مبانی ریاضیات

محسن خانی

۴ آبان ۱۳۹۸

لَيْسَ لِلْإِنْسَانِ إِلَّا مَا سَعَى

قرآن كريم

چکیده

جزوه‌ی پیش‌رو حاصل دو ترم تدریس مبانی ریاضیات در دانشگاه صنعتی اصفهان است. در این جزوه، کوشیده‌ام تا مبانی ریاضی را، نه به عنوان مبانی مدرک کارشناسیِ ریاضی، بلکه به عنوان یک شاخه از علمِ ریاضی با پیچیدگی‌ها و ظرافتهای آن تدریس کنم. از این رو از تکرار کسالت‌آورِ مفاهیم دبیرستانی خودداری کرده‌ام و وقت درس را بیشتر صرف آشنا کردن دانشجویان با پایه‌های اصل موضوعه‌ای علم ریاضی، منطق و بی‌نهایتها کرده‌ام.

تدریس مبانی ریاضی از آن امور سَهلِ مُمتَنِع است. عموماً هر استادی با هر گرایشی به خود جرأتِ تدریس این درس را می‌دهد. همچنین کتابهای فراوانی با این موضوع نوشته شده است که کتاب معروف لین و لین اولین گزینه برای هر مدرسی است. زمان دانشجویی ما نیز همان را درس می‌دادند. با این حال، از نظر نگارنده، تدریس و تألیف مبانی ریاضی، اگر بدون دریافتن و شناساندن ظرافتهای منطقی و تاریخی باشد، تنها به یک چیز ختم خواهد شد: نیمی از ترم تعریفهای تکراری دبیرستانی و نیمی دیگر سردرگمی میان قضایای پیچیده! [1] کتاب لین و لین، با این که کتاب بسیار خوب و دقیقی است، ابهام‌برانگیز است. رویکرد این کتاب نسبت به ضرورت منطق، چندان روشن نیست. مانند بسیاری کتابهای دیگر ریاضی، در این کتاب نیز، در بخش اول، نگاهی گذرا به منطق و تلاشی کوتاه برای اثبات ضرورت آن شده است، و سپس در فصلهای دیگر،منطق کنار گذاشته شده است و روش معمول ریاضی بر کتاب حاکم شده است. [2] بهتر است بگویم که رویکرد اصلی من در تألیف این جزوه، تلاش برای رفع ابهامهائی بوده است که خود، در اوان دانشجوئی در این درس داشته‌ام. می‌دانم که این ابهامها برای بسیاری از دانشجویان پیش می‌آید، و شاید رفع آنها دقیقاًنیازمند آشنائی با رشته‌ی منطق و مبانی ریاضی است.

شاید قوت این کتاب نسبت به کتابهای مشابه، زبان ساده و درگیر شدن مستقیم آن با منطق ریاضی است. در این کتاب، بر خلاف سایر کتابهای مبانی ریاضی،منطق تنها به صورت گذرا در فصول اول بیان نشده است، بلکه حضورش در سراسر کتاب ساری است. علاوه بر تلاش برای حفظ دقت ریاضی، کوشیده‌ام تا این کتاب، معلم‌وار دانشجویان را با نحوه‌ی درست نوشتن متون ریاضی نیز آشنا کند. پس باید تأکید کنم که لحن من در نگارش این کتاب، بیشتر معلمانه است تا محققانه. احساسم این است که این لحن، برای یک کتاب ترم اول کارشناسی، سودمندتر است. آوردن اشعار در ابتدای هر فصل نیز تأئیدی بر این است.

تمام محتویات این کتاب را خودم در یک ترم تدریس می‌کنم و به نظرم این کار، امکان‌پذیر است. حتی در نگارش اولیه، شماره‌ی جلسه‌های درس نیز مشخص شده بود.

زحمت تایپ اولیه این جزوه و بسیاری از جزوات دیگرم را همسرم، «دُرسا پیری» کشیده است. صمیمانه قدردان و سپاسگزارِ ایشان هستم. بدون ایشان کیفیت کار تدریسم افت قابل توجهی می‌کرد. این جزوه مدتها به صورت

[1] در خوابگاه دوران دانشجوئی، یک دانشجوی مکانیک چشمش به ما افتاد که داریم اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها را یاد می‌گیریم. پوزخندی زد که ما این ها را در دبیرستان خوانده‌ایم. آن زمان من نتوانستم فرض میان مبانی ریاضی و ریاضی دبیرستان را به او بگویم. ولی فکر کنم خواننده‌ی این کتاب، به راحتی جواب این سوال را پیدا کند.

[2] لازم به ذکر است که کتاب ارزشمند «مبانی و مقدمات ریاضی» نوشته‌ی استاد بزرگوارم، آقای دکتر ناصر بروجردیان، از بهترین کتابهای موجود است و بنده احتمالاً خواسته یا ناخواسته از مثالهای این کتاب استفاده کرده‌ام.

برخط موجود بوده است و متوجه شده‌ام که مورد توجه خوانندگان واقع شده است. به پیشنهاد برخی همکاران [۳] بر آن شدم تا آن را به کتابی کامل تبدیل کنم. ان‌شاءالله این امر در آینده، محقق خواهد شد.

در طی تجربه‌ی کوتاه معلمیم، دریافته‌ام که اوضاع دانشجویان ما از لحاظ فهم منطق بسیار وخیم است. دانشجویانی که در محاسبات از اساتید بسیار سریع‌تر و چابکتر هستند، در فهم مفاهیم ساده‌ی منطقی به چالش می‌افتند. علت این امر، بی‌شک سیستم آموزش دبیرستانی است که دانش‌آموزان را مدام تشویق می‌کند که فرصتی که را باید صرف فهمیدن کنند، صرف تست زدن بکنند. مبانی ریاضی، از آن جاهائی است که این توانائی‌های تست‌زنی به هیچ کار نمی‌آید. از دانشجویانم صمیمانه خواهش می‌کنم که در این درس، به جای آنکه نگران کسب نمره و پیش افتادن از هم‌قطاران باشند، فرصت را برای محکم کردن شالوده‌ی ذهن ریاضی در این درس مغتنم شمرند.

و در نهایت، حاصل جوشش معلمانه‌ام در تألیف این سطور را، با افسوس، به پیشگاه پدر مرحومم، علی‌اصغر خانی تقدیم می‌کنم که سالهای عمر او نیز به معلمی سپری شد.

سالها بر تو بگذرد که گذار
نکنی سوی تربت پدرت
تو به جای پدر چه کردی خیر
تا همان چشم داری از پسرت
سعدی

[۳] بخصوص آقای دکتر اسدالهی

فهرست مطالب

پیشگفتار

حسن روی تو به یک جلوه که در آینه کرد
این همه نقش در آیینه‌ی اوهام افتاد
حافظ

پیش از آن که درباره‌ی مبانی ریاضی، به عنوان شاخه‌ای از علم بشری سخن بگویم، بهتر است نخست به تعریفی از علم (دانش، ساینس) و بیان تفاوت آن با دانائی (آگاهی، نالج) بپردازم.

دانائی، کیفیتی است که در انسان، با استفاده از کسب تجارب یا مطالعه حاصل می‌شود. یک استاد دانشگاه، می‌تواند به سبب مطالعات زیادی که دارد، دانا باشد؛ در عین حال یک کشاورز که در مزرعه کار می‌کند نیز می‌تواند به سبب تجاربی که در زندگی کسب کرده است فرد دانائی باشد. عموماً کسی از دانائی‌های کس دیگر با خبر نیست، مگر این که این دانائی از رفتار یا «سخنان» او قابل برداشت باشد. نمونه‌ی افراد چنین دانا و خوش‌سخن را شاید همه‌ی ما در اطرافیان خود دیده باشیم. [۴]

مشکل دانائی گاهی این است که شاید نتوان آن را به کسان دیگر منتقل کرد. مثلاً ممکن است فرزند کشاورز مثال بالا، از دانائی هیچ بهره‌ای نبرد؛ شاید به این دلیل که پدر توانائی تدریس دانائی خود یا روش کسب آن را به فرزندِ خود نداشته است. شاید هم، مانند مثالی که در بند بعدی آمده است، اصولاً انتقال آن دانائی کار دشواری بوده باشد.

یک مثال از دانائی، «معرفت» است. در این جا شخص نه تنها از طریق تجربه و مطالعه، بلکه شاید به طریق الهام کسب دانائی کرده است. ولی باز هم همان مشکل قبلی برقرار است که شاید عارف نتواند دانائی خود را به دیگران منتقل کند. عموماً از سخن عارفان این ادعا برداشت می‌شود که آنها چیزهائی را می‌دانند و می‌بینند که دیگران نمی‌دانند و نمی‌بینند؛ و بدتر از آن، شاید هیچگاه بدان مقامات نرسند که درک کنند!

هر کسی از ظن خود شد یار من
وز درون من نُجست اسرار من

از بیت مشهور بالا از مولوی، چنین برداشت می‌شود که: «من چیزهائی می‌دانم که دیگران حتی اگر سعی کنند، به ظن خودشان فهمیده‌اند».

این گفته، دقیقاً تفاوت میان تعریف دانش و دانائی را نمایان می‌کند. دانش به دانائی‌ای گفته می‌شود که با سخن گفتن و نوشتن در یک زبان مشترک و دارای قاعده‌های مشخص (یعنی منطق) قابل انتقال به دیگران باشد. در دنیای علم هیچگاه نمی‌توان گفت «من چیزهائی می‌دانم که دیگران هرگز نخواهند فهمید». آن چیزها اگر هم وجود داشته باشند، علم محسوب نمی‌شوند. در واقع آن چیزها دقیقاً زمانی علم به حساب می‌آیند که از طریق منطق به نگارش و سخن درآیند و دیگران نیز با خواندنشان به دانائی برسند و در صورت امکان بر آنها بیفزایند. بدین صورت، یک دانائی، نخست به صورت علم درمی‌آید، سپس تبدیل به یک دانائی عمومی می‌شود و دوباره همان به علم تبدیل می‌شود و

[۴] دوستی تعریف می‌کرد که با یک مرد روستائی آشنا شده است که سخنانی بس حکیمانه می‌گفته است. وقتی از او درباره‌ی منبع اطلاعاتش پرسیده است، چنین پاسخ شنیده است که راستش، من از آنجا که سواد ندارم، مجبورم زیاد فکر کنم!

این روند ادامه می‌یابد.

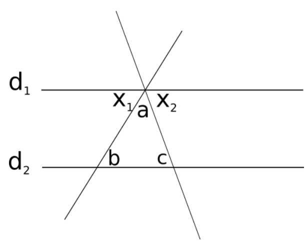
پس گفتیم که علم به نوعی، همان دانائی به‌صورت‌نوشتاریاگفتاروقابل‌انتقال‌درآمده است. نیز گفتیم که برای انتقال دانائی، یعنی تبدیل آن به علم، نیازمند زبانی مشترک هستیم. زبانی که هر کس که بر آن تسلط یابد، بتواند سخنان و نوشته‌های ما را درک کند. درواقع یک زبانِ علمی چیزی فراتر از یک زبان، مثلاًزبان فارسی یا انگلیسی است. مهم این است که قواعدی مشترک برای استدلال کردن و فهماندن و تضارب آرا وجود داشته باشد. در واقع، زبان علم، یک **زبان منطقی** است. [5]

بخش عمده‌ای از علوم جدید بشری در زبان ریاضیات بیان می‌شود. زبان ریاضیات ترکیبی است از زبانهای سخن گفتن، مانند فارسی و انگلیسی، و قواعد استدلالی ریاضی، یعنی منطق ریاضی. بدینسان، تحصیل ریاضی بدون فراگرافتن زبان آن و پذیرفتن و به کارگیری نحوه‌ی استدلال در آن زبان امکان پذیر نیست. تنها زمانی دانشجویان من می‌توانند آنچه من تدریس می‌کنم را بپذیرند که اولا زبان فارسی را بدانند و ثانیاً استدلالها و حتی اصول موضوعه‌ی مرا قبول داشته باشند.

از این جا به بعد برای ورود به بحث «علم مبانی ریاضی» آماده‌ایم: پشت هر قضیه‌ای که در ریاضیات اثبات می‌شود، استدلالهائی قرار دارد که ریاضی‌دانان آن استدلالها را قبول دارند. با این حال، بسیاری از این استدلالها، به گونه‌ای هستند که درستی یک قضیه‌ی ریاضی را به درستی یک قضیه‌ی دیگر مربوط می‌کنند. به همین ترتیب آن قضیه، نیز با استدلال درست از قضایای قبلی نتیجه شده است. ادامه دادن این مسیر، ما را به «قضیه‌ای» می‌رساند که اثباتی برای آن وجود ندارد و آن قدر طبیعی و بدیهی به نظر می‌رسد که انتظار داریم همه آن را قبول داشته باشند. آن قضایای اولیه را اصول موضوعه می‌نامیم. اصول موضوعه، آنقدر بدیهیند که خودشان اثباتی برای خودشان هستند!

بیایید پیش از ادامه دادن بحث، یک قضیه‌ی ریاضی را با هم ثابت کنیم:

قضیه ۱. مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه است (یعنی برابر با زاویه‌ای است که یک خط راست می‌سازد).



اثبات. از آنجا که خطوط d_1 و d_2 موازی‌اند، داریم:

$$x_2 = c \quad , \quad x_1 = b \quad (*)$$

می‌دانیم که هر خطی یک زاویه‌ی ۱۸۰ درجه می‌سازد. بنابراین داریم:

$$x_1 + a + x_2 = 180^o \quad (**)$$

با **جایگذاری** اطلاعاتِ $(*)$ در $(**)$ نتیجه می‌گیریم که

$$a + b + c = 180^o.$$

□

[5] کلمه‌ی منطق از «نطق» یعنی سخن می‌آید، و کلمه‌ی یونانیِ «Logos» که Logic از آن گرفته شده است، نیز به همین معناست.

همان طور که می‌بینید در اثبات این قضیه از مواد زیر استفاده شده است.

۱. زبان (زبان فارسی و حروف ریاضی).

۲. آشنایی با نحوه‌ی صحیح استدلال کردن (مثلاً مجوز جایگذاری مقادیر را از این جا داشتیم).

۳. آشنایی با برخی قضیه‌هایی که قبلا ثابت شده‌اند (دانسته‌های قبلی)

دقت کنید که این که اگر دو خط d_1 و d_2 موازی باشند آنگاه زوایای x_1 و b برابرند، معادل با یکی از **اصول‌موضوعه‌ی** هندسه‌ی اقلیدسی است. ما از این دانسته در اثبات بالا استفاده کردیم. همچنین از این دانسته استفاده کردیم که یک خط، زاویه‌ی ۱۸۰ درجه می‌سازد. در بخشی از اثبات نیز از (*) و (**) کمک گرفتیم. یعنی گفتیم که می‌شود یکی از آنها را در دیگری جایگذاری کرد. این یک قانون استدلال کردن است.

قضیه‌ی بالا، یک قضیه در هندسه‌ی اقلیدسی است. نیک می‌دانیم که این هندسه دارای پنج مشخص است، که هر قضیه‌ای به نحوی با تعداد متناهی استدلال، از آنها نتیجه می‌شود.

در اوایل قرن بیستم، همزمان با پیشرفت شاخه‌های مختلف علم ریاضی، ریاضیدانان به این فکر یافتن پاسخ این سوال افتادند:

«کدام اصول اولیه هستند که تمامی استدلالهای ریاضی به آنها برمی‌گردند».

توجه کنید که شیوه‌های استدلال کردن در ریاضی، شیوه‌های محدود و مشخصی هستند. این شیوه‌ها را می‌توان به یک رایانه نیز از طریق برنامه‌نویسی منتقل کرد. پس اگر اصول موضوعه‌ی ریاضی را به همراه شیوه‌های استدلال به یک رایانه بدهیم، آن رایانه باید بتواند به جای ریاضیدانان فکر کند و تمامی قضایای ریاضی را تولید و اثبات کند. در واقع علم ریاضی می‌شود هر آنچه از این ماشین خارج شود.

آنچه در بند بالا گفتم، در واقع موضوع یکی از سوالات هیلبرت،ریاضیدان برجسته‌ی آن زمان بود: آیا ممکن است تعدادی از اصول برای ریاضی نوشت که این اصول توسط یک الگوریتم رایانه‌ای تولید شوند و همه‌ی قضایای ریاضیات از این اصول نتیجه شود؟

پاسخ بخشی از این سوال، آری و بخشی دیگر خیر است. در واقع، اصول اولیه‌ی علم ریاضیات، مانند هندسه‌ی اقلیدسی، امروز شناخته شده و مشخص است. حتی سیستمهای گوناگونی به عنوان اصول اولیه‌ی ریاضیات پذیرفته شده هستند. یکی از مهمترین اهداف درس مبانی ریاضی، شناساندن یکی از این سیستمهاست.

اما قسمت دوم این سوال، که آیا هر قضیه‌ی ریاضی لزوماً از این اصول نتیجه می‌شود، موضوع یکی از قضایای مهم در علم منطق است. پاسخ این سوال منفی است؛ با این حال پرداختن به آن، در درس مبانی ریاضی نمی‌گنجد. [۶]

نگران نباشید! در درس مبانی ریاضی به همه‌ی دشواریهای سوال بالا نخواهیم پرداخت. در این درس در واقع، به امور زیر خواهیم پرداخت:

[۶] بنا به قضیه‌ای از گودل، اگر یک سیستم از اصول موضوعه را که توسط یک الگوریتم تولید شود در نظر بگیریم، به طوری که مطمئن شویم که جملات این سیستم با هم در تناقض نیستند، آنگاه قضیه‌ای پیدا می‌شود که با این که می‌دانیم درست است، از این اصول نتیجه نمی‌شود! انتظار ندارم که این قضیه در این مقطع برای دانشجویان قابل درک باشد. برای آشنائی با این قضیه،و دیدن اثبات آن درس منطق ریاضی را اخذ کنید، که اینجانب معمولا در ترمهای زوج ارائه می‌کنم.

۱. یک سیستم اصول‌موضوعه‌ایِ پذیرفته شده برای ریاضیات را ارائه خواهیم کرد.

۲. خواهیم دید که چگونه اکثر دانسته‌های ریاضی ما بر این سیستم استوار هستند و نیز چه بخشی از دانسته‌های ریاضی ما به این سیستم مربوط نمی‌شوند.

۳. روشهای صحیح استدلال کردن را در چهارچوب این سیستم خواهیم آموخت.

۴. خواهیم دید که مفاهیم رازآلودی مانند بی‌نهایت و نامتناهی در کجای این سیستم قرار می‌گیرند. خواهیم دید که برای ریاضیدانان نامتناهی‌ها هم‌اندازه‌ی هم نیستند و نامتناهی‌ها را نیز دسته‌بندی خواهیم کرد.

۵. سرآخر، بررسی می‌کنیم که چه اصولی از سیستم معرفی شده را می‌توان با اصول دیگری جایگزین کرد.

انتظار من از دانشجویان پس از پایان این دوره این است که آنچنان با نحوه‌ی صحیح استدلال کردن و درست نوشتن آشنا شوند که خودْ جملات و استدلالهای درست ریاضی را از جملات اشتباه و استدلالهای سُست تشخیص دهند. انتظار دارم که دانشجویانم روش فکر کردن و روش نوشتن را بیاموزند. هر سوال را به عنوان موضوع یک انشاء بدانند و در پاسخش یک انشاء دقیق و خواندنی، دارای شروع، بسط و انتها بنویسند. این انشاء باید به گونه‌ای باشد که یک متخصص ریاضی، بی دردسر آن را دنبال و درک کند. نیز انتظارم این است که پس از گذراندن این درس با من، سوالهایی مانند سوالهای زیر را از دانشجویانم نشونم:

۱. من که فلان چیز را دقیقاً عین جزوه‌ی شما نوشته‌ایم چرا نمره نگرفته‌ام؟!

۲. آیا می‌شود فلان چیز را با روش فلان استاد حل کنیم؟!

۳. من یک مشت جمله پشت سر هم بدون فعل و فاعل نوشته‌ام، که خودم هم نمی‌توانم بخوانم. آیا اینها درست است؟!

فصل ۱

منطق گزاره‌ها

طبعِ تو را تا هوسِ نحو کرد
صورت صبر از دل ما محو کرد!
سعدی، گلستان

۱.۱ معرفی منطق گزاره‌ها

منطق گزاره‌ها، منطقِ حاکم بر جملات اتمی (یعنی تک‌بخشی) ریاضی و ترکیبات آنها است. منظور از یک جمله‌ی اتمی ریاضی، جمله‌ای است که دارای ارزش درست یا غلط است. امکان ندارد که جمله‌ی ریاضی، گاهی درست باشد و گاهی غلط! همچنین امکان ندارد که نتوان درست یا غلط بودن یک جمله‌ی ریاضی تشخیص داد.

برای مثال، جمله‌ی ۲ یک عدد اول است، یک جمله ریاضی است که دارای ارزش درست است. عدد ۲ همیشه اول است و نمی‌تواند برخی روزها اول باشد و برخی روزها نباشد! با این حال، جمله‌ی «آیا ۲ اول است؟» یک جمله‌ی اتمی ریاضی محسوب نمی‌شود؛ زیرا نمی‌توان به آن ارزش درست یا غلط داد.

صفر و یک بودن ارزش جمله‌های ریاضی، در همان ابتدا تفاوت زبان ریاضی را با زبان روزمره مشخص می‌کند: جمله‌ی حسن راستگو است، تنها در صورتی می‌تواند یک جمله‌ی اتمی ریاضی محسوب شود، که برای حسن تنها دو امکان وجود داشته باشد: یا راستگو باشد یا دروغگو. این در حالی است که در منطق روزمره، حسن می‌تواند گاهی راست بگوید و گاهی دروغ. به این نکته در ادامه‌ی درس بیشتر خواهیم پرداخت و نیز خواهیم دید که این تفاوت موجب ایجاد برخی پارادوکسهای منطقی شده است که در ادامه‌ی درس بدانها خواهیم پرداخت. فعلاً بیایید تا این جای کار را دقیق کنیم:

تعریف ۲ (گزاره‌های اتمی)**.** جملات خبری دارای ارزش درست یا غلط را گزاره‌های اتمی ریاضی می‌نامیم.

گزاره‌های اتمی را با حروفی مانند p ، q ، h و ... نشان می‌دهیم. در ادامه خواهیم دید که گزارەهای اتمی، مواد اولیه‌ی منطق گزاره‌ها هستند که گزاره‌های پیچیده‌تر از آنها ساخته می‌شوند و دانستن درستی یا غلطی آنها، ارزش سایر گزاره‌ها را معلوم می‌کند.

گفتیم که هر گزاره‌ی اتمی را می‌توان یک **جمله‌ی خبری ساده** پنداشت. پس جملات زیر، گزاره‌ی اتمی هستند:

ـ حسن آدم است.

ـ هوا بارانی است.

ـ تخته‌سیاه، سبز است.

اما جملات زیر گزاره‌ی اتمی به حساب نمی‌آیند:

ـ فردا خانه‌ی حسن می‌آیی؟

به‌به! چه هوای خوبی!

گفتم که از جملات اتمی برای ساختن جملات پیچیده‌تر استفاده می‌شود. برای مثال، جمله‌ی حسن آدم است و ۳ عدد اول است، از عطف دو جمله‌ی اتمی ایجاد شده است. رابطهای موجود برای ساختن جملات پیچیده‌تر در منطق گزاره‌ها به صورت زیر هستند:

- «و» یا علامت عطف که آن را با $\wedge$ نشان می‌دهیم.
- «یا» یا علامت فصل که آن را با $\vee$ نشان می‌دهیم.
- علامت «آنگاه» که آن را با $\rightarrow$ نشان می‌دهیم.
- علامت «اگروتنهااگر» که آن را با $\leftrightarrow$ نشان می‌دهیم.
- علامت «نقیض» که آن را با $\neg$ نشان می‌دهیم.
- علامت تناقض که آن را با $\perp$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳. نمادهای معرفی شده در بالا را ادوات منطقی منطق گزاره‌ها می‌نامیم.

با استفاده از علائم یاد شده می‌توان جملات پیچیده‌تری در منطق گزاره‌ها نوشت. برای مثال اگر p_i ها در زیر جملات اتمی باشند، جمله‌ی زیر یک جمله (یا یک گزاره) در منطق گزاره‌هاست.

$$(p_۱ \wedge p_۲) \vee (\neg p_۳ \longrightarrow p_۴) \vee (\neg(\neg p_۵) \longrightarrow p_۲ \wedge p_۳)$$

پس یک گزاره در منطق گزاره‌ها، در واقع یک دنباله‌ی متناهی متشکل از جملات اتمی و ادوات منطقی گزاره‌هاست. با این حال باید این تعریف را دقیق‌تر بیان کنیم، به طوری که خواننده دریابد که چرا مثلاً $\neg p$ یک گزاره‌ی منطقی است ولی $\neg \rightarrow p$ یک گزاره‌ی منطقی نیست!

تعریف ۴ (تعریف استقرائی گزاره‌های منطق گزاره‌ها)**.** یک گزاره‌ی P در منطق گزارها تنها از طُرق زیر به دست می‌آید:

۱. یا P یک گزاره‌ی اتمی است یا $P = \perp$.

۲. یا P به صورت $(\neg Q)$ است به طوری که قبلا دانسته (یا ثابت) شده است که Q یک گزاره‌ی منطقی است.

۳. یا P به صورتِ $(Q \wedge R)$ یا $(Q \vee R)$ یا $(Q \to R)$ یا $Q \leftrightarrow R$ است، به طوری که از قبل دانسته (یا ثابت) شده است که Q و R گزاره‌هائی در منطق گزاره‌ها هستند.

تعریف بالا به طور دقیق مشخص می‌کند که چه چیزهائی نمی‌توانند گزاره محسوب شوند. دقت کنید که در تعریف بالا به طور ضمنی نهفته است که جملات منطق گزاره‌ها باید «دنباله‌های متناهی» باشند.

تمرین ۱. کدامیک از عبارتهای زیر گزاره‌ای در منطق گزاره‌هاست و کدام این گونه نیست:

۱. $\neg((p \to \neg q) \to r)$.

۲. $(((p \wedge q) \vee r) \to s)$.

۳. $p \clubsuit q$.

توجه ۵. در منطق گزاره‌ها، جملات نمی‌توانند درباره‌ی یک متغیر آزاد باشند که قابل جایگزینی با موجودی است. مثلاً جمله‌ی x یک عدد اول است، در منطق گزاره‌ها نوشته نشده است؛ در حالی که جمله‌ی ۲ یک عدد اول است در منطق گزاره‌هاست. همچنین علامت‌های $\forall$ و $\exists$ در نحو منطق گزاره‌ها نداریم. پس جمله‌ی یک عددِ x وجود دارد که اول است، در منطق گزاره‌ها نوشته نشده است.

هنوز «منطق گزاره‌ها» را تعریف نکرده‌ایم. آنچه تا به این جا شرح دادیم، نحوِ منطق گزاره‌هاست. یعنی تا این جا تنها گفتیم که حروف و جملات و دستور زبان منطق گزاره‌ها چه هستند. دقت کنید که در معرفی یک منطق، تنها دانستن دستور زبان کافی نیست. بلکه علاوه بر آن باید روشی برای تشخیص معانی جملات و تمییز جملات درست و غلط در آن وجود داشته باشد. به این بخش از یک منطق، صرف آن منطق یا معناشناسی آن گفته می‌شود. در بخش بعدی به معناشناسی منطق گزاره‌ها پرداخته‌ایم.

۲.۱ معنا شناسی منطق گزاره‌ها

گفتیم که منطق، علاوه قواعد دستوری برای جمله‌نویسی، نیازمند قوانین معنابخشی نیز هست. این امر برای منطق حاکم بر زبان روزمره نیز حاکم است. برای مثال، جمله‌ی پنجره، ماست موسیر است، از لحاظ دستورزبان درست است ولی از لحاظ معنائی، ارزشی ندارد.

در منطق گزاره‌ها، معناشناسیِ هر جمله‌ای با بخشیدن ارزش درست (T) یا دارای ارزش غلط (F) بدان صورت می‌گیرد. معمولاً در این منطق برای گزاره‌ها **جدول ارزش** کشیده می‌شود. گفتیم که برای یک گزاره‌ی اتمیِ p می‌توان دو ارزش تصور کرد:

p	
T	
F	

معناشناسی منطق گزاره‌ها یعنی بیان قوانینی که طبق آنها می‌توان ارزش یک گزاره‌ی دلخواه را تعیین کرد. این قوانین را در تعاریف پیش‌رو آورده‌ایم.

تعریف ۶. فرض کنید p و q دو گزاره (نه لزوماً اتمی) در منطق گزاره‌ها باشند. عطف p و q که آن را به صورت $p \wedge q$ نشان می‌دهیم؛ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

p	q	q ∧ p
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

پس دقت کنید که $p \wedge q$ تنها زمانی دارای ارزشِ T است که همزمان p و q دارای ارزشِ T باشند. به نظر می‌آید که این قانون با زبان روزمره هم سازگاری دارد.

تعریف ۷. فصل دو گزاره‌ی p و q که آن را به صورت $p \vee q$ نشان می‌دهیم؛ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

p	q	q ∨ p
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

توجه ۸. دقت کنید که علامت «یا» در بالا، یای مانع جمع **نیست** و از این رو، با «یا» ای که در زبان محاوره‌ای استفاده می‌شود فرق می‌کند. یای محاوره‌ای معمولاً مانع جمع است و اگر بخواهیم از قانون بالا برای آن استفاده کنیم، معنی جملات مهمی مثل جمله‌ی زیر دگرگون می‌شود:
از این به بعد در این خانه یا جای من است یا جای تو!
معلوم است که یای بالا، به شدت مانع جمع است!
در واقع در زبان محاوره‌ای، در صورت نیاز باید مانع جمع بودن تأکید شود:
این کار، یا کار حسن بوده است، یا کار حسین، یا شاید هم کار هر دوی آنها.

در عین حال، اگر در ریاضی بخواهیم مانع جمع شویم گزاره‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

سوال ۱ (سوال دانشجویان). معنی کلمه‌ی **جمع** در **یای مانع جمع** چیست؟

جمعِ دو چیز در فارسی یعنی داشتن هر دوی آنها با همدیگر. بیت زیر از حافظ را مثال می‌زنم:
عشق و شباب و رندی، مجموعه‌ی مراد است
چون جمع شد معانی، گوی بیان توان زد.

توجه ۹. دقت کنید که در جدول ارزشِ $p \vee q$ تنها در یک سطر ارزش غلط داریم؛ آن هم جائی است که هر دوی p و q غلط باشند.

تعریف ۱۰. اگر p و q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، گزاره‌ی $p \to q$ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود.

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

توجه کنید که در سطر سوم و چهارم جدول ارزش بالا، می‌گوئیم که گزاره‌ی موردنظر به **انتفاء مقدم** درست است. در این حالت به محضِ دیدن فرض، تلاش برای یافتن درستی گزاره منتفی است! (یعنی گزاره درست است). البته، بر خلاف تصور، این را در زبان روزمره را هم تا حدودی می‌توان دید. برای مثالی از سطر چهارم جدول بالا، فرض کنید که کسی بگوید که «اگر سنگ سخن بگوید، اسب شتر است». این گزاره، با این که بی‌معنی به نظر می‌رسد، درست است! در واقع ما هیچگاه نیاز به تحقیق این نداریم که اسب شتر است، چون می‌دانیم که سنگ سخن نمی‌گوید! شاید در دنیائی که در آن سنگ سخن می‌گوید، اسب شتر باشد.

توجه ۱۱. یکی از پدیده‌هائی که در حین تدریس توجهم بدان جلب شده است این است که دانشجویان معمولاً در بررسی ارزشِ $p \to q$ فقط به q توجه می‌کنند. مثلاً وقتی می‌گوییم «اگر سنگ سخن بگوید اسب شتر است» بلافاصله می‌گویند این جمله غلط است زیرا اسب شتر نیست. بله؛ اسب شتر نیست، ولی اگر سنگ سخن بگوید شاید اسب هم شتر شود! [۱]

توجه ۱۲. گزاره‌ی $p \to q$ به صورتهای زیر نیز خوانده می‌شود:
اگر p آنگاه q
تنها اگر q آنگاه p
p شرط کافی برای q است

[۱] شاید اینها را هم شنیده باشید که از فرض مُحال همه چیز نتیجه می‌شود؛ و فرض محال، محال نیست!

q شرط لازم برای p است.

بعداً درباره‌ی جملات بالا مفصل‌تر سخن خواهم گفت.

تعریف ۱۳. اگر p و q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، گزاره‌ی $p \leftrightarrow q$ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود.

p	q	p ↔ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

دقت کنید که ارزشِ $p \leftrightarrow q$ تنها زمانهائی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.

تعریف ۱۴. اگر p یک گزاره باشد $\neg p$ نیز یک گزاره است و به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

p	¬p
T	F
F	T

پس ارزش گزاره‌ی $\neg p$ دقیقاً برعکس ارزش گزاره‌ی p است.

تعریف ۱۵. گزاره‌ی $\perp$ همواره دارای ارزش غلط است و گزاره‌ی $\top$ همواره دارای ارزش درست است.

دقت کنید که در تعاریف بالا، نحوه‌ی ارزشگذاری گزاره‌هائی را شرح دادیم که با استفاده از ادوات منطقی ساخته می‌شوند. همین تعاریف برای ارزش‌دهی به همه‌ی گزاره‌ها کافی هستند.

مثال ۱۶. جدول ارزش گزاره‌ی $\neg p \vee q$ را رسم کنید.

پاسخ.

p	q	¬p ∨ q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

□

تمرین ۲. جدول ارزش گزاره‌های زیر را رسم کنید:

- $(p \to q) \to \neg(q \to p)$.
- $(p \to q) \to q$.
- $(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$.

• $\neg(p \to q)$.

تمرین ۳. جدول زیر را کامل کنید.

p	q	؟
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

توجه ۱۷. برای تمرین بالا یک روش کلی وجود دارد که آن را در مثالی توضیح می‌دهیم. فرض کنید به دنبال گزاره‌ای هستید که دارای جدول ارزش زیر است:

p	q	r	؟
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	F	T
F	F	T	F

نخست به سطرهائی از جدول توجه کنید که قرار است ارزش گزاره‌ی مورد نظر در آنها T باشد؛ در اینجا سطرهای اول و چهارم و پنجم و هفتم و توجه کنید که قرار است فصل اینها گرفته شود. حال در این سطرها بسته به درست و غلط بودن گزاره‌های اتمی خود یا نقیضشان را قرار دهید و عطف بگیرید.

