۲۷ جلسه‌ی بیست‌ودوم، تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهی اعداد طبیعی

در جلسه‌ی گذشته با قضیه‌ی مهم کانتور ـ برنشتاین آشنا شدیم:

قضیه ۲۵۹ (قضیه‌ی کانتور ـ برنشتاین)**.** اگر $Y \leqslant X$ و $X \leqslant Y$ آنگاه $X = Y$.

در این جلسه می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهیِ اعداد طبیعی را بیابیم. نخست تعداد زیرمجموعه‌های متناهی آن را در مثال زیر حساب می‌کنیم و می‌بینیم که تعداد زیرمجموعه‌های متناهی اعداد طبیعی برابر با اندازه‌ی اعداد طبیعی است.

مثال ۲۶۰. تعداد زیر مجموعه‌های متناهیِ $\mathbf{N}$ شماراست.

اثبات. تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی $\mathbf{N}$ برابر $\aleph_۰$ است. ادعا می‌کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbf{N}$ نیز برابر است با $\aleph_۰$.

اثبات ادعا. می‌دانیم که تعداد زوج مرتب‌های (a,b) که $a,b \in \mathbf{N}$ بزرگتریامساوی تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbf{N}$ است، زیرا

$$|\{a,b\}| \leqslant |\{(a,b),(b,a)\}|$$

قبلاً ثابت کرده‌ایم که $\mathbf{N}^۲$ هم‌اندازه‌ی $\mathbf{N}$ است. پس

$$\aleph_۰ \geqslant \text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی } \mathbf{N}$$

حال دقت می‌کنیم که

$$\aleph_۰ \leqslant \text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی } \mathbf{N}$$

برای اثبات این گفته به یک تابع یک به یک از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbf{N}$ نیازمندیم؛ تابعی که کار زیر را بکند:

$$\mathbf{N} \to \{\text{تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی}\}$$

$$n \mapsto \text{زیر مجموعه‌ی دو عضوی}$$

تعریف می‌کنیم:

$$f(n) = \{n, n+۱\}$$

$$\begin{aligned} ۰ &\to \{۰,۱\} \\ ۱ &\to \{۱,۲\} \\ ۲ &\to \{۲,۳\} \\ ۳ &\to \{۳,۴\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

تابع بالا یک به یک است.

حال ادعا می‌کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های n عضویِ $\mathbf{N}$ برابر $\aleph_0$ است.

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های } n \text{ عضوی } \mathbf{N} \leqslant |\mathbf{N}^n| = |\{(x_1, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{N}\}|$$

کافی است نشان دهیم که

$$\aleph_0 \leqslant \mathbf{N} \text{ تعداد زیر مجموعه‌های } n\text{عضوی }$$

تابع یک به یکِ f از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی زیر مجموعه‌های n عضوی $\mathbf{N}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \{x, x+1, \ldots, x+n-1\}$$

بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های n عضوی $\mathbf{N}$ برابر با $\aleph_0$ است.

پس مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های متناهی اعداد طبیعی

$\mathbf{N}$ اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست؛ و از این رو شماراست.

$$\underbrace{\{\text{تک عضوی}\} \cup \{\text{دو عضوی}\} \cup \ldots \cup}_{\text{شمارا}}$$

$\square$

سوال ۲۶۱. تعداد **زیرمجموعه‌های نامتناهی** $\mathbf{N}$ چندتاست؟

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی } \mathbf{N} + \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های متناهی } \mathbf{N}}_{\text{شمارا}} = \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های } \mathbf{N}}_{\text{ناشمارا}}$$

بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی $\mathbf{N}$ برابر <u>**نیست**</u> با $\aleph_0$. زیرا قبلاً ثابت کرده‌ایم که اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست، و مجموعه‌ی سمت چپ در بالا شمارا نیست. برای تعیین تعداد دقیق زیرمجموعه‌های نامتناهیِ $\mathbf{N}$ به لم زیر نیازمندیم.

