۷ جلسه‌ی هفتم

۱.۷ اعداد طبیعی

در جلسات قبل با اصل موجود یک مجموعه‌ی استقرایی (یا وجود یک مجموعه‌ی نامتناهی) آشنا شدیم:

$$\exists A \quad \Big(\emptyset \in A \wedge \forall x \quad \big(x \in A \to x \cup \{x\} \in A\big)\Big)$$

نیز گفتیم که از این ایده، برای تعریف اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
۰ &= \emptyset \\
۱ &= \{۰\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}. \\
۲ &= \{۰, ۱\} = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\} \\
۳ &= \{۰, ۱, ۲\} = \left\{\emptyset, \Big\{\emptyset\Big\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}\right\}
\end{aligned}$$

تعریف ۷۴. منظور از یک عدد طبیعی، **مجموعه‌ای** است که به همه‌ی مجموعه‌های استقرایی تعلق دارد.

قضیه ۷۵. مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد. (یعنی مجموعه‌ای موجود است که مجموعه های موجود در آن، یا همان اعضای آن، دقیقاً اعداد طبیعی هستند.)

اثبات. بنا به اصل وجودِ یک مجموعه‌ی نامتناهی، یک مجموعه‌ی استقراییِ A موجود است. بنا به اصل تصریح عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{x \in A | \forall y \quad \Big(\big(\underbrace{\emptyset \in y \wedge \forall z \quad (z \in y \to z \cup \{z\} \in y)}_{\text{اگر } y \text{ استقرایی باشد.}}\big) \to x \in y\Big)\}$$

□

در واقع، در قضیه‌ی بالا ثابت کرده‌ایم که مجموعه‌ی اعداد طبیعی اشتراک همه‌ی مجموعه‌های استقرائی است. یعنی اگر x طبیعی باشد آنگاه x در تمام مجموعه‌های استقرائی است و اگر x در تمام مجموعه‌های استقرائی باشد، x طبیعی است.

توجه ۷۶. مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با $\mathbf{N}$ نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{N} = \bigcap_{A \text{ استقرایی}} A$$

پس $\mathbf{N}$ کوچکترین مجموعه‌ی استقرائی است.

قضیه ۷۷ (استقراء روی اعداد طبیعی)**.** فرض کنید $p(x)$ یک ویژگی برای اعداد طبیعی باشد. آنگاه جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست است:

$$p(۰) \wedge \forall x \quad \Big(p(x) \to p(x+۱)\Big) \to \forall y \quad p(y)$$

اثبات. فرض کنید جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست باشد.

$$p(۰) \wedge \forall x \quad \Big(p(x) \to p(x+۱)\Big)$$

هدف: نشان دادن این که جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست است:

$$\forall x \quad p(x)$$

بنا به اصل تصریح عبارت زیر یک مجموعه است:

$$S = \{x \in \mathbf{N} | p(x)\}$$

می‌دانیم که $\quad S \subseteq \mathbf{N} \quad$ ۱

یادآوری ۷۸ (اصل گسترش)**.**

$$A = B \leftrightarrow \forall x \quad (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

به بیان دیگر با توجه به اینکه نماد $\subseteq$ را تعریف کرده‌ایم، اصل گسترش را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

کافیست نشان دهیم که $\mathbf{N} \subseteq S$. در آن صورت برای تمام اعداد طبیعی، حکمِ p درست خواهد بود.

توجه ۷۹. اگر نشان دهیم که S یک مجموعه‌ی استقرائی است آنگاه $\mathbf{N} \subseteq S$.

پس نشان می‌دهیم که S استقرائی است.
اولاً $۰ \in S$. ثانیاً اگر $x \in S$ آنگاه

$$x + ۱ := x \cup \{x\} \in S$$

پس S استقرائی است. پس $\mathbf{N} \subseteq S$ ②

$$①, ②, \text{اصل گسترش} \Rightarrow \mathbf{N} = S$$

$\square$

در قضیه‌ی بالا در واقع «استقراء» را برای اعداد طبیعی ثابت کرده‌ایم. یعنی ثابت کرده‌ایم که اگر p حکمی درباره‌ی اعداد طبیعی باشد و $p(۰)$ برقرار باشد و از برقراری هر $p(x)$ برقراریِ $p(x+۱)$ نتیجه شود، آنگاه حکم مورد نظر برای تمام اعداد طبیعی درست است.
از استقراء گاهی برای **تعریف** های مربوط به اعداد طبیعی نیز استفاده می‌کنیم:

۲.۷ تعریف توان x^n

فرض کنید x یک متغیر (مثلاً یک عدد حقیقی) باشد. توانهای طبیعیِ x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x^۰ := ۱$$

$$x^{n+۱} := x^n . x$$

تعریف ۸۰ (مثال برای استقراء)**.** اگر n یک عدد طبیعی باشد و r یک عدد صحیح تعریف کنید:

$$\binom{۰}{۰} = ۱$$
$$\binom{۰}{r} = ۰ \quad \forall r \neq ۰$$
$$\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r} + \binom{n-۱}{r-۱}$$

تمرین ۸۱. نشان دهید که (برای هر $۰ \leqslant r \leqslant n$) داریم

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

اثبات.

$$\text{حکم} \quad p(n): \quad \forall ۰ \leqslant r \leqslant n \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ابتدا بررسی می‌کنیم که حکم در ۰ برقرار است:

$$p(۰): \quad \forall \underbrace{۰ \leqslant r \leqslant ۰}_{r=۰} \quad \cancelto{۱}{\binom{۰}{r}} = \frac{۰!}{r!(۰-r)!} = ۱$$