بنا بر آنچه گفته شد، گزاره‌ی مد نظر جدول بالا به صورت زیر است:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

تمرین ۴. ثابت کنید که روشی که در توجه بالا گفته شد، درست است.

۳.۱ ادامه‌ی معناشناسی در منطق گزاره‌ها: گزاره‌های معادل

صرفِ یک منطق، تنها به بررسی درستی و غلطی جملات نمی‌پردازد. به دو جدول ارزش در مثالِ ۲.۱ و تعریفِ ۱۰ توجه کنید. ستون آخر جداول ارزش دو گزاره‌ی $p \to q$ و $\neg p \vee q$ یکسانند، با این که از لحاظ نحوی، دو گزاره‌ی نام برده شده با هم متفاوت هستند. در زبان روزمره هم این امر دور از تصور نیست؛ فرض کنیم یکی بگوید که اگر

باران باریده باشد، زمین خیس می‌شود؛ این حرف هممعنیِ این سخن است که یا باران نیامده است یا زمین خیس است! پدیده‌ی هممعنائی دو گزاره باید در صرف منطق گزاره‌ها بررسی شود. این جاست که پای فرامنطق نیز به منطق بازتر می‌شود.

می‌گوییم که دو گزاره‌ی $p \to q$ و $\neg p \vee q$ با هم **معادلند** یا با هم هم‌ارزند و می‌نویسیم:

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

تعریف ۱۸. می‌گوئیم دو گزاره‌ی P و Q در منطق گزارها هم‌ارز یا معادلند، هرگاه وقتی جدول ارزش آندو بر حسب گزاره‌ای اتمی به کار رفته در آنها کشیده شود، ستون آخر یکسان شود. در صورتی که این پدیده رخ بدهد می‌نویسیم:

$$P \Leftrightarrow Q.$$

احتمالاً دانشجوی هوشیار به خود بگوید که نمادِ $\Leftrightarrow$ را قبلاً معرفی نکرده بودیم. آیا گزاره‌ی $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره در منطق گزاره‌هاست؟ اگر چنین سوالی برایتان پیش آمده است در مسیر درستی قرار دارید.

رفع ابهام ۱۹. عبارت زیر یک **گزاره** در **منطق گزاره‌ها نیست**.

$$(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

اگر خاطرتان باشید، هنگام معرفی نمادهای منطقی هیچگاه نگفتیم که در منطق گزاره‌ها، نماد $\Leftrightarrow$ هم داریم. علامت $\Leftrightarrow$ جزو نمادهای منطقی نیست. بنابراین عبارت $(p \to q) \equiv \neg p \vee q$ یک گزاره نیست. در منطق گزاره‌ها چیزی گزاره حساب می‌شود که با نمادهای منطقی (ای که قبلا درباره‌شان صحبت کردیم) ساخته شده باشد.

در واقع علامت $\Leftrightarrow$ یک نماد «فرامنطقی» است که در زبان نوشتاری میان من و شما استفاده شده است. دقت کنید که وقتی من و شما درباره‌ی منطق گزاره‌ها صحبت می‌کنیم، میان من و شما نیز یک منطق گفتگو برقرار است. در این منطق گفتگو، که یک فرامنطق گزاره‌ها محسوب می‌شود، من به شما گفته‌ام که هرگاه می‌نویسم

$$P \Leftrightarrow Q$$

شما بدانید که منظور من این است که جداول ارزش دو گزاره‌ی P و Q با هم یکسان هستند. بر منطق گفتگوی میان من و شما نیز قوانینی حاکم است که بعداً درباره‌ی آنها نیز صحبت خواهم کرد.

پس عبارت زیر، یک جمله در زبان گفتگوی میان من و شماست که داریم از بالا به منطق گزاره‌ها نگاه می‌کنیم.

$$(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

معنی آن هم این است که «ستون آخر جدول ارزش گزاره‌ی سمت راست و چپ با هم یکسان است». چنین چیزی را توسط یک گزاره در خودِ منطق گزاره‌ها نمی‌توان نوشت و ما به عنوان موجوداتی که فرای آن منطق هستیم می‌توانیم درباره‌اش صحبت کنیم.

من و شما حق داریم نمادهای دیگری را نیز بین خودمان قرارداد کنیم که کوتاه‌نوشت برای جملات طولانی باشند.

تمرین ۵. نشان دهید که

۱. $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$

(باید برای هر دو گزاره‌ی چپ و راست جدول بکشید و تحقیق کنید که ستون آخر هر دو جدول یکی است. برای کشیدن جدول، مثلاً برای گزاره‌ی سمت راست، باید اول تمام اجزایش برایتان مشخص شود (جدول زیر را پر کنید))

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$

برای گزاره‌ی سمت چپ نیز به طور مشابه جدول بکشید.

۲. $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

تمرین ۶. آیا $p \to q \Leftrightarrow \neg p \to \neg q$؟

راهنمایی. هم با جدول و هم با آوردن مثال نشان دهید که عبارت بالا درست نیست. □

مثال ۲۰. در رابطه با تمرین ۶ بد نیست کمی درباره‌ی گزاره‌ی $p \to q$ صحبت کنیم. توجه کنید که عبارتهای زیر با هم هم‌معنی‌اند:

- $p \to q$
- p شرط کافی برای q است. (اگر p آنگاه q)
- q شرط لازم برای p است. (تنها اگرنه q آنگاه نه p).

فرض کنید پدر علی (که حرفهایش همیشه درست است!) به علی گفته است که «اگر درس بخوانی موفق می‌شوی». از حرف پدر علی چه چیزی می‌توان استنباط کرد؟ بیایید این جمله را فرمولبندی ریاضی کنیم:

p : علی درس بخواند

q : علی موفق شود

پس سخن پدر علی، گزاره‌ی زیر است:

$p \to q$

به بیان دیگر، «به نظرِ پدر علی» درس خواندن شرط کافی برای موفق شدن است.

به نظر می‌آید که پدر علی در مورد عواقب درس نخواندن چیزی ادعا نکرده است؛ در واقع نگفته است که «اگر درس نخوانی موفق نمی‌شوی» یا «**تنها اگر** درس بخوانی موفق می‌شوی». پس گزاره‌ی زیر از سخن پدر علی نتیجه نمی‌شود:

$$\neg p \to \neg q.$$

به بیان دیگر، او نگفته است که **درس خواندن شرط لازم برای موفق شدن است** (به نظر او، از راههای دیگر هم می‌شود موفق شد!).
اما از طرفی دیگر، بنا به جمله‌ی پدر علی، اگر علی موفق نشود، می‌فهمیم که درس نخوانده بوده است. چون اگر درس می‌خواند، موفق شده بود. پس گزاره‌ی زیر از سخن پدر علی نتیجه می‌شود:

$$\neg q \to \neg p.$$

حال فرض کنیم که علی موفق شده است. از این لزوماً نتیجه نمی‌شود که علی درس خوانده است. پدر علی فقط گفته بود که اگر درس بخواند موفق می‌شود، ولی نگفته بود که تنها راه برای موفق شدن درس خواندن است. در واقع او نگفته بود که «موفق می‌شوی اگر و تنها اگر درس بخوانی». پس جمله‌ی زیر نیز از سخن پدر علی نتیجه نمی‌شود:

$$q \to p.$$

مثال ۲۱. شرط لازم برای ورود به دانشگاه شرکت در کنکور است.
q: علی به دانشگاه وارد شده است.
p: علی کنکور داده است.
جمله‌ی شرط لازم برای ورود به دانشگاه، کنکوردادن است، در مورد علی به صورت زیر درمی‌آید:

$$q \to p$$

معادلاً به صورت زیر:

$$\neg p \to \neg q$$

وقتی می‌گوئیم شرط لازم برای ورود به دانشگاه، کنکور دادن است، یعنی اگر کنکور ندهیم، به دانشگاه وارد نمی‌شویم.
این جمله را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:
تنهااگر کنکور دهیم وارد دانشگاه می‌شویم.

تمرین ۷. نشان دهید که

$$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p.$$

سوال ۲. آیا

$$\neg p \leftrightarrow q \Leftrightarrow p \leftrightarrow \neg q?$$

گفتیم که $p \Leftrightarrow q$ یعنی جدول ارزش دو گزاره‌ی p و q به ستون یکسانی ختم می‌شود.

تمرین ۸. نشان دهید که

$$p \Leftrightarrow q$$

اگروتنهااگر ستون آخر در جدول ارزش گزاره‌ی $p \leftrightarrow q$ تنها از علامت T تشکیل شده باشد.

دقت کنید که اگر و تنها اگرِ تمرین بالا، کاملاً در زبان گفتگوی من و شما نوشته شده است. تمرین بالا می‌گوید که جمله‌ی $p \Leftrightarrow q$ یک جمله در زبان فارسی است که می‌گوید که اگر جدول ارزش گزاره‌ی $p \leftrightarrow q$ را بکشیم، در ستون آخر آن فقط علامت T می‌بینیم. در تعریف زیر از تمرین بالا ایده گرفته‌ایم.

تعریف ۲۲.

۱. گزاره‌ی p را یک **تاتولوژی** می‌خوانیم، هرگاه همواره (یعنی تحت هر نوع ارزشی که اجزاء آن داشته باشند) درست باشد؛ به بیان دیگر هرگاه در ستون آخر جدول ارزش آن فقط علامت T ظاهر شود. [۲]

۲. می‌گوییم گزاره‌ی p **مستلزم** گزاره‌ی q است، یا $p \to q$ یک **استلزام منطقی** است، هرگاه $p \to q$ تاتولوژی باشد، در اینصورت می‌نویسیم:

$$p \Rightarrow q$$

توجه ۲۳.

- بنا با تعریف بالا، $p \Leftrightarrow q$ اگروتنهااگر $p \leftrightarrow q$ یک تاتولوژی باشد.
- علامت $\Rightarrow$ یک نماد منطقی نیست؛ پس عبارت زیر یک گزاره در منطق گزاره‌ها نیست:

$$p \Rightarrow q.$$

عبارت بالا یک جمله در زبان روزمره است بدین معنی که «گزاره‌ی $p \to q$ یک تاتولوژی است».

مثال ۲۴. گزاره‌ی $p \vee \neg p$ یک تاتولوژی است؛ زیرا جدول ارزش آن به صورت زیر است:

p	¬p	$\neg p \vee p$
T	F	T
F	T	T

آنچه این مثال بیان کرده است را **اصلِ ردِّ شِقِّ ثالث** می‌خوانند. یعنی حالت سومی نیست، یا خود یک گزاره درست است یا نقیض آن.

مثال ۲۵. نشان دهید

$$p \wedge q \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$$

[۲] گزاره‌ی تاتولوژی را یک گزاره‌ی اثبات‌پذیر نیز می‌شود نامید.

پاسخ. می‌خواهیم نشان دهیم که $p \wedge q \to r \leftrightarrow p \to (q \to r)$ یک تاتولوژی است. باید نشان دهیم که دو ستون آخر جدول زیر با هم یکسانند:

p	q	r	$p \wedge q$	$q \to r$	$p \wedge q \to r$	$p \to (q \to r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

تکمیل جدول به عهده‌ی شما. □

تمرین ۹. نشان دهید که

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

$$p \wedge q \Rightarrow q$$

$$p \Rightarrow p \vee q$$

$$q \Rightarrow p \vee q$$

$$(p \to q) \wedge (\neg p \to q) \Rightarrow q.$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p.$$

دانشجوی زیرک دریافته است که اگر در سوالی بگویند نشان دهید که $p \to q$، آن سوال، بی‌معنی است. چرا؟

با آنچه تا کنون فراگرفته‌ایم، معادل بودن دو گزاره‌ی P و Q هم‌معنی تاتولوژی بودن گزاره‌ی $P \leftrightarrow Q$ است. برای تشخیص تاتولوژی بودن یک گزاره، باید جدول ارزش آن را بکشیم و ستون آخر را چک کنیم. کشیدن جدول ارزش برای یک گزاره‌ی دلخواه که از n گزاره‌ی اتمی تشکیل شده است نیازمند ۲^n سطر است و این کار بسیار پر زحمت است. [۳] با این حال نگران نباشید، منطق گزاره‌ها راه حل ساده‌تری برای تشخیص تاتولوژی بودن گزاره‌ها دارد که در بخش بعدی بدان خواهیم پرداخت. روشی که در بخش بعد معرفی خواهد شد، به قضیه‌ی زیر وابسته است. اثبات این قضیه، با استفاده از جداول ارزش را به خواننده واگذار می‌کنم.

[۳] این که آیا اصولا روش سریعتری در منطق گزاره‌ها برای تشخیص تاتولوژی بودن گزاره وجود دارد معادل با یک مسئله‌ی باز معروف ریاضی، با نام مسئله‌ی $p = np$ است. مسئله‌ی $p = np$ به بیان نادقیق، بیانگر این است که هر مسئله‌ای که تشخیص درست بودن راه حل آن آسان باشد، حلش نیز آسان است!

قضیه ۲۶. در منطق گزاره‌ها چنین است که:

۱. $(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$.

۲. $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (ویژگی انجمنیِ فصل).

۳. $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ (ویژگی انجمنیِ عطف).

۴. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (جابه‌جائیِ فصل).

۵. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (جابه‌جائیِ فصل).

۶. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (پخش‌پذیری عطف روی فصل).

۷. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (پخش‌پذیری فصل روی عطف).

۸. $p \vee \perp \Leftrightarrow p$ (خنثائی گزاره‌ی همواره غلط نسبت به فصل).

۹. $(p \wedge \perp) \Leftrightarrow \perp$ (پوچگری گزاره‌ی همواره غلط برای عطف).

۱۰. $p \wedge \top \Leftrightarrow p$ (خنثائی گزاره همواره درست نسبت به عطف).

۱۱. $p \vee \top \Leftrightarrow \top$ (پوچی گزاره‌ی همواره درست نسبت به فصل).

۱۲. $p \vee p \Leftrightarrow p$ (همانی فصل).

۱۳. $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (همانی عطف).

۱۴. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (جذب عطف).

۱۵. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (جذب فصل).

۱۶. $p \wedge \neg p \Leftrightarrow \perp$

۱۷. $p \vee \neg p \Leftrightarrow \top$

۱۸. $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ (قوانین نقیض‌گیری).

۱۹. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

۲۰. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$. (قوانین دِمُرگان).

توجه ۲۷. بیان خلاصه‌ی قضیه‌ی بالا این است که: **گزاره‌های منطق گزاره‌ها به همراه علامتهای منطقیِ** $\wedge, \vee, \neg, \perp$, $\top$ **تشکیل یک جبر بولی می‌دهند.** [۴]

[۴] مورد اول در قضیه به جبر بولی ربطی ندارد. این مورد تنها بیان این است که نمادِ $\to$ از نمادهای $\neg, \vee$ به دست می‌آید.

۴.۱ استنتاج در منطق گزاره‌ها و تعریف قضیه

مهمترین چیزی که به صرف منطق گزاره‌ها مربوط می‌شود، روش بررسی تاتولوژی بودن گزاره‌هاست.

تا به حال کلمه‌ی **قضیه** را زیاد شنیده‌اید. هر قضیه‌ای عموماً بیانگر این است که اگر چنین باشد، آنگاه چنان می‌شود. در واقع، به بیان دقیقتر، یک قضیه بیانگر این است که «فلان گزاره تاتولوژی است»؛ یعنی همواره دارای ارزش ۱ است. پس $p \to q$ یک قضیه نیست ولی $p \Rightarrow q$ یک قضیه است. اثبات یک قضیه نیاز به **استنتاج** دارد.

تعریف ۲۸. به روندی که طی آن تاتولوژی بودن یک گزاره اثبات می‌شود، یک استنتاج گفته می‌شود.

معمولاً در هر منطقی تعداد متناهی قانون برای استنتاج وجود دارد. با این تعداد متناهی قانون می‌شود نامتناهی تاتولوژی را ثابت کرد.

قضیه ۲۹. فرض کنید P و Q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند. آنگاه

$$P \Rightarrow Q$$

اگروتنهااگر تاتولوژی بودنِ گزاره‌ی $P \to Q$ (یا معادل بودن آن با یک تاتولوژیِ مشخص) با متناهی بار استفاده از تاتولوژی‌های معرفی شده در قضیه‌ی ۲۶ (به همراه متناهی بار جایگذاری) حاصل شود.

اثبات قضیه‌ی بالا، تنها در درس منطق دوره‌ی کارشناسی ارائه می‌شود. در درس مبانی ریاضی، تنها استفاده از این قضیه مهم است. بنا به این قضیه، برای اثبات تاتولوژی بودن یک گزاره، کافی است تاتولوژی بودن آن را با استفاده‌ی تاتولوژی‌های مهم موجود در قضیه‌ی ۲۶ اثبات کنیم.

مثال ۳۰. ثابت کنید که $p \Rightarrow p \vee q$.

اثبات. باید نشان دهیم که گزاره‌ی $p \to p \vee q$ یک تاتولوژی است. بنا به قضیه‌ی بالا باید نشان دهیم که گزاره‌ی یادشده با اعمال ترکیبات بولی گزارها به دست می‌آید. داریم

$$\begin{gathered}
p \to (p \vee q) \iff \\
\neg p \vee (p \vee q) \iff \\
(\neg p \vee p) \vee q \iff \\
(p \vee \neg p) \vee q \iff \\
\top \vee q \\
\top
\end{gathered}$$

از آنجا که $\top$ یک تاتولوژی است و گزاره ما با آن معادل است، نتیجه می‌گیریم که گزاره‌ی مورد نظر ما تاتولوژی است. □

تمرین ۱۰. بررسی کنید که در اثبات بالا از کدام قسمتهای قضیه‌ی ۲۶ استفاده شده است.

تمرین ۱۱. عبارتهای زیر را ثابت کنید.

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$$
$$(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \vee r \to q \vee s)$$
$$(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \wedge r \to q \wedge s)$$

چند تاتولوژی مهم دیگر نیز در منطق گزاره‌ها موجودند که آنها را در زیر آورده‌ایم. از این تاتولوژی به طور وسیعی در اثباتهای ریاضی استفاده می‌شود.

یکی از قوانین طبیعی استنتاج، قانون زیر است که بدان «قیاس استثنائی» گفته می‌شود. بنا به قیاس استثنائی، اگر گزاره‌ی $P \to Q$ و گزاره‌ی P هر دو ثابت شده باشند، آنگاه گزاره‌ی Q نیز ثابت شده است.

قضیه ۳۱. ۱. $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$ قیاس استثنائی [۵]

۲. $(p \to \perp) \Rightarrow \neg p$ نفی تالی [۶]

۳. $(p \to q) \iff ((p \wedge \neg q) \to \perp)$ برهان خُلف [۷]

در زیر تنها به اثبات مورد اول اکتفا کرده‌ایم.

اثبات. می‌خواهیم نشان دهیم که گزاره‌ی $(p \to q) \wedge p \to q$ تاتولوژی است. دقت کنید که

$$(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

پس

$$(p \to q) \wedge p \iff (\neg p \vee q) \wedge p \iff p \wedge (\neg p \vee q) \iff$$
$$(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \iff \perp \vee (p \wedge q) \iff p \wedge q$$

بنابراین گزاره‌ی $(p \to q) \wedge p$ معادل با گزاره‌ی $p \wedge q$ است. حال

$$p \wedge q \Rightarrow q$$

پس

$$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q.$$

□

[۵] modus ponens
[۶] modus tollens
[۷] reductio ad absurdum

تمرین ۱۲ (تمرین مهم)**.** نشان دهید که $P \Rightarrow Q$ اگروتنهااگر هر جا که ارزش گزاره‌ی P یک باشد، ارزش گزاره‌ی Q نیز یک باشد.

تمرین ۱۳. نشان دهید که یک طرف جمله‌ی شرطی زیر درست نیست.
گزاره‌ی $P \to Q$ تاتولوژی است اگروتنهااگر از تاتولوژی بودن P تاتولوژی بودنِ Q نتیجه شود. به بیان دیگر بررسی کنید که آیا دو گفته‌ی زیر با هم معادلند:

۱. $P \Rightarrow Q$

۲. اگر P تاتولوژی باشد، آنگاه Q تاتولوژی است.

تمرین ۱۴. نشان دهید که اگر

$$P \Rightarrow Q$$

و

$$Q \Rightarrow R$$

آنگاه

$$P \Rightarrow R$$

تمرین ۱۵. نشان دهید که هرگاه که $P \to Q$ و $Q \to R$ دارای ارزش یک باشند، آنگاه $P \to R$ نیز دارای ارزش یک است.

تمرین ۱۶ (ابهام پیش آمده برای یکی از دانشجویان)**.** فرق میانِ $\perp$ و $\neg$ چیست؟ یعنی فرق میان تناقض و نقیض چیست؟

تمرین ۱۷. نشان دهید که اگر $P \Rightarrow Q$، و اگر P تاتولوژی باشد، آنگاه Q تاتولوژی است.

فصل ۲

منطق مرتبه‌ی اول

دل عارفان ربودند و قرار پارسایان
همه شاهدان به صورت، تو به صورت و معانی
حافظ

در بخشهای قبل درباره‌ی منطق گزاره‌ها، به عنوان یک منطق صفرویکی حاکم بر فکر ریاضی صحبت کردیم و با نحوه‌ی استدلال در آن آشنا شدیم. منطق گزاره‌ها پایه‌ای ترین منطق ریاضی است. بدین معنی که در هر منطق دیگر ریاضی، هرگاه به گزاره‌های ساخته‌شده توسط اتمهای دارای ارزش صفر و یک برسیم، برای تعیین درستی آنها از منطق گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. در ادامه‌ی درس با یک منطق پایه‌ای دیگر ریاضی به نام «منطق مرتبه‌ی اول» آشنا می‌شویم.

منطق گزاره‌ها از بیان عبارتهایی مانند زیر ناتوان است:

ـ هر عدد اول بزرگتر از ۲ فرد است.

ـ حداقل دو نفر در کلاسِ ما قدی بلندتر از ۱۷۰ سانتی متر دارند.

عبارت‌های بالا در منطق مرتبه‌ی اول (یا منطق محمولات، یا منطق سورها) نوشته شده‌اند. بخش اعظمی از ریاضیات با استفاده از منطق مرتبه‌ی اول قابل بیان است. مطابق معمول، ابتدا به بررسی نحو منطق مرتبه‌ی اول، یعنی دستور زبان این منطق می‌پردازیم.

۱.۲ نحو منطق مرتبه‌ی اول

در نحو منطق گزاره‌ها، اجزای زیر را داریم.

۱. نمادهای منطقی منطق گزاره‌ها، یعنی

$$\wedge, \vee, \neg, \leftrightarrow$$

۲. سورهای عمومی و وجودی: $\exists$ و $\forall$

۳. متغیرها $x, y, z, \ldots$

۴. علامت تساوی $=$

۵. یک زبان مناسب حاوی نمادهای تابعی، محمولها و ثوابت.

متغیرها، بدین دلیل متغیر نامیده می‌شوند که عموماً باید آنها را با مقداری جایگزین کرد. مثلاً جمله‌ی x یک عدد مثبت است، تنها زمانی معنا دارد که بدانیم منظور از x چه عددی است. اگر به جای x عدد ۲ را در نظر بگیریم این جمله درست است و اگر به جای x عددِ $-$۲ را در نظر بگیریم این جمله غلط است. چنین پدیده‌ای را در منطق گزارها نداشتیم.

فعلاً نگران فهمیدن سایر مفاهیم نباشید. در مثالهائي که در ادامه آمده است، همه چیز را روشن کرده‌ام.

برای این که جملات در این منطق به درستی فهمیده و نوشته شوند، ترتیب زیر را برای ارجحیت ادوات در نظر می‌گیریم. در ادامه‌ی بیشتر درباره‌ی اهمیت ادوات صحبت خواهیم کرد.

۱. $(,)$

۲. $\forall, \exists$

۳. $\neg$

۴. $\wedge, \vee$

۵. $\rightarrow, \leftrightarrow$

توجه ۳۲. در میان ادوات هم‌ارزش، آنکه زودتر پدیدار شود، ارجح است.

توجه ۳۳. $\exists$ «سور وجودی» و $\forall$ «سور عمومی» نامیده می‌شوند.

متغیری که در <u>دامنه‌ی</u> یک سور قرار بگیرد، متغیر **<u>پای‌بند</u>** نامیده می‌شود. متغیری که در دامنه‌ی هیچ سوری نباشد، متغیر **<u>آزاد</u>** نامیده می‌شود. در مثالهای زیر همه‌ی تعاریف بالا را روشن کرده‌ایم.

مثال ۳۴. در فرمول زیر متغیرهای آزاد و پای‌بند را مشخص کنید و فرمول مورد نظر را پرانتزگذاری کنید.

$$\forall x \quad R_1(x, y) \rightarrow \exists y(S(y) \vee R_2(x, y))$$

پاسخ. ابتدا بر اساس ترتیب اولویتها، فرمول مورد نظر را پرانتزگذاری می‌کنیم:

$$(\forall x \quad R_1(x, y)) \rightarrow \exists y\big(S(y) \vee R_2(x, y)\big)$$

حال متغیرهای آزاد و پای‌بند را شناسایی می‌کنیم:

$$(\forall x \quad R_1(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \overbrace{y}^{\text{آزاد}})) \rightarrow \exists y(S(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}) \vee R_2(\overbrace{x}^{\text{آزاد}}, \underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}))$$

دقت کنید که در فرمولِ بالا، متغیرِ x یک حضور آزاد و یک حضور پایبند دارد.

توجه: پرانتزگذاری فرمول بالا فقط به صورت بالا درست است؛ اگر پرانتزگذاری را به صورت زیر انجام دهیم، معنی و متغیرهای پای‌بند و آزاد عوض می‌شوند:

$$\forall x \quad \left(R_۱(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \overbrace{y}^{\text{آزاد}}) \to \exists y\left(S(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}) \vee R_۲(\overbrace{x}^{\text{پای‌بند}}, \underbrace{y}_{\text{پای‌بند}})\right)\right)$$

□

مثال ۳۵. فرمول زیر را پرانتزگذاری کنید:

$$\forall x R_۱(x,y) \to \exists y S(y) \vee R_۲(x,y)$$

اثبات.

$$\left(\forall x \quad R_۱(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \overbrace{y}^{\text{آزاد}})\right) \to \left(\left(\exists y\ S(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}})\right) \vee R_۲(\overbrace{x}^{\text{آزاد}}, \underbrace{y}_{\text{آزاد}})\right)$$

□

مثال ۳۶. فرمول زیر را پرانتزگذاری و متغیرهای آزاد و پایبند آن را مشخص کنید.

$$\exists x(S(x) \wedge \forall x\big(R(x,y) \to S(y)\big))$$

اثبات.

$$\exists x \left(S(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}) \wedge \forall x \left(R(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \underbrace{y}_{\text{آزاد}}) \to S(\underbrace{y}_{\text{آزاد}})\right)\right)$$

□

مثال ۳۷. فرمول زیر را پرانتزگذاری و متغیرهای آزاد و پایبند آن را مشخص کنید.

$$\exists x S(x) \wedge \forall x R(x,y) \to S(y)$$

اثبات.

$$\left(\left(\exists x\ S(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}})\right) \wedge \left(\forall x\ R(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \underbrace{y}_{\text{آزاد}})\right)\right) \to S(\underbrace{y}_{\text{آزاد}})$$

□

مثال ۳۸. فرمول زیر را پرانتزگذاری و متغیرهای آزاد و پایبند آن را مشخص کنید.

$$R(x,y) \leftrightarrow \exists x\big(R(x,y) \wedge \forall x \quad S(x)\big) \vee \forall y \quad R(x,y)$$

اثبات.

$$R(\underbrace{x}_{\text{آزاد}}, \underbrace{y}_{\text{آزاد}}) \leftrightarrow \left(\exists x \left(R(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \underbrace{y}_{\text{آزاد}}) \wedge \forall x\ S(x)\right) \vee \forall y\ R(\underbrace{x}_{\text{آزاد}}, \underbrace{y}_{\text{پای‌بند}})\right)$$

□

۲.۲ ریاضی‌نویسی در منطق مرتبه‌ی اول

در منطق مرتبه‌ی اول بسته به اینکه در مورد چه چیزی صحبت می‌کنیم، یک زبان مناسب انتخاب می‌کنیم. این زبان، شامل محمولها و توابع و ثوابتی که برای سخن گفتن (علاوه بر سورها و متغیرها و سایر اداوت منطقی) به آنها نیاز داریم. همچنین باید دقت کنیم که جملات ما درباره‌ی یک جهان مشخص نوشته می‌شود که باید از ابتدا مشخص شده باشد. بگذارید معنی این سخن را در مثالها توضیح بدهم.

مثال ۳۹. عبارت زیر را در یک **زبان** مناسب در منطق مرتبه‌ی اول بنویسید. فرض کنید که جهان ما کلاس درس خودمان باشد.

- حداقل ۳ دانشجوی خانم وجود دارند.

پاسخ. زبان را $L = \{D(x)\}$ می‌گیریم که در آن D یک محمول تک‌موضعی است به معنی این که x یک خانم است. $\underbrace{D(x)}_{\text{محمول}} : x$ دختر است. جمله‌ی مورد نظر ما در منطق مرتبه‌ی اول به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\exists x, y, z \quad (D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z).$$

دقت کنید که در عبارت بالا، $\exists x$ یعنی که یک x در جهان ما (یعنی کلاس درس) وجود دارد. این را که x در کلاس درس ماست در منطق مرتبه‌ی اول نمی‌نویسیم، ولی چون جهان را از اول مشخص کرده‌ایم می‌دانیم که سورها درباره‌ی اشیای همین جهان صحبت می‌کنند. □

مثال ۴۰. در کلاس دقیقاً ۳ خانم وجود دارد.

پاسخ. دوباره از همان زبان L در بالا استفاده می‌کنیم. جمله‌ی بالا بدین معنی است که اولاً حداقل سه خانم در کلاس وجود دارند، و ثانیاً خانم دیگری در کلاس موجود نیست. پس می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}&\exists x, y, z \quad \Big(D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z) \wedge \\ &\forall t \quad (t = x \vee t = y \vee t = z)\Big).\end{aligned}$$

□

مثال ۴۱. جمله‌ی زیر را در همان زبان بالا بنویسید: «در کلاس حداکثر سه خانم وجود دارند».

پاسخ. در پاسخ زیر، به نقش پرانتزها دقت داشته باشید.

$$\exists x, y, z \quad \Big(D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \wedge \forall t \quad \big(D(t) \rightarrow t = x \vee t = y \vee t = z\big)\Big)$$

□

در مثالهای پیش‌رو، ریاضی‌نویسی را با استفاده از محدودیتهای منطق مرتبه‌ی اول، تمرین خواهیم کرد.

مثال ۴۲. فرض کنید که جهان ما یک جامعه‌ی انسانی باشد. بنویسید که

هر کسی عموئی دارد.

اثبات. برای نوشتن این جمله، زبانِ L را به صورت زیر در نظر می گیریم: $L = \{A(x,y)\}$. نمادِ $A(x,y)$ یک محمول دوموضعی است که قرار است بدین معنی باشد که x عموی y است. جمله‌ی مورد ما در این زبان به صورت زیر است:

$$\forall x \quad \exists y \quad A(y,x)$$

□

مثال ۴۳. در زبان قبلی، جمله‌ی زیر را بنویسید:
کسی هست که عموی همه است.

$$\exists y \quad \forall x \quad A(y,x)$$

مثال ۴۴. هر کسی که عمو داشته باشد، دائی دارد.

فرض کنید $D(x,y)$ به معنی این باشد که x دائیِ y است. می‌نویسیم:

$$\forall x \quad (\exists y \quad A(y,x) \rightarrow \exists z \quad D(z,x))$$

مثال ۴۵. اگر همه‌ی افراد عمو داشته باشند، یک نفر هست که دائی دارد.

$$\forall x \quad \exists y \quad A(y,x) \rightarrow \exists x \quad \exists y \quad D(y,x)$$

تمرین ۱۸. جملات زیر را در زبان منطق مرتبه‌ی اول بنویسید.

- یک نفر هست که اگر او عمو داشته باشد، همه عمو دارند.
- اگر یک نفر باشد که عمو دارد، همه عمو دارند.
- عموی هر شخصی که آن شخص دائی ندارد، دائی اوست.

توجه ۴۶. در منطق مرتبه‌ی اول، سور روی زیر مجموعه‌ها نداریم. نمی‌توانیم بگوییم که هر زیرمجموعه از جهان ما، فلان ویژگی را دارد.

$$\cancel{\forall A \subseteq B \ldots}$$

مثالهای زیر را در جهانِ دانشگاه خودمان در نظر بگیرید و فرض کنید که محمولِ دو موضعیِ $R(x,y)$ بدین معنی است که x دوستِ y است و محمول دوموضعیِ $D(x,y)$ بدین معنی است که x دشمنِ y است.

مثال ۴۷. اگر هر کس حداقل دو دوست داشته باشد، آنگاه یک نفر هست که با همه دوست است.

پاسخ.
$$\forall x \quad \exists y_1, y_2 \quad R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \rightarrow \exists z \quad \forall t \quad R(z, t)$$

□

مثال ۴۸. هر کسی که حداقل دو دوست داشته باشد، با همه دوست است.

پاسخ.
$$\forall x \quad \Big(\exists y_1, y_2 \quad R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \rightarrow \forall z \quad R(x, z)\Big)$$

□

مثال ۴۹. هر کسی دو دوست دارد که آنها حداکثر تنها یک دوست مشترک دارند.

پاسخ.
$$\forall x \quad \left(\exists y_1, y_2 \quad R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \forall z \quad \Big(R(y_1, z) \wedge R(y_2, z) \rightarrow (x = z)\Big)\right)$$

□

مثال ۵۰. هر کسی که دوستی داشته باشد، دوست دیگری ندارد.

پاسخ.
$$\forall x \quad \left(\exists y \quad R(x, y) \rightarrow \forall z \quad \Big(\neg(y = z) \rightarrow \neg R(x, z)\Big)\right)$$

□

تمرین ۱۹. دشمنِ دشمنِ هر کس، دوست اوست.

تمرین ۲۰. با اضافه کردن یک محمولِ $R(x, y)$ به معنیِ این که x، y را می‌شناسد جمله‌ی زیر را بنویسید: عموهای هر کس، دائی‌های او را می‌شناسند.

مثال ۵۱. فرض کنید که جهان مورد نظر ما، جهانِ اعداد طبیعی است و زبان، دارای یک محمولِ $x \leq y$ است به معنی این که x از y کمتر یا مساوی است.

