

## ۱۰ جلسه‌ی دهم

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که درباره‌ی اعداد حقیقی جمله‌ی اول در زیر درست است ولی جمله‌ی دوم نادرست:

$$۱. \forall n \in \mathbf{N} \quad \exists r \in \mathbf{R} \quad 0 < r < \frac{1}{n}$$

$$۲. \exists r \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad 0 < r < \frac{1}{n}$$

گفتیم که جمله‌ی دوم در بالا همان ویژگی ارشمیدسی است.

ویژگی ارشمیدسی:

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$$

سوال ۱۱۳. آیا  $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$  ؟

پاسخ. نخست ثابت می‌کنیم که

$$① \quad P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

عبارت بالا را با روش استنتاجی زیر ثابت می‌کنیم:

$$۱ \quad c \in P(A) \cup P(B) \rightarrow c \in P(A) \vee c \in P(B)$$

$$۲ \quad c \in P(A) \rightarrow c \subseteq A$$

$$۳ \quad A \subseteq A \cup B$$

$$۴ \quad c \in P(A) \rightarrow c \subseteq A \cup B \quad \text{بنا به ۲, ۳}$$

$$۵ \quad c \in P(B) \rightarrow c \subseteq A \cup B \quad \text{تکرار ۲ و ۳ برای } B \text{ به جای } A$$

$$۶ \quad c \in P(A) \vee c \in P(B) \rightarrow c \subseteq A \cup B \quad \text{بنا به ۴ و ۵}$$

$$۷ \quad c \in P(A) \cup P(B) \rightarrow c \in P(A \cup B).$$

حال فرض کنید  $c \in P(A \cup B)$ . آنگاه  $c \subseteq A \cup B$ . می‌خواهیم ببینیم که آیا  $c \in P(A) \cup P(B)$  داریم:

$$** \quad c \in P(A) \cup P(B) \leftrightarrow c \in P(A) \vee c \in P(B)$$

$$\leftrightarrow c \subseteq A \vee c \subseteq B$$

سوال ۱۱۴. آیا  $c \subseteq A \cup B \rightarrow (c \subseteq A) \vee (c \subseteq B)$  ؟

حکم بالا غلط است. مثال نقض:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{3, 4\}$$

$$c = \{2, 3\}$$

□

## ۱.۱۰ ادامه‌ی خانواده‌ها

مثال ۱۱۵. حاصل

$$\bigcup_{k \in \mathbf{N}} (k, k+1]$$

را بیابید:

$$\bigcup_{k \in \mathbf{N}} (k, k+1] = (0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, 3] \cup \dots \cup (k, k+1] \cup \dots$$

$$= (0, \infty) = \{x \in \mathbf{R} | x > 0\}$$

مثال ۱۱۶.

$$\textcircled{1} \quad \bigcap_{k \in \mathbf{N}} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$$

$$\textcircled{2} \quad \bigcap_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = (-1, 1) \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cap \dots \cap \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

نخست نشان می‌دهیم  $\textcircled{1}$  مجموعه‌ی تهی است: توجه کنید که

$$x. \in \bigcap_{k \in \mathbf{N}} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \rightarrow \forall k \in \mathbf{N} \quad x. \in \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$$

$$\rightarrow \star \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad -\frac{1}{k} < x. < \frac{1}{k}$$

فرض کنید  $x. > 0$ . از  $\star$  نتیجه می‌گیریم که

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad 0 < x. < \frac{1}{k} \quad \text{بنا به ویژگی ارشمیدسی}$$

اگر  $x. < 0$  آنگاه

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad -\frac{1}{k} < x. < 0$$

$$\rightarrow \forall k \in \mathbf{N} \quad 0 < -x. < \frac{1}{k} \quad \text{بنا به ویژگی ارشمیدسی}$$

همچنین توجه کنید که حاصل  $\textcircled{2}$  مجموعه‌ی  $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  است.

مثال ۱۱۷. قضیه‌ی (دمورگان)  $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)^c = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c$  را ثابت کنید.

اثبات. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\underbrace{\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)^c}_C = \underbrace{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c}_D$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x. \in C \Leftrightarrow x. \in \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)^c$$

$$\Leftrightarrow x. \notin \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma \quad (x. \notin A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma \quad x. \in A_\gamma^c \Leftrightarrow x. \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c$$

□

مثال ۱۱۸. قضیه‌ی پخش‌پذیری را ثابت کنید:

اثبات پخش‌پذیری. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma)$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x. \in A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) \Leftrightarrow x. \in A \wedge x. \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$$

$$\Leftrightarrow (x. \in A) \wedge (\exists \gamma. \in \Gamma \quad x. \in B_{\gamma.})$$

از  $(x. \in A) \wedge (x. \in B_{\gamma.})$  نتیجه می‌گیریم که

$$x. \in A \cap B_{\gamma.}$$

از آنجا که

$$A \cap B_{\gamma.} \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$x. \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma)$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma)$$

حال می‌خواهیم بدانیم که آیا  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma) \subseteq A \cap (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma)$  نیز برقرار است؟

$$x. \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma) \Rightarrow \exists \gamma. \in \Gamma \quad x. \in A \cap B_\gamma.$$

$$\Rightarrow x. \in A \wedge x. \in B_\gamma. \Rightarrow (x. \in A) \wedge (x. \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma.)$$

$$\Rightarrow x. \in A \cap (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma)$$

□

## ۲.۱۰ ضربهای دکارتی

فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند و  $x \in A$  و  $y \in B$ . بنا به اصل جفت‌سازی  $\{x, y\}$  یک مجموعه است و  $\{x\}$  نیز یک مجموعه است. دوباره بنا به اصل جفت‌سازی  $\{\{x\}, \{x, y\}\}$  یک مجموعه است. این مجموعه را با  $(x, y)$  نشان می‌دهیم. پس

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

تمرین ۱۱۹. نشان دهید که

$$(x., y.) = (x_1, y_1) \iff (x. = x_1) \wedge (y. = y_1)$$

ایده‌ی اثبات.

$$\{\{x.\}, \{x., y.\}\} = \{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\}$$

$$\{x.\} = \{x_1\} \Rightarrow x. = x_1$$

$$\{x_1, y_1\} = \{x., y.\} \Rightarrow y. = y_1$$

□

تعریف ۱۲۰. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

تمرین ۱۲۱. نشان دهید که  $A \times B$  یک مجموعه است.