لم ۲۶۲. فرض کنید A شمارا باشد و B یک مجموعه‌ی نامتناهی دلخواه باشد و $A \cap B = \emptyset$. آنگاه $|B| = |A \cup B|$.

به بیان دیگر اگر κ یک کاردینال نامتناهی دلخواه باشد آنگاه

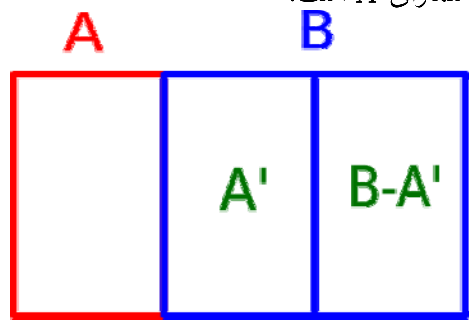
$$\kappa + \aleph_0 = \kappa$$

پس به طور ویژه

$$2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$$

توجه کنید که لم بالا بر اصل انتخاب استوار است.

اثبات. از آنجا که B نامتناهی است، بنا بر آنچه در جلسات پیش ثابت کرده‌ایم، B شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارای A' است.



از آنجا که A, A' هر دو شمارا هستند داریم:

$$A \cup A' \cong A'$$

پس

$$A \cup B = (A \cup A') \cup (B - A') \cong A' \cup (B - A') \cong B$$

□

توجه ۲۶۳. در جلسات آینده ثابت خواهیم کرد که به طور کلّی اگر $|A| \leq |B|$ آنگاه

$$|A \cup B| = |B|$$

به بیان دیگر

$$\underbrace{\kappa}_{\text{کاردینال}} + \underbrace{\lambda}_{\text{کاردینال}} = \max\{\kappa, \lambda\}$$

گفتیم که

$$\underbrace{\mathbf{N}\ \text{تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی}}_{?} + \underbrace{\mathbf{N}\ \text{تعداد زیر مجموعه‌های متناهی}}_{\aleph_0} = \underbrace{\mathbf{N}\ \text{تعداد زیر مجموعه‌های}}_{2^{\aleph_0}}$$

پس تعداد زیر مجموعه‌های **نامتناهی** $\mathbf{N}$ برابر با $2^{\aleph_0}$ است. (زیرا اگر تعداد آنها کاردینالی غیر از $2^{\aleph_0}$ مانند κ باشد، آنگاه حاصل جمع بالا نیز κ می‌شود.

تا کنون آموخته‌ایم که مجموعه‌های هم‌اندازه ی اعداد طبیعی، نامتناهی هستند و به آنها شمارا می‌گویند. نیز آموختیم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی نامتناهی است، ولی از تعداد اعضای اعداد طبیعی اکیداً بیشتر است (برابر است با تعداد اعداد حقیقی). یعنی دو نامتناهی معرفی کرده‌ایم که هم‌اندازه‌ی هم نیستند. تفاوت قائل شدن برای اندازه‌ی نامتناهی‌ها تنها در ریاضیات قابل فهم است. یک سوال طبیعی این است که آیا نامتناهی‌های دیگری نیز وجود دارند؟ مثلاً آیا مجموعه‌ای بزرگتر از مجموعه‌ی اعداد حقیقی نیز وجود دارد؟

سوال ۲۶۴. غیر از $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ چه اندازه‌های دیگری وجود دارند؟

یک سوال طبیعی دیگر را در زیر نوشته‌ایم. این سوال، سالها ذهن کانتور را به خود مشغول کرده بود. از دید تاریخی نیاز به ذکر است که رویکرد کانتور به نامتناهی‌ها و مقایسه‌ی آنها با هم، در میان همعصرانش بسیار مطرود بود. کانتور همه‌ی سالهای پایانی عمر خود را صرف سوال زیر کرد. وی در آن سالها از مشکلات روحی فراوانی رنج برد.