- هر عددی از یک عدد دیگر بزرگتر است.

$$\forall x \exists y (y \neq x \wedge y \leq x)$$

- بزرگتر از هر عددی یک عدد وجود دارد.

$$\forall x \quad \exists y (x \leq y).$$

- یک عدد هست که از همه‌ی اعداد بزرگتر است.

$$\exists x \quad \forall y \quad y \leq x.$$

دقت کنید که ننوشته‌ایم

$$\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \ldots$$

علت آن است که در منطق مرتبه‌ی اول، تعلقِ متغیرها به جهان را نمی‌نویسیم و پس از آن که جهان را در نظر گرفتیم، هر سور وجودی و عمومی به عناصر آن جهان اشاره دارد.

توجه ۵۲. کلمه‌ی «که» را به صورت زیر در منطق مرتبه‌ی اول لحاظ می‌کنیم:

- هر کسی **که** دوستی دارد، دشمنی دارد.
برای این که جمله‌ی بالا قابل نوشتن در منطق مرتبه‌ی اول باشد، باید آن را به صورت زیر تبدیل کرد: هر کسی اگر دوستی داشته باشد آنگاه دشمنی دارد. پس جمله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall x \quad (\exists y R(y,x) \to \exists z D(z,x)).$$

- هر کس دوستی دارد که آن دوست دشمنی ندارد.
جمله‌ی بالا را باید به صورت تبدیل کنیم: «برای هر کس، کسی وجود دارد که دوست اوست و دشمن ندارد».

$$\forall x \quad \exists y \quad (R(x,y) \wedge \forall z \neg D(z,y)).$$

تمرین ۲۱. جملات زیر را در زبانِ $L = \{R(x,y)\}$ و در جهان دانشگاه، بنویسید:

۱. هر کس که دوستی داشته باشد که با همه دوست است، حداقل با دو نفر دوست نیست.

۲. اگر هر کس حداقل یک دوست داشته باشد، آنگاه دو نفر هستند که با هم دوست نیستند.

تمرین ۲۲. جملات در زبان ریاضی هیچگاه نباید ایهام داشته باشند. ایهام جملات ادبی را زیباتر می‌کند و جملات ریاضی را زشت‌تر. آیا می‌توانید بیت زیر از حافظ را به زبان ریاضی بنویسید:

غیر از این نکته که حافظ ز تو ناخشنود است
در سراپای وجودت هنری نیست که نیست!

گاهی اوقات، زبان را به طور خلاصه به همراهِ جهان نمایش می‌دهیم. جهان را همراه با زبان مخصوص به آن، یک ساختار می‌نامیم.

مثال ۵۳. در ساختارِ $(\mathbb{N}, \times, +)$ جمله‌ی زیر را بنویسید:
هر عدد اولِ مخالفِ ۲ فرد است.
جمله‌ی بالا باید به جمله‌ی زیر تبدیل شود: هر عددی، اگر اول باشد (یعنی توسط هیچ عددی جز یک و خودش عاد نشود) و مخالفِ ۲ باشد، آنگاه فرد است.

$$\forall x \quad \Big(x \neq 2 \wedge \forall y, z \quad (x = y \times z \to (y = 1 \vee x = 1)) \to \exists k \quad x = 2 \times k + 1\Big)$$

دقت کنید که در فرمولِ بالا، تنها از علامتهای جمع و ضرب، ادوات منطقی و عناصری در جهان مورد نظرمان استفاده کرده ایم. فرض ساختار بالا با جهان‌های قبلی این بود که در آن علامتهای تابعیِ جمع و ضرب نیز حضور داشتند (زبانهای قبلی فقط محمولی بودند).

تمرین ۲۳. در همان ساختار قبلی، جمله‌ی زیر را بنویسید:
هر دو عدد دارای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هستند.

مثال ۵۴. در ساختارِ $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ بنویسید که تابعِ $x^2 + x$ در نقطه‌ی a پیوسته است.

پاسخ. آنچه می‌خواهیم عبارت زیر است:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad \Big(- \delta < x - a < \delta \to -\epsilon < f(x) - f(a) < \epsilon\Big)$$

که آن را در زبان داده شده به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad \Big(R(x, a, \delta) \to R\big(f(x), f(a), \epsilon\big)\Big)$$

توجه ۵۵. همانند منطق گزاره‌ها، در منطق مرتبه‌ی اول نیز علامتِ $\Leftrightarrow$ نداریم. هر گاه از این علامت استفاده می‌شود، مفهومی فرای عبارت منطق مرتبه‌ی اول مد نظر است. مثلاً اگر ϕ و ψ دو جمله باشند که در منطق مرتبه‌ی اول نوشته شده‌اند، منظور از

$$\phi \Leftrightarrow \psi$$

این است که این دو جمله، هم‌معنی هستند (بخش بعد را ببینید). این که این دو جمله هم‌معنی هستند، خودْ جمله‌ای در زبان فارسی است و نه در زبانی که آن دو جمله نوشته شده‌اند.

گاهی نیز از $\Leftrightarrow$ برای تعاریف استفاده می‌شود. مثلاً این را که تابع f در نقطه‌ی a پیوسته است، به طور خلاصه به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

پس می‌نویسیم:

$$\Big(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\Big) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad \Big(|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon\Big)$$

علت این که بین دو عبارت از فِلِش دوخطه استفاده کرده‌ایم این است که این عبارت، در **فرازبان منطقی** نوشته شده است و از قول خود ماست. در عبارت بالا در واقع داریم می‌گوئیم که از نماد $\lim_{x\to a} f(x) = b$ برای اشاره به عبارت سمت راست استفاده کرده‌ایم که عبارت سمت راست منطقی است و عبارت سمت چپ در زبان نوشتاری خودمان است و علامتِ $\Leftrightarrow$ نیز در زبان فرامنطق، یعنی زبان گفتگوی میان من و شما نوشته شده است.

$\square$

۳.۲ فرمولهای همیشه درست در منطق مرتبه‌ی اول

معناشناسی منطق مرتبه‌ی اول با استفاده از جدول ارزش صورت نمی‌گیرد. در اینجا باید گزاره‌ها و فرمولها را در **جهان** مربوط بدانها ارزیابی کرد. برای مثال، برای بررسی صحت جمله‌ی «در کلاس مبانی ریاضی سه نفر قد بلندتر از ۱۷۰ سانتی‌متر دارند» باید وارد این کلاس شد، و به دنبال سه نفر گشت که شرط ذکر شده را برآورده کنند.

تعریف ۵۶. اگر M یک جهان مرتبه‌ی اول باشد و L زبان مربوط بدان باشد، می‌گوییم در M فرمولِ $\forall x \quad \phi(x)$ درست است، هرگاه برای هر عنصرِ $a \in M$ که به طور دلخواه انتخاب شده باشد، فرمولِ $\phi(a)$ درست باشد. معمولاً یک عنصر a به دلخواه انتخاب می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که آیا $\phi(a)$ درست است یا خیر. اگر درست بود، از آن جا که عنصر مورد نظر به دلخواه انتخاب شده بود، نتیجه می‌گیریم که اگر هر عنصر دیگری را نیز انتخاب می‌کردیم، همین حکم درست می‌بود.

برای مثال، برای بررسی این که در کلاس شما، همه قدشان از یک متر بیشتر است، باید نشان دهیم که هر شخصِ a در کلاس را که برداریم، قدش از یک متر بیشتر است!

تمرین ۲۴. چگونه تشخیص دهیم که آیا فرمولِ $\exists x \quad \phi(x)$ در یک جهانِ M درست است یا خیر؟

گفتیم که «تاتولوژی‌ها» در منطق گزاره‌ها، عباراتی هستند که صرف نظر از ارزش گزاره‌های به کار رفته در آنها همواره درستند. برای مثال $p \vee \neg p$ همواره درست است و فرقی نمی‌کند که p چه گزاره‌ای باشد. در واقع تاتولوژیها به نوعی «قوانین استنتاج» هستند. در منطق مرتبه‌ی اول نیز عبارتهای همیشه درست داریم (ولی از کلمه‌ی تاتولوژی برای آنها استفاده نمی‌کنیم). منظور از یک عبارت همیشه درست در منطق مرتبه‌ی اول، عبارتی است که **در هر جهانی که آن عبارت را بتوان تعبیر کرد** درست است.

یک مثال معروف از جملات همیشه درست، جمله‌ی زیر است:

$$\exists x \quad (h(x) \to \forall y \quad h(y)).$$

من ادعا می‌کنم که درست بودن جمله‌ی بالا، به این که در چه جهانی نوشته شده است و این که معنیِ $h(x)$ چیست ربطی ندارد. برای مثال، فرض کنید که جهان ما، یک جهان از انسانها باشد و $h(x)$ بدین معنی باشد که x دارای کلاه است. پس جمله‌ی بالا دارد می‌گوید که «در هر جهان انسانی، یک نفر وجود دارد که اگر او کلاه داشته باشد، همه کلاه دارند». شاید به نظرتان این جمله درست نیاید؛ ولی درست است. کلاس خودتان را در نظر بگیرید. از دو

حالت خارج نیست. یا همه کلاه دارند، یا یک نفر، مثلا علی آقا، کلاه ندارد. اگر همه کلاه داشته باشند، که جمله‌ی بالا در کلاس شما درست است. در غیر این صورت، اگر علی کلاه می‌داشت، همه کلاه می‌داشتند (به انتفاء مقدم). پس یک نفر هست که اگر او کلاه داشته باشد، همه کلاه دارند.

در زیر چند مثال از جملات همیشه درست آورده‌ایم.

۱. $\neg\forall x \quad p(x) \leftrightarrow \exists x \quad \neg p(x)$

۲. $\neg\exists x \quad p(x) \leftrightarrow \forall x \quad \neg p(x)$

۳. $\forall x \quad \Big(p(x) \wedge q(x)\Big) \leftrightarrow \forall x \quad p(x) \wedge \forall x \quad q(x)$

۴. $\exists x \quad \Big(p(x) \vee q(x)\Big) \leftrightarrow \exists x \quad p(x) \vee \exists x \quad q(x)$

در زیر اولی را ثابت می‌کنیم. مشابه منطق گزاره‌ها به جای این که بگوییم فرمول $\neg\forall x \quad p(x) \leftrightarrow \exists x \quad \neg p(x)$ همواره درست است، می‌نویسیم:

$$\neg\forall x \quad p(x) \Leftrightarrow \exists x \quad \neg p(x)$$

فرض کنیم که M یک جهان باشد که گزاره‌های بالا درباره‌ی آن نوشته شده‌اند. فرض کنیم در جهان M داشته باشیم:

$$\neg\forall x \quad p(x)$$

یعنی در جهان M اینگونه نیست که هر $x \in M$ ویژگی p را داشته باشند. پس عنصری مانند $a \in M$ هست که $\neg p(a)$ پس در جهان ما جمله‌ی زیر درست است:

$$\exists x \quad \neg p(x)$$

به طور مشابه اگر در جهانِ M جمله‌ی زیر درست باشد:

$$\exists x \quad \neg p(x)$$

آنگاه عنصر $a \in M$ وجود دارد به طوری که $\neg p(a)$. پس این جمله که $\forall x p(x)$ در M درست نیست، یعنی نقیض آن درست است.

تمرین ۲۵. بقیه‌ی موارد بالا را نیز به طور مشابه ثابت کنید.

سوال ۳. آیا عبارت زیر همیشه درست است؟

$$\forall x \quad \big(A(x) \vee B(x)\big) \to \forall x \quad A(x) \vee \forall x \quad B(x)$$

پاسخ. فرض کنید:

$$M = \{a, b, c, d, e\}$$

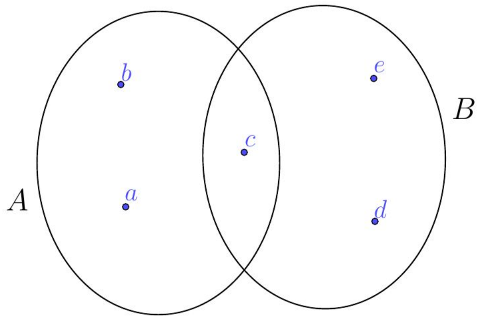
$$A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e\}$$

فرض کنید $A(x)$ به معنی $x \in A$ باشد و $B(x)$ به معنی $x \in B$. داریم

$$\forall x \quad (x \in A \vee x \in B)$$

اما عبارت زیر در جهان ما درست نیست:

$$\forall x \quad x \in A \quad \vee \quad \forall x \quad x \in B$$



□

مثال ۵۷. آیا عبارت زیر درست است:

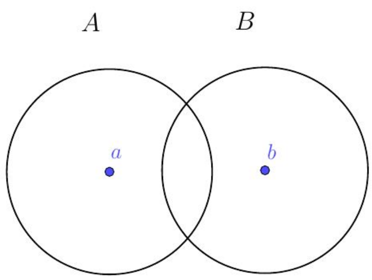
$$\exists x \quad A(x) \wedge \exists x \quad B(x) \to \exists x \quad (A(x) \wedge B(x))$$

پاسخ. جهان را به صورت کشیده شده در شکل زیر در نظر بگیرید. داریم

$$\exists x \quad x \in A$$

$$\exists x \quad x \in B$$

$$\neg(\exists x \quad x \in A \wedge x \in B)$$



□

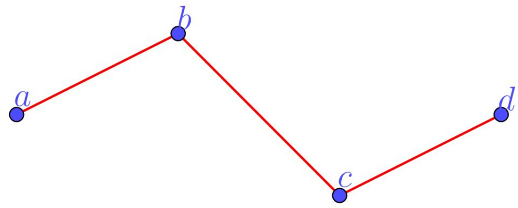
مثال ۵۸. آیا عبارت زیر همواره درست است؟

$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y) \to \exists y \quad \forall x \quad R(x,y)$$

پاسخ. جهان را به صورت زیر، مجموعه‌ی رأسهای یک گراف در نظر بگیرید:

$$M = \{a,b,c,d\}$$

و رابطه‌ی R را چنین تعبیر کنید:
$R(x,y)$ یعنی بین x و y یک یال وجود داشته باشد.



در جهان بالا جمله‌ی

$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y)$$

درست است ولی جمله‌ی زیر غلط است:

$$\exists y \quad \forall x \quad R(x,y)$$

اگر در بالا $R(x,y)$ را رابطه‌ی دوستی در نظر بگیرید و رأسها را اشخاص، در واقع اثبات کرده‌ایم که از جمله‌ی «هر کسی دوستی دارد» جمله‌ی «یکی هست که با همه دوست است» نتیجه نمی‌شود.
به عنوان مثالی دیگر، مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به عنوان جهان در نظر بگیرید. دقت کنید که جمله‌ی زیر در مورد این مجموعه درست است:

$$\forall x \exists y \quad x \leq y$$

اما جمله‌ی زیر درباره‌ی این جهان درست نیست:

$$\exists y \forall x \quad x \leq y.$$

$\square$

مشابه منطق گزاره‌ها، میان

$$\phi \Rightarrow \psi$$

و

$$\phi \to \psi$$

در منطق مرتبه‌ی اول نیز فرق وجود دارد. **دومی یک فرمول منطق مرتبه‌ی اول است که ممکن است که در برخی جهانها درست باشد و در برخی دیگر از جهانها غلط. اما اولی یک کوتاه‌نوشت برای عبارت طولانی‌تر زیر است: جمله‌ی $\phi \to \psi$ در هر جهان مرتبه‌ی اول که علائم لازم برای بیان آن را داشته باشد، درست است.** پس زمانی از اولی استفاده می‌کنیم که در یک جهان خاص مشغولیم؛ و زمانی دومی را می‌نویسیم که منظورمان در هر جهان ممکنی برقرار باشد.

تمرین ۲۶. نشان دهید که در منطق مرتبه‌ی اول، اگر

$$\phi \Rightarrow \psi$$

آنگاه از همواره درست بودنِ ϕ همواره درست بودنِ ψ نتیجه می‌شود. آیا عکس این گفته نیز درست است؟

گفتیم که برای اثباتِ

$$\phi \Rightarrow \psi$$

در منطق مرتبه‌ی اول، باید درست بودن گزاره‌ی $\phi \to \psi$ را در همه‌ی جهانها بررسی کرد. اما راه دیگری وجود دارد و آن استفاده از «نظریه‌ی اثبات» است. در نظریه‌ی اثبات، مشابه آنچه در منطق گزاره‌ها گفتیم، تعداد محدودی قانون ارائه می‌شود که با استفاده از آنها درست بودن هر گزاره‌ای قابل اثبات است. به آن قوانین، قوانین استتاج گفته می‌شود. قوانین استنتاج به طور همزمان در همه‌ی جهانها درست هستند و وقتی از آنها استفاده می‌کنیم نیازی نیست به جهان خاصی فکر کنیم. نکته‌ی جالب اینجاست که تعداد قوانین استنتاج متناهی است. یعنی هر چه قدر هم مسائل ما پیچیده باشند، تمام استدلالهای ما از متناهی روش خاص پیروی می‌کنند.

بیان قوانین استنتاج در منطق مرتبه‌ی اول، در سطح درس مبانی ریاضی نمی‌گنجد. دانشجوی علاقه‌مند را ترغیب می‌کنم تا برای یادگیری این مباحث، درس منطق را بگذراند. از طرفی بنده نیز، به عنوان یک متخصص در نظریه‌ی مدل، و نه نظریه‌ی اثبات، سعی می‌کنم حتی‌الامکان قضایا را با رویکرد نظریه‌ی مدلی اثبات کنم. یعنی درستی آنها را در هر جهانی به طور مجزا اثبات کنم. [۱]

۴.۲ منطقهای دیگر

در طی دو فصل گذشته، با منطق گزاره‌ها و منطق مرتبه‌ی اول به نحوی بسیار اجمالی آشنا شدیم. منطق گزاره‌ها منطق گزاره‌های دارای ارزش صفر و یک است و منطق مرتبه‌ی اول، منطق جملاتی که درباره‌ی جهان‌هایی مشخص نوشته می‌شود که در جملات آن، به جهان مورد نظر اشاره می‌شود.

بخش عمده‌ای از ریاضیات، خصوصاً نظریه‌ی مجموعه‌ها، در منطق مرتبه‌ی اول قابل بیان است. با این حال، منطقهای دیگر هم وجود دارند. یکی همان منطقی است که با آن شما نوشته‌های مرا دنبال می‌کنید. منطقی که من

[۱] یکی از قضایای مهم در منطق مرتبه‌ی اول، قضیه‌ی تمامیت گودل است که می‌گوید: «گزاره‌های همواره درست، دقیقاً همان گزاره‌هائی هستند که اثبات می‌شوند». یعنی یک گزاره، تنها در صورتی در همه‌ی جهانها درست است که توسط آن تعداد متناهی قوانین استنتاج به دست آمده باشد.

با آن در قالب زبان فارسی، سخنان خود را توجیه می‌کنم. به بیان دیگر منطقی که با آن، درباره‌ی این منطقها سخن گفتم. مثلاً با این منطق گفتم که $p \Rightarrow q$ یعنی گزاره‌ی $p \to q$ تاتولوژی است. در این منطق، نیز گاهی از علائم ریاضی استفاده می‌شود:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \quad x \leq n$$

جمله‌ی بالا در منطق مرتبه‌ی اول نوشته نشده است. بلکه در زبان فارسی است و می‌گوید که هر عدد حقیقی، از یک عدد طبیعی کمتر است!

غیراز این هم، منطقی وجود دارد به نام منطق مرتبه‌ی دوم. از این منطق برای سوررزدن روی زیرمجموعه‌ها استفاده می‌شود. مثلاً این را که هر زیرمجموعه‌ی از بالاکراندار از اعداد حقیقی دارای یک کوچکترین کران بالاست، باید در منطق مرتبه‌ی دوم بیان کنیم.

تمرین ۲۷. با یک جمله‌ی ریاضی بنویسید که «هر زیرمجموعه از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد، دارای کوچکترین کران بالاست.

درباره‌ی این منطقها، در بخشهای دیگری از درس سخن خواهم گفت.

فصل ۳

اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

کی دهد دست این غرض یارب که همدستان شوند
خاطر مجموع ما زلف پریشان شما
حافظ

در مقدمه گفتیم که یکی از اهداف این درس بیان اصول اولیه‌ی ریاضیات است. این اصول، بنا به ویژگی‌های مطلوبی که منطق مرتبه‌ی اول دارد و بیان آنها در این درس نمی‌گنجد، در منطق مرتبه‌ی اول نوشته می‌شوند.

همچنین بعداً توجیه خواهیم کرد که برای پیدا کردن اصول اولیه ریاضیات، نخست لازم است که اصول اولیه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها را پیدا کنیم.

اما شاید از خود بپرسید که چه نیازی به نوشتن اصول موضوعه برای مجموعه‌ها داریم. مجموعه که تعریفش مشخص است! در زیر در این باره سخن گفته‌ام.

تعریف مجموعه‌ها را از دوره‌ی دبیرستان به خاطر دارید: [۱]

مجموعه، گردایه‌ای است از اشیاء مشخص و متمایز که دارای ویژگی مشترکی هستند.

تعریف بالا، شهودی‌ترین تعریف برای مجموعه است. اما این تعریف یک مشکل منطقی دارد. عبارتهای **گردایه، شیء، دور هم جمع آمدن** و ... ساده‌تر از کلمه‌ی مجموعه نیستند و خودِ آنها نیاز به تعریف دارند! به نظر می‌آید که در تعریف بالا، تنها کلمه‌ی مجموعه با چند کلمه‌ی دیگر جایگزین شده است: مجموعه چیست؟ مجموعه همان

[۱] تعریف زیر، در پاراگراف اول مقاله‌ای تحت عنوان

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre

از کانتور نوشته شده است:

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterscheidenen Objecten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M gennant werden) zu einem ganzen

یعنی منظور از یک مجموعه M یک جمع‌آوری از اشیاء مشخص و متمایز m است از محیط پیرامون ما یا در فکر ما (که به هر یک از این اشیاء یک عضو مجموعه می‌گوییم) به یک مجموع.

گردایه است! شاید احساس کنید که داریم بیهوده سختگیری می‌کنیم؛ ولی پذیرش این تعریف برای مجموعه‌ها ما را به دام بزرگی می‌اندازد که در بخش آینده درباره‌ی آن سخن گفته‌ام.

۱.۳ پارادوکسِ راسل

تا اوایل قرن بیستم تعریف شهودی مقدمه‌ی بالا، تعریف مورد قبول ریاضیدانان برای مفهوم مجموعه بود. به بیان دقیقتر، از نظر کانتور، اگر $p(x)$ یک ویژگی باشد، هر عبارت به صورت زیر یک مجموعه است:

$$\{x|p(x)\}$$

عبارت بالا، مجموعه‌ی x هائی را نشان می‌دهد که ویژگیِ مشخصِ p را دارا هستند.

فرض کنید $p(x)$ ویژگیِ $x \notin x$ باشد:

$$p(x) : x \notin x$$

آنگاه بنا به آنچه در بالا گفتیم، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$A = \{x|x \notin x\}$$

سوال ۴. آیا $A \in A$؟

پاسخ. اگر $A \in A$ آنگاه

$$A \in \{x|x \notin x\}$$

پس $A \notin A$!

پس به نظر می‌آید که A متعلق به A نیست. اما انگار این هم درست نیست: اگر $A \notin A$ آنگاه

$$A \notin \{x|x \notin x\}$$

پس $A \in A$!

به بیان دیگر، اگر A یک مجموعه باشد آنگاه

$$A \in A \Leftrightarrow A \notin A.$$

گزاره‌ی بالا یک تناقض منطقی است!

رویداد پاردوکس راسل نشان می‌دهد که شهودی‌ترین تعریف ما از مجموعه‌ها، که سالها پایه‌ی بنای کار ریاضیدانان بوده است، تناقض‌آمیز است. در واقع علم ریاضی، در همین نخستین قدم دچار تناقضی آشکار شده است. از کجا معلوم که سایر بخشهای دیگر ریاضی دچار تناقض نباشند؟ شاید من امروز قضیه‌ای در اتاق کارم ثابت کنم که چند ماه بعد قرار است نقیض آن را اثبات کنم!

از آنجا که علمِ حاویِ تناقض، مطلوب ما نیست، باید برای تعریف مجموعه‌ها، چاره‌ای بجوئیم، و چاره‌ای که منطق برای رهائی از این پارادوکسها پیشنهاد کرده است، این است که به جای این که مجموعه را تعریف کنیم، آن را «اصل‌بندی» کنیم. یعنی بگوییم مجموعه هر آن چیزی است که شما به عنوان مجموعه تصور می‌کنید، ولی باید تصور شما از قوانین خاصی پیروی کند.

در ادامه‌ی درس این قوانین را به صورت اصول موضوعه بیان خواهم کرد، ولی پیش از آن در زیر دو نکته را یادآور می‌شوم:

نظریه‌ی مجموعه‌های کانتور را گاهی نظریه‌ی مجموعه‌ی سهل‌انگارانه [۲] نیز می‌خوانند.

پارادوکس راسل، که ذهن بسیاری از ریاضیدانان و فیلسوفان را به خود مشغول کرده بود، از نوع پارادوکسهای «ارجاع‌به‌خود» [۳] است. در زیر مثال دیگری از چنین پارادوکسها را آورده‌ایم:

مثال ۵۹ (پارادوکس دروغگو). فرض کنید شخصی بگوید «من دروغگو هستم». آیا این شخص دروغگو است یا راستگو؟ اگر راستگو باشد، پس راست گفته است که دروغگو است، پس دروغگو است! اگر دروغگو باشد پس دروغ گفته است که دروغگوست، پس راستگوست!

مثال ۶۰. تمساحی (البته یک تمساح که هم حرف می‌زند و هم به قول خود عمل می‌کند!) پسری را ربوده است و می‌خواهد یا او را بخورد، یا به پدرش پس بدهد. تمساح به پدرِ آن پسر چنین می‌گوید: «اگر درست بگوئی که من چه خواهم کرد، پسرت را پس می‌دهم». حال اگر پدر بگوید که من می‌گویم که پسرم را می‌خوری، تمساح باید چه کند؟ اگر تمساح بچه را بخورد، پس پدر درست گفته است، یعنی تمساح باید بچه را پس بدهد. اگر تمساح بچه را پس بدهد، پس به حرف خودش عمل نکرده است، چون پدر اشتباه گفته است!

□

تمرین ۲۸ (پارادوکس سقراط). بررسی کنید که جمله‌ی «من می‌دانم که هیچ نمی‌دانم» یک جمله‌ی تناقض‌آمیز است.

تمرین ۲۹. آرایشگرِ یک شهر،تنها موهای کسانی را می‌تراشد که آنها خودْ موهای خود را نمی‌تراشند. آیا آرایشگر موهای خود را می‌تراشد؟

تمرین ۳۰. آیا کوچکترین عدد طبیعی که نتوان آن را با کمتر از ۵۰ کلمه در زبان فارسی وصف کرد، وجود دارد؟

تمرین ۳۱ (پارادوکس دادگاه). یک استاد وکالت، [۴] به دانشجوئی درس وکالت می‌دهد. آنها با هم قرارداد می‌کنند که اگر دانشجوی نامبرده، از اولین جلسه‌ی دادگاه خود پیروز بیرون بیاید، موظف است که هزینه‌ی تدریس را به استاد بپردازد. [5]

---

[۲] naive set theory

[۳] self-reference

[۴] صورت این پاردوکس را کمی تغییر داده‌ام.

[5] Paradox of the Court, counterdilemma of Euathlus

دانشجوی مورد نظر پس از اتمام دوره، از کار در دادگاه منصرف می‌شود و وارد هیچ دادگاهی نمی‌شود. استاد از دانشجو به دادگاه شکایت می‌کند و مدعی است که دانشجو باید پول او را بدهد ولی دانشجو از خود دفاع می‌کند که نباید پول به استاد بدهد. آیا دادگاه باید به نفع دانشجو رأی بدهد یا استاد؟

۲.۳ روش اصل‌موضوعه‌ای برای تعریف مجموعه

برای رهائی از پارادوکسهائی مانند پاردوکس راسل، ریاضیدانان روش اصل موضوعه‌ای را برای تعریف مجموعه برگزیده‌اند. این روش بر منطق مرتبه‌ی اول استوار است که آن را در جلسات اول معرفی کرده‌ایم. در روش اصل موضوعه‌ای، به جای ارائه‌ی یک تعریف مبهم برای مجموعه، برای مجموعه قوانین وضع می‌کنیم. در واقع می‌گوییم، مجموعه را هر چه می‌خواهید بیانگارید، ولی آنچه که در ذهن خود مجموعه می‌دانید، باید از قوانین خاصی پیروی کند. **به بیان دقیقتر، جهانهای V را در نظر می‌گیریم که در آنها یک محمولِ $\in$ وجود دارد. به این جهانها، جهانهای همه‌ی مجموعه‌ها می‌گوییم و سعی می‌کنیم که قوانین حاکم بر چنین جهانهائی را با استفاده از اصول خود بیان کنیم.** [۶] **به بیان دیگر، برای یک جهان، اصولی داریم که انتظار داریم توسط همه‌ی مجموعه‌های آن برآورده شود. در این رویکرد، متغیر x را یک مجموعه می‌نامیم هرگاه وجودش (یا مجموعه بودنش) با استفاده از منطق مرتبه‌ی اول در هر جهان دلخواه از مجموعه‌ها ثابت شود؛ یعنی مجموعه بودنِ x یک جمله‌ی درست در تمام جهان‌های نظریه‌ی مجموعه‌ها باشد.** جهانهای نظریه‌ی مجموعه‌ها، می‌توانند جهانهای ذهنی، در اذهان افراد مختلف، یا جهان‌های واقعی باشند.

پس در روش اصل موضوعه‌ای، جملاتی مرتبه‌ی اول، درباره‌ی ساختاری به صورت $(V, \in)$ می‌نویسیم. می‌گوییم که V جهان همه‌ی مجموعه‌هاست و $x \in y$ خوانده می‌شود: x عنصری از y است. هر $x, y, z, \ldots$ که در روش اصل موضوعه‌ای درباره‌ی آن صحبت شود، یا روی آن سور زده شود، از جهانِ V می‌آید.

سیستم‌های مختلفی از اصول موضوعه برای مجموعه‌ها پیشنهاد شده است که از میان سیستمِ زِداف‌سی (ZFC) (اصول زِرمِلو و فرانکل به همراه اصل انتخاب) مورد اقبال بهتری واقع شده است و در این درس ما نیز به معرفی این اصول خواهیم پرداخت. [۷] خواهیم دید که چگونه بخش اعظمی از ریاضیات، بر پایه‌ی این اصول و با استفاده از منطق گزاره‌ها و منطق مرتبه‌ی اول بنا شده است.

بنا بر آنچه گفته شد، این اصول تنها با استفاده از علامتِ $\in$ و سایر ادوات منطقیِ مرتبه‌ی اول (یعنی $\vee, \wedge, \leftrightarrow, \rightarrow, \forall, \exists$) نوشته خواهند شد. در زیر اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها را بیان کرده‌ام. هر اصل را ابتدا به صورت غیر رسمی توضیح داده‌ام و سپس به طور دقیق در زبان مرتبه‌ی اول نوشته‌ام. دقت کنید که در نظریه‌ی مجموعه‌ها هر متغیری مانند x یک مجموعه در V است و وقتی می‌نویسیم $x \in y$ یعنی **مجموعه‌ی x عضوی مجموعه‌ی y است.** در واقع هر چیزی که درباره‌ی آن صحبت می‌کنیم یک مجموعه است، و اعضای یک مجموعه نیز، خودْ مجموعه هستند! دقت کنید که در ادامه، هیچگاه ننوشته‌ایم $\forall x \in V$ زیرا هر x که درباره‌ی آن صحبت می‌کنیم در V است و منطقمان،

[۶] بله! درست است. تنها یک جهان ممکن از همه‌ی مجموعه نداریم. شاید جهان‌های فراوانی از مجموعه‌ها داشته باشیم. ولی در هر یک رابطه‌ی عضویت را قرار داده‌ایم.

[۷] Zermelo, Fraenkel+ Choice

مرتبه‌ی اول است.

در ادامه‌ی این بخش، اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها را فهرست‌وار و با توضیحی مختصر آورده‌ام. اما نگران نباشید، زیرا در ادامه‌ی درس به طور مفصل به هر یک خواهیم پرداخت. اصول را به ترتیبِ آسان به سخت مرتب کرده‌ام. اصول آسان، آنهائی هستند که در دبیرستان هم احتمالاً دیده‌اید و بسیار از آنها استفاده کرده‌اید. اما اصول سخت، آنهائی هستند که تا سالها پس از گذراندن این درس هم،شاید برایتان مبهم باقی بمانند!

مطابق قراردادهائی که در فصل منطق مرتبه‌ی اول داشتیم، هرگاه در یک جهان خاص باشیم از فلشِ $\rightarrow$ استفاده می‌کنیم ولی هر وقت حکم مورد نظرمان در تمامی جهانهای ممکن برای نظریه‌ی مجموعه‌ها برقرار باشد از فلشِ $\Rightarrow$ استفاده می‌کنیم.

۱. **اصل وجود:** بیان غیررسمی: بنا به این اصل، تهی، یک مجموعه است؛ به بیان دیگر، یک مجموعه وجود دارد که هیچ عضوی ندارد. در زیر بیان رسمی این اصل را در منطق مرتبه‌ی اول نوشته‌ایم.

$$\exists x \quad \forall y \quad \neg(y \in X)$$

از این بعد از نمادِ $x = \emptyset$ به جای فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\forall y \quad \neg(y \in x)$$

پس اصل اول می‌گوید که

$$\exists x \quad x = \emptyset$$

بنا به اصل وجود، حداقل یک مجموعه وجود دارد.

۲. **اصل گسترش:** بیان غیر رسمی: دو مجموعه که اعضای یکسانی داشته باشند (از مجموعه‌های یکسانی تشکیل شده باشند) با هم برابرند. بیان رسمی:

$$\forall a, b \quad \Big(\forall x \quad (x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b\Big)$$

توجه ۶۱. به جای فرمولِ

$$\forall x (x \in a \rightarrow x \in b)$$

می‌نویسیم:

$$a \subseteq b.$$

دقت کنید که $\subseteq$ از علائم زبان مورد نظر ما نیست، ولی از آن برای کوتاه نوشتن فرمولها استفاده کرده‌ایم. پس اصل گسترش را می‌توانیم به صورتِ خلاصه‌ترِ زیر بنویسیم:

$$\forall a, b \quad (a \subseteq b \wedge b \subseteq a \rightarrow a = b).$$

توجه ۶۲. بنا به اصل گسترش، هرگاه بدانیم که a و b مجموعه هستند، برای این که نشان دهیم که $a = b$ کافی است نشان دهیم که برای هر عنصر دلخواهِ $x_0 \in a$ داریم $x_0 \in b$ و برای هر عنصرِ دلخواهِ $x_0 \in b$ نشان دهیم $x_0 \in a$.

