اعداد طبیعی خواهم پرداخت.

۱.۲۸ اعداد طبیعی

اعداد طبیعی برای افراد در هر سطحی از ریاضی، قابل فهمند. اما برای ریاضیدان، دانستن سرمنشأ آنها و آگاهی درباره‌ی امکان اصل‌بندی آنها ضروری است. سایر مجموعه‌های اعداد، مانند اعداد صحیح و اعداد گویا و اعداد حقیقی همه با شروع از اعداد طبیعی تعریف می‌شوند. پس استحکام دانشمان از اعداد طبیعی برای حساب لازم است. همچنین اعداد طبیعی موضوع شاخه‌ای از ریاضیات به نام «نظریه‌ی اعداد» هستند. مجموعه‌ی اعداد طبیعی، همانند آنچه در ابتدای درس گفتیم، از طریق اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها به صورتی که در ادامه گفته‌ایم تعریف می‌شود. یادآوری می‌کنم که **اصل وجود مجموعه‌ی استقرایی** به صورت زیر است:

$$\exists A \quad (\emptyset \in A \wedge \forall x \in A \quad x \cup \{x\} \in A)$$

اصل بالا را **اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی** نیز می‌نامند. پس بنا به این اصل حداقل یک مجموعه‌ی استقرایی موجود است. این مجموعه، بنا به اصل بالا، حداقل شامل عناصر زیر است:

$$\emptyset$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\}$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}\}$$

$$\cdots$$

تعریف ۲۵۴. منظور از یک عدد طبیعی مجموعه‌ای (عنصری) است که به همه‌ی مجموعه‌های استقرائی تعلق دارد.

لم ۲۵۵. گردایه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی، یک مجموعه است. (که آن را با $\mathbf{N}$ نشان می‌دهیم.)

اثبات. باید نشان دهیم که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با استفاده از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها قابل تعریف است. فرض کنید B یک مجموعه‌ی استقرائی باشد. چنین مجموعه‌ای بنا به اصل وجود مجموعه‌ی استقرائی وجود دارد. گردایه‌ی اعداد طبیعی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\mathbf{N} = \{x \in B | \forall A \quad (\underbrace{A \text{ استقرائی}}_{\emptyset \in A \wedge \forall t \in A \quad t \cup \{t\} \in A} \rightarrow x \in A)\}$$

در تعریف بالا از اصل تصریح و منطق مرتبه‌ی اول استفاده شده است. پس آنچه در بالا تعریف شده است، یک مجموعه است. $\square$

در بالا در واقع گفته‌ایم که

$$\mathbf{N} = \bigcap_{A \text{استقرائی}} A$$

تمرین ۵۸. نشان دهید که $\mathbf{N}$ خودْ مجموعه‌ای استقرائی است.

بنا به تمرین بالا و آنچه پیش از آن گفتیم، $\mathbf{N}$ در واقع **کوچکترین مجموعه‌ی استقرائی** است. زیرا هم استقرائی است و هم زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌های استقرائی است. پس $\mathbf{N}$ مجموعه‌ی زیر است:

$$\mathbf{N} = \{\overset{\text{۰}}{\emptyset}, \emptyset \overset{\text{۱}}{\cup} \{\emptyset\}, \underbrace{\emptyset \cup \{\emptyset\} \overset{\text{۲}}{\cup} \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}}_{A}, A \cup \{A\}\}, \ldots$$

اعضای مجموعه‌ی بالا را می‌توانیم به صورت همان اعداد آشنای طبیعی نشان دهیم. اما می‌دانیم که اعداد طبیعی فقط یک مجموعه‌ی صِرف نیستند. آنها را می‌توان با هم جمع و ضرب کرد. در زیر روش تعریف اعمال اصلی را توضیح داده‌ام.

تعریف ۲۵۶. روی $\mathbf{N}$ تابع S (تابع تالی) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$$

$$S(x) = x \cup \{x\}$$

به بیان دیگر، تابع تالی، همان تابعی است که عمل زیر را انجام می‌دهد:

$$x \mapsto x + \text{۱}$$

قضیه ۲۵۷ (استقراء). فرض کنید $B \subseteq \mathbf{N}$ و $\cdot \in B$ و برای هر $x \in B$ داشته باشیم $S(x) \in B$ آنگاه

$$B = \mathbf{N}$$

اثبات. بنا به شرایط بالا، B یک مجموعه‌ی استقرائی است. پس $\mathbf{N} = \bigcap_{A \text{ استقرائی}} A \subseteq B$. از طرفی $B \subseteq \mathbf{N}$ پس $B = \mathbf{N}$. □

حال با استفاده از استقراء جمع و ضرب را روی اعداد طبیعی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۵۸. ۱. (جمع اعداد طبیعی) فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. تعریف می‌کنیم

$$n + ۱ = S(n)$$

فرض کنید $n + m$ تعریف شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$n + (m + ۱) = (n + m) + ۱ = S(n + m)$$

۲. (ضرب اعداد طبیعی) فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. تعریف می‌کنیم:

$$n \times \cdot = \cdot$$

فرض کنید $m \times n$ تعریف شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$n \times (m + ۱) := n \times m + n$$

۳. (ترتیب اعداد طبیعی)

$$x \leqslant y \iff \exists z \quad y = x + z$$

در نظریه‌ی اعداد قضایای بی‌شماری درباره‌ی اعداد طبیعی ثابت شده است. آیا می‌توان مجموعه‌ای از اصول اولیه برای اعداد طبیعی نوشت، به طوری که همه‌ی آن قضایا از اصول یادشده نتیجه شوند؟ سوال بالا را در ادامه‌ی درس در ذهن داشته باشید.