توجه ۲۶۵. تاکنون ثابت کرده‌ایم

$$\underbrace{\aleph_0}_{|\mathbf{N}|} \lneqq \underbrace{2^{\aleph_0}}_{|\mathbf{R}|}$$

سوال ۲۶۶. آیا مجموعه‌ای پیدا می‌شود که اندازه‌ی آن از اندازه‌ی اعداد طبیعی بیشتر و از اندازه‌ی اعداد حقیقی کمتر باشد؟ به بیان دیگر آیا عددی هست که $\aleph_0$ بیشتر و از $2^{\aleph_0}$ کمتر باشد؟

فرضیه‌ی پیوستار

عددی بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ وجود ندارد.

توجه ۲۶۷. هر چند برای درک جملات پیش رو نیازمند گذراندن درس منطق هستید ولی به طور گذرا اشاره می‌کنم که فرضیه‌ی پیوستار از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها مستقل است. یعنی با اصولی که در ابتدای این ترم برای نظریه‌ی مجموعه‌ها نوشتیم این فرضیه نه قابل اثبات است و نه قابل رد.

با این حال کانتور قضیه‌ی زیبای دیگری نیز دارد: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه‌ی دلخواه، همواره از تعداد اعضای آن بیشتر است. به بیان دیگر اگر κ یک کاردینال دلخواه باشد، آنگاه $\kappa < 2^{\kappa}$. (این گفته را برای $\kappa = \aleph_0$ قبلاً ثابت کرده‌ایم.) بدینسان همواره یک نامتناهیِ بزرگتر از یک نامتناهی داده شده موجود است:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \dots$$

قضیه ۲۶۸ (کانتور)**.** همواره $|P(X)| \gneqq |X|$.

اثبات. اولاً $|2^X| \geqslant |X|$ زیرا تابع زیر یک به یک است.

$$f : X \to P(X)$$

$$n \to \{n\}$$

در ادامه‌ی ثابت می‌کنیم که هیچ تابع یک به یک و پوشایی بین X و $P(X)$ وجود ندارد. به بیان دیگر $|X| \neq |P(X)|$.

به طور کلی‌تر ادعا می‌کنیم که هیچ تابع $g : X \to P(X)$ پوشا نیست. فرض کنید تابع g به صورت بالا داده شده باشد. ادعا می‌کنیم که g مجموعه‌ی زیر را نمی‌پوشاند:

$$P(X) \ni A = \{x \in X | x \notin g(x)\}$$

اگر تابع g پوشا باشد، آنگاه عنصر $t_0 \in X$ موجود است به طوری که

$$g(t_0) = A$$

حال اگر $t_0 \in g(t_0)$ آنگاه $t_0 \notin g(t_0)$ و اگر $t_0 \notin g(t_0)$ آنگاه $t_0 \in g(t_0)$. این تناقض نشان می‌دهد که تابع g نمی‌تواند پوشا باشد. $\square$

ثابت کردیم که

$$|X| \lneqq \underbrace{|\text{تعداد زیر مجموعه‌های } X|}_{|۲^X|}$$

سوال طبیعی دیگر درباره‌ی اندازه‌ها این است آیا لزوماً اندازه‌ی دو مجموعه‌ی نامتناهی با هم قابل مقایسه است؟ به بیان دیگر اگر X, Y دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، آیا لزوماً یا تابعی یک به یک از X به Y و یا تابعی یک به یک از Y به X موجود است؟

در جلسات آینده خواهیم توانست مطالب زیر را ثابت کنیم:

۱. اگر X و Y دو مجموعه باشند آنگاه یا $|Y| \leqslant |Y|$ یا $|Y| \leqslant |X|$.

۲. اگر κ و λ دو کاردینال باشند (یعنی دو سایز مجموعه باشند) آنگاه

$$\underbrace{\kappa + \lambda}_{|X \cup Y|} = \underbrace{\kappa \cdot \lambda}_{|X \cdot Y|} = \max\{\kappa, \lambda\}$$

برای اثبات آنچه در بالا نوشته‌ایم به درک بهتری از اصل انتخاب و معادلهای آن (بالاخص لم زرن) محتاجیم.