بنا به اصل اول، مجموعه‌ی تهی وجود دارد. حال بنا به اصل دوم می‌توان یک قضیه‌ی ساده ثابت کرد:

قضیه ۶۳. مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست؛ به بیان ریاضی:

$$\forall x \quad \emptyset \subseteq x$$

اثبات. باید نشان دهیم که (در هر جهانی از مجموعه‌ها)

$$\forall y \forall x \quad \Big(x \in \emptyset \to x \in y\Big)$$

برای این منظور فرض می‌کنیم که در یک جهان از مجموعه‌ها هستیم و y_0 یک مجموعه است، باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad \Big(x \in \emptyset \to x \in y_0\Big)$$

برای این منظور نیز، مجموعه‌ی دلخواهِ x_0 را در جهان مجموعه‌هایمان در نظر می‌گیریم. باید نشان دهیم که عبارت زیر درست است:

$$x_0 \in \emptyset \to x_0 \in y$$

در منطق گزاره‌ها، دیدیم که گزاره‌ی

$$p \to q$$

هرگاه p دارای ارزش صفر باشد، به انتفاء مقدم درست است. پس گزاره‌ی مورد نظر ما نیز درست است. $\square$

یک قضیه‌ی ساده‌ی دیگر هم می‌توان با استفاده از اصولی که تا اینجا گفته‌ایم ثابت کرد:

قضیه ۶۴. فرض کنید a, b, c سه مجموعه باشند. اگر $a \subseteq b$ و $b \subseteq c$ آنگاه $a \subseteq c$.

اثبات. دقت کنید که قضیه‌ی بالا می‌گوید که در هر جهانی از مجموعه‌ها، اگر a, b, c مجموعه باشند و فرضهای قضیه برقرار باشند، آنگاه حکم قضیه برقرار است. پس بیایید نخست وارد یک جهان ممکن از مجموعه‌ها شویم و در آن کار کنیم. نخست فرض و حکم قضیه را بررسی می‌کنیم. فرضهای قضیه به صورت زیر هستند:

(آ) a, b, c مجموعه‌اند.

(ب) $a \subseteq b$

(ج) $b \subseteq c$

حکم قضیه این است که (در صورت برقراری شرطها) $a \subseteq c$. برای نشان دادن این که $a \subseteq c$ باید عبارت زیر را ثابت کنیم:

$$\forall x \quad \Big(x \in a \to x \in c\Big)$$

برای اثبات عبارت بالا، با فرض این که $x_\cdot$ یک عنصر دلخواه است، باید نشان دهیم که گزاره‌ی زیر درست است.

$$x_\cdot \in a \to x_\cdot \in c$$

از فرض اول، نتیجه می‌شود که گزاره‌ی زیر درست است:

$$x_\cdot \in a \to x_\cdot \in b$$

در منطق گزاره‌ها اگر ارزش گزاره‌های

$$p \to q, q \to r$$

یک باشد، آنگاه ارزش گزاره‌ی $p \to r$ نیز یک است. از فرض دوم نتیجه می‌شود که گزاره‌ی زیر درست است:

$$x_\cdot \in b \to x_\cdot \in c$$

حال بنا به تمرینِ ۱۴ نتیجه می‌گیریم که گزاره‌ی $x_\cdot \in a \to x_\cdot \in c$ درست است. از آنچه گفته شد، نتیجه می‌شود که در جهان مورد نظر ما از مجموعه‌ها گزاره‌ی $a \subseteq c$ درست است. از آنجا که استدلال ما به جهان خاصی یستگی نداشت، این گزاره در تمام جهانهای مجموعه‌ها درست است. $\square$

توجه ۶۵. هر قضیه‌ای در ریاضی، بیان می‌کند که یک گزاره‌ی خاص، تاتولوژی است. قضیه‌ی بالا به طور خلاصه، می‌گوید که گزاره‌ی زیر تاتولوژی است؛ یعنی در همه‌ی جهانهای قابل تصور نظریه‌ی مجموعه‌ها درست است:

$$\forall a, b, c \quad (a \subseteq b \wedge b \subseteq c \to a \subseteq c)$$

۳. **اصل جفت‌سازی:**

بیان غیر رسمی: اگر x و y دو مجموعه باشند، آنگاه $\{x, y\}$ یک مجموعه است. به بیان دیگر، اگر x, y دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن، دقیقاً x, y هستند.

$$\forall x, y \quad \exists a \quad \Big(\forall z \quad z \in a \leftrightarrow (z = x \vee z = y)\Big)$$

دقت کنید که اصل‌جفتسازی، به اجتماعِ‌دو مجموعه‌ی x, y ربطی ندارد!

بیایید بررسی کنیم که با استفاده از این سه اصل اول، چه مجموعه‌هائی می‌توانیم بسازیم. بنا به اصلِ وجود، $\emptyset$ یک مجموعه است. بنا به اصل زوج سازی $\{\emptyset, \emptyset\}$ یک مجموعه است. حال بنا به اصل گسترش، $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$ زیرا این دو مجموعه، اعضای یکسانی دارند. پس تا اینجا، می‌دانیم که $\emptyset, \{\emptyset\}$ دو مجموعه

هستند. دوباره بنا به اصل زوج‌سازی، $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ نیز یک مجموعه است. بنا به اصل گسترش، این مجموعه، با هر دو مجموعه‌ی $\emptyset, \{\emptyset\}$ نابرابر است.

تمرین ۳۲. چه مجموعه‌های دیگری به طریق بالا می‌توانید بسازید؟ آیا می‌توانید با روش بالا یک مجموعه بسازید که بیش از دو عضو داشته باشد؟

۴. **اصل تصریح:**

بیان غیر رسمی: اگر بدانیم که a یک مجموعه است آنگاه اگر $p(x)$ یک ویژگی باشد که در منطق مرتبه‌ی اول بیان شده است، آنگاه عبارت زیر نیز یک مجموعه است.

$$\{x \in a | p(x)\}$$

در واقع اگر A یک مجموعه باشد، عناصری از A که ویژگیِ خاصی دارند تشکیل یک مجموعه می‌دهند. بیان رسمی اصل فوق به صورت زیر است:

$$\forall a \quad \exists b \quad \forall x \Big(x \in b \leftrightarrow \big(x \in a \wedge p(x) \big) \Big)$$

در واقع اگر A یک مجموعه باشد، عبارت زیر بنا به اصل تصریح یک مجموعه است.

$$B = \{x \in A | p(x)\}$$

توجه ۶۶. توجه کنید که در نظریه‌ی مجموعه‌های سهل‌انگارانه، هر عبارتی به صورت زیر را یک مجموعه دانستیم:

$$\{x | p(x)\}$$

در اصل تصریح، یک شرط به بالا اضافه کرده‌ایم: **اگر بدانیم که a یک مجموعه است،** آنگاه عبارت زیر نیز یک مجموعه است:

$$\{x \in a | p(x)\}.$$

بنابراین اگر $p(x)$ یک ویژگی مرتبه‌ی اول باشد،عبارتِ

$$\{x | p(x)\}$$

لزوماً یک مجموعه نیست. به بیانی، عبارت بالا اگر با یک مجموعه اشتراک گرفته شود، یک مجموعه ایجاد می‌کند.

تعریف ۶۷. اگر $p(x)$ یک ویژگی مرتبه‌ی اول باشد، هر عبارتِ به صورت $\{x | p(x)\}$ را یک **کلاس** می‌نامیم (ممکن است که یک کلاس، مجموعه نباشد).

برای مثال، $\{x|x=x\}$ کلاس تمام مجموعه‌هاست. همچنین $\{x|x\notin x\}$ نیز یک کلاس از مجموعه‌هاست. پس اصل تصریح، بیانگر این است که اشتراکِ یک کلاس با یک مجموعه، یک مجموعه است.

مثال ۶۸. اگر x یک مجموعه باشد و $y\subseteq x$ آنگاه y نیز یک مجموعه است؛ زیرا می‌توان نوشت:

$$y=\{t\in x|t\in y\}.$$

تعریف ۶۹. اگر x,y دو مجموعه باشند، آنگاه، بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{x\in x|x\in y\}$$

مجموعه‌ی بالا را با $x\cap y$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۷۰. نشان دهید که در هر مدل از نظریه‌ی مجموعه‌ها، اگر x,y مجموعه باشند، داریم

- $x\cap y\subseteq x$
- $x\cap(y\cap z)=(x\cap y)\cap z$.
- $x\cap y=y\cap x$.

اثبات. مورد اول را اثبات می‌کنم و مواردِ دیگر را به عنوان تمرین به عهده‌ی خواننده می‌گذارم. فرض کنید که در یک جهان از مجموعه‌ها هستیم. برای اثبات مورد اول، بنا به تعریفِ $\subseteq$ باید نشان دهیم که

$$\forall t \quad (t\in x\cap y\to t\in x)$$

فرض کنید که $t_\cdot$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد و $t_\cdot\in x\cap y$. بنا به تعریفِ $x\cap y$ داریم

$$t_\cdot\in x\wedge t_\cdot\in y.$$

می‌دانیم که

$$p\wedge q\to p$$

یک تاتولوژی است، پس از $t_\cdot\in x\wedge t_\cdot\in y$ نتیجه می‌گیریم که $t_\cdot\in x$. □

تمرین ۳۳. برای اثبات مورد دوم،از کدام بخشِ قضیه‌ی ۲۶ باید استفاده کنیم؟

تعریف ۷۱. فرض کنید که x,y دو مجموعه باشند. بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{t\in x|t\notin y\}$$

مجموعه‌ی بالا را با $x-y$ نمایش می‌دهیم.

تمرین ۳۴. فرض کنید a, b, c مجموعه باشند، نشان دهید که

- $a \cap (b - c) = (a \cap b) - (a \cap c)$.
- $a - \emptyset = a$.

تمرین ۳۵. آیا از $x \cap y = x \cap z$ نتیجه می‌شود که $y = z$؟

تمرین ۳۶. آیا $a - (b - c) = (a - b) - c$؟

تمرین ۳۷. فرض کنید a, b, c مجموعه باشند و $a, b \subseteq c$. نشان دهید که

$$a \cap (c - b) = a - b$$

۵. اصل اجتماع:

بیان غیر رسمی: اگر a یک مجموعه باشد که از مجموعه‌های دیگری تشکیل شده است، آنگاه اجتماع مجموعه‌های موجود در a نیز یک مجموعه تشکیل می‌دهد؛ به بیان دیگر، مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً برابر با اجتماع مجموعه‌های موجود در a است. بیان رسمی:

$$\forall a \quad \exists u \quad \forall x \quad \Big(x \in u \leftrightarrow \exists b \quad (b \in a \land x \in b)\Big)$$

اگر u مجموعه‌ی بالا باشد، می‌نویسیم:

$$u = \bigcup a$$

قضیه ۷۲. فرض کنید که x, y دو مجموعه باشند. آنگاه یک مجموعه‌ی c وجود دارد به طوری که جمله‌ی زیر درست باشد:

$$\forall x \quad \big(x \in c \leftrightarrow (x \in a \lor x \in b)\big)$$

اثبات. بنا به اصل جفت‌سازی، $\{x, y\}$ یک مجموعه است. بنا به اصل اجتماع، یک مجموعه‌ی c وجود دارد، به طوری که

$$\forall t \quad (t \in c \leftrightarrow \exists t' \in \{x, y\} \quad t \in t')$$

پس برای هر t داریم

$$t \in c \leftrightarrow t \in x \lor t \in y$$

$\square$

تعریف ۷۳. مجموعه‌ی c در قضیه‌ی بالا را با $x \cup y$ نشان می‌دهیم. پس برای هر t داریم

$$t \in x \cup y \leftrightarrow t \in x \lor t \in y.$$

مثال ۷۴. اگر a, b, c مجموعه باشند، نشان دهید که $d = \{a, b, c\}$ مجموعه است. نشان دهید که $\bigcup d = a \cup (b \cup c)$.

به بیان دبیرستانی، اگر $A = \{A_۱, A_۲, A_۳\}$ آنگاه

$$\bigcup A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$$

یعنی

$$x \in \bigcup A \leftrightarrow (x \in A_۱) \vee (x \in A_۲) \vee (x \in A_۳)$$

تمرین ۳۸. با استفاده از قضیه‌ی ۲۶ نشان دهید که

- $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$.
- $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$.

مثال ۷۵ (سوال دانشجویان). فرق بین اصل جفت‌سازی و اصل اجتماع چیست؟ فرض کنید ۶ ,۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ مجموعه باشند، آنگاه

$$x = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$y = \{۴, ۵, ۶\}$$

$$x \cup y = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

$$\{x, y\} = \{\{۱, ۲, ۳\}, \{۴, ۵, ۶\}\}$$

تمرین ۳۹. آیا از $a \cup b = a \cup c$ نتیجه می‌شود که $b = c$؟

اگر a, b مجموعه باشند، آنگاه بنا به اصل تصریح هر دوی $a - b, b - a$ مجموعه هستند. بنا به اصل اجتماع، اجتماع این دو نیز مجموعه است. تعریف می‌کنیم:

$$a \Delta b = (a - b) \cup (b - a)$$

تمرین ۴۰.

- نشان دهید که $a \Delta b = (a \cup b) - (a \cap b)$.
- نشان دهید که اگر $a \Delta b = a \Delta c$ آنگاه $b = c$.

قبلاً دیدیم که $\emptyset$ یک مجموعه است. این مجموعه را با ۰ نشان می‌دهیم. همچنین دیدیم که $\{\emptyset\}$ نیز بنا به اصل جفتسازی یک مجموعه است. این مجموعه را با ۱ نشان می‌دهیم. پس $\{۰\} = ۱$. همچنین تعریف می‌کنیم:

$$۲ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

بنابراین، داریم $\{۰,۱\} = ۲$. از طرفی، بنا به اصل جفت‌سازی، $\{۱,۲\}$ یک مجموعه است. بنا به اصل اجتماع، $۱ \cup \{۲ ,۱\}$ نیز یک مجموعه است. پس $\{۱,۲,۳\}$ یک مجموعه است که آن را با ۴ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر

$$۴ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

به همین ترتیب اگر n تعریف باشد، تعریف می‌کنیم:

$$n + ۱ = \{۰, \ldots, n\}.$$

اصطلاحاً می‌گوییم که هر n که به روش بالا به دست بیاید، یک «عدد طبیعی» است. پس هر عدد طبیعی، یک مجموعه است. اما یک سوال این است که آیا گردایه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی نیز تشکیل یک مجموعه می‌دهد؟ بعداً در این درس، در این باره بیشتر صحبت خواهیم کرد.

۶. **اصل وجودِ مجموعه‌ی توان:**

بیان غیر رسمی: اگر a یک مجموعه باشد، کلاسِ تمام زیر مجموعه‌های آن نیز یک مجموعه است. به بیان دیگر، اگر a یک مجموعه باشد، آنگاه مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن، دقیقاً زیرمجموعه‌های a هستند. بیان رسمی این اصل به صورت زیر است:

$$\forall a \quad \exists b \quad \left(\forall x \quad x \in b \leftrightarrow \underbrace{\Big(\forall z \quad (z \in x \to z \in a)\Big)}_{x \subseteq a}\right)$$

توجه ۷۶. برای یک مجموعه‌ی a، گردایه‌ی تمام زیر مجموعه‌هایش را (که بنا به اصل بالا یک مجموعه است) با $P(a)$ نشان می‌دهیم؛ پس به زبان ساده:

$$P(a) = \{b | b \subseteq A\}$$

۷. **اصل جانشانی** [۸]:

تنها در درس منطق ریاضی می‌توان این اصل را به دقت تمام توضیح داد؛ با این حال، من در اینجا سعی خود را می‌کنم:

فرض کنید که a یک مجموعه باشد. همچنین فرض کنید که $\phi(x, y)$ یک فرمول مرتبه‌ی اول باشد به طوری که برای هر $x_۰ \in a$ تنها و تنها یک عنصرِ $y_۰$ موجود باشد، به طوری که فرمولِ $\phi(x_۰, y_۰)$ درست باشد. آنگاه $y_۰$ ها تشکیل یک مجموعه می‌دهند.

بیان دیگر این اصل به صورت فنی زیر است: **تصویر** یک مجموعه تحت یک **تابع تعریف‌پذیر**، مجموعه است. پرداختن به معنی «تابع تعریف‌پذیر» جزو اهداف این درس نیست، ولی در جمله‌ی بند قبل به طور

[۸] replacement

ضمنی آمده است. دانشجوی علاقه‌مند می‌تواند با این مفهوم در درس «منطق» آشنائی پیدا کند. همچنین در بخش «خانواده‌های مجموعه‌ها» در همین کتاب، دوباره به صورتی از این اصل پرداخته‌ایم.

اصل جانشانی، فقط یک اصل نیست، بلکه برای هر فرمولِ $\phi(x,y)$ باید یکبار نوشته شود.

تمرین ۴۱. بیان رسمی اصل جانشانی را برای یک فرمولِ $\phi(x,y)$ بنویسید.

۸. **اصل انتظام:** اصل انتظام، یکی از تعیین‌کننده‌ترین اصول، در شناخت مجموعه است. دقت کنید که اگر a یک مجموعه باشد، آنگاه

$$\{a\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}\}\}, \dots, \{\dots\{\{\{a\}\}\}\dots\}, \dots$$

نیز مجموعه هستند، یعنی می‌توان به هر تعدادی آکولاد در دو طرف اضافه کرد؛ ولی شگفتا که بنا به اصل انتظام، بر عکس این کار امکان‌پذیر نیست. یعنی عبارتی به صورت زیر (یعنی به صورتی که تعداد آکولادها نامتناهی باشد)، مجموعه **به حساب نمی‌آید:**

$$\left\{\left\{\{\dots\}\right\}\right\}$$

بگذارید بیان رسمی اصل را داشته باشیم تا بتوانیم آن را دقیق‌تر توضیح بدهیم:

$$\forall x \quad \left(x \neq \emptyset \to \exists z \quad z \in x \wedge z \cap x = \emptyset\right)$$

یعنی، هر مجموعه‌ای عضوی دارد که آن عضو با مجموعه‌ی یادشده اشتراکی ندارد.

قبول دارم که هنوز هم مشخص نشده است که این اصل چه می‌گوید! شاید بررسی نقیض این اصل، به فهمیدن آن کمک کند. فرض کنید که یک مجموعه‌ی x داشته باشیم که در اصل انتظام صدق نکند. پس یک مجموعه‌ی $x_۱ \in x$ موجود است به طوری که $x_۱ \cap x \neq \emptyset$. پس فرض کنید $x_۲ \in x_۱ \cap x$. باز از آنجا که x در اصل انتظام صدق نمی‌کند و $x_۲ \in x$ یک مجموعه‌ی $x_۳ \in x_۲ \cap x$ پیدا می‌شود. بدین‌طریق مجموعه‌های

$$x_۱ \ni x_۲ \ni x_۳ \dots$$

پیدا می‌شوند. در زیر این گفته را دقیق‌تر کرده‌ایم.

قضیه ۷۷. از اصل انتظام نتیجه می‌شود که در یک جهان متشکل از همه‌ی مجموعه‌ها، هیچ دنباله‌ای نامتناهی نزولی به صورت زیر از مجموعه‌ها وجود ندارد.

$$a_۱ \ni a_۲ \ni a_۳ \ni \dots$$

به بیان دقیق‌تر اگر دنباله‌ی بالا از مجموعه‌ها را داشته باشیم، آنگاه $a_۱, a_۲, \dots$ تشکیل مجموعه نمی‌دهند.

اثبات. اگر $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$ یک مجموعه باشد، آنگاه اصل انتظام نقض می‌شود. زیرا اگر $a_n \in a$ آنگاه $a_{n+1} \in a_n \cap a$. به بیان دیگر، هر عنصری که در a در نظر بگیریم با a اشتراک دارد. $\square$

حکم قضیه‌ی بالا کمی عجیب است. در واقع در نظریه‌ی مجموعه‌ها، دنباله‌هایی به صورت زیر وجود دارند:

$$a_1 \in a_2 \in a_3 \in \ldots$$

اما دنباله‌هائی به صورت زیر وجود ندارند:

$$a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ldots$$

با این حال، اگر این گفته را با ترتیب اعداد طبیعی قیاس کنید، ملموس‌تر می‌شود. در اعداد طبیعی دنباله‌های صعودی به شکل زیر وجود دارند:

$$n < n+1 < n+2 < \ldots$$

اما اگر یک عدد طبیعیِ n را در نظر بگیرید، از آن به قبل، نمی‌توان یک دنباله‌ی نزولیِ نامتناهی نوشت:

$$n > n-1 > n-2 > \ldots > 1$$

این نکته، همان‌گونه که پیش‌تر گفتم، از کلیدی‌ترین نکات در مفهوم مجموعه است.

نتیجه ۷۸. جمله‌ی زیر در نظریه‌ی مجموعه‌ها درست است:

$$\forall x \quad x \notin x$$

اثبات. فرض کنید که x_0 یک مجموعه در جهان مجموعه‌ها باشد. اگر $x_0 \in x_0$ آنگاه می‌توان یک دنباله‌ی نزولی به صورت زیر از مجموعه‌ها نوشت:

$$x_0 \ni x_0 \ni \ldots$$

ولی این کار بنا به قضیه‌ی قبل ناممکن است. $\square$

تمرین ۴۲.

(آ) نقیضِ اصل انتظام را بنویسید.

(ب) نشان دهید که در صورتی که نقیض اصل انتظام درست باشد، آنگاه یک دنباله‌ی

$$a_0 \ni a_1 \ni \ldots$$

پیدا می‌شود.

تمرین ۴۳. سعی کنید که یک نامجموعه(!) بسازید که از اصل انتظام پیروی نکند!

۹. **اصل نهم، اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی.** یکی از رازآلودترین مفاهیم در ذهن بشری، مفهوم نامتناهی است. این که آیا جهان هستی متناهی است یا نامتناهی، یکی از مهمترین سوالات بشری است که پاسخ آن، می‌تواند بسیاری از مشکلات فلسفی را حل کند. مثلاً اثبات وجود یک خالق برای یک جهان متناهی، بسیار ساده‌تر از اثبات وجود یک خالق برای جهانی نامحدود است؛ کافی است به نحوی بررسی شود که تمام موجودات آن جهان، که تعداد آنها متناهی است، توسط یک نفر خلق شده‌اند.

در نظریه‌ی مجموعه‌ها هم اثبات وجود نامتناهی برای ما ناممکن است و این که مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد، یک اصل است. اما همان گونه که در درسهای آینده خواهید دید، به محض این که ریاضیدان وجود نامتناهی را می‌پذیرد، دنیای رنگارنگی از نامتناهی‌های مختلف پیش روی او خودنمائی می‌کند. در واقع، نامتناهی در ذهن کسی که نظریه‌ی مجموعه‌ها بداند، تصویر بسیار روشن و دقیقی دارد. بگذارید فعلاً اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی را بیان کنم؛ سپس در بخش‌هائی از این درس، دوباره به طور جدی به این موضوع جذاب خواهم پرداخت.

بیان غیر رسمی: یک مجموعه‌ی نامتناهی موجود است.

بیان رسمی این اصل در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها، به شیوه‌ی هوشمندانه‌ی زیر است:

بیان رسمی:

$$\exists x \quad \Big(\emptyset \in x \wedge \forall y \quad \big(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x\big)\Big)$$

به طور خلاصه، مجموعه‌ی x که در اصل بالا بدان اشاره شده است، شامل مجموعه‌ی زیر است:

$$\Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}, \ldots\Big\}$$

۱۰. **اصل انتخاب.** اصل انتخاب، به صورت گیج‌کننده‌ای بدیهی است. عموماً حتی در اثباتهای پیشرفته‌ی ریاضی، تشخیصِ این که در کجای اثبات از اصل انتخاب استفاده شده است دشوار است. این اصل تنها بیانگر این است که اگر تعدادی مجموعه‌ی ناتهی داشته باشیم، می‌توانیم از هر کدام از آنها عضوی انتخاب کنیم!

اگر تعدادی متناهی مجموعه‌ی ناتهی، مانند $a_1, \ldots, a_5$ داشته باشیم، برای انتخاب عضو از آنها نیازی به اصل انتخاب نداریم. در واقع

$$(a_1 \neq \emptyset) \wedge \ldots \wedge (a_5 \neq \emptyset) \rightarrow \exists x_1, \ldots x_5 \quad (x_1 \in a_1) \wedge \ldots \wedge (x_5 \in a_5).$$

اما اگر به تعداد نامتناهی مجموعه‌ی ناتهی داشته باشیم، تنها با کمک اصل انتخاب می‌توانیم از آنها عضو انتخاب کنیم.

بیان غیر رسمی اصل انتخاب: اگر a یک مجموعه باشد که خودْ از مجموعه‌هائی ناتهی تشکیل شده است،

می‌توان از هر کدام از مجموعه‌های موجود در a یک عنصر انتخاب کرد. بیان رسمی: [۹]

$$\forall x \quad \Big(x \neq \emptyset \to \exists f : x \to \bigcup x \quad \forall y \in x \quad f(y) \in y\Big)$$

در زیر یک مثال از استفاده‌ی اصل انتخاب آورده‌ام.

مثال ۷۹.

$$X = \Big\{\{۱,۲\},\{۴,۵,۶\},\{۷,۸\},\{۹\}\Big\}$$

$$\bigcup X = \Big\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۸,۹\Big\}$$

$$f : X \to \bigcup X$$

$$f(\{۱,۲\}) = ۱ \quad f(\{۴,۵,۶\}) = ۶, \quad f(\{۷,۸\}) = ۷, \quad f(\{۹\}) = ۹$$

تابع f در بالا یک مثال از یک تابع انتخاب است. برای مجموعه‌ی X در بالا، توابع انتخاب دیگری نیز موجودند.

□پایان اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

۳.۳ بررسی پارادوکس راسل در زداف‌سی

گفتیم که رهیافت اصل‌موضوعه‌ای به نظریه‌ی مجموعه‌ها، برای رهائی از پارادوکسهائی مانند پارادوکس راسل برگزیده شده است. در زیر بررسی کرده‌ایم که چرا در زداف‌سی پارادوکس راسل رخ نمی‌دهد. نخست یک مشاهده‌ی مهم داشته باشیم: کلاسِ همه‌ی مجموعه‌ها، خودْ مجموعه نیست.

مشاهده ۸۰. نشان دهید که در هر جهانی از مجموعه‌ها که از اصول ZFC پیروی کند، مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها نداریم.

اثبات. روش اول، با استفاده از اصل تصریح. فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها باشد. بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$B = \{x \in A | x \notin x\}$$

حال دو حالت داریم، یا $B \in B$ یا $B \notin B$. اگر $B \in B$ آنگاه $B \in \{x \in A | x \notin x\}$ پس $B \notin B$. و به طور مشابه اگر $B \notin B$ آنگاه $B \in B$ و این تناقض است. به بیان دیگر اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها، به همراه این که کلاس همه‌ی مجموعه‌ها، مجموعه باشد، تناقض‌آمیز است.

[۹] شاید خواننده‌ی هوشیار بگوید که با چه حقی جمله‌ی $\exists f$ را در منطق مرتبه‌ی اول نوشته‌ایم؛ مگر در منطق مرتبه ی اول، نباید سورها تنها روی متغیرها اثر کنند؟ سوال بسیار خوبی است. در واقع اصل بالا را باید به صورت زیر نوشت: یک مجموعه وجود دارد که تابع است و ویژگی انتخاب را داراست! مفصل‌تر و دقیق‌تر این گفته‌ها را در درس منطق آورده‌ام.

روش دوم (با استفاده از اصل انتظام). فرض کنیم کلاسِ همه‌ی مجموعه‌ها، یک مجموعه باشد؛ آن را A بنامیم. پس از آنجا که A یک مجموعه است و A کلاس متشکل از همه‌ی مجموعه‌هاست پس $A \in A$. اما این بنا به نتیجه‌ی ۷۸ با اصل انتظام در تناقض است.

□

حال به این سوال می‌پردازیم که آیا پارادوکس راسل، در جهانی از نظریه‌ی مجموعه‌ها که از اصول ZFC پیروی کند نیز ممکن است رخ بدهد؟

پاسخ. عبارت $\{x|x \notin x\}$، بنا به اصل انتظام، کلاس همه‌ی مجموعه‌هاست. پس مجموعه نیست! یعنی از اصول زدافسی پیروی نمی‌کند (که بخواهد با آنها تناقض بدهد). □

۴.۳ آیا مجموعه‌ای وجود دارد؟

سوال بالا را باید به صورت زیر دقیقتر کرد: آیا جهانی از مجموعه‌ها وجود دارد؟

جهان مجموعه‌ها تنها در صورتی می‌تواند وجود داشته باشد که اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها با هم تناقض ندهند. زیرا در یک جهان واقع تناقض نباید وجود داشته باشد.

در بخش قبل بررسی کردیم که تناقض راسل در نظریه‌ی مجموعه‌های زدافسی رخ نمی‌دهد، اما این بدین معنی نیست که هیچ تناقض دیگری نیز در زدافسی رخ نمی‌دهد.

یک سوال منطقی دیگر این است که آیا اگر اصول زدافسی متناقض نباشند، هر قضیه‌ای در ریاضیات که در منطق مرتبه‌ی اول بیان شود، لزوماً از طریق آنها اثبات می‌شود؟ (مشابه آنچه برای هندسه‌ی اقلیدسی گفتیم).

پاسخ این دو سوال به هم مربوط است. قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل، که آن را در درس منطق ثابت می‌کنیم، بیانگر این است که اگر اصول زدافسی با هم تناقض ندهند، یعنی اگر جهانی متشکل از همه‌ی مجموعه‌ها وجود داشته باشد، آنگاه قضایایی در ریاضی وجود دارند که از اصول زدافسی نتیجه نمی‌شوند. یکی از این قضایا، خودِ همین تناقض ندادنِ زدافسی است. یعنی گودل اثبات کرده است که اگر اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها با هم تناقض ندهند، این که آنها با هم تناقض نمی‌دهند را، نمی‌توان با استفاده از همان اصول ثابت کرد! [۱۰]

۵.۳ مجموعه‌ی مرجع و جبر بولی مجموعه‌ها

احتمالاً در دبیرستان خوانده‌اید که مجموعه‌ای به نام **مجموعه‌ی مرجع** وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند. در زیر درستی این گفته را بررسی می‌کنیم. در بخشهای قبل ثابت کردیم که از اصول زدافسی نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

---

[۱۰] انتظار ندارم که این قضیه را به طور کامل در این جا متوجه شوید. اگر مسئله ذهنتان را درگیر کرده است حتما درس منطق ریاضی را اخذ کنید.

سوال ۵. آیا مجموعه‌ای وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها، زیر مجموعه‌ی آن باشند؟

پاسخ. فرض کنید C مجموعه‌ای باشد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند. بنابراین بنا به اصل اجتماع، $\bigcup C$ نیز یک مجموعه است. ادعا می‌کنیم که $\bigcup C$ شامل همه‌ی مجموعه‌هاست، و این تناقض است، زیرا مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.
فرض می‌کنیم A یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم که $A \in \bigcup C$. برای اثبات این ادعا باید نشان دهیم که $D \in C$ موجود است، به طوری که $A \in D$. می دانیم که $\{A\}$ بنا به اصل زوج‌سازی یک مجموعه است و $A \in \{A\}$ ادعا می‌کنیم که $\{A\} \in C$. می‌دانیم که $\{\{A\}\}$ نیز یک مجموعه است. بنا به فرضمان درباره‌ی C داریم

$$\{\{A\}\} \subseteq C$$

پس

$$\{A\} \in C.$$

□

پس این ادعّا که مجموعه‌ای مرجع وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند درست نیست.
اما نیاز به داشتن یک مجموعه‌ی «به‌اندازه‌ی‌کافی‌بزرگ» را چگونه برطرف کنیم؟ می‌دانیم که بنا به اصل اجتماع، اجتماع هر تعداد (کم!) از مجموعه، یک مجموعه است. فرض می‌کنیم که U یک مجموعه باشد که **همه‌ی مجموعه‌هایی که ادامه‌ی این درس درباره‌ی آنها صحبت خواهیم کرد،** زیر مجموعه‌ی آن باشند. کافی است U را اجتماع همه‌ی مجموعه‌هائی بگیریم که در این کتاب بدانها اشاره شده است. پس بیایید U را مجموعه‌ی مرجع بنامیم.
اکثر قضایای دبیرستانی نظریه‌ی مجموعه‌ها، از قضیه‌ی زیر نتیجه می‌شود. قضیه‌ی زیر نیز، خود با استفاده از قضیه‌ی ۲۶ اثبات می‌شود. قبلاً مجموعه‌ی $a - b$ را تعریف کرده‌ایم. حال تعریف می‌کنیم:

$$a^c = U - a.$$

قضیه‌ی زیر همه‌ی محتوایِ منطق‌گزاره‌ای نظریه‌ی مجموعه‌ها را دربردارد:

قضیه ۸۱. مجموعه‌ی مرجعِ U به همراه عملهایِ $\cup, \cap, ^c$ و مجموعه‌های $\emptyset, U$ تشکیل یک جبر بولی می‌دهد (که بدان جبر بولی مجموعه‌ها گفته می‌شود). به بیان دیگر، همه عبارتهای زیر برقرار هستند: (دقت کنید که استفاده از فلش دوخطه بدین دلیل است که این ویژگی‌ها در هر جهانی از نظریه‌ی مجموعه‌ها درست است).

۱. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$

۲. $a \cap (b \cap c) \Leftrightarrow (a \cap b) \cap c$

۳. $(a \cup b) = (b \cup a)$.

۴. $(a \cap b) = (b \cap a)$.

۵. $(a \cap b) \cup (a \cap c) = a \cap (b \cup c)$.

۶. $(a \cup b) \cap (a \cup c) = a \cup (b \cap c)$.

۷. $a = a \cup \emptyset$

۸. $\emptyset = a \cap \emptyset$

۹. $a = a \cap U$.

۱۰. $U = a \cup U$.

۱۱. $a = a \cup a$

۱۲. $a = a \cap a$.

۱۳. $a = a \cap (a \cup b)$.

۱۴. $a = a \cup (a \cap b)$.

۱۵. $\emptyset = a \cap a^c$

۱۶. $U = a \cup a^c$.

۱۷. $a = (a^c)^c$.

۱۸. $a^c \cup b^c = (a \cap b)^c$.