۲.۲۸ اصول پئانو

تعریف ۲۵۹. سه‌تایی (X, a, S_X) را **یک مدل برای حساب پئانو** می‌نامیم هرگاه X یک مجموعه باشد، $S_X : X \to X$ یک تابع باشد و a یک عنصر مشخص در X باشد و (X, a, S_X) در اصول زیر صدق کند.

۱. $\forall x \in X \quad S_X(x) \neq a$

۲. $\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad S_X(x) \neq S_X(y)$

۳. $\forall A \subseteq X \quad (a \in A \wedge \forall x \in A \quad S_X(x) \in A \to A = X)$ (استقراء)

بنا به آنچه در قسمت قبل گفتیم، سه‌تائیِ $(\mathbf{N}, ۰, S)$ مدلی برای حساب پئانو است زیرا در تمام اصول بالا صدق می‌کند. آیا حساب پئانو، دقیقاً مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به دست می‌دهد؟ آیا حساب پئانو مدل دیگری غیر از اعداد طبیعی دارد؟

قضیه ۲۶۰. (با در نظر گرفتن ایزومرفیسم) $(\mathbf{N}, ۰, S)$ تنها مدل حساب پئانو است.

اثبات. می‌دانیم که $(\mathbf{N}, ۰, S)$ یک مدل برای حساب پئانو است. فرض کنید (X, a, S_X) مدل دیگری باشد. تابع زیر را با استفاده از استقراء از $\mathbf{N}$ به X تعریف می‌کنیم:

$$f : \mathbf{N} \to X$$

$$f(۰) = a$$

فرض کنید $f(n)$ تعریف شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f(n + ۱) = S_X\Big(f(n)\Big)$$

ادعا: تابع f پوشاست.

اثبات ادعا: فرض کنید B بُرد تابعِ f باشد. پس $B \subseteq X$. داریم:

۱. $f(۰) = a \in B$

۲. اگر $t = f(x) \in B$ آنگاه

$$S_X(t) = f(x + ۱) \in B$$

پس $B \subseteq X$ و B در شرط اصل سوم پئانو صدق می‌کند. بنابراین

$$B = X$$

ادعای دوم. f یک به یک است.

اثبات ادعا: فرض کنید $n, m \in \mathbf{N}$ و $m \lneqq n$ آنگاه $n = S^n(۰), m = S^m(۰)$ و

$$f(n) = S_X^n(a) \text{ و } f(m) = S_X^m(a)$$

تمرین ۵۹. نشان دهید که

$$S_X^m(a) \neq S_X^n(a)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & S(۰) & S^{۲}(۰) & \dots \\ \mathbf{N} & ۰ & ۱ & ۲ & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ X & a & S_X(a) & S_X^{۲}(a) & \dots \end{array}$$

پس تابع بالا هم یک به یک است و هم پوشا. بنابراین تنها یک مدل برای حساب پئانو وجود دارد و آن $(\mathbf{N}, ۰, S)$ است. (یعنی هر مدل دیگری که وجود داشته باشد، یکی کُپی از همین مدل است) □

شاید اتفاق بالا خوشحالتان کرده باشد: اعداد طبیعی دارای اصلبندی است. اما اصول پئانو در زبان مرتبه‌ی اول نوشته نشده‌اند. در اصل سوم روی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی سور زده شده است که این کار در منطق مرتبه‌ی اول مجاز نیست. (بنا به ویژگیهای مهم منطق مرتبه‌ی اول) مهم است که بدانیم که آیا می‌شود مجموعه‌ای از اصول برای اعداد طبیعی در منطق مرتبه‌ی اول نوشت، به طوری که هر قضیه‌ای درباره‌ی اعداد طبیعی در منطق مرتبه‌ی اول از آنها نتیجه شود؟ از پسِ پاسخ این سوال، «گودل» [۲۶] منطقدانِ آلمانی برآمده است. بر خلاف آنچه انتظار طبیعی ریاضیدانان است، گودل ثابت کرده است که هر مجموعه‌ی (شمارا) از اصول که برای اعداد طبیعی نوشته شود، از پس اثبات همه‌ی حقایق اعداد طبیعی برنمی‌آید؛ یعنی همواره قضیه‌ای درباره‌ی اعداد طبیعی پیدا می‌شود که با این اصول، نه ثابت می‌شود و نه رَد. این قضیه‌ی مهم، **قضیه‌ی ناتمامیت گودل** نام دارد.
قضیه‌ی ناتمامیت گودل شاید برایتان ناراحت‌کننده باشد:نمی‌شود ریاضیات را به طور کامل اصلبندی کرد و مطمئن بود که همه‌چیز از اصول خاصی نتیجه می‌شوند. در واقع حتی معلوم نیست که ریاضیات (و از این رو علم) حاوی تناقض باشد یا نه، و خالی بودن ریاضیات از تناقضات نیز قابل اثبات نیست. در عین حال، اگر مجموعه‌ای از اصول برای ریاضیات (مثلا اصول زرملو فرانکل) در نظر بگیریم، آنگاه هر چه که با این اصول اثبات می‌کنیم درست است. پس اثباتهائی که داریم درستند. این نتیجه‌ای از **قضیه‌ی درستی و تمامیت گودل** است.