فرض کنیم که $p(n)$ برقرار باشد، یعنی

$$\forall ۰ \leqslant r \leqslant n \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

هدف: نشان دادن اینکه $p(n+۱)$ برقرار است.

$$\forall ۰ \leqslant r \leqslant n+۱ \quad \binom{n+۱}{r} = \frac{(n+۱)!}{r!(n+۱-r)!}$$

فرض کنیم $r < n+۱$ آنگاه داریم

$$\binom{n+۱}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-۱} = \frac{n!}{n!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-۱)!(n-r+۱)!} =$$

$$\frac{n!(n-r+۱)+n!\cdot r}{r!(n-r+۱)!} = \frac{n!(n+۱)}{r!(n-r+۱)!} = \frac{(n+۱)!}{r!(n-r+۱)!}$$

اثبات حکم هنوز تمام نشده است. تنها چیزی که مانده است این است که نشان دهیم که $\binom{n+۱}{n+۱} = ۱$.
این قسمت را به عنوان تمرین به عهده‌ی شما می‌گذاریم. □

تمرین ۸۲. نشان دهید که

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \binom{n}{n} = ۱$$

قضیه ۸۳. فرض کنید که x, y دو متغیر باشند. آنگاه داریم:

$$(x+y)^n = \binom{n}{۰}x^n + \binom{n}{۱}x^{n-۱}y^{۱} + \binom{n}{۲}x^{n-۲}y^{۲} + \ldots + \binom{n}{n-۱}xy^{n-۱} + \binom{n}{n}y^n$$

اثبات. حکم $p(n)$ که قرار است با استقراء ثابت شود به صورت زیر است:

$$p(n): \quad (x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

بررسی $p(0)$:

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0$$

حال فرض کنید $p(n)$ برقرار باشد:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}y^i x^{n-i}$$

بررسی $p(n+1)$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\left(\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n}y^n\right)$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}x^{n+1}}_{\binom{n+1}{0}x^{n+1}} + \left(\underbrace{\binom{n}{1}x^n y + \binom{n}{0}x^n y}_{\binom{n+1}{1}x^n y}\right) + \left(\underbrace{\binom{n}{2} + \binom{n}{1}}_{\binom{n+1}{2}}\right)x^{n-1}y^2 + \ldots +$$

$$\left(\underbrace{\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}}_{\binom{n+1}{n}}\right)xy^n + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\binom{n+1}{n+1}}y^{n+1}$$

$\square$

منظور از یک مجموعه‌ی n عضوی، مجموعه‌ای مانند مجموعه‌ی زیر است:

$$n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

قضیه ۸۴. تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی $(r \leq n)$ برابر است با

$$\binom{n}{r}.$$

اثبات. فرض کنید $p(n)$ عبارت زیر باشد:

به ازای هر $r \leqslant n$ تعداد زیر مجموعه‌ی های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با

$$\binom{n}{r}.$$

نخست $p(۰)$ را بررسی می‌کنیم: تعداد زیر مجموعه‌های ۰ عضوی یک مجموعه‌ی ۰ عضوی برابر است با

$$\binom{۰}{۰} = ۱$$

حال $p(n+۱)$ را بررسی می‌نماییم. فرض کنید $p(n)$ درست باشد. فرض کنید $A = \{x_۱, \dots, x_{n+۱}\}$ یک مجموعه‌ی $n + ۱$ عضوی باشد و فرض کنید $r \leqslant n$. تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی A که شامل $x_{n+۱}$ نیستند برابر است با $\binom{n}{r}$ و تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی A که شامل $x_{n+۱}$ هستند برابر است با

$$\binom{n}{r-۱}.$$

پس تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی $n + ۱$ عضوی برابر است با

$$\binom{n}{r-۱} + \binom{n}{r} = \binom{n+۱}{r}$$

همچنین تعداد زیرمجموعه‌های $n + ۱$ عضوی یک مجموعه‌ی $n + ۱$ عضوی، یکی است و برابر است با $\binom{n+۱}{n+۱}$. □

قضیه ۸۵. تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با ۲^n.

اثبات. تعداد زیر مجموعه‌های i عضوی آن برابر است با $\binom{n}{i}$. تعداد کل زیر مجموعه‌ها برابر است با

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \dots + \binom{n}{n-۱} + \binom{n}{n} = (۱ + ۱)^n = ۲^n$$

□

گفتیم که اگر A یک مجموعه باشد، آنگاه بنابراصل وجود مجموعه‌ی توانی، یک مجموعه به نام $p(A)$ موجود است که از زیرمجموعه‌های A تشکیل شده است. قضیه‌ی بالا در واقع می‌گوید که اگر $|A| = n$ آنگاه $|p(A)| = ۲^n$. در واقع تعداد اعضایِ $p(A)$ اکیداً از تعداد اعضایِ A بیشتر است:

$$\left|p(n)\right| = ۲^n$$

به همین علت است که به این اصل «اصل توان» گفته می‌شود. در بخشهای آخرین این درس خواهیم دید که این حکم، برای همه‌ی «کاردینالها» درست است. برای مثال اگر $\aleph_۰$ تعداد اعداد طبیعی باشد،

آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی برابر است با $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. یکی از سوالهای باز در ریاضیات این است که آیا عددی بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ وجود دارد؟ فعلاً نگران فهمیدن این بند آخر نباشید. بعداً مفصلاً بدان خواهیم پرداخت.