۱۹. $a^c \cap b^c = (a \cup b)^c$.

تعریف ۸۲. برای هر مجموعه A تعریف کنید:

$$A^c = U - A$$

تمرین ۴۴. نشان دهید که

$$A - B = A \cap B^c$$

اکثر ویژگی‌های ساده‌ی مجموعه‌ها از قضیه‌ی بالا نتیجه می‌شوند. برای مثال در زیر نشان داده‌ایم که $a \cap U = a$.

اثبات. مورد دوم: بنا به اصل گسترش، برای این که نشان دهیم که $a \cap U = a$ باید ثابت کنیم که

$$\forall x \quad (x \in a \cap U \leftrightarrow x \in a)$$

مجموعه‌ی دلخواه $x_\circ$ را در نظر بگیرید. باید نشان دهیم:

$$x_\circ \in a \cap U \leftrightarrow x_\circ \in a$$

طبق تعریف اشتراک داریم:

$$x_\circ \in a \cap U \leftrightarrow (x_\circ \in a) \wedge (x_\circ \in U)$$

پس کافی است نشان دهیم که

$$(x_\circ \in a) \wedge (x_\circ \in U) \leftrightarrow x_\circ \in a.$$

می‌دانیم که عبارت زیر یک تاتولوژی است:

$$p \wedge q \to p$$

پس داریم:

$$(x_\circ \in a) \wedge (x_\circ \in U) \to x_\circ \in a$$

همچنین از آنجا که $A \subseteq X$ داریم

$$x_\circ \in a \to x_\circ \in U$$

عبارت زیر تاتولوژی است:

$$(p \to q) \to \big(p \to (p \wedge q)\big)$$

پس

$$x_\circ \in a \to (x_\circ \in a) \wedge (x_\circ \in U)$$

□

مثال ۸۳. نشان دهید که برای هر مجموعه‌ی A ، B و C داریم:

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

پاسخ. بنا به اصل گسترش، کافی است نشان دهیم:

$$\text{(۱)} \quad A \cap (B - C) \subseteq (A \cap B) - (A \cap C)$$

و

$$\text{(۲)} \quad (A \cap B) - (A \cap C) \subseteq A \cap (B - C)$$

□

اثبات. برای اثبات موارد (۱) و (۲) باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad \big(x \in A \cap (B - C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) - (A \cap C)\big)$$

فرض کنید x یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. از قضیه‌ی ۲۶ استفاده می‌کنیم:

$$x \in A \cap (B - C) \iff (x \in A) \wedge (x \in B - C) \iff$$

$$(x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \iff$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \iff$$

$$x \in (A \cap B) \wedge (x \notin A \cap C) \iff$$

$$x \in (A \cap B) - (A \cap C)$$

□

دقت کنید که در اثبات بالا از تاتولوژی زیر در منطق گزاره‌ها استفاده شد:

- $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$.

قضیه‌ی بالا را می‌شد مستقیماً با استفاده از قضیه‌ی قبلی ثابت کرد:

$$(a \cap b) - (a \cap c) = (a \cap b) \cap (a \cap c)^c =$$
$$(a \cap b) \cap (a^c \cup c^c) =$$
$$((a \cap b) \cap a^c) \cup (a \cap b \cap c^c) = a \cap (b - c).$$

تمرین ۴۵. نشان دهید که

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

تمرین ۴۶. تعریف می‌کنیم

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

فرض کنید که A یک مجموعه باشد و $X = P(A)$. نشان دهید که $(X, \oplus)$ یک گروه آبلی [۱۱] است؛ یعنی موارد زیر را نشان دهید:

۱. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B \in X$

۲. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B = B \oplus A$

[۱۱] با مفهوم گروه آبلی در درس مبانی جبر آشنا خواهید شد. گروه آبلی یک مجموعه است که روی آن یک عمل جمع وجود دارد که آن عمل ویژگی‌های مطلوب جمع(شبیه ویژگی‌هائی که در این تمرین فهرست شده‌اند)را داراست.

۳. $\forall A, B, C \in X \quad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

۴. $\forall A \quad A \oplus \emptyset = A$

۵. $\forall A \quad A \oplus A = \emptyset$

در واقع در تمرین بالا نشان داده‌اید که $\oplus$ ویژگی‌هائی شبیه جمع اعداد دارد. هر چند در بالا این که

$$A \oplus A = \emptyset$$

با درک ما نسبت به جمع اعداد سازگار نیست!

تمرین ۴۷. نشان دهید که

۱. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

۲. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

۳. $A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

۴. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$

۵. $A \cup B = A \cap B \iff A = B$

۶. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

مثال ۸۴. آیا عبارت زیر درست است؟

$$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$$

پاسخ. مثال نقض.

$$A = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$B = \{۲\}$$

$$C = \{۳\}$$

داریم

$$A \cup B = A \cup C \wedge \neg B = C$$

$\square$

مثال ۸۵. اگر $A \cap B = \emptyset$، $A \cup B = C$، $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آنگاه نشان دهید که

$$A = C - B$$

پاسخ. بنا بر اصل گسترش کافی است اثبات کنیم که

۱. $A \subseteq C - B$ و

۲. $C - B \subseteq A$.

برای اثبات (۱) باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad \big(x \in A \to x \in (C - B)\big) \quad *$$

برای اثبات $*$ کافی است $x_\circ$ دلخواه در نظر گرفته نشان دهیم:

$$x_\circ \in A \to x_\circ \in (C - B)$$

پس فرض می‌کنیم $x_\circ \in A$. از آنجا که طبق فرض صورت سؤال $A \subseteq C$، داریم:

$$x_\circ \in C \quad ☺$$

همچنین داریم:

$$\big(x_\circ \in A \wedge A \cap B = \emptyset \to x_\circ \notin B\big) \quad ☺☺$$

پس بنا به ☺☺ و ☺ داریم

$$x_\circ \in C - B.$$

اثبات (۲)

$$x_\circ \in C - B \Rightarrow x_\circ \in C \wedge x_\circ \notin B$$

از آنجا که $C = A \cup B$ پس

$$(x_\circ \in A \cup B) \wedge (x_\circ \notin B) \Rightarrow (x_\circ \in A \vee x_\circ \in B) \wedge (x_\circ \notin B)$$

$$\Rightarrow x_\circ \in A$$

□

مثال ۸۶. آیا $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ ؟

پاسخ. در زیر نشان داده‌ایم که حکم بالا برقرار نیست، هر چند عبارت ۱ در پایین برقرار است. نخست ثابت می‌کنیم که

$$(1) \quad P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

عبارت بالا را با روش استنتاجی زیر ثابت می‌کنیم:

۱ $c \in P(A) \cup P(B) \to c \in P(A) \vee c \in P(B)$

۲ $c \in P(A) \to c \subseteq A$

۳ $A \subseteq A \cup B$

۴ $c \in P(A) \to c \subseteq A \cup B$ بنا به ۲, ۳

۵ $c \in P(B) \to c \subseteq A \cup B$ تکرار ۲و۳و۴ برای B به جای A

۶ $c \in P(A) \vee c \in P(B) \to c \subseteq A \cup B$ بنا به ۴و۵

۷ $c \in P(A) \cup P(B) \to c \in P(A \cup B)$. $\square$

حال فرض کنید $c \in P(A \cup B)$. آنگاه $c \subseteq A \cup B$. می‌خواهیم ببینیم که آیا $c \in P(A) \cup P(B)$؟ داریم:

$$** \quad c \in P(A) \cup P(B) \Leftrightarrow c \in P(A) \vee c \in P(B)$$
$$\Leftrightarrow c \subseteq A \vee c \subseteq B$$

پس سوال بالا معادل با سوال زیر است:

آیا $c \subseteq A \cup B \to (c \subseteq A) \vee (c \subseteq B)$؟ حکم بالا غلط است. برای مثال اگر بگیریم

$$A = \{۱, ۲\} \quad B = \{۳, ۴\}$$

و

$$c = \{۲, ۳\}$$

آنگاه

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

بنابراین این حکم که

$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

غلط است. $\square$

مثال ۸۷. نشان دهید که $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ اگر و تنها اگر $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.

پاسخ. حکم: ۱ اگر $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ آنگاه $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.
و ۲ اگر $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ آنگاه یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.
اثبات ۲. برای اثبات مورد دوم عبارت معادل زیر را ثابت می‌کنیم:

اگر نه $B \subseteq A$ و نه $A \subseteq B$ آنگاه $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$.
اگر $B \nsubseteq A$ و $A \nsubseteq B$ آنگاه

$$\exists y \in B - A$$

و

$$\exists x \in A - B.$$

فرض کنید $y_\circ \in B - A$ و $x_\circ \in A - B$. حال توجه کنید که

$$\{x_\circ, y_\circ\} \notin P(A), \quad \{x_\circ, y_\circ\} \notin P(B) \quad \{x_\circ, y_\circ\} \in P(A \cup B).$$

اثبات ۲. اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cup B = B$ و $P(A) \subseteq P(B)$ (چرا؟). پس

$$P(A \cup B) = P(B) = P(A) \cup P(B)$$

$\square$

فصل ۴

اعداد طبیعی و استقراء در منطق مرتبه‌ی اول

یکی را از حکما شنیدم که می‌گفت: «هرگز کسی به جهل خویش اقرار نکرده است، مگر آن کس که
چون دیگری در سخن باشد، همچنان ناتمام گفته، سخن آغاز کند.»
سخن را سر است ای خردمند و بُن
میاور سخن در میان سُخُن
خداوند تدبیر و فرهنگ و هوش
نگوید سخن تا نبیند خموش
سعدی

روشی که زِرمِلو برای تعریف هر عدد طبیعی پیشنهاد کرده است، روش زیر است:

$$
\begin{aligned}
۰ &= \emptyset \\
۱ &= \{۰\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \\
۲ &= \{۰, ۱\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
۳ &= \{۰, ۱, ۲\} = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

پس هر عدد طبیعیِ n در تعریف زرملو (با استفاده از اصول زدافسی ثابت می‌شود که) یک مجموعه است. همچنین همانطور که در بالا مشاهده می‌کنید:

$$n + ۱ = n \cup \{n\}.$$

اما سوال این است که آیا

$$\{۰, ۱, \ldots\}$$

یک مجموعه است؟ معمولاً عبارت بالا را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{N} = \{۰, ۱, \ldots\}.$$

یعنی آیا می‌توان با اصول زدافسی ثابت کرد که عبارت بالا یک مجموعه است؟

سوال بالا سوال پیچیده‌ای است. در زیر به تعریف دقیق اعداد طبیعی پرداخته‌ام و پس از آن توضیح مختصری درباره‌ی علت پیچیدگی سوال بالا داده‌ام.

یادآوری می‌کنم که اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی به صورت زیر بود:

$$\exists x \quad \big(\emptyset \in x \wedge \forall y \quad (y \in x \to y \cup \{y\} \in x)\big)$$

بیایید برای سادگی، فرمولِ داخل پرانتز را با $\phi(x)$ نشان دهیم. به هر مجموعه‌ی x که در شرط $\phi(x)$ صدق کند، یک مجموعه‌ی استقرائی گفته می‌شود. پس اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی می‌گوید که

$$\exists x \quad \phi(x).$$

یعنی یک مجموعه‌ی استقرائی وجود دارد. به بیان دیگر، این اصل می‌گوید که

$$\{x|\phi(x)\}$$

یک مجموعه است و این مجموعه ناتهی است.

قضیه ۸۸ (تعریف و قضیه)**.** تنها یک مجموعه وجود دارد که زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های استقرائی است. به این مجموعه، مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌گوییم و آن را با ω نشان می‌دهیم.

اثبات. بنا به اصل وجودِ یک مجموعه‌ی نامتناهی، یک مجموعه‌ی a موجود است به طوری که $\phi(a)$ برقرار است. پس بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{x \in a|\forall y \quad \Big(\big(\underbrace{\emptyset \in y \wedge \forall z \quad (z \in y \to z \cup \{z\} \in y)}_{\phi(y)}\big) \to x \in y\Big)\}$$

عبارت بالا در واقع مجموعه‌ی زیر را نشان می‌دهد:

$$\omega = \{x \in a| \text{است } x \text{ هر مجموعه‌ی استقرائی شاملِ}\}$$

□

کلاس همه‌ی مجموعه‌های استقرائی را در نظر بگیرید:

$$E = \{x|\phi(x)\}$$

بنا به قضیه‌ی بالا

$$\omega = \bigcap E$$

به بیان دیگر، اشتراک تمام مجموعه‌های استقرائی، مجموعه‌ی ω است که به آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی گفته می‌شود.

توجه ۸۹. در اینجا می‌خواهم یک نکته‌ی بسیار گیج‌کننده را، برای مدرسین مبانی ریاضی بیان کنم [۱] و آن تفاوت میانِ ω و $\mathbb{N}$ است. گفتم که

$$\mathbb{N} = \{۰, ۱, \ldots\}$$

از طرفی نیز گفتم که از اصولِ زدافسی نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی ω وجود دارد.

در واقع در هر مدلی از نظریه‌ی مجموعه‌ها، یک مجموعه‌ی ω (یعنی یک مجموعه از اعداد طبیعی) وجود دارد. شاید این مجموعه، همان اعداد طبیعی آشنا نباشد (مثلا شاید در این مجموعه،اعداد طبیعی بی‌نهایت بزرگ وجود داشته باشند). اما در مدلهای «خوش‌بنیاد» نظریه‌ی مجموعه‌ها، ω همان $\mathbb{N}$ است. در ادامه‌ی این درس، با خیال راحت $\omega, \mathbb{N}$ را یکی گرفته‌ایم.

پیش از بیان قضیه‌ی استقراء مرتبه‌ی اول، یادآوری می‌کنم که اگر x یک عدد طبیعی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$x + ۱ = x \cup \{x\}.$$

قضیه ۹۰ (استقراء مرتبه‌ی اولِ اعداد طبیعی)**.** فرض کنید $p(x)$ یک ویژگی برای اعداد طبیعی باشد که در منطق مرتبه‌ی اول و در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها نوشته شده است. آنگاه جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست است: [۲]

$$p(۰) \wedge \forall x \quad \Big(p(x) \rightarrow p(x+۱)\Big) \rightarrow \forall y \quad p(y)$$

اثبات. فرض کنید جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست باشد.

$$p(۰) \wedge \forall x \quad \Big(p(x) \rightarrow p(x+۱)\Big)$$

هدف: نشان دادن این که جمله‌ی زیر در اعداد طبیعی درست است:

$$\forall x \quad p(x)$$

بنا به اصل تصریح عبارت زیر یک مجموعه است:

$$S = \{x \in \mathbb{N} | p(x)\}$$

واضح است که $S \subseteq \mathbb{N}$. اگر نشان دهیم که $\mathbf{N} \subseteq S$. در آن صورت برای تمام اعداد طبیعی، حکمِ p درست خواهد بود و اثبات به پایان خواهد رسید.

گفتیم که $\mathbb{N}$ زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی استقرائي است. پس کافی است نشان دهیم که S یک مجموعه‌ی استقرائی است.

---

[۱] انتظار درک این گفته را از دانشجویان ترم اول ندارم!

[۲] در اصلبندی مرتبه‌ی اول نظریه‌ی مجموعه‌ها، استقراء را برای ویژگی‌های مرتبه‌ی اول می‌نویسیم؛ با این حال در اصل‌بندی مرتبه‌ی دوم نظریه‌ی مجموعه‌ها، که در اواخر این درس بدان پرداخته‌ایم، استقراء را برای همه‌ی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی می‌نویسیم. بدین‌صورت که هر زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی که شامل ۰ باشد و اگر شامل عنصری باشد، حتما شامل تالی آن باشد، برابر با خودِ اعداد طبیعی است.

اولاً $\text{۰} \in S$. ثانیاً اگر $x \in S$ آنگاه

$$x + \text{۱} := x \cup \{x\} \in S$$

پس S استقرائی است. $\square$

در قضیه‌ی بالا در واقع «استقراء» را برای اعداد طبیعی ثابت کرده‌ایم. یعنی ثابت کرده‌ایم که اگر p حکمی درباره‌ی اعداد طبیعی باشد و $p(\text{۰})$ برقرار باشد و از برقراری هر $p(x)$ برقراریِ $p(x+\text{۱})$ نتیجه شود، آنگاه حکم مورد نظر برای تمام اعداد طبیعی درست است. استقراء را می‌توان به صورت دقیق‌تر زیر نیز نوشت:

فرض کنید $S \subseteq \mathbb{N}$ به گونه‌ای باشد که

$$\text{۰} \in S \wedge \forall x \quad (x \in S \to x + \text{۱} \in S)$$

آنگاه $S = \mathbb{N}$.

از استقراء گاهی برای **تعریف** های مربوط به اعداد طبیعی نیز استفاده می‌کنیم: [3]

تعریف ۹۱. جمع اعداد طبیعی توسط استقراء به صورت زیر تعریف می‌شود: [4]

$$x + \text{۰} = x$$
$$x + (n + \text{۱}) = (x + n) + \text{۱}$$

همچنین ضرب اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m \times \text{۰} = \text{۰}$$
$$m \times (n + \text{۱}) = m \times n + \text{۱}.$$

تابعِ فاکتوریل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{۰}! = \text{۱}$$
$$(n + \text{۱})! = (n + \text{۱}) \times n!$$

به همین ترتیب، توان‌رسانی اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m^{\text{۰}} = \text{۱}$$
$$m^{n+\text{۱}} = m \times m^n.$$

[3] برای اثبات این که ضرب اعداد حقیقی در زدافسی قابل تعریف است، نیاز به تعمیمی از استقراء، به نام قضیه‌ی بازگشت داریم. قضیه‌ی ۲۳۴ در جزوه‌ی منطقم را ببینید.

[4] در واقع تابعهای جمع و ضرب و توان، در اعداد طبیعی «تعریف‌پذیر» هستند. یعنی فرمولی در نظریه‌ی مجموعه‌ها پیدا می‌شود که $x + y = z$ را وصف کند. اثبات این گفته نیز به اثبات استقراء تعمیم یافته دارد که در اینجا بدان نپرداخته‌ام. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند این گونه قضایا را در جزوه‌ی مبانی منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها (از خودم) بیابد.

به مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ به همراه توابعِ جمع و ضرب در بالا، «ساختارِ اعداد طبیعی» گفته می‌شود. ساختار اعداد طبیعی را به صورتِ $(\mathbb{N}, +, \times)$ نشان می‌دهند. برای اعداد طبیعی، ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \quad (x < y \iff x \in y)$$

مشابه مجموعه‌ها، برای اعداد طبیعی نیز یک سری اصول‌موضوعه نوشته می‌شود که به آنها اصول پئانو گفته می‌شود. این اصول، قوانین جمع و ضرب اعداد طبیعی را به همراه قانون استقراء (مشابه قضیه‌ی ۹۰) بیان می‌کنند. در واقع اصول پئانوی مرتبه‌ی اول بیانگر این هستند که هر مجموعه‌ای که شبیه به اعداد طبیعی شامل ۰ باشد و جمع و ضربی شبیه اعداد طبیعی بین اعضایش وجود داشته باشد و در آن استقراء نیز درست باشد، بدان یک مجموعه از اعداد طبیعی گفته می‌شود.

تعریف ۹۲. فرض کنید a یک مجموعه باشد. می‌گوییم a یک مجموعه‌ی n عضوی است هرگاه فرمول زیر درست باشد:

$$\exists x_{1}, \ldots, x_n \quad (x_{1} \in a \wedge \ldots \wedge x_n \in a \wedge \forall t \quad (t \in a \rightarrow t = x_{1} \vee \ldots \vee t = x_n)).$$

به عنوان مثال، مجموعه‌ی $\{1, 2, 3\}$ و مجموعه‌ی $\{0, 1, 2\}$ هر دو سه عضوی هستند.

تمرین ۴۸. فرض کنید که a یک مجموعه‌ی n عضوی باشد و $r \leq n$. نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های r عضویِ a برابر است با

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

تمرین ۴۹. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n داریم

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^{1} + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{1}b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

و از آن نتیجه بگیرید که

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

نتیجه ۹۳. فرض کنید که a یک مجموعه‌ی n عضوی باشد. واضح است که داریم:
تعداد زیرمجوعه‌های a برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی a به علاوه‌ی تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی a به علاوه ...تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی a. به بیان دیگر، تعداد زیرمجموعه‌های a برابر است با

$$\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n}$$

بنا به تمرینهای قبلی، **تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر با 2^n است.**

گفته‌ی بالا را می‌توان با روشهای علم احتمال ساده‌تر ثابت کرد. فرض کنید مجموعه‌ی a دارای n عضو باشد و y یک زیرمجموعه از a باشد. برای هر عنصرِ $x \in a$ دو حالت داریم؛ یا $x \in y$ یا $x \notin y$. پس حداکثر 2^n زیرمجموعه‌ی متفاوت از a وجود دارند.

تمرین ۵۰. احکام زیر را با استقراء ثابت کنید.

۱. برای هر عدد طبیعیِ n عددِ $n^۳ - n$ بر ۳ بخش پذیر است.

۲. برای هر عدد طبیعیِ $n \geq ۱۰$ داریم $n^۳ \leq ۲^n$.

۳. برای هر عدد طبیعیِ $n \geq ۴$ داریم $n! > ۲^n$.

۴. برای هر عدد طبیعیِ n عددِ $۳^{n+۲} + ۲^{۴n+۲}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۵. برای هر عدد طبیعیِ $n \geq ۱$ داریم

$$۱ + ۲ + \ldots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$۱^۲ + ۲^۲ + \ldots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

$$۱^۳ + ۲^۳ + \ldots + n^۳ = \big(\frac{n(n+۱)}{۲}\big)^۲ = (۱ + ۲ + \ldots + n)^۲.$$

همان طور که گفتیم استقراء در اعداد طبیعی بیانگر این است که اگر حکمی درباره‌ی عدد ۰ درست باشد، و از درست بودن آن حکم درباره‌ی عددِ n درست بودن آن درباره‌ی عددِ $n + ۱$ نتیجه شود، آنگاه آن حکم برای هر عددِ طبیعیِ n درست است. در واقع، با استفاده از استقراء، می‌توان حکمی را درباره‌ی هر عدد طبیعی ثابت کرد، ولی نمی‌توان با استفاده از استقراء، حکمی را درباره‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی ثابت کرد. مثلاً عددِ ۰ یک مجموعه‌ی متناهی است؛ اگر n یک مجموعه‌ی متناهی باشد آنگاه $n + ۱$ هم متناهی است؛ از این نتیجه می‌شود که هر عدد طبیعیِ n یک مجموعه‌ی متناهی است؛ اما نتیجه نمی‌شود که مجموعه‌ی اعداد طبیعی متناهی است!

برای فهم بهتر گفته‌ی بالا مثال پیش رو را در نظر بگیرید. فرض کنید که صفی از افراد مقابل ما قرار دارد. نفر اول صف، عینکی است و می‌دانیم که هر کس که عینکی باشد، نفر پس از او نیز عینکی است. از این تنها نتیجه‌ای که می‌شود گرفت این است که هر یک از افرادی که در صف ایستاده است ، عینکی است؛ ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که خودِ صف عینک دارد!

تمرین ۵۱. نشان دهید که هر زیرمجموعه از مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای یک عنصر مینی‌موم است. (راهنمائی. دقت کنید که ترتیب اعداد طبیعی به صورت زیر است:

$$x < y \Leftrightarrow x \in y$$

فرض کنید که زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی وجود داشته باشد که دارای عنصر مینی‌موم نیست؛ نشان دهید که در این صورت یک دنباله‌ی نزولیِ

$$a_۰ \ni a_۱ \ni \ldots$$

از مجموعه‌ها پیدا می‌شود و این اصل انتظام را نقض می‌کند.)

تمرین ۵۲. استقراء را با استفاده از این نکته که هر زیرمجموعه از اعداد طبیعی دارای کوچکترین عنصر است ثابت کنید. (راهنمائی: فرض کنید که $S \subseteq \mathbb{N}$ شامل ۰ باشد و از این که شامل n است نتیجه شود که شامل $n+۱$ است. حال فرض کنید a کوچکترین عدد طبیعی‌ای باشد که $a \notin S$. چنین عددی وجود دارد زیرا $\mathbb{N} - S \subseteq \mathbb{N}$ دارای عنصر مینی‌موم است. اثبات را شما ادامه دهید).

تمرین ۵۳. نشان دهید که بزرگترین عدد طبیعی وجود ندارد.

تمرین ۵۴. فرض کنید $A, B_۱, \ldots, B_n$ مجموعه باشند. با استفاده از استقراء نشان دهید که

$$A \cap (B_۱ \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_۱) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

و

$$A \cup (B_۱ \cap \ldots \cap B_n) = (A \cup B_۱) \cap \ldots \cap (A \cup B_n)$$

تمرین ۵۵. هر عدد طبیعیِ مخالفِ صفر، دارای یک ماقبل طبیعی است. یعنی

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \neq ۰ \rightarrow \exists n' \in \mathbb{N} \quad n = n' + ۱)$$

یکی از سوالات معروف در ریاضیات قرن بیستم، نوشتن یک دستگاه کامل از اصول موضوعه برای اعداد طبیعی بود. سوالْ دقیقاً این بود که آیا می‌شود یک سری اصول موضوعه پیدا کرد که هر قضیه‌ای درباره‌ی اعداد طبیعی، از آن اصول (با کمک استنتاجهای منطقی) نتیجه شود؟

پاسخ منفی به این سوال را منطقدانی به نام گودل داده است: هر دستگاهی از اصول که برای اعداد طبیعی نوشته شود از دو حالت خارج نیست:

- یا یک دستگاه تناقض‌آمیز است؛ یعنی دو قضیه‌ی متناقض از اصول آن نتیجه می‌شوند؛
- یا (اگر متناقض نباشد) کامل نیست؛ یعنی یک قضیه‌ی درباره‌ی اعداد طبیعی پیدا می‌شود که از این اصول نتیجه نمی‌شود.

اعداد طبیعی دارای یک اصل‌بندی در منطق مرتبه‌ی دوم نیز هستند که در بخشهای آینده‌ی درس بدان اشاره خواهیم کرد.

فصل ۵

خانواده‌های مجموعه‌ها

فهم سخن گر نکند مستمع
قوّت طبع از متکلم مجوی
فُسحَتِ میدان ارادت بیار
تا بزند مردِ سخنگوی، گوی
سعدی

گفتیم که یکی از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها، اصل جانشانی است. مثل همیشه فرض کنید V جهان همه‌ی مجموعه‌ها باشد. اصل جانشانی، بیانگر این است که اگر Γ یک مجموعه باشد و $f : \Gamma \to V$ یک تابع باشد، [1] آنگاه گردایه‌ی $\{f(\gamma)|\gamma \in \Gamma\}$ تشکیل یک مجموعه می‌دهد. دقت کنید که هر $f(\gamma)$ یک مجموعه است. گردایه‌ای $\{f_\gamma|\gamma \in \Gamma\}$ را یک خانواده از مجموعه‌ها، با مجموعه‌ی اندیسِ Γ می‌نامیم.

به بیان ساده‌تر فرض کنید Γ یک مجموعه باشد و برای هر $\gamma \in \Gamma$ یک مجموعه‌ی A_γ را در نظر بگیرید. عبارت زیر را ، یک خانواده‌ی اندیس‌دار از مجموعه‌ها می‌خوانیم:

$$\{A_\gamma|\gamma \in \Gamma\} = \{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

نکته‌ی مهم در تعریف خانواده، این است که اندیسهای آن از یک **مجموعه** می‌آیند؛ به بیان دیگر، یک خانواده از مجموعه‌ها، به اندازه یک کلاس از مجموعه‌ها، بزرگ نیست. در واقع برای این که $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ یک خانواده از مجموعه باشد، اولا باید این را بدانیم که Γ یک مجموعه است.

نکته‌ی مهم دیگر در تعریف خانواده‌ها این است که ممکن است برخی از اعضای یک خانواده از مجموعه‌ها تکراری باشند: $A_\gamma = A_{\gamma'}$. مثلاً عبارت زیر یک خانواده از مجموعه‌هاست.

$$A = \{a, a, a, a\}$$

[1] درباره‌ی مفهوم تابع بعداً صحبت خواهم کرد. از آنجا که V مجموعه نیست، بهتر است f را شبه‌تابع بنامیم.

خانواده‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر اندیس‌گذاری کرد:

$$A = \{A_i\}_{i \in I} \quad I = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \quad \forall i \in I \quad A_i = a$$

سومین نکته‌ی مهم در تعریف خانواده این است که خانواده‌ها را باید بتوان بر حسب اندیسهایشان وصف کرد. برای مثال،

$$F = \{\{۱\}, \{۲, ۳\}, \{۳, ۴, ۵\}, \{۴, ۵, ۶, ۷\}, \ldots\}$$

یک خانواده از مجموعه است که به صورت زیر وصف می‌شود:

$$F = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N} - \{۰\}}$$

و

$$A_i = \{i, i + ۱, \ldots, i + (i - ۱)\}.$$

[۲]

تعریف ۹۴. فرض کنید $F = \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\bigcup F = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \exists \gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

$$\bigcap F = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \forall \gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

تا اینجای درس با مجموعه‌ی اعداد طبیعی آشنا شده‌ایم. در درسهای آینده، به مجموعه‌های اعداد صحیح، گویا و حقیقی را به طور دقیق معرفی خواهیم کرد. اما پیش از آن، بیایید مجموعه‌ی اعداد حقیقی را همان بگیریم که شما از دبیرستان می‌شناسید.

یکی از ویژگیهای مهم مجموعه‌ی اعداد حقیقی، ویژگی ارشمیدسی است. ویژگی ارشمیدسی بیانگر این است که هیچ عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر باشد. به بیان خانواده‌ها:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N} - \{۰\}} (n, \infty) = \emptyset.$$

در بالا منظورمان از (n, ∞) مجموعه‌ی زیر است:

$$\{x \in \mathbb{R} | x > n\}.$$

[۲] برای وصف دقیق خانواده‌ی بالا، دقت می‌کنیم که مجموعه‌ی اندیس برابر با $\mathbb{N} - \{۰\}$ است و داریم

$$\forall i \in \mathbb{N} - \{۰\} \quad \forall x \quad \big(x \in A_i \leftrightarrow x \in \mathbb{N} \wedge x \geq i \wedge x \leq i + (i - ۱)\big)$$

مثال ۹۵.

تمرین ۵۶. نشان دهید که دو حکم زیر با هم معادلند:

- هیچ عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر باشد.
- هیچ عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که از تمام اعداد طبیعی کوچکتر باشد.

تمرین ۵۷. با ذکر دلیل، بررسی کنید که کدامیک از احکام زیر در مورد مجموعه‌ی اعداد حقیقی درست و کدام غلط است.

۱. $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists r \in \mathbf{R} \quad 0 < r < \frac{1}{n}$

۲. $\exists r \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad 0 < r < \frac{1}{n}$

اشتراک خانواده‌ی زیر از زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}$ را بیابید.

$$(0,1) \quad (0,\frac{1}{2}) \quad (0,\frac{1}{3}) \quad (0,\frac{1}{4}) \quad \ldots$$

بیایید خانواده‌ی بالا را به صورت زیر اندیس‌گذاری کنیم:

$$A_n = (0,\frac{1}{n}).$$

$$\overset{A_1}{(0,1)} \quad \overset{A_2}{(0,\frac{1}{2})} \quad \overset{A_3}{(0,\frac{1}{3})} \qquad \underbrace{\overset{A_4}{(0,\frac{1}{4})}}_{=\{x\in\mathbf{R}|0<x<\frac{1}{4}\}} \qquad \ldots$$

پس خانواده‌ی زیر از مجموعه‌ها را داریم:

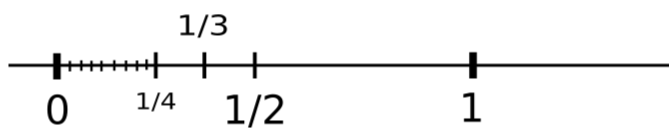
$$F = \{A_n\}_{n\in\mathbf{N}-\{0\}}$$

اشتراک این خانواده را می‌توانیم با نمادهای زیر نیز نشان دهیم.

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (0,\frac{1}{n}) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n = \bigcap F$$

داریم

$$x \in \bigcap (0,\frac{1}{n}) \leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < x < \frac{1}{n}.$$



بنا به تمرینهای بالا، از ویژگی ارشمیدسی نتیجه می‌شود که هیچ عدد حقیقی‌ای پیدا نمی‌شود که از تمامِ $\frac{۱}{n}$ ها همزمان کوچکتر باشد؛ به بیان خانواده‌ها

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}-\{۰\}}(۰,\frac{۱}{n})=\emptyset.$$

توجه ۹۶. در این جا یک مشاهده‌ی جالب داریم: برای هر $n\in\mathbf{N}$ داریم

$$\bigcap_{۱\leq i\leq n}(۰,\frac{۱}{i})=(۰,\frac{۱}{n})$$

ولی

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(۰,\frac{۱}{i})=\emptyset.$$

تمرین ۵۸. آیا با استقراء روی اعداد طبیعی می‌توان ثابت کرد که

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(۰,\frac{۱}{i})=\emptyset.$$

توجه ۹۷. می‌دانیم که

$$(۱)\quad A\cap(B_۱\cup B_۲)=(A\cap B_۱)\cup(A\cap B_۲)$$

همچنین گفتیم که با استقراء می‌توان ثابت کرد که برای هر $n\in\mathbb{N}$

$$(۲)\quad A\cap(B_۱\cup B_۲\cup\ldots\cup B_n)=(A\cap B_۱)\cup\ldots\cup(A\cap B_n)$$

عبارت بالا را می‌توان با استفاده از خانواده‌ها به صورت زیر نوشت:

$$A\cap\bigcup_{i\in\{۱,\ldots,n\}}B_i=\bigcup_{i\in\{۱,\ldots,n\}}(A\cap B_i)$$

حال ادعا می‌کنیم که این حکم را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$(۳)\quad A\cap(\bigcup_{i\in\mathbf{N}}B_i)=\bigcup_{i\in\mathbf{N}}(A\cap B_i)$$

تمرین ۵۹. آیا حکم (۳) را می‌توان با استقراء ثابت کرد؟

توجه ۹۸. با استفاده از استقراء می‌توان احکامی مانند احکام زیر را درباره‌ی هر عدد طبیعی ثابت کرد:
برای هر عددِ طبیعیِ n داریم $p(n)$. به عنوان مثال، حکم زیر را می‌توان با استقراء ثابت کرد: برای هر $n\in\mathbf{N}$ داریم

$$۱+۲+\ldots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

به عنوان مثال دیگر، این حکم که هر عدد طبیعی ناصفر از عدد قبل از خودش بزرگتر است را نیز می‌توان با استقراء ثابت کرد. اما در مورد «مجموعه‌ی اعداد طبیعی» نمی‌توان با استقراء روی اعداد طبیعی حکمی را نتیجه گرفت. برای مثال نمی‌توان حکم زیر را با استقراء ثابت کرد:
مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجموعه‌ای نامتناهی است. حکم (۳) نیز حکمی درباره‌ی یک عددِ طبیعیِ n نیست، پس نمی‌توان آن را با استقراء ثابت کرد.