۳.۲۸ نتیجه‌گیری

در طی این ترم، با مبانی ریاضیات آشنا شدیم. در هرَمِ علوم، مبانی ریاضیات در پائینترین قسمت واقع است. منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها، علومیند که ریاضیات محض بر پایه‌ی آنها بنا شده است. سایر شاخه‌های ریاضی محض، ماند جبر، هندسه، آنالیز، توپولوژی و غیره در طبقه‌ای بالاتر در این هرم واقعند. عموماً آنچه در ریاضیات محض بررسی می‌شود مسائل خام ریاضی هستند که شاید حل آنها مستقیماً کاربردی در زندگی روزمره نداشته باشد، بلکه پاسخ آنها باید در هرم علوم بالا برود تا به کاربرد برسد. ریاضی محض از این حیث، به فلسفه می‌ماند که در آن دغدغه‌ی یافتن حقیقت بر همه چیز مقدم است. در پله‌ی بالاتر این هرم به ریاضیات کاربردی می‌رسیم که در آن، از قضایائی که در پائین هرم، در ریاضیات محض ثابت می‌شود، استفاده‌های کاربردی می‌کنیم و قضایایی (شاید با عمق کمتر ولی با کاربرد بیشتر) بدانها می‌افزائیم. در ریاضی کاربردی، مسئله‌ی پیش روی ما، عموماً مسئله‌ای است که به جهانی که در آن زندگی می‌کنیم می‌پردازد و حل آن قرار است به درد طبقه‌های بالاتر هرم بخورد. عموماً این مسائل خودشان

[۲۶] Gödel

نیز از طبقات بالاتر هرم می‌آیند. در این طبقات، انواع مهندسی‌ها واقع شده‌اند. آنچه برای مهندس بیش از همه‌چیز اهمیت دارد، پاسخ دادن به سوالی است که پاسخ آن موجب چرخش چرخ صنعت شود. شاید از این حیث، مهندس کمتر وقتش را صرف دانستن کُنهِ فلسفی سوالی بکند. مسئله برای او زمانی حل است که مشکل صنعت را حل کند. به عنوان تمرین، هرم علوم را برای خود رسم کنید و بررسی کنید که علومی مانند پزشکی، جامعه‌شناسی، جغرافیا و فیزیک در کجای این هرم می‌توانند واقع شوند. دقت کنید که برخی از این علوم می‌توانند به چند طبقه‌ی مختلف از هرم تعلق داشته باشند.

امتحان دوم

توجه. پاسخ‌ها و استدلالها را به صورت انشائی و دقیق بنویسید. از نوشتن فرمولها پشت سر هم و بدون هیچ توضیحی خودداری کنید. مدت آزمون ۱۵۰ دقیقه است.

سوال ۳۷. صورت کاملاً دقیقِ قضایا یا اصول زیر را بنویسید.

۱. لمِ زُرن

۲. اصل انتخاب

۳. اصل انتظام

سوال ۳۸. نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد حقیقی ناشماراست. (برای این کار کافی است نشان دهید که بازه‌ی (۰, ۱) ناشماراست.)

سوال ۳۹.

۱. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. نشان دهید که f یک به یک و پوشاست اگروتنهااگر تابعِ $g : Y \to X$ موجود باشد به طوری که $f \circ g = id_Y$ و $g \circ f = id_X$. توجه کنید که منظور از id_X تابع همانی روی مجموعه‌ی X است و منظور از id_Y تابع همانی روی مجموعه‌ی Y است. (برای اطلاع عمومی: در اثبات بالا نیازی به اصل انتخاب نداریم.)

سوال ۴۰. فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد و $x, y \in X$. نشان دهید که $[x]_R = [y]_R$ اگروتنهااگر xRy.

سوال ۴۱. جمله‌های زیر را فرمولبندیِ ریاضی کنید. با $A(x, y)$ عبارتِ «x عموی y است» را نشان دهید و با $D(x, y)$ عبارتِ «x دائیِ y است» را نشان دهید و با $R(x, y)$ عبارتِ «x و y همدیگر را می‌شناسند» را نشان دهید.

۱. هر کس که عموئی داشته باشد، دائیِ همه است.

۲. اگر همه عمو داشته باشند، یکی هست که دائیِ همه است.

۳. عموی هر کس دائی‌های او را می‌شناسد.