حکمِ (۳) را به صورت زیر ثابت می‌کنیم:

اثبات (۳). از آنجا که در دو طرف مجموعه داریم بنا به اصل گسترش کافی است نشان دهیم که

۱. $A \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbf{N}} \left(A \cap B_i\right)$ و

۲. $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} \left(A \cap B_i\right) \subseteq A \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i\right)$

یک عنصرِ $x_\cdot \in U$ را به صورت دلخواه در نظر بگیرید.

$$x_\cdot \in A \cap \Big(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i\Big) \Rightarrow (x_\cdot \in A) \wedge \Big(x_\cdot \in \bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i\Big)$$

$$\Rightarrow x_\cdot \in A \wedge \left(\exists i_\cdot \in \mathbf{N} \quad x_\cdot \in B_{i_\cdot}\right)$$

پس از اینکه $x_\cdot \in A \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i\right)$ نتیجه گرفتیم که $i_\cdot \in \mathbf{N}$ موجود است به طوری که

$$x_\cdot \in A \cap B_{i_\cdot}$$

داریم:

$$A \cap B_{i_\cdot} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbf{N}} \left(A \cap B_i\right)$$

پس

$$x_\cdot \in \bigcup_{i\in\mathbf{N}} \left(A \cap B_i\right)$$

اثبات ۲.

$$x_\cdot \in \bigcup_{i\in\mathbf{N}} \left(A \cap B_i\right) \Rightarrow \exists i_\cdot \in \mathbf{N} \quad x_\cdot \in A \cap B_{i_\cdot}$$

پس $\overset{(۳)}{x_\cdot \in A}$ و $x_\cdot \in B_{i_\cdot}$. از آنجا که $B_{i_\cdot} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i$ پس $\overset{(۴)}{x_\cdot \in \bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i}$.

از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$x_\cdot \in A \cap \Big(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i\Big)$$

□

حکم بالا برای هر مجموعه‌ی اندیسی درست است:

قضیه ۹۹ (پخش‌پذیری)**.** فرض کنید Γ یک مجموعه‌ی اندیس باشد.

۱. $A \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \left(A \cap B_\gamma\right)$

۲. $A \cup \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \left(A \cup B_\gamma\right)$

اثبات. در زیر یکی از موارد بالا را ثابت کرده‌ایم. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\big)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big)$$

داریم:

$$x_\circ\in A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\big)\Leftrightarrow x_\circ\in A\wedge x_\circ\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma$$
$$\Leftrightarrow(x_\circ\in A)\wedge(\exists\gamma_\circ\in\Gamma\quad x_\circ\in B_{\gamma_\circ})$$

از $(x_\circ\in A)\wedge(x_\circ\in B_{\gamma_\circ})$ نتیجه می‌گیریم که

$$x_\circ\in A\cap B_{\gamma_\circ}$$

از آنجا که

$$A\cap B_{\gamma_\circ}\subseteq\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$x_\circ\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\big)\subseteq\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big)$$

حال درستی $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big)\subseteq A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\big)$ را بررسی می‌کنیم:

$$x_\circ\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big)\Rightarrow\exists\gamma_\circ\in\Gamma\quad x_\circ\in A\cap B_{\gamma_\circ}$$

$$\Rightarrow x_\circ\in A\wedge x_\circ\in B_{\gamma_\circ}\Rightarrow(x_\circ\in A)\wedge(x_\circ\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_{\gamma_\circ})$$
$$\Rightarrow x_\circ\in A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\big)$$

$\square$

قضیه ۱۰۰.

۱. $\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\big)^c=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma^c$

۲. $\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma})A_\gamma\big)^c=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma^c$

اثبات. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\underbrace{\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)^c}_{C} = \underbrace{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c}_{D}$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x_\circ \in C \Leftrightarrow x_\circ \in \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)^c$$

$$\Longleftrightarrow\ x_\circ \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \ \Longleftrightarrow\ \forall\gamma\in\Gamma \quad (x_\circ \notin A_\gamma)$$

$$\Longleftrightarrow\ \forall\gamma\in\Gamma \quad x_\circ \in A_\gamma^c \ \Longleftrightarrow\ x_\circ \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$$

$\square$

تمرین ۶۰. فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ و $\{B_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ خانواده‌هایی از مجموعه‌ها باشند، نشان دهید که

$$\text{۱}\quad \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big) \cap \big(\bigcup_{\delta\in\Delta} B_\delta\big) =$$

$$\bigcup_{\delta\in\Delta}\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \cap B_\delta\big) = \bigcup_{\delta\in\Delta}\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma \cap B_\delta)\big) =$$

$$\bigcup_{\delta\in\Delta}\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma \cap B_\delta) := \bigcup_{(\delta,\gamma)\in\Delta\times\Gamma}(A_\gamma \cap B_\delta)$$

$$\text{۲}\quad \big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big) \cup \big(\bigcap_{\delta\in\Delta} B_\delta\big) =$$

$$\bigcap_{\delta\in\Delta}\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \cap B_\delta\big) = \bigcap_{\delta\in\Delta}\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma \cup B_\delta)$$

$$\text{۳}\quad \big(\bigcup_{i=\text{۱}}^{m} A_i\big) \cap \big(\bigcup_{j=\text{۱}}^{n} B_j\big) \overset{\Delta=\{\text{۱},\ldots,n\},\Gamma=\{\text{۱},\ldots,m\}}{=}$$

$$\bigcup_{j\in\{\text{۱},\ldots,n\}}\ \bigcup_{i\in\{\text{۱},\ldots,m\}}(A_i \cap B_j)$$

تمرین ۶۱. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های I باشد به طوری که

$$\bigcup_{k\in L} J_k = I.$$

نشان دهید که

۱. $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$

۲. $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in L}\bigcap_{j\in J_k} A_j$

تمرین ۶۲. نشان دهید که

۱. $A - \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A - B_\gamma)$.

مثال ۱۰۱. حاصل

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}}(k, k+۱]$$

را بیابید:

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}}(k, k+۱] = (۰, ۱] \cup (۱, ۲] \cup (۲, ۳] \cup \ldots \cup (k, k+۱] \cup \ldots$$
$$= (۰, \infty) = \{x\in\mathbf{R} | x > ۰\}$$

مثال ۱۰۲.

$$۱ \quad \bigcap_{k\in\mathbf{N}}(-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k}) = \{۰\}$$

$$۲ \quad \bigcap_{k\in\{۱,۲,\ldots,n\}}(-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k}) = (-۱, ۱) \cap (-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}) \cap (-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}) \cap \ldots \cap (-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n}) = (-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n})$$

برای اثبات، توجه کنید که

$$x_۰ \in \bigcap_{k\in\mathbf{N}}(-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k}) \Rightarrow \forall k\in\mathbf{N} \quad x_۰ \in (-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k})$$

$$\Rightarrow \qquad \forall k\in\mathbf{N} \quad -\frac{۱}{k} < x_۰ < \frac{۱}{k}$$

واضح است که عدد صفر در شرط بالا صدق می‌کند. نشان می‌دهیم که هیچ عددی غیر صفر در این شرط صدق نمی‌کند.

فرض کنید $x_۰ > ۰$. از شرط بالا نتیجه می‌گیریم که

$$\forall k\in\mathbf{N} \quad ۰ < x_۰ < \frac{۱}{k} \quad \text{بنا به ویژگی ارشمیدسی} \ \not\,$$

همچنین اگر $x_۰ < ۰$ آنگاه

$$\forall k\in\mathbf{N} \quad -\frac{۱}{k} < x_۰ < ۰$$

$$\Rightarrow \forall k\in\mathbf{N} \quad ۰ < -x_۰ < \frac{۱}{k} \quad \text{بنا به ویژگی ارشمیدسی} \ \not\,$$

مورد ۲ را با استقراء ثابت کنید.

مثال ۱۰۳. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$، خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های I به طوری که $\bigcup_{k\in L} J_k = I$. ثابت کنید که

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$$

پاسخ. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$(1)\ \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$$

$$(2)\ \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

در این جا اولی را ثابت می‌کنیم و دومی را به عنوان تمرین به عهده‌ی شما می‌نهیم.

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists i_\cdot \in I \quad x \in A_{i_\cdot} \tag{۱.۵}$$

$$(i_\cdot \in I) \wedge (I = \bigcup_{k\in L} J_k) \Rightarrow \exists k_\cdot \in L \quad i_\cdot \in J_{k_\cdot} \tag{۲.۵}$$

$$(x \in A_{i_\cdot}) \wedge (i_\cdot \in J_{k_\cdot}) \Rightarrow x \in \bigcup_{j\in J_{k_\cdot}} A_j \tag{۳.۵}$$

$$(k_\cdot \in L) \wedge x \in \bigcup_{j\in J_{k_\cdot}} A_j \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \tag{۴.۵}$$

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \quad \text{بنا به ۱و۲و۳و۴} \tag{۵.۵}$$

□

فصل ۶

ضربهای دکارتی

تا به اینجا فهمیدیم که ترکیبات بولی مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک، متمم) چگونه با استفاده از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها تعریف می‌شوند. در ادامه‌ی بنا کردن ریاضی بر اساس نظریه‌ی مجموعه‌ها، در این بخش ضربهای دکارتی مجموعه‌ها را معرفی کرده‌ایم که این مفهوم مقدمه‌ی مفاهیم مهم دیگری مانند رابطه و تابع است.

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند و $x \in A$ و $y \in B$. بنا به اصل جفت‌سازی $\{x, y\}$ یک مجموعه است و $\{x\}$ نیز یک مجموعه است. دوباره بنا به اصل جفت‌سازی $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ یک مجموعه است. این مجموعه را با (x, y) نشان می‌دهیم. پس

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

تمرین ۶۳. نشان دهید که

$$(x_۰, y_۰) = (x_۱, y_۱) \iff (x_۰ = x_۱) \wedge (y_۰ = y_۱)$$

تعریف ۱۰۴. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

قضیه ۱۰۵. $A \times B$ یک مجموعه است.

اثبات. طبیعی است که باید به نحوی نشان دهیم که وجودِ $A \times B$ به صورت بالا از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها نتیجه می‌شود. دقت کنید که $\{x\} \subseteq A \cup B$ و $\{x, y\} \subseteq p(A \cup B)$. بنابراین $\{x\} \in P(A \cup B)$ و $\{x, y\} \in P(A \cup B)$. از این رو

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in P(P(A \cup B))$$

مشاهده‌ی ساده‌ی بالا به ما می‌گوید که

$$A \times B = \{c \in PP(A \cup B) | \exists x \in A \quad \exists y \in B \quad c = \{\{x\}, \{x, y\}\}\}$$

بنا به اصل تصریح، c در بالا یک مجموعه است. □

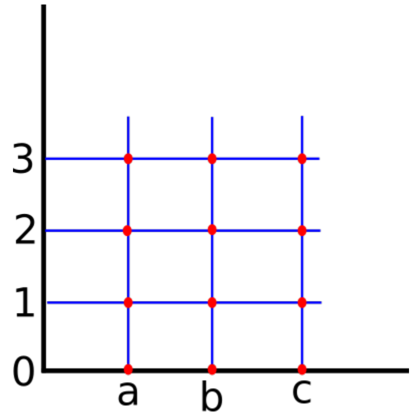
برای مثال اگر

$$A = \{a, b, c\} \quad B = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$$

آنگاه

$$A \times B = \{(a, ۰), (a, ۱), (a, ۲), (a, ۳), (b, ۰), (b, ۱), (b, ۲), (b, ۳), (c, ۰), (c, ۱), (c, ۲), (c, ۳)\}$$

گاهی کشیدن دو محور متعامد به صورت زیر، درک مفهوم ضرب دکارتی را راحت‌تر می‌کند:



قضیه ۱۰۶.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

اثبات.

$$(x, y) \in A \times (B \cap C) \iff (x \in A \wedge y \in B \cap C) \iff (x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C)$$

$$\overset{p \leftrightarrow p \wedge p}{\iff} (x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \iff \Big((x, y) \in A \times B\Big) \wedge \Big((x, y) \in A \times C\Big)$$

$$\iff (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

□

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

اثبات عبارت بالا را به عنوان تمرین رها می‌کنم.

قضیه ۱۰۷.

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

اثبات. در زیر اثباتی استنتاجی برای حکم بالا ارائه کرده‌ایم.

(۱.۶) $$(x,y) \in A \times (B - C) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B - C)$$

(۲.۶) $$x \in A \wedge y \in B - C \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C$$

(۳.۶) $$x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \Rightarrow (x,y) \in A \times B$$

(۴.۶) $$x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \Rightarrow (x,y) \notin A \times C$$

(۵.۶) بنا به موارد ۱۵ تا ۱۸ $$(x,y) \in A \times (B - C) \Rightarrow (x,y) \in (A \times B) - (A \times C)$$

اثبات برگشت:

(۶.۶) $$(x,y) \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \notin A \times C$$

(۷.۶) $$(x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B$$

(۸.۶) $$(x,y) \notin A \times C \Rightarrow (x \notin A) \vee (y \notin C)$$

(۹.۶) $$(x \in A \wedge y \in B) \wedge ((x \notin A) \vee (y \notin C)) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C).$$

(۱۰.۶) بنا به موارد ۲۰ تا ۲۳ $$(x,y) \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times (B - C).$$

□

تمرین ۶۴. نشان دهید که

$$(A \times B) - (C \times D) = \Big((A - C) \times B\Big) \cup \Big(A \times (B - D)\Big)$$

سوال ۶. آیا $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$؟

پاسخ. فرض کنید که $A, D \neq \emptyset$ و $x. \in A, y. \in D$. آنگاه

$$(x., y.) \notin (A \times B) \cup (C \times D)$$

اما

$$(x., y.) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$$

□

تمرین ۶۵. فرض کنید که A یک مجموعه‌ی m عضوی باشد و B یک مجموعه‌ی n عضوی. با استفاده از استقراء، نشان دهید که تعداد اعضای مجموعه‌ی $A \times B$ برابر است با $m \times n$.

تمرین ۶۶. نشان دهید که

$$A \times \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \times B_\gamma)$$

تمرین ۶۷. آیا $P(A \times B) = P(A) \times P(B)$؟

فصل ۷

روابط

مفهوم رابطه در زبان روزمره آنقدر پرکاربرد است که شاید هنگام استفاده آن به تعریف دقیق آن توجه نکرده باشیم: رابطه‌ی پدر و فرزندی، پسرخاله و دخترخاله بودن، همسن‌وسال‌بودن و امثالهم. برای مصارف ریاضی، باید رابطه را دقیق، و بر طبق اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها تعریف کنیم:

گفتیم که اگر A, B دو مجموعه باشند، آنگاه $A \times B$ یک مجموعه است. بنا به اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها، هر زیرمجموعه از $A \times B$ نیز یک مجموعه است. هر زیرمجموعه از $A \times B$ را یک رابطه از A به B می‌نامیم.

رابطه‌ها را با حروفی مانند $R, S, \ldots$ نشان می‌دهیم. پس یک رابطه‌ی R از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، یک عنصر از $P(A \times B)$ است. نیز منظور از یک رابطه **روی مجموعه‌ی** X یک رابطه از X به X است.

نمادگذاری ۱۰۸. به جای

$$(x, y) \in R$$

گاهی می‌نویسیم:

$$xRy$$

تمرین ۶۸. یک رابطه از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳\}$ به مجموعه‌ی $\{a, b, c, d\}$ مثال بزنید.

تمرین ۶۹. تعداد کل روابط از یک مجموعه‌ی n عضوی به یک مجموعه‌ی m عضوی چقدر است؟

وقتی R رابطه‌ای از A به B لزوماً همه‌ی عناصرِ A, B در این رابطه درگیر نشده‌اند. برای مثال، برادر بودن یک رابطه در جامعه‌ی انسانهاست. با این حال این گونه نیست که هر دو انسانی را که در نظر بگیریم برادر همدیگر باشند.

تعریف ۱۰۹. فرض کنید $R \subseteq A \times B$ یک رابطه از A به B باشد. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$Dom(R) = \{x \in A | \exists y \in B \quad (x, y) \in R\}$$

$$Range(R) = \{y \in B | \exists x \in A \quad (x, y) \in R\}$$

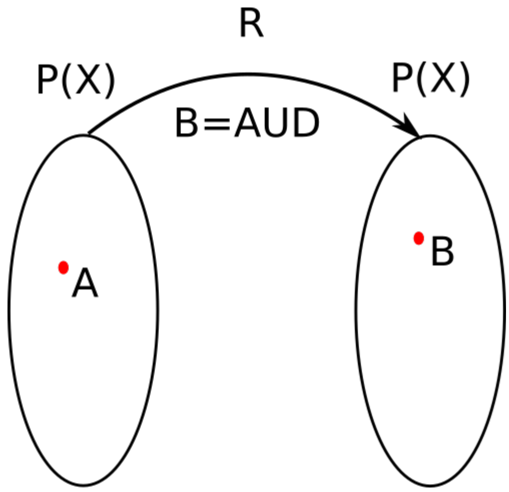
توجه ۱۱۰. اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد لزوماً دامنه‌ی R تمام X نیست. برای مثال روی مجموعه‌ی اعضای یک خانواده‌ی مشخص، دامنه‌ی رابطه‌ی x پدرِ y است، تنها یک عضو دارد.

تمرین ۷۰. اگر X یک مجموعه باشد و $D \subseteq X$ یک مجموعه‌ی ثابت. دامنه و برد رابطه‌ی زیر روی $P(X)$ را تعیین کنید.

$$(A, B) \in R \iff A \cup D = B$$

به بیان دیگر:

$$R = \{(A, B) | A, B \in P(X), A \cup D = B\}$$



۱.۷ مثالهائی از روابط

رابطه‌ی تساوی

فرض کنید X یک مجموعه باشد. رابطه‌ی زیر را رابطه‌ی تساوی روی X می‌خوانیم:

$$R = \{(x, y) | x \in X, y \in X, x = y\}$$

به بیان دیگر

$$R = \{(x, x) | x \in X\}$$

رابطه‌ی تساوی (که آن را رابطه‌ی قطری نیز می‌خوانیم) را می‌توان به صورت زیر هم نمایش داد:

$$\forall x, y \in X \quad (xRy \iff x = y)$$

این رابطه را با Δ نیز گاهی نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات مجموعه مورد نظر را نیز به صورت اندیس می‌نویسیم تا مشخص شود که تساوی روی چه مجموعه‌ای منظور ماست. پس به طور خلاصه:

$$\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$$

رابطه‌ی تعلق

فرض کنید X یک مجموعه باشد و $P(x)$ مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های آن. رابطه‌ی تعلق رابطه‌ای از X به $P(X)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \{(x, y) | x \in X, y \in P(X), x \in Y\}.$$

توجه کنید که دامنه‌ی این رابطه، X است و بُرد آن برابر است با $P(X) - \{\emptyset\}$. (این گفته را تحقیق کنید).

رابطه‌ی مشمولیت

فرض کنید X یک مجموعه باشد. روی $P(X)$ رابطه‌ی مشمولیت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ARB \iff A \subseteq B$$

به بیان دیگر

$$R = \{(x, y) | x \in P(X), y \in P(X), x \subseteq y\}$$

معکوس یک رابطه

اگر R یک رابطه از A به B باشد، رابطه‌ی $R^{-۱}$ را از B به A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R^{-۱} = \{(x, y) | x \in B, y \in A, (y, x) \in R\}.$$

به بیان دیگر

$$(x, y) \in R^{-۱} \iff (y, x) \in R$$

ترکیب روابط

فرض کنید R یک رابطه از A به B و S یک رابطه از B به C باشند. آنگاه رابطه‌ی $S \circ R$ را از A به C به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x, y) \in S \circ R \iff \exists z \in B\Big((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\Big)$$

مثال ۱۱۱. فرض کنید روی یک مجموعه از انسانها روابط R و S به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$(x, y) \in R \iff \text{فرزند } y \text{ باشد } x$$

$$(x, y) \in S \iff \text{برادر } x \text{ باشد } y$$

آنگاه داریم:

$$(x, y) \in R \circ S \iff \exists z \quad (x \text{ فرزند } z \text{ باشد}) \wedge (z \text{ برادر } y \text{ باشد})$$

$$\iff x \text{ برادرزاده‌ی } y \text{ باشد.}$$

۲.۷ ویژگی‌های روابط

در سرتاسر این قسمت، فرض کنید R رابطه‌ای روی مجموعه‌ی X باشد.

تعریف ۱۱۲. رابطه‌ی R را **انعکاسی** [۱] می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad xRx$$

مثال ۱۱۳. رابطه‌ی تساوی را روی یک مجموعه‌ی دلخواهِ X در نظر بگیرید. داریم

$$\forall x \in X \quad x = x$$

پس این رابطه، انعکاسی است.

مثال ۱۱۴. همچنین هر مجموعه‌ای زیر مجموعه‌ی خودش است پس رابطه‌ی $\subseteq$ روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ نیز یک رابطه‌ی انعکاسی است.

مثال ۱۱۵ (دو مثالِ نقض). رابطه‌ی $\in$ را روی مجموعه‌ی $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ در نظر بگیرید. داریم

$$\emptyset \notin \emptyset$$

پس این رابطه انعکاسی نیست. همچنین اگر روی مجموعه‌ی انسانها، رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy \iff \text{باشد } x \text{ پدرِ } y$$

این رابطه نیز غیر انعکاسی است.

تمرین ۷۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد. تعریف کنید

$$\Delta_X = \{(x,x) | x \in X\}.$$

نشان دهید که رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X انعکاسی است اگر و تنها اگر

$$\Delta_X \subseteq R.$$

تعریف ۱۱۶. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **تقارنی** [۲] می‌خوانیم هرگاه جمله‌ی زیر درست باشد:

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \leftrightarrow yRx\Big)$$

[۱] reflective
[۲] symmetric

تمرین ۷۲. بررسی کنید که رابطه‌های تساوی ($x=y$) و تمایز ($x\neq y$) و مجزا بودن دو مجموعه روابطی تقارنی هستند.

رابطه‌ی مجزا بودن روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$XRY \iff X\cap Y=\emptyset$$

تمرین ۷۳ (مثال نقض). نشان دهید که رابطه‌های آمده در مثالِ ۱۱۵ تقارنی نیستند.

توجه ۱۱۷. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X غیرتقارنی است (یعنی تقارنی نیست) هرگاه جمله‌ی زیر درست باشد:

$$\exists x,y\in X \quad (x,y)\in R\wedge (y,x)\notin R.$$

تعریف ۱۱۸. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **پادتقارنی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x,y\in X \quad \Big(xRy\wedge yRx\to x=y\Big)$$

تمرین ۷۴. بررسی کنید که رابطه‌ی $=$ روی یک مجموعه‌ی X و رابطه‌ی $\subseteq$ روی $P(X)$ هر دو پادتقارنی هستند.

مثال ۱۱۹ (مثال نقض). نشان دهید که روابط دوستی و همسن بودن روی یک مجموعه از انسانها پادتقارنی نیستند.

تمرین ۷۵. چنین نیست که هر رابطه‌ای که تقارنی نباشد حتما پادتقارنی است. به عنوان تمرین، یک رابطه مثال بزنید که نه تقارنی باشد و نه پادتقارنی.

تعریف ۱۲۰. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **متعدّی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x,y,z\in X \quad \Big(xRy\wedge yRz\to xRz\Big)$$

تمرین ۷۶. بررسی کنید که رابطه‌ی تساوی روی یک مجموعه‌ی X، همسن بودن در مجموعه‌ی انسانها، و زیر مجموعه بودن روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ هر سه متعدی هستند.

تمرین ۷۷ (مثال نقض). بررسی کنید که رابطه‌ی دوستی روی مجموعه‌ی انسانها و رابطه‌ی

$xRy \Leftrightarrow$ y پدر x است

روابطی نامتعدی هستند.

تعریف ۱۲۱ (تام بودن). رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **تام** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x,y\in X \quad \Big(xRy\vee yRx\Big)$$

مثال ۱۲۲ (مثال نقض). رابطه‌ی پدری.

تمرین ۷۸. نشان دهید که تنها رابطه‌ای که هم انعکاسی باشد و هم تقارنی و هم پادتقارنی، رابطه‌ی تساوی است.

تمرین ۷۹. روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی، رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy\Leftrightarrow x\leq y.$$

رابطه‌ی بالا (رابطه‌ی ترتیب) کدام یک از ویژگی‌های معرفی شده در این درس را دارد؟

۱.۲.۷ حل چند مثال از مبحث روابط

مثال ۱۲۳. فرض کنید $\mathbf{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد. قرار دهید

$$R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^{۲} | y = x^{۲}\}$$

دقت کنید که R نمونه‌ای از یک رابطه روی $\mathbf{R}$ است.

مثال ۱۲۴. نشان دهید که رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X متعدی است اگر و تنها اگر $R \circ R \subseteq R$

اثبات. نخست یادآوری می‌کنیم که

$$(x,y) \in R \circ R \iff \exists z \quad R(x,z) \wedge R(z,y)$$

نخست نشان می‌دهیم که اگر رابطه‌ی R متعدی باشد آنگاه

$$R \circ R \subseteq R$$

فرض کنیم R متعدی است و $(x,y) \in R \circ R$. از این که $(x,y) \in R \circ R$ نتیجه می‌شود که

$$\exists z. \quad (x,z.) \in R \wedge (z.,y) \in R \quad (*)$$

بنا به $(*)$ و متعدی بودن R نتیجه می‌شود که

$$(x,y) \in R$$

حال ثابت می‌کنیم که اگر $R \circ R \subseteq R$ آنگاه R متعدی است.
فرض: $R \circ R \subseteq R$
حکم:

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

فرض کنید $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ و $R \circ R \subseteq R$. از اینکه $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ نتیجه می‌شود که

$$(x,z) \in R \circ R$$

از فرض $R \circ R \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x,z) \in R.$$

$\square$

مثال ۱۲۵. نشان دهید که رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X انعکاسی است اگر و تنها اگر $\Delta_X \subseteq R$.

اثبات. نخست فرض می‌کنیم که R انعکاسی است و ثابت می‌کنیم که

$$\Delta_X \subseteq R$$

فرض کنید $(x,x) \in \Delta_X$. بنا به این که R انعکاسی است نتیجه می‌گیریم که $(x,x) \in R$. پس

$$\Delta_X \subseteq R.$$

حال فرض کنید $\Delta_X \subseteq R$. می‌خواهیم ثابت کنیم که R انعکاسی است. عنصر دلخواه $x_۰ \in X$ را در نظر بگیرید.
بنا به تعریف رابطه‌ی قطری [۳] داریم:

$$(x_۰, x_۰) \in \Delta_X$$

حال از فرض $\Delta_X \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x_۰, x_۰) \in R$$

از آنجا که $x_۰$ به طور دلخواه انتخاب شده است، نتیجه می‌گیریم که R انعکاسی است. $\square$

مثال ۱۲۶. نشان دهید که رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X تام است اگر و تنها اگر

$$R \cup R^{-۱} = X \times X$$

اثبات. فرض کنیم R تام باشد. اگر $(x_۰, y_۰) \in X \times X$ آنگاه از آنجا که R تام است یا $(x_۰, y_۰) \in R$ یا $(y_۰, x_۰) \in R$. پس یا $(x_۰, y_۰) \in R$ یا $(x_۰, y_۰) \in R^{-۱}$. از آنجا که $(x_۰, y_۰)$ به طور دلخواه انتخاب شده است، داریم:

$$X \times X \subseteq R \cup R^{-۱}.$$

اثباتِ این که

$$R \cup R^{-۱} \subseteq X \times X :$$

می‌دانیم R یک رابطه روی X است پس

$$R \subseteq X \times X$$

می دانیم $R^{-۱}$ یک رابطه روی X است پس

$$R^{-۱} \subseteq X \times X$$

پس

$$R \cup R^{-۱} \subseteq X \times X$$

[۳] رابطه‌ی Δ_X را رابطه‌ی قطری روی X می‌خوانیم.

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که اگر R تام باشد آنگاه

$$X \times X = R \cup R^{-۱}.$$

حال فرض کنید

$$X \times X = R \cup R^{-۱}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که R تام است. عناصر دلخواه $x_۰, y_۰ \in X$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم

$$(x_۰, y_۰) \in X \times X$$

پس

$$(x_۰, y_۰) \in R \cup R^{-۱}$$

پس یا $(x_۰, y_۰) \in R$ که در اینصورت $x_۰ R y_۰$ یا $(x_۰, y_۰) \in R^{-۱}$ که در این صورت $y_۰ R x_۰$ پس رابطه‌ی R تام است. $\square$

فصل ۸

روابط هم‌ارزی

مسئله‌ی دسته‌بندی اشیاء بر اساس ویژگی‌های مشترک هم در زندگی روزمره و هم در ریاضی بسیار پیش می‌آید: مثلاً ممکن است بخواهیم دانشجویان کلاسمان را بر حسب قد دسته بندی کنیم؛ یا این که مجموعه‌ی اعداد طبیعی را بر حسب باقیمانده‌ی آنها به ۲ به دو دسته‌ی اعداد زوج و فرد تقسیم کنیم؛ یا این که اعداد طبیعی را بر حسب باقیمانده‌شان به ۳ به سه دسته تقسیم کنیم. فعلاً همان مثال دسته‌بندی دانشجویان کلاس بر حسب قد را در نظر بگیرید. نکات زیر درباره‌ی این دسته‌بندی مشهودند:

۱. این دسته‌بندی بر اساس یک رابطه صورت گرفته است: رابطه‌ی همقد بودن.

۲. وقتی دانشجویان را بر حسب قدشان دسته بندی می‌کنیم، این دسته‌بندی‌ها هیچ اشتراکی با هم ندارند؛ به بیان دیگر هیچ کس نیست که در دو دسته‌ی قدّی قرار بگیرد!

۳. اگر علی و حسن در یک دسته باشند، آنگاه دسته‌ی افراد همقد با علی، دقیقاً همان دسته‌ی افراد هم‌قد با حسن است. این دسته را هم می‌توان دسته‌ی همقدان علی بنامیم، و هم می‌توانیم دسته‌ی همقدان حسن بنامیم.

۴. اگر حسن و حسین دو دانشجو باشند، از دو حالت خارج نیست: یا حسن با حسین همقد است که در این صورت گروه افراد همقد حسن، دقیقاً همان گروه افراد همقد با حسین است؛ یا حسن با حسین همقد نیست، که در این صورت گروه افراد همقد با حسن، هیچ اشتراکی با گروه افراد همقد با حسین ندارد.

۵. هر یک از افراد کلاس دارای قد است! بنابراین هر یک از افراد کلاس در یکی از دسته‌ها قرار می‌گیرد.

در ادامه‌ی درس به بسط سازوکار دسته‌بندی در ریاضیات خواهیم پرداخت: دسته‌بندی در ریاضیات، با استفاده از **روابط هم‌ارزی** صورت می‌گیرند.

به رابطه‌ای که ویژگی‌های **انعکاسی، تقارنی و تعدی** داشته باشد، یک **رابطه‌ی هم‌ارزی** گفته می‌شود. از روابط هم‌ارزی برای **تقسیم‌بندی** یک مجموعه استفاده می‌شود. برای مثال، مجموعه‌ی همه‌ی دانشجویان یک کلاس را در نظر بگیرید. رابطه‌ی همقد بودن یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. افراد حاضر در این کلاس را می‌توان بر اساس رابطه‌ی

هم‌قد بودن تقسیم‌بندی (یا افراز) کرد. برای این کار کافی است افرادی را که هم‌قد هستند، همگروه کرد. توجه کنید که هر گروه (هر قد)، دارای نماینده‌ای است، اما فرقی نمی‌کند کدام شخص از آن گروه را به عنوان نماینده انتخاب کرد. به بیان دیگر، اگر x, y دو فرد همقد باشند، آنگاه مجموعه‌ی افراد همقدِ x دقیقاً همان مجموعه‌ی افرادِ همقدِ y است. همچنین اگر x, y همقد نباشند، آنگاه مجموعه‌ی افراد همقد با x هیچ اشتراکی با مجموعه‌ی افراد همقد با y ندارد. در سرتاسرِ درس این جلسه، مثال همقد بودن را در ذهن داشته باشید و نمودِ آن را در تمام اثباتها بیابید.

گفتیم که اگر کلاس را بر اساس قد دسته‌بندی کنیم، آنگاه گروه همقدان علی، یعنی گروه افرادی که قد آنها با علی برابر است. مشابهاً فرض کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. فرض کنید $x_\circ \in X$ عنصری دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$R \text{ تحت رابطه‌ی } x_\circ \text{ کلاس هم‌ارزی عنصر } = [x_\circ]_R = \{y \in X | yRx_\circ\} = \{y \in X | x_\circ Ry\}$$

گفتیم که اگر حسن و علی همقد باشند، گروه افراد همقد با علی، دقیقاً همان گروه افراد همقد با حسن است:

قضیه ۱۲۷. فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد و $x_\circ, y_\circ \in X$ و $x_\circ R y_\circ$. آنگاه

$$[x_\circ]_R = [y_\circ]_R$$

اثبات. $[x_\circ]_R$ و $[y_\circ]_R$ هر دو، مجموعه هستند؛ برای نشان دادن این که دو مجموعه برابرند، باید مطابق اصل گسترش نشان دهیم که اعضای یکسانی دارند.

فرض کنید $t_\circ \in [x_\circ]_R$. بنا به تعریفِ $[x_\circ]_R$ داریم $t_\circ R x_\circ$. از طرفی بنا به فرض قضیه داریم $x_\circ R y_\circ$. حال بنا به این که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی متعدی است داریم

$$t_\circ R x_\circ \wedge x_\circ R y_\circ \to t_\circ R y_\circ.$$

از $t_\circ R y_\circ$ بنا به تعریفِ مجموعه‌ی $[y_\circ]_R$ نتیجه می‌شود که $t_\circ \in [y_\circ]_R$.

در بالا نشان دادیم که هر عضو ازمجموعه‌ی $[x_\circ]_R$ یک عضو از مجموعه‌ی $[y_\circ]_R$ است. همین اثبات نشان می‌دهد که هر عضو از مجموعه‌ی $[y_\circ]_R$ یک عضو از مجموعه‌ی $[x_\circ]_R$ است و از این رو این دو مجموعه با هم برابر هستند. $\square$

اگر علی و حسن همقد نباشند، هیچ کس نیست که با هر دوی آنها همقد باشد:

قضیه ۱۲۸. فرض کنید $x_\circ \not R y_\circ$. آنگاه

$$[x_\circ] \cap [y_\circ] = \emptyset$$

اثبات. کافی است بنا به تاتولوژی

$$\neg q \to \neg p \iff p \to q$$

ثابت کنیم که اگر $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$ آنگاه $x.Ry.$. فرض کنید $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$. فرض کنید $z. \in [x.] \cap [y.]$.
از آنجا که $z. \in [x.]$ و $[x.] = \{y|yRx.\}$ نتیجه می‌گیریم که

$$z.Rx. \quad (۱)$$

و به طور مشابه، از اینکه $z. \in [y.]$ نتیجه می‌گیریم که

$$z.Ry. \quad (۲)$$

از آنجا که R تقارنی است از (۱) نتیجه می‌شود که

$$x.Rz. \quad (۳)$$

بنا به متعدی بودن R از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که

$$x.Ry.$$

بیایید همین اثبات را بار دیگر به صورت استنتاجی بنویسیم:

(۱) $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \quad z \in [x.] \cap [y.]$

فرض‌می‌کنیم $z. \in [x.] \cap [y.]$

(۲) $z. \in [x.] \cap [y.] \Rightarrow (z. \in [x.]) \wedge (z. \in [y.])$

(۳) $z. \in [x.] \Rightarrow z.Rx.$

(۴) $z. \in [y.] \Rightarrow z.Ry.$

(۵) $z.Rx. \overset{\text{تقارنی}}{\Rightarrow} x.Rz.$

(۶) $(x.Rz.) \wedge (z.Ry.) \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} x.Ry.$

(۷) $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset \Rightarrow x.Ry.$ بنا به ۱ تا ۶

$\square$

قضیه ۱۲۹. اگر

$$[x.] \cap [y.] = \emptyset$$

آنگاه

$$x.\not{R}y.$$

اثبات. ثابت می‌کنیم که اگر $x_\circ R y_\circ$ آنگاه

$$[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \emptyset$$

اگر $x_\circ R y_\circ$ آنگاه بنا به تعریفِ $[y_\circ]$ داریم

$$x_\circ \in [y_\circ] \quad (1)$$

همچنین از از آنجا که R انعکاسی است داریم

$$x_\circ R x_\circ$$

پس

$$x_\circ \in [x_\circ] \quad (2)$$

از (1) و (2) نتیجه می‌گیریم که

$$x_\circ \in [x_\circ] \cap [y_\circ]$$

بنابراین

$$[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \emptyset$$

$\square$

نتیجه ۱۳۰.

$$x_\circ \not R y_\circ \iff [x_\circ] \cap [y_\circ] = \emptyset$$

$$x_\circ R y_\circ \iff [x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \emptyset$$

قضیه ۱۳۱. اگر $[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \emptyset$ آنگاه

$$[x_\circ] = [y_\circ]$$

اثبات. فرض کنید که $[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \emptyset$. در این صورت عنصری مانند $z_\circ \in [x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \emptyset$ موجود است. بنابراین

$$z_\circ R x_\circ \quad z_\circ R y_\circ$$

یعنی

$$x_\circ R z_\circ R y_\circ$$

و بنا به تعدی

$$x_\circ R y_\circ$$

حال بنا به قضیه‌ی ۱۲۷ نتیجه می‌گیریم که

$$[x_\circ] = [y_\circ].$$

$\square$

پس تا به این جا ثابت کرده‌ایم که اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی یک مجموعه‌ی X باشد، آنگاه همه‌ی موارد زیر با هم معادل هستند:

۱. $x.Ry.$

۲. $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$.

۳. $[x.] = [y.]$.

همچنین تمام موارد زیر نیز با هم معادلند:

۱. $\neg(x.Ry.)$.

۲. $[x.] \neq [y.]$

۳. $[x.] \cap [y.] = \emptyset$.

به طور خلاصه‌تر، دو کلاس هم‌ارزی یا بر هم منطبقند یا با هم هیچ اشتراکی ندارند.

فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. تعریف می‌کنیم:

$$X/R = \{[x] | x \in X\}.$$

توجه کنید که X/R در تعریف بالا یک خانواده از مجموعه‌هاست؛ زیرا برخی از اعضای آن می‌توانند تکراری باشند و همچنین تعریف عضویت در آن مشخص است. همان طور که دیدیم اگر xRy آنگاه $[x] = [y]$. با این حال، این خانواده، در واقع یک مجموعه هم هست زیرا می‌توان تکرارها را در آن نادیده گرفت. **در ادامه‌ی درس X/R را یک مجموعه در نظر گرفته‌ایم؛** یعنی تکرارها را در آن در نظر نمی‌گیریم.

قضیه ۱۳۲.

$$\bigcup X/R = X$$

توجه ۱۳۳. یادآوری می‌کنیم که اگر A یک مجموعه باشد آنگاه

$$\bigcup A = \{x | \exists y \in A \quad x \in y\}$$

همچنین اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists i \in I \quad x \in A_i\}$$

در قضیه‌ی بالا از نمادگذاری اولی استفاده کرده‌ایم.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که

$$X \subseteq \bigcup X/R.$$

فرض کنید که $x_\circ \in X$. از آنجا که رابطه‌ی R انعکاسی است داریم $x_\circ R x_\circ$؛ به بیان دیگر

$$x_\circ \in [x_\circ].$$

از آنجا که $[x_\circ] \in X/R$ و $x_\circ \in [x_\circ]$ بنا به توجه بالا نتیجه می‌شود که $x_\circ \in \bigcup X/R$.

حال ثابت می‌کنیم که

$$\bigcup X/R \subseteq X$$

اگر $x_\circ \in \bigcup X/R$ آنگاه $y \in X$ چنان موجود است که $x_\circ \in [y] = \{x \in X | xRy\} \subseteq X$ پس معلوم است که $x_\circ \in X$. □

توجه کنید که

- X/R مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X است.
- هیچ دو عضو از X/R با هم اشتراک ندارند.
- $\bigcup X/R = X$.

به بیان دیگر، X/R یک **افراز** برای مجموعه‌ی X است.

بنا بر آنچه گفته شد، از هر رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی یک مجموعه‌ی X به یک افراز برای آن دست می‌یابیم. در درسهای آینده (پس از تعریف دقیق افراز) خواهیم دید که در واقع از هر افراز برای یک مجموعه‌ی X به یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی این مجموعه می‌رسیم به طوری که X/R همان افراز را به دست بدهد. یعنی دو مفهومِ **افراز و رابطه‌ی هم‌ارزی با هم هم‌ارزند.**

افراز $\Leftrightarrow$ رابطه‌ی هم‌ارزی

به بیان دیگر، افرازهای یک مجموعه‌ی X در تناظر یک به یک با روابط هم‌ارزی روی آن هستند؛ یعنی، فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی X باشد و B مجموعه‌ی همه‌ی روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. تابعِ $f : B \to A$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(R) = X/R$$

تابع بالا، یک به یک و پوشاست. (فعلاً نگران سختی این گفته نباشید. مفاهیم تابع، یک‌به‌یک و پوشا را در درسهای آینده خواهیم دید.)

۱.۸ چند مثال از کاربرد روابط هم‌ارزی

مثال ۱۳۴. روی یک مجموعه‌ی X رابطه‌ی تساوی، $(=)$، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

$$R \subseteq P(X \times X)$$

$$xRy \iff x = y$$

$$X/_{=} = \{[x]_{=} | x \in X\} = \Big\{\{x\} | x \in X\Big\}$$

رابطه‌ی تساوی، مجموعه‌ی X را به کلاسهای تک‌عضوی دسته‌بندی می‌کند.

مثال ۱۳۵ (تعریف اعداد صحیح)**.** در فصل ۴ بااعداد طبیعی آشنا شدیم و نشان دادیم که آنها تشکیل یک مجموعه می‌دهند. همچنین گفتیم که حاصل‌ضربِ دکارتی دو مجموعه، یک مجموعه است؛ بنابراین به طور خاص:

$$\mathbb{N}^{۲} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

نیز یک مجموعه است. اعضای مجموعه‌ی $\mathbb{N}^{۲}$ به صورت (x, y) هستند که در آن $x, y \in \mathbb{N}$.

روی $\mathbb{N}^{۲}$ رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$(x, y)R(x', y') \iff x + y' = y + x'$$

به عنوان تمرین نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. مجموعه‌ی کلاسهای هم‌ارزی رابطه‌ی بالا را مجموعه‌ی اعداد صحیح می‌نامیم:

$$\mathbb{Z} = \{[(x, y)]_R | (x, y) \in \mathbb{N}^{۲}\}$$

دقت کنید که

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow x - y = x' - y'$$

بنابراین هر کلاسِ $[(x, y)]$ نماینده‌ی تفاضلِ $x - y$ است. پس $\mathbb{Z}$ را می‌توان به صورت زیر هم نشان داد:

$$\mathbb{Z} = \{۰, ۱, -۱, ۲, -۲, \ldots\}.$$

مثال ۱۳۶. روی مجموعه‌ی اعدادِ صحیح، $\mathbb{Z}$، رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv_{۳} y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = ۳k$$

نشان دهید که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و X/R را مشخص کنید.

پاسخ. نخست ثابت می‌کنیم که R انعکاسی است. برای هر $x \in \mathbb{Z}$ می‌دانیم که $x \equiv_{۳} x$ پس روشن است که رابطه‌ی R انعکاسی است. حال ثابت می‌کنیم که R تقارنی است. اگر $y \equiv_{۳} x$ آنگاه $y - x = ۳k$ برای یک عددِ $k \in \mathbb{Z}$ و از این رو $x - y = -۳k = ۳(-k)$ یعنی عددِ $k' \in \mathbb{Z}$ موجود است که $x - y = ۳k'$ پس $x \equiv_{۳} y$. حال ثابت می‌کنیم که رابطه‌ی R متعدی است. فرض کنید xRy, yRz پس اعداد صحیحِ k, k' چنان موجودند که

$$y - x = ۳k \quad z - y = ۳k'$$

پس

$$z - x = ۳(k + k')$$

یعنی

$$xRz.$$

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. حال ادعا می‌کنیم که این رابطه، تنها دارای سه کلاس هم‌ارزی است؛ به بیان دیگر ادعا می‌کنیم که

$$X/R = \{[۰], [۱], [۲]\}$$

فرض کنید که x یک عدد صحیح دلخواه باشد. می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی x بر ۳ یکی از ۰و۱و۲ است. پس $x \in [۰] \cup [۱] \cup [۳]$. به بیان دیگر یا $[x] = [۰]$ یا $[x] = [۱]$ یا $[x] = [۲]$. پس

$$X/R \subseteq \{[۰], [۱], [۲]\}.$$

همچنین واضح است که

$$\{[۰], [۱], [۲]\} \subseteq X/R$$

پس

$$X/R = \{[۰], [۱], [۲]\}.$$

توجه کنید که از آنجا که هیچ دو عدد از میان ۰و۱و۲ با هم به پیمانه‌ی ۳ همنهشت نیستند، اعضایِ

$$[۰], [۱], [۲]$$

هر سه با هم متمایزند؛ یعنی

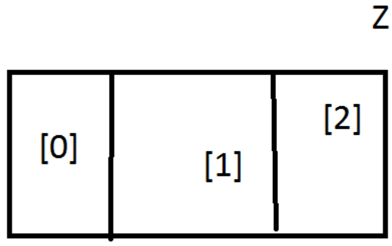
$$[۱] \cap [۲] = \emptyset, [۱] \cap [۰] = \emptyset, [۰] \cap ۲ = \emptyset$$

یعنی مجموعه‌ی

$$X/R$$

دقیقاً دارای سه عضو است. می‌نویسیم:

$$X/R = X/\equiv_{۳} = \mathbb{Z}_{۳} = \{[۰],[۱],[۲]\} = \{\bar{۰},\bar{۱},\bar{۲}\}$$



□

توجه کنید که در مثال بالا، با استفاده از رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۳، مجموعه‌ی اعداد صحیح را به ۳ قسمت افراز کردیم. همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ صفر است با $[۰]$ نشان دادیم؛ همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ برابر با ۱ است با $[۱]$ نشان دادیم؛ و همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ برابر با ۲ است با $[۲]$ نشان دادیم.

تعمیم ۱۳۷. برای عدد دلخواهِ $n \in \mathbb{N}$ روی $\mathbb{Z}$ رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv_n y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = nk$$

نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی با n کلاس است و

$$\mathbb{Z}/R = \{[۰], \dots, [n-۱]\}.$$

معمولاً $\mathbb{Z}/R$ در بالا را با $\mathbb{Z}_n$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۳۸ (اعداد گویا)**.** گفتیم که $\mathbb{Z} = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\}$ یک مجموعه است. بنابراین $\mathbb{Z}^۲ = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ یک مجموعه است که از عناصر به صورت (x,y) تشکیل شده است که در آن $x,y \in \mathbb{Z}$. روی $\mathbb{Z}^۲$ رابطه‌ی زیر را تعریف کنید:

$$(x,y)R(x',y') \iff x.y' = y.x'$$

نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

دقت کنید که

$$(x,y)R(x',y') \iff \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$$

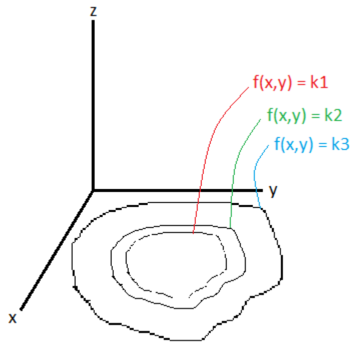
بنابراین هر کلاسِ هم‌ارزیِ $[(x,y)]_R$ را با $\frac{x}{y}$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی این کلاسهای هم‌ارزی تشکیل یک مجموعه می‌دهد که به آن مجموعه‌ی اعداد گویا گفته می‌شود. این مجموعه را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۳۹. اگر

$$z = f(x, y)$$

یک تابع دو متغیره باشد، رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

$$(x, y)R(x', y') \iff f(x, y) = f(x', y')$$



رابطه‌ی فوق یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و X/R مجموعه‌ی تمام منحنی‌های تراز تابع f است (که در واقع افرازی برای دامنه‌ی این تابع هستند).

مثال ۱۴۰. آیا می‌توانید یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی مجموعه‌ی $\mathbf{N} - \{۰\}$ تعریف کنید به طوری که

$$\mathbf{N} - \{۰\}/R = \{\{\text{اعداد زوج مخالف صفر}\}, \{\text{اعداد فرد}\}\}$$

پاسخ. رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \iff x \equiv_{۲} y.$$

□

تمرین ۸۰. فرض کنید R و S دو رابطه هم ارزی باشند روی مجموعه X. نشان دهید که $R \circ S$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X است اگر و تنها اگر $R \circ S = S \circ R$.

۲.۸ افراز و رابطه‌ی آن با رابطه‌ی هم‌ارزی

در خلال جلسات گذشته درباره‌ی افراز صحبت کردیم بدون آنکه آن را رسماً تعریف کرده باشیم. در ادامه‌ی درس، افرازها را خواهیم شناساند و خواهیم دید که مفهوم افراز **در تناظر یک به یک** با مفهومِ رابطه‌ی هم‌ارزی است.
فرض کنید X یک مجموعه باشد. مجموعه‌ی $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ را یک افراز برای X می‌خوانیم هرگاه

۱. $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B = X$

۲. $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad (A \neq B \to A \cap B = \emptyset)$

۳. $\forall A \in \mathcal{A} \quad A \neq \emptyset$

مثال ۱۴۱. تمام افرازهای مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳\}$ را بنویسید.

پاسخ.

$$\{\{۱\}, \{۲, ۳\}\}, \{\{۲\}, \{۱, ۳\}\},$$
$$\{\{۳\}, \{۱, ۲\}\}, \{\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}\},$$
$$\{\{۱, ۲, ۳\}\}$$

□

مثال ۱۴۲. یک نمونه افراز از مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ به صورت زیر است

اعداد فرد	اعداد زوج

$$\mathbf{N} - \{۰\} = \{\text{اعداد زوج}\} \cup \{\text{اعداد فرد}\}$$

دقت کنید که یک افرازِ $\mathcal{A}$ برای مجموعه‌ی X مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X است.

قبلا دیدیم که از هر رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان به یک افراز رسید:

قضیه ۱۴۳. اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد، آنگاه X/R یک افراز X است.

اثبات. نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی X/R تمام ویژگی‌های یک افراز برای مجموعه‌ی X را داراست.
در جلسه‌ی گذشته گفتیم که

$$\bigcup X/R = X$$

همچنین می‌دانیم که

$$[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$$

زیرا جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که اگر $[x] \neq [y]$ آنگاه $x \not R y$ و از این هم نتیجه می‌شود که

$$[x] \cap [y] = \emptyset$$

همچنین به دلیل آنکه R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است پس R انعکاسی است؛ بنابراین برای هر $x \in X$ داریم

$$x \in [x]$$

پس

$$\forall x \in X \quad [x] \neq \emptyset$$

□

در قضیه‌ی بالا دیدیم که از رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان برای افراز کردن یک مجموعه استفاده کرد. مثلا می‌توان از رابطه‌ی همقد بودن، که یک رابطه‌ی هم‌ارزی است استفاده کرد و دانشجویان کلاس را بر اساس قد دسته‌بندی کرد. بر عکس این گفته نیز درست است. یعنی هر دسته‌بندی‌ای در ریاضی، از یک رابطه هم‌ارزی ناشی می‌شود.

فرض کنید یک دسته‌بندی از اعضای مجموعه‌ی X داشته باشیم. روی X می‌توانیم رابطه‌ی زیر را تعریف کنیم: دو عنصر را با هم در رابطه می‌گیریم هرگاه هر دو در یک دسته قرار داشته باشند. در قضیه‌ی زیر همین گفته را ریاضی‌وار بیان کرده‌ایم.

قضیه ۱۴۴. فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ افرازی برای مجموعه‌ی X باشد. آنگاه یک رابطه‌ی هم‌ارزی R روی X چنان یافت می‌شود که

$$X/R = \mathcal{A}$$

اثبات. داشته‌ها: افرازِ $\mathcal{A}$ برای X؛ یعنی یک دسته‌بندی از اعضای مجموعه‌ی X.

هدف:

پیدا کردن یک رابطه‌ی R روی X به طوری که

$$X/R = \mathcal{A}$$

بیایید رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$xRy \iff$$

$\iff$ x و y هر دو در یک مجموعه‌ی یکسان در افراز $\mathcal{A}$ واقع شده باشند؛ یعنی هم‌دسته باشند

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$

نخست بیایید از خودمان بپرسیم که چه چیزهایی را می‌خواهیم ثابت کنیم.

باید ثابت کنیم که

۱. رابطه‌ی R در بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲. $X/R = \mathcal{A}$

اثبات قسمت اول. نخست ثابت می‌کنیم که R انعکاسی است.

فرض کنید $x \in X$ عنصر دلخواهی باشد. آنگاه از آنجا که $X = \bigcup \mathcal{A}$ می‌دانیم که $x \in \bigcup \mathcal{A}$. پس $A \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $x \in A$. پس $x \in A$ و $x \in A$ یعنی xRx پس R انعکاسی است.

دوم ثابت می‌کنیم که R تقارنی است.

فرض کنید xRy آنگاه

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$

به بیان دیگر

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad y, x \in A$$

پس yRx پس R تقارنی است.

سوم ثابت می‌کنیم که R تعدی نیز دارد.

فرض کنید xRy و yRz. پس مجموعه‌ی $A \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $x, y \in A$ و مجموعه‌ی $B \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $y, z \in B$ پس داریم

$$y \in A \cap B$$

از آنجا که $\mathcal{A}$ یک افراز است اگر $A \neq B$ آنگاه $A \cap B = \emptyset$. در بالا دیدیم که

$$A \cap B \neq \emptyset$$

بنابراین $A = B$ پس $x, z \in A = B$. یعنی xRz.

اثبات قسمت دومِ حکم:

$$X/R = \mathcal{A}$$

توجه کنید که هم X/R و هم $\mathcal{A}$ مجموعه‌هائی از مجموعه‌ها هستند. نخست ثابت می‌کنیم که $\mathcal{A} \subseteq X/R$.

فرض کنید $A \in \mathcal{A}$ می‌دانیم که

$$X/R = \{[x] | x \in X\}$$

کافی است ثابت کنیم که $x_\circ \in X$ چنان موجود است که $A = [x_\circ]$. توجه کنید که A ناتهی است (طبق تعریف افراز). فرض کنید $x_\circ$ یک عضو دلخواه باشد از A باشد. ادعا می‌کنیم که

$$[x_\circ] = A.$$

داریم

$$[x_\circ] = \{y | yRx_\circ\} = \{y | y, x_\circ \in A\} = \{y | y \in A\} = A$$

تا اینجا ثابت کردیم که

$$\mathcal{A} \subseteq X/R$$

اثبات اینکه $(*) \quad X/R \subseteq \mathcal{A}$.

فرض کنید $[x_\circ] \in X/R$. می‌دانیم که $A \in \mathcal{A}$ موجود است که $x_\circ \in A$؛ زیرا $\bigcup \mathcal{A} = X$.) به طور مشابه با بالا ثابت کنید که $[x_\circ] = A$. پس

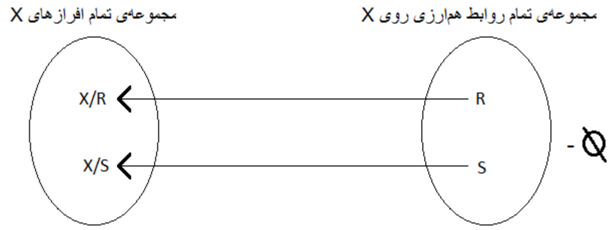
$$[x_\circ] \in \mathcal{A}$$

بنابراین ثابت کردیم که

$$X/R \subseteq \mathcal{A} \quad (**)$$

پس بنا به $(*)$ و $(**)$ داریم $X/R = \mathcal{A}$. $\square$

فرض کنید $\mathcal{M}$ مجموعه‌ی تمام روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. دقت کنید که $\mathcal{M}$ مجموعه‌ای متشکل از مجموعه‌هاست (هر رابطه یک مجموعه است). نیز فرض کنید $\mathcal{N}$ مجموعه‌ی تمام افرازهای مجموعه‌ی X باشد. باز دقت کنید که هر افراز خودش یک مجموعه از زیرمجموعه‌های X است. از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}$ یک **تابع** f را به صورت زیر تعریف کنید: اگر $R \in \mathcal{M}$ آنگاه $f(R) = X/R$. قضیه‌ی ۱۴۴ در واقع به ما می‌گوید که تابع f تابعی پوشاست؛ یعنی هر افرازی از یک رابطه‌ی هم‌ارزی ناشی می‌شود. در زیر ثابت کرده‌ام که f یک‌به‌یک نیز هست. به بیان دیگر، دو رابطه‌ی هم‌ارزی متفاوت، نمی‌توانند یک افراز یکسان ایجاد بکنند. به بیان دیگر اگر افرازهای تولید شده از دو رابطه‌ی هم‌ارزی با هم یکسان شوند، آن دو رابطه با هم یکی هستند.



قضیه ۱۴۵. فرض کنید R و S دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه X باشند. اگر

$$X/R = X/S$$

آنگاه

$$R = S.$$

به بیان دیگر اگر $X/R = X/S$ آنگاه

$$\forall x, y \in X \quad (xRy \leftrightarrow xsy).$$

اثبات. فرض کنید R و S دو رابطه هم ارزی باشند و

$$X/R = X/S$$

فرض کنید $(x_0, y_0) \in R$ هدفمان نشان دادن این است که $(x_0, y_0) \in S$.

از اینکه $(x_0, y_0) \in R$ نتیجه می گیریم که $x_0 \, R \, y_0$.

از آنجا که $x_0 \, R \, y_0$ بنا به این که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی نتیجه می‌گیریم که : $[x_0]_R = [y_0]_R$

از آنجا که $X/R = X/S$ نتیجه می‌گیریم که عنصر z_0 موجود است به طوریکه $[x_0]_R = [y_0]_R = [z_0]_S$

می دانیم که $x_0 \in [x_0]_R$ پس $x_0 \in [z_0]_S$

به طور مشابه $y_0 \in [z_0]_S$

پس $x_0 \, S \, z_0 \, S \, y_0$

حال بنا به تعدی رابطه S داریم:

$$x_0 \, S \, y_0$$

پس $(x_0, y_0) \in S$. پس ثابت شد که $R \subseteq S$. اثبات این که $S \subseteq R$ به طور کاملاً مشابه است. □

پس اثبات قضیه‌ی مهم زیر در اینجا به پایان رسید:

قضیه ۱۴۶. میان افرازهای یک مجموعه و روابط هم‌ارزی روی آن، یک تناظر یک به یک وجود دارد.

گفتیم که اگر A یک افراز باشد، آنگاه رابطه هم ارزی R موجود است به طوریکه $X/R = A$. حکم قضیه‌ی این است که یک رابطه‌ی هم‌ارزی موجود است که فلان ویژگی را دارد. این نوع احکام عموماً دارای دو نوع اثبات هستند: اثبات وجودی، و اثبات ساختی. در اثبات وجودی، تنها ثابت می‌کنیم که آن موجودی در پی آن هستیم موجود است، ولی شاید نتوانیم دقیقاً آن موجود را مشخص کنیم. در اثبات ساختی، موجود مورد نظر را به طور دقیق پیدا می‌کنیم. به نظر شما، اثباتی که برای حکم فوق آمد، ساختی بود یا وجودی؟

توجه ۱۴۷. در ریاضیات بسیار پیش می‌آید که اعضای یک مجموعه را نخست با استفاده از یک رابطه‌ی هم‌ارزی افراز می‌کنیم. سپس روی هر دسته یک اسم می‌گذاریم (مثلاً اسم نماینده‌ی آن دسته را انتخاب می‌کنیم). آنگاه بین دسته‌ها روابطی تعریف می‌کنیم. برای مثال، اعداد صحیح را می‌توان بر حسب باقیمانده به ۳ به سه دسته تقسیم کرد:

$$\mathbb{Z}_۳ = \{[۰], [۱], [۲]\} \quad *$$

معلوم است که به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$\mathbb{Z}_۳ = \{[۹], [۳۱], [۲۶]\}. \quad **$$

حال می‌توان بین این دسته‌ها «جمع» تعریف کرد:

$$[a] + [b] = [a + b]$$

تمرین ۸۱. حاصل‌جمع اعضای $\mathbb{Z}_۳$ را دوبه‌دو بنویسید. آیا اگر $\mathbb{Z}_۳$ را به صورت * یا به صورت ** بگیریم، حاصل جمع اعضایش متفاوت می‌شود؟

فصل ۹

توابع

پادشاهی پسر به مکتب داد
لوح سیمینْش بر کنار نهاد
بر سر لوح او نبشته به زر
جور استاد به ز مهر پدر
سعدی

تا اینجای درس با اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها آشنا شدیم و گفتیم که بناست که تمام مفاهیم ریاضی را بر پایه‌ی آنها بیان کنیم. در این راستا، مفهوم اعداد طبیعی را مطابق با قوانین نظریه‌ی مجموعه‌ها شرح دادیم؛ سپس مفهوم رابطه را تعریف کردیم و در میان روابط، به طور ویژه به روابط هم‌ارزی پرداختیم و دیدیم که چگونه با استفاده از روابط هم‌ارزی می‌توان مجموعه‌های تازه به دست آورد. مثلاً مجموعه‌ی اعداد صحیح را با استفاده از یک رابطه‌ی هم‌ارزی تعریف کردیم.

یک مفهوم بنیادین دیگر در ریاضیات، مفهوم تابع است. برای تعریف تابع، بر اساس قوانین نظریه‌ی مجموعه‌ها، مشکل چندانی نداریم؛ زیرا هر تابع یک نوع رابطه است.

تعریف ۱۴۸. فرض کنید R یک رابطه از مجموعه X به Y باشد. رابطه‌ی R را یک تابع می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad \forall y_۱, y_۲ \in Y \quad (xRy_۱ \wedge xRy_۲ \rightarrow y_۱ = y_۲)$$

در واقع هر تابع یک ماشین است که به ازای یک ورودی مشخص، تنها یک خروجی دارد. برای نشان دادن توابع از نمادهایی مانند f، g، ... استفاده می کنیم. مثلا اگر رابطه f یک تابع و $(x, y) \in f$ باشند، می نویسیم

$$f: \quad X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y$$

به تفاوت پیکانهای بالا توجه کنید. اگر f یک تابع متناظر با رابطه R باشد، می‌نویسیم: $\Gamma(f) = R$ به بیان دیگر، $\Gamma(f)$ که آن را «گراف تابع f» می‌خوانیم، مجموعه‌ی زیر است:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

توجه ۱۴۹. از این به بعد وقتی می گوییم f تابع است، منظورمان این است که f یک تابع تمام است؛ یعنی اگر f از رابطه R آمده باشد، آنگاه $DomR = X$.

اگر $f : X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه X را دامنه f می خوانیم و مجموعه زیر را مجموعه‌ی تصویرِ f:

$$\{f(x) | x \in X\}$$

توجه ۱۵۰. بنا بر آنچه گفتیم اگر $f : X \to Y$ تابع باشد، آنگاه

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \quad f(x) = y.$$

مثال ۱۵۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد و R یک رابطه هم ارزی روی X. عمل زیر یک تابع است:

$$f : X \to X/R$$
$$x \mapsto [x]_R$$

تعریف ۱۵۲.

- تابع $f : X \to Y$ را یک به یک می خوانیم هرگاه

$$\forall x_۱, x_۲ \in X \quad \Big(f(x_۱) = f(x_۲) \to x_۱ = x_۲\Big)$$

به بیان دیگر

$$\forall x_۱, x_۲ \in X \quad \big(x_۱ \neq x_۲ \to f(x_۱) \neq f(x_۲)\big)$$

- تابع $f : X \to Y$ را پوشا می خوانیم هرگاه تمام مجموعه‌ی مقصد را بپوشاند؛ یعنی

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y$$

تمرین ۸۲. آیا تابع مثال ۱۵۱ در حالت کلی یک به یک است؟ آیا این تابع پوشاست؟

مثال ۱۵۳. فرض کنید X یک مجموعه باشد و $B \subseteq X$ یک زیرمجموعه باشد. عمل زیر یک تابع از $P(X)$ به $P(X)$ است :

$$f : P(X) \to P(X)$$

$$A \mapsto A \cup B$$

مثال ۱۵۴. نشان دهید که تابع مثال ۱۵۳ یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد اگر و تنها اگر $B = \emptyset$

اثبات. نشان می دهیم تابع f در مثال ۲ یک به یک است اگر و تنها اگر $B = \emptyset$. بقیه‌ی اثبات را نیز به عهده‌ی شما می‌گذارم.
اگر $B \neq \emptyset$ آنگاه B دارای حداقل دو زیر مجموعه‌ي $A_۱, A_۲$ است به طوری که $A_۱ \neq A_۲$. داریم:

$$f(A_۱) = f(A_۲) = B$$

پس f یک به یک نیست.
اگر $B = \emptyset$ آنگاه برای هر $A \in X$ داریم

$$f(A) = A$$

واضح است که f یک به یک است. □

مثال ۱۵۵. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند و $b \in Y$ عنصر ثابتی باشد. عمل زیر یک تابع است:

$$f : X \to Y$$

$$x \mapsto b.$$

به تابع بالا، یک تابع ثابت گفته می‌شود. معلوم است که تابع بالا در حالت کلی یک به یک و پوشا نیست (سوال: در چه صورتی این تابع یک به یک است و در چه صورتی پوشاست؟)

تمرین ۸۳. فرض کنید که X, Y دو مجموعه‌ی متناهی باشند و $f : X \to Y$ یک تابع باشد.

۱. نشان دهید که اگر f یک به یک باشد، آنگاه تعداد اعضای Y بیشتر از یا مساوی با تعداد اعضای X است.

۲. نشان دهید که اگر f پوشا باشد، آنگاه تعداد اعضای X بزرگتر از یا مساوی با تعداد اعضای Y است.

۳. نشان دهید که اگر f یک به یک و پوشا باشد، آنگاه تعداد اعضای X, Y برابر است.

۴. نشان دهید که اگر تعداد اعضای X با تعداد اعضای Y برابر باشد و $f : X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه f یک به یک است اگروتنهااگر پوشا باشد.

مثال ۱۵۶. فرض کنید X یک مجموعه باشد و $A \subseteq X$. عمل زیر یک تابع است:

$$f : A \to X$$

$$x \mapsto x$$

تابع بالا را تابع **مشمولیت** می‌خوانیم. در این مثال اگر $A = X$ آنگاه تابع f را همانی می خوانیم و آن را با id_X نشان می‌دهیم.

$$id_X : X \to X$$

$$x \mapsto x$$

مثال ۱۵۷. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. تابع f را از $P(X) \times P(X)$ به $P(X)$ با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$f : P(X) \times P(X) \to P(X)$$

$$(A, B) \mapsto A \cup B$$

یک به یک بودن و پوشائی این تابع را بررسی کنید.

اگر f یک به یک باشد آنگاه باید از

$$f(A_۱, B_۱) = f(A_۲, B_۲)$$

نتیجه شود که

$$(A_۱, B_۱) = (A_۲, B_۲)$$

یعنی از

$$A_۱ \cup B_۱ = A_۲ \cup B_۲$$

باید نتیجه شود که $A_۱ = A_۲, B_۱ = B_۲$

فرض کنید $A_۱ \neq \emptyset$. داریم: $f(A_۱, \emptyset) = f(\emptyset, A_۱)$. ولی $(A_۱, \emptyset) \neq (\emptyset, A_۱)$. پس این تابع یک به یک نیست.

تابع مثال قبل پوشاست. فرض کنید $Y \in P(X)$. برای اثبات پوشا بودن تابع، باید مجموعه‌های $A, B \in P(X)$ را طوری پیدا کنیم که $f(A, B) = Y$.

واضح است که $Y \cup \emptyset = f(Y, \emptyset) = Y$

مثال ۱۵۸. فرض کنید X, Y دو مجموعه باشند. عمل زیر را در نظر بگیرید:

$$\pi_X : X \times Y \to X$$

$$(x, y) \mapsto x$$

عمل بالا یک تابع است که بدان **تابع تصویر روی مؤلفه‌ی اول** گفته می‌شود. نشان دهید که تابع π_x یک به یک نیست، ولی پوشاست.

به طور مشابه تابع

$$\pi_y : (X, Y) \to Y$$

$$(x, y) \mapsto y$$

تعریف می‌شود که آن را تابع تصویر روی مؤلفه‌ی دوم می‌خوانیم.

تعریف ۱۵۹. • فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ یک زیرمجموعه‌ی دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f(A) : \{f(x) | x \in A\}$$

• فرض کنید $B \subseteq Y$؛ تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

توجه ۱۶۰. ادعا نکرده‌ایم که f دارای وارون است. مبادا نماد f^{-1} موجب ابهام شود.

توجه ۱۶۱. نشان دهید که $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

فرض ها :

$$f : X \to Y$$

تابع است و

$$A \subseteq X.$$

برای آنکه ثابت کنیم $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ باید ثابت کنیم که

$$\forall x \in X \quad \big(x \in A \to x \in f^{-1}(f(A))\big)$$

فرض می کنیم $x_0 \in A$ عنصر دلخواهی باشد باید ثابت کنیم

$$x_0 \in f^{-1}(f(A))$$

و طبق تعریفِ f^{-1} برای این منظور باید ثابت کنیم که

$$f(x_0) \in f(A)$$

و این طبق تعریفِ f واضح است زیرا $x_0 \in A$.

سوال ۷. آیا لزوماً $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$؟

می‌دانیم که

$$x_0 \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x_0) \in f(A)$$

در مثال زیر نشان داده‌ایم که عبارت بیان شده لزوماًبرقرار نیست. فرض کنید

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

و تابع

$$f : X \to X$$

را چنان در نظر بگیرید که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) = ۱$. فرض کنید

$$A = \{۱, ۲\}.$$

داریم

$$f(A) = \{۱\}$$

$$f^{-۱}(f(A)) = \{۱, ۲, ۳, ۴\}.$$

تمرین ۸۴. نشان دهید اگر f یک به یک باشد $f^{-۱}(f(A)) = A$

تمرین ۸۵. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $B \subseteq Y$ نشان دهید $f(f^{-۱}(B)) \subseteq B$.

تمرین ۸۶. نشان دهید اگر f پوشا باشد آنگاه $f(f^{-۱}(B)) = B$

تمرین ۸۷. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع دلخواه باشد. نشان دهید که

$$A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

$$C \subseteq D \Rightarrow f^{-۱}(C) \subseteq f^{-۱}(D)$$

$$f^{-۱}(D^c) = (f^{-۱}(D))^c$$

$$f^{-۱}(C \cup D) = f^{-۱}(C) \cup f^{-۱}(D)$$

$$f^{-۱}(C \cap D) = f^{-۱}(C) \cap f^{-۱}(D)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

تمرین ۸۸. نشان دهید که تابع $f : X \to Y$ یک به یک است اگر و تنها اگر

$$\forall A, B \subseteq X \quad f(A - B) = f(A) - f(B).$$

اثبات. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک به یک باشد و $A_۰, B_۰$ دو مجموعه دلخواه از X باشند. باید نشان دهیم

$$f(A_۰ - B_۰) = f(A_۰) - f(B_۰)$$

پس باید نشان دهیم که

$$f(A_۰ - B_۰) \subseteq f(A_۰) - f(B_۰)$$

و

$$f(A_۰) - f(B_۰) \subseteq f(A_۰ - B_۰)$$

اثبات عبارت اول:
فرض می کنیم $y_0 \in f(A_0 - B_0)$ بنابراین $x_0 \in A_0 - B_0$ چنان موجود است که $f(x_0) = y_0$.
ازآنجا که $x_0 \in A_0$ داریم $f(x_0) \in f(A_0)$
از آنجا که $x_0 \notin B_0$ ادعا می کنیم $f(x_0) \notin f(B_0)$
اثبات ادعا : اگر $f(x_0) \in f(B_0)$ آنگاه $x'_0 \in B_0$ موجود است به طوریکه $f(x'_0) = f(x_0)$ از آنجا که تابع f یک به یک است

$$x_0 = x'_0 \in B_0$$

و این با فرض $x_0 \notin B_0$ تناقض دارد. پس $f(x_0) \notin f(B_0)$. پس $f(x_0) \in f(A_0) - f(B_0)$. اثبات عبارت دوم و اثبات قسمت عکس این مسأله به عهده‌ی شما. □

تمرین ۸۹. فرض کنید $D \subseteq X \times Y$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. نشان دهید که

$$\pi_X(D) = \{x \in X | \exists y \in Y \quad (x, y) \in D\}.$$

۱.۹ تحلیل عمیق‌تری از توابع یک به یک و پوشا

به یک تابعِ یک به یک و پوشا، یک **تناظر یک به یک** یا یک تابع **دوسوئي** گفته می‌شود.

قضیه ۱۶۲. اگر تابع $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد، آنگاه تابع یکتای $g : Y \to X$ چنان موجود است که

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

و

$$\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = y$$

.

توجه ۱۶۳. تابع g در قضیه‌ی بالا را تابع وارون f می‌خوانیم و با f^{-1} نمایش می‌دهیم.

اثبات. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد. عمل $g : Y \to X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
ـ عنصر دلخواه $y_0 \in Y$ را در نظر بگیرید. از آنجا که f پوشاست، عنصر $x_0 \in X$ چنان موجود است که $f(x_0) = y_0$.
ـ تعریف می کنیم: $g(y_0) = x_0$. توجه کنید که

۱. $Dom(g) = Y$

۲. g یک تابع از Y به X است.

برای اثبات مورد دوم باید نشان دهیم که هرگاه $y_۱ = y_۲$ آنگاه $g(y_۱) = g(y_۲)$.
فرض کنید $y_۱ = f(x_۱)$ و $y_۲ = f(x_۲)$. از فرض $y_۱ = y_۲$ نتیجه می‌شود که $f(x_۱) = f(x_۲)$. از آنجا که f یک به یک است داریم $x_۱ = x_۲$. پس $g(y_۱) = g(y_۲)$.

تمرین ۹۰. نشان دهید g یک به یک و پوشاست.

حال به اثبات این می‌پردازیم که

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

فرض کنید $x_. \in X$ عنصر دلخواهی باشد. اگر $y_. = f(x_.)$ طبق تعریف داریم

$$g(y_.) = x_.$$

یعنی

$$g \circ f(x_.) = x_.$$

اثبات این را که

$$\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = id_Y$$

به عنوان تمرین رها کرده‌ام.
اثبات یکتایی. فرض کنید $g_۱ : Y \to X$ و $g_۲ : Y \to X$ به گونه‌ای باشند که $f \circ g_۱(y) = Id_Y$ و $g_۱ \circ f(x) = Id_X$ و $f \circ g_۲(y) = Id_Y$ و $g_۲ \circ f(x) = Id_X$. باید ثابت کنیم که $g_۱ = g_۲$. برای این منظور باید نشان می‌دهیم:

$$\forall y \in Y \quad g_۱(y) = g_۲(y).$$

فرض کنید $y_. \in Y$ عنصری دلخواه باشد. باید نشان دهیم که

$$g_۱(y_.) = g_۲(y_.)$$

از آنجا که f پوشاست، عنصر $x_. \in X$ چنان موجود است که

$$f(x_.) = y_.$$

داریم:

$$g_۱(y_.) = g_۱\big(f(x_.)\big)$$

بنا به فرض $g_۱ \circ f(x) = Id_X$ داریم:

$$g_۱(y_.) = g_۱\big(f(x_.)\big) = x_.$$

و بنا به فرض $g_2 \circ f(x) = Id_X$ داریم:

$$g_2(y_0) = g_2\big(f(x_0)\big) = x_0.$$

پس $g_1(y_0) = g_2(y_0)$. □

تمرین ۹۱. نشان دهید که عکس قضیه‌ی بالا نیز برقرار است؛ یعنی اگر تابع g با ویژگی ذکر شده در قضیه وجود داشته باشد، آنگاه f هم یک به یک است و هم پوشا.

تمرین ۹۲. نشان دهید که اگر تابعی یک به یک از X به Y موجود باشد آنگاه تابعی پوشا از Y به X موجود است.

برای اثبات قضیه‌ی زیر به یکی از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها نیاز داریم که کمتر درباره‌ی آن صحبت کرده‌ایم.

قضیه ۱۶۴. اگر از X به Y یک تابع پوشا موجود باشد آنگاه یک تابع یک به یک از Y به X موجود است.

اثبات. تابع $g : Y \to X$ را به صورت زیر تعریف کنید.
فرض کنید $y_0 \in Y$. قرار دهید:

$$A_{y_0} = \{x \in X | f(x) = y_0\}$$

در واقع A_{y_0} از عناصری تشکیل شده است که f آنها را به y_0 می‌برد. کافی است یکی از آنها را برداریم و آن را $g(y_0)$ تعریف کنیم. اما این کار به همین راحتی نیست!
برای y های مختلف مجموعه‌های متفاوتِ A_y پیدا می‌شود. ما می‌خواهیم هر عنصرِ y را به عنصری در A_y ببریم. اگر موفق به این کار بشویم، تابع حاصل یک به یک است (چرا؟) اما این کار را چگونه باید انجام دهیم تا حاصل یک **تابع** شود؟!
اینجاست که اصل انتخاب به یاری ما می‌آید. خانواده‌ی نامتناهی زیر از مجموعه‌ها را در نظر بگیرید:

$$\{A_y\}_{y \in Y}$$

بنا به اصل انتخاب یک تابع انتخابِ g از Y به $\bigcup\{A_y\}_{y\in Y}$ موجود است به طوری که برای هر y_0 داریم

$$g(y_0) \in A_{y_0}.$$

□

درباره‌ی **اصل انتخاب**، بعداً مفصل‌تر صحبت خواهم کرد. در قضیه‌ی بالا، به طور خاص، نیاز به این اصل را احساس کردیم. پس بگذارید دوباره‌ی توضیح کوتاهی درباره‌ی آن بدهم.

فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. حاصلضرب این خانواده را با نماد $\Pi_{i\in I}A_i$ نمایش می‌دهیم.

$$\Pi_{i\in I}A_i = \{(x_i)_{i\in I} | x_i \in A_i\}$$

به بیان دیگر هر عنصر از $\Pi_{i\in I}A_i$ تابعی از I به $\cup A_i$ است.

$$\overset{a_1\in A_1}{1} \quad \overset{a_2\in A_2}{2} \quad \overset{a_3\in A_3}{3} \quad \dots \quad \overset{a_i\in A_i}{i}$$

اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه

$$\Pi_{i\in I}A_i \neq \emptyset$$

به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌ها باشد، تابعی موجود است که از هر یک از آنها یک عنصر بر می‌دارد. [1]

$$\exists f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$$
$$\forall i \in I \quad f(i) \in A_i$$

تمرین ۹۳. فرض کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه‌ی همه‌ی افرازهای ممکن از مجموعه‌ی X باشد و $\mathcal{E}$ مجموعه‌ی همه‌ی روابط هم‌ارزی روی X. تابعِ $f : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(R) = X/R$$

نشان دهید که تابع f یک به یک و پوشاست.

فصل ۱۰

مجموعه‌های اعداد

فصل ۱۱

متناهی و نامتناهی

ساقیا در گردش ساغر تعلّل تا به چند
دور چون با عاشقان افتد تسلسل بایدش
حافظ

یکی از مفاهیم ابهام‌برانگیز در علم بشری، مفهوم نامتناهی است. در هیچ علمی، بهتر از ریاضی نمی‌توان به سوالهای زیر پاسخ داد:

۱. نامتناهی چیست؟

۲. آیا نامتناهی وجود دارد یا همه چیز متناهی است؟

۳. اگر نامتناهی وجود دارد، آیا همه‌ی نامتناهی‌ها هم‌اندازه‌اند؟

در این بخش قرار است پاسخ این سوالها را به نیکی دریابیم.

دو مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{\text{علی، حسن، حسین}\}$$

و

$$B = \{۰, ۱, ۲\}$$

با این که ایندو به ظاهر خیلی متفاوت به نظر می‌رسند ولی از نظر «اندازه» با هم برابرند. در واقع این طور به نظر می‌آید که اگر نامها را در مجموعه‌ی بالا عوض کنیم، به یک کپی از مجموعه‌ی پائین می‌رسیم؛ یعنی اگر علی را۰ و حسن را ۱ و حسین را ۲ بنامیم، به مجموعه‌ی پائین می‌رسیم. اصطلاحاً در این موقع می‌گوئیم که این دو مجموعه **همتوان** هستند. بیائید همین نکته را دقیقتر بیان کنیم. فرض کنید f یک تابع از A به B باشد به طوری که

$$f(\text{علی}) = ۰, f(\text{حسن}) = ۱, f(\text{حسین}) = ۲$$

تابع f هم یک به یک است و هم‌پوشا. در واقع این تابع، یک تابع «تغییر نام» است.

تعریف ۱۶۵. دو مجموعه‌ی دلخواهِ X, Y را همتوان (یا هم‌اندازه) می‌خوانیم هرگاه تابعی یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد.

اگر دو مجموعه‌ی X, Y همتوان باشند، می‌نویسیم:

$$X \cong Y$$

گاهی نیز می‌نویسیم:

$$card(X) = card(Y).$$

وقتی دو مجموعه همتوان هستند در واقع، می‌توان اینگونه اندیشید که هر دو یک مجموعه هستند که اعضایش دو صورت مختلف نامگذاری شده‌اند. به یک تابعِ یک به یک و پوشا، یک تناظر یک به یک نیز گفته می‌شود. پس دو مجموعه، همتوان هستند هرگاه بینشان یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد؛ یعنی هر عنصر از یکی، در تناظر با فقط یک عنصر از دیگری باشد.

در درسهای پیشین با مفهوم اعداد طبیعی آشنا شدید: گفتیم که بنا به اصل وجود مجموعه‌ی استقرائی یک مجموعه‌ی استقرائی موجود است. ثابت کردیم که کوچکترین مجموعه‌ی استقرائي نیز موجود است که آن را مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌خوانیم و با $\mathbb{N}$ نشان می دهیم. به بیان دیگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای اعضای زیر است:

$$\begin{aligned}
&۰ = \emptyset \\
&۱ = \{۰\} \\
&\vdots \\
&n = \{۰, \ldots, n - ۱\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

تعریف ۱۶۶.

۱. می‌گوئیم مجموعه‌ی X دارای n عضو است هرگاه همتوان با مجموعه‌ی $n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$ باشد؛ یعنی یک تابع یک به یک و پوشا بین n و X موجود باشد.

۲. می‌گوئیم مجموعه‌ی X متناهی است هرگاه یک عددِ $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که X با n همتوان باشد. در واقع مجموعه‌ی X متناهی است هرگاه یک عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که مجموعه‌ی X دارای n عضو باشد.

تمرین ۹۴. ۱. نشان دهید که اگر A, B متناهی باشند، آنگاه $A \times B$ نیز متناهی است.

۲. نشان دهید که اگر A متناهی باشد، آنگاه هر زیرمجموعه از A نیز متناهی است.

پس به راحتی می‌توان مجموعه‌های متناهی مختلفی ساخت.

تعریف ۱۶۷. مجموعه‌ی X را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه متناهی نباشد (به همین سادگی!).

اولین سوالی که به ذهن می‌رسد این است که آیا در یک جهان از نظریه‌ی مجموعه‌ها، مجموعه‌ای نامتناهی نیز پیدا می‌شود؟ اثبات این گفته، بدون استفاده از اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی ممکن نیست. در واقع این که مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد در نظریه‌ی مجموعه‌ها یک اصل است. این اولین چالش فلسفی بحث متناهی و نامتناهی است. این که مجموعه‌ای نامتناهی وجود داشته باشد، یا این که جهان هستی متناهی باشد یا نامتناهی، تأثیر بزرگی بر ایدئولوژی و روش زندگی ما دارد. بسیاری از براهین خداشناسی نیز، مانند برهان علیت، بر این استوارند که گیتی، مجموعه‌ای متناهی است. دیدیم که نظریه‌ی مجموعه‌ها، در این زمینه کمک خاصی به ما نمی‌کند: در نظریه‌ی مجموعه‌ها، وجود یک مجموعه‌ی متناهی یک **اصل** است. با این حال، در شناسائی نامتناهی‌ها، هیچ چیز کارآمدتر از نظریه‌ی مجموعه‌ها نیست.

بگذارید بحث را کمی پیش ببریم، تا دوباره به بحثهای فلسفی بیشتری برگردیم. با پذیرش این اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی، وجود اعداد طبیعی و قضیه‌ای مانند قضیه‌ی زیر را می‌توان ثابت کرد:

قضیه ۱۶۸. مجموعه‌ی اعداد طبیعی نامتناهی است.

تمرین ۹۵. قضیه‌ی بالا را ثابت کنید.

در تمرین بالا نشان داده‌اید که مجموعه‌ی اعداد طبیعی، با هیچ مجموعه‌ی متناهی‌ای هم اندازه نیست. به بیان دیگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی، با هیچ مجموعه‌ی متناهی‌ای در تناظر یک به یک نیست.

حال مجموعه‌ی اعداد زوج، را به عنوان زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی اعداد طبیعی در نظر بگیرید.

$$E = \{۰, ۲, ۴, \ldots\}$$

تابعِ $f : \mathbb{N} \to E$ را در نظر بگیرید که $f(x) = ۲.x$. تابع بالا یک به یک و پوشاست. پس با استفاده از این تابع می‌توان نشان داد که مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و E هم‌اندازه هستند. در واقع E تنها یک نام‌گذاری دیگر برای $\mathbb{N}$ است!

نکته‌ی بالا چالش فلسفی دوم را پیش روی ما می‌نهد: اصل عمومیِ ششم اقلیدس برای ورود به اصول هندسه‌ی اقلیدسی این است که «همواره یک کُل از جزء خودش بزرگتر است». برای آشنا شدن با اصول اقلیدس پیوند زیر را مطالعه کنید:

https://www.math.ust.hk/~mabfchen/Math4221/Euclidean%20Geometry.pdf

پس، از نظر اقلیدس، هیچ کُلّی نمی‌تواند «هم‌اندازه» با جزئی از خودش باشد. گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان، یعنی هم‌اندازه، می‌خوانیم هرگاه بین آنها یک تابع یک به یک و پوشا موجود باشد. به نظر می‌آید که در اینجا اصل اقلیدس رد شده است: زیرا مجموعه‌ی اعداد طبیعی با جزئی از خودش (مجموعه‌ی اعداد زوج) هم‌اندازه است. [۱] علت چنین اتفاقی، اصل «وجود مجموعه‌ی نامتناهی» است.

[۱] اقلیدس با چه پیش‌فرضی اصل خود را نوشته است که ما آن پیش‌فرض را نداریم؟

با فرض پذیرفتن وجود مجموعه‌ی نامتناهی، **می‌توان نشان داد که مجموعه‌ی X نامتناهی است اگروتنهااگر با جزئی از خودش هم‌اندازه باشد.** مثلاً مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ به این علت نامتناهی است که هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد زوج است.

توجه کنید که مجموعه‌ی اعداد فرد هم، هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد زوج است. پس مجموعه‌ی اعداد طبیعی، از دو مجموعه ساخته شده است که هم‌اندازه‌ی خودش هستند! در جلسات آینده با این اتفاقات عجیب و غریب بیشتر آشنا خواهیم شد.

گفته‌ی بالا نیز دارای یک بار فلسفی است: گفتیم که مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای است که زیرمجموعه‌ای ازآن هم‌اندازه با خودِ مجموعه شود. اگر جهان هستی نامتناهی باشد، بخشی از جهان شبیه به کُلِّ جهان است. آن بخش نیز بخشی شبیه به خود دارد! بنابراین چه بسا نامتناهی کُپی از خودِ ما و سیاره‌ی ما در جاهای دیگر گیتی وجود داشته باشد و این جهانها به صورت موازی در جریان باشند.

در فصل پیش رو خواهیم دید که هر چند وجود نامتناهی برای ما اصل است، اما در نظریه‌ی مجموعه‌ها نامتناهی‌ها دارای اندازه‌های مختلف هستند. خواهیم دید که هر نامتناهی از یک نامتناهی دیگر، چقدر بیشتر است!

بیایید گفته‌ی بالا را به صورت دقیق اثبات کنیم: یک مجموعه‌ی داده‌شده‌ی X نامتناهی است اگروتنهااگر با بخشی از خودش همتوان باشد. البته لازم به ذکر است که،همان گونه که در پایین خواهید دید، در اثبات این گفته از اصل انتخاب نیز استفاده می‌شود:

قضیه ۱۶۹. (در صورت پذیرش اصل انتخاب) مجموعه‌ی X نامتناهی است اگر و تنها اگر $Y \subsetneqq X$ موجود باشد، به طوری که $X \cong Y$.

اثبات. فرض کنید مجموعه‌ی X نامتناهی باشد. عنصر $x_۰ \in X$ را انتخاب کنید. مجموعه‌ی $X - \{x_۰\}$ ناتهی است. پس عنصر $x_۱ \in X - \{x_۰\}$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $x_۰, \ldots, x_n$ انتخاب شده باشند. دوباره $X - \{x_۰, \ldots, a_n\}$ ناتهی است پس می‌توان $x_{n+۱} \in X - \{x_۰, \ldots, x_n\}$ را انتخاب کرد. بدین‌سان یک دنباله‌ی $A = \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ از اعضای X انتخاب کرده‌ایم. واضح است که $X - \{x_۰\}$ زیرمجموعه‌ی سره‌ای از X است. اگر ادعای زیر را ثابت کنیم، یک طرف حکم ثابت شده است.

ادعا: $X \cong X - \{x_۰\}$

برای اثبات ادعا کافی است یک تابع یک به یک و پوشا مانند

$$f : X \to X - \{x_۰\}$$

پیدا کنیم. اگر $x \in X$ آنگاه یا $x \in A$ یا $x \notin A$. اگر $x \in A$ آنگاه یک $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $x = x_n$. پس نگاشت f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x_{n+۱} & x = x_n \in A \\ x & x \notin A \end{cases}$$

ثابت کنید که تابع f یک به یک و پوشاست.

برای اثبات سمت دیگر قضیه باید نشان دهیم که هیچ مجموعه‌ی متناهی‌ای با جزئی از خودش همتوان نیست. این را نیز به راحتی می‌توان با استقراء ثابت کرد (بررسی کنید). □

نتیجه ۱۷۰. مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ نامتناهی است. (چون با بخشی از خودش همتوان است.)

$$\begin{array}{lllllll} \mathbf{N}: & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \ldots \\ \mathrm{E}: & ۰ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \ldots \end{array}$$

تا کنون فهمیدیم که مجموعه‌ها، به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند؛ مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌های نامتناهی. یک سوال طبیعی این است که آیا مجموعه‌های نامتناهی، همه هم‌اندازه‌ی هم هستند؟ در بالا دیدیم که $\mathbf{N}$ و $\mathbf{E}$ هم‌اندازه‌ی هم هستند؛ پس پرسیدن این سوال طبیعی است.

۱.۱۱ مجموعه‌های شمارا

گفتیم که مجموعه‌ی اعداد طبیعی متناهی نیست، یعنی با هیچ $n \in \mathbb{N}$ همتوان نیست. از طرفی هر مجموعه‌ی $n \in \mathbb{N}$ متناهی است. قبلاً هم نشان دادیم که $\mathbb{N}$ کوچکترین مجموعه‌ی نامتناهی است. در بالا به نکته‌ی جالب دیگری اشاره کردیم: مجموعه‌ی اعداد طبیعی با یک زیرمجموعه‌ی سره از خودش (مجموعه‌ی اعداد زوج) همتوان است. گفتیم که این نکته یک مشخصه‌ی کلی برای مجموعه‌های نامتناهی است. نیز گفتیم که یکی از اصول کلی علمی اقلیدس این بوده است که همواره کُل از جزء خودش بزرگتر است. این گفته، برای مجموعه‌های متناهی بوضوح درست است. انگار، دنیای اقلیدس دنیائی متناهی بوده است که در آن اصل یادشده مورد پذیرش بوده است؛ زیرا در دنیای نامتناهی‌ها (مانند مثال اعداد طبیعی) اصل یادشده به نظر درست نمی‌آید.

تعریف ۱۷۱. مجموعه‌ی X را **شمارا** می‌خوانیم هرگاه $X \cong \mathbf{N}$.[۲]

پس یک مجموعه‌ی X شماراست هرگاه به اندازه‌ی اعداد طبیعی عضو داشته باشد:

$$|X| = |\mathbb{N}|.$$

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد زوج شماراست؛ زیرا همان گونه که در زیر می‌بینید یک تابع یک به یک و پوشا میان مجموعه‌ی اعداد زوج و مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد:

$$E \cong \mathbf{N}$$

$$\begin{array}{cccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \ldots \end{array}$$

[۲] در این کتاب، منظور از شمارا، شمارای نامتناهی است. در برخی کتابها، مجموعه‌های متناهی را نیز شمارا می‌گیرند.

ضابطه‌ی تابع بالا به صورت زیر است:

$$f : E \to \mathbb{N} \quad x \mapsto ۲.x$$

به بیان دیگر، یک مجموعه‌ی X شمارای نامتناهی است هرگاه اعضای آن را بتوان توسط یک دنباله به صورت زیر نوشت:

$$X = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

خودِ مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ پس بدین دلیل شماراست که می‌توان نوشت:

$$\mathbf{N} = \{n\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

همچنین مجموعه‌ی اعداد زوج شماراست زیرا

$$\mathbf{E} = \{۲n\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

قضیه‌ی زیر، تأئیدی بر این گفته است که $\mathbb{N}$ کوچکترین مجموعه‌ی نامتناهی است.

قضیه ۱۷۲. مجموعه‌ی دلخواهِ X نامتناهی است اگروتنها اگر شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی باشد.

اثبات. اثبات قضیه‌ی ۱۶۹ را (به دقت) بخوانید. اگر X یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی A که در اثبات قضیه‌ی یادشده ساخته شد، شمارای نامتناهی است و $A \subseteq X$. $\square$

حال بیایید با اضافه کردن اشیائی به مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ آن را بزرگتر کنیم. مثلاً فرض کنید یک دوچرخه به مجموعه‌ی اعداد طبیعی اضافه کنیم. واضح است که مجموعه‌ی حاصل نامتناهی است زیرا شامل اعداد طبیعی است؛ همچنین به نظر می‌آید که با اضافه کردن یک دوچرخه به مجموعه‌ی اعداد طبیعی، به مجموعه‌ای بزرگتر از مجموعه‌ی اعداد طبیعی برسیم. در زیر نشان داده‌ایم که اینگونه نیست! در واقع می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\mathbb{N} \cup \{\text{🚲}\} \cong \mathbb{N}.$$

برای اثبات نوشته‌ی بالا کافی است یک تناظر یک به یک میان مجموعه‌های یادشده برقرار کنیم. به شکل زیر نگاه کنید:

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbb{N}\cup\{\text{🚲}\} & \text{🚲} & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathbb{N} & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \ldots
\end{array}$$

بنا به شکل بالا، اگر به یک مجموعه‌ی شمارا، یک عنصر اضافه شود، همچنان شمارا باقی می‌ماند! در زیر این گفته را دقیق‌تر کرده‌ایم:

قضیه ۱۷۳. فرض کنید A یک مجموعه‌ی شمارا باشد و $x \notin A$. آنگاه $A \cup \{x\}$ هم شماراست.

اثبات. از آنجا که A شماراست داریم
$$A \cong \mathbf{N}$$
یعنی
$$A = \{x_{۰}, x_{۱}, x_{۲}, \ldots\}$$
می‌نویسیم:
$$A \cup \{x\} = \{x, x_{۰}, x_{۱}, x_{۲}, \ldots\}$$
تابع $f : \mathbf{N} \to A \cup \{x\}$ را به صورت زیر تعریف کنید.
$$f(۰) = x$$
$$f(i) = x_{i-۱}$$
بررسی کنید که تابع بالا یک به یک و پوشاست. □

نکته‌ی بالا به «پارادوکس هیلبرت» معروف است:
فرض کنید که یک هتل داریم که به اندازه‌ی اعداد طبیعی اتاق دارد و همه‌ی اتاقهای آن پُر است. اگر یک مسافر جدید بیاید آیا می‌شود او را هم در هتل جای داد؟ به نظر می‌آید که بشود: کافی است که به هر کس بگوئیم که یک اتاق جلوتر برود تا اتاق شماره‌ی ۱ خالی شود! جالب اینجاست که اگر از یک مجموعه‌ی شمارا یک عضو برداریم هم کوچکتر نمی‌شود:

تمرین ۹۶. اگر A شمارا باشد و $x \in A$ آنگاه $A - \{x\}$ هم شماراست.

حال بیایید به جای یک عنصر، n عنصر (یعنی تعدادی متناهی عنصر) به مجموعه‌ی اعداد طبیعی اضافه کنیم:

تمرین ۹۷. فرض کنید A شماراست و $x_{۰}, \ldots, x_n \notin A$ نشان دهید که $A \cup \{x_{۰}, \ldots, x_n\}$ شماراست.

باز هم مجموعه‌ی حاصل بزرگتر نشد! حال بیایید n عنصر از آن کم کنیم:

تمرین ۹۸. اگر A شمارا باشد و $x_{۱}, \ldots, x_n \in A$ آنگاه $A - \{x_{۱}, \ldots, x_n\}$ هم شماراست.

مثال هتل هیلبرت را به صورت زیر ادامه می‌دهیم: فرض کنید هتل یادشده به اندازه‌ی اعداد طبیعی جا دارد و همه‌ی اتاقهای آن پر است. حال به اندازه‌ی اعداد طبیعی مسافر تازه وارد می‌شوند که نیازمند اتاق هستند. در این صورت هم هتل برای آنها جا دارد: کافی است که هر کس که در اتاق n است به اتاق $۲n$ برود. در این صورت اتاقهای فرد خالی می شوند و مسافران جدید می‌توانند وارد آنها شوند! در زیر این گفته را دقیق کرده‌ایم:

قضیه ۱۷۴. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی شمارا باشند و $A \cap B = \emptyset$. آنگاه $A \cup B$ نیز شماراست.

اثبات. فرض کنید $\{x_i\}_{i\in \mathbf{N}}$ شمارشی برای A باشد و $\{y_i\}_{i\in \mathbf{N}}$ شمارشی برای B باشد. داریم:

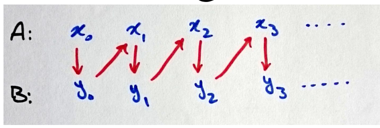
$$A\cup B=\{x_۰,y_۰,x_۱,y_۱,x_۲,y_۲,x_۳,y_۳,\dots\}$$

تابع $f:\mathbf{N}\to A\cup B$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(۲i)=x_i$$

$$f(۲i+۱)=y_i$$

دقت کنید که تابع بالا، مجموعه‌ی $A\cup B$ را به صورت زیر می‌شمارد:



بررسی کنید که تابع f یک به یک و پوشاست. $\square$

توجه ۱۷۵. در مثال بالا مجموعه‌ی A را با اعداد زوج و مجموعه‌ی B را با اعداد فرد متناظر کردیم. از این رو $A\cup B$ با مجموعه‌ی اعداد طبیعی متناظر شد و از اینجا فهمیدیم که شماراست.

مثال ۱۷۶. مجموعه‌ی اعداد صحیح، $\mathbf{Z}$، شماراست.

اثبات. داریم

$$\mathbf{Z}=\mathbf{N}\cup \underbrace{\mathbf{Z}^-}_{\text{اعداد صحیح منفی}}$$

و می‌دانیم که

$$\mathbf{N}\cap \mathbf{Z}^-=\emptyset$$

بنا به مثال قبل، کافی است نشان دهیم که $\mathbf{Z}^-$ شماراست.

$$\mathbf{Z}^-=\{\overset{۰}{-۱},\overset{۱}{-۲},\overset{۲}{-۳},\overset{۳}{-۴},\dots\}$$

تابع $f:\mathbf{N}\to \mathbf{Z}^-$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$x\overset{f}{\mapsto} -x-۱$$

تابع بالا یک به یک و پوشاست. پس $\mathbf{Z}^-$ شماراست. پس $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^-\cup \mathbf{N}$ شماراست. $\square$

به نظر عجیب می‌آید؛ اگر به اندازه‌ی اعداد طبیعی، به اعداد طبیعی عنصر اضافه کنیم اندازه‌ی مجموعه‌ی حاصل برابر با اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. حتی با استقراء می‌توان ثابت کرد که:

تمرین ۹۹. اگر $A_۱,\dots,A_n$ مجموعه‌هایی شمارا باشند به طوری که $A_i\cap A_j=\emptyset$ (برای هر $۱\leqslant i,j\leqslant n$) آنگاه $\bigcup_{i=۱}^n A_i$ شماراست.

حال، حالتی عجیب‌تر از پارادوکس هتل هیلبرت را در نظر بگیرید: یک هتل داریم که به اندازه‌ی اعداد طبیعی جا دارد و تمام اتاقهای آن پر است. اگر به‌اندازه‌ی اعداد طبیعی اتوبوس بیایند که هر کدام حاوی به اندازه‌ی اعداد طبیعی مسافرند، باز هم در هتل برای آنها جا پیدا می‌شود. برای فهم بهتر پارادوکس هتل هیلبرت، فیلمهای آموزشی زیر را ببینید:

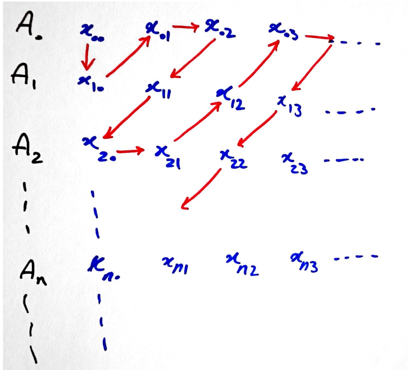
https://www.youtube.com/watch?v=faQBrAQ87l4

https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

در زیر گفته‌ی بالا را دقیق کرده‌ایم: اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارا، مجموعه‌ای شماراست.

قضیه ۱۷۷. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌ی شماراست و برای هر $i \neq j \in \mathbb{N}$ داریم $A_i \cap A_j = \emptyset$. آنگاه $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i$ شماراست.

اثبات. مجموعه‌های A_i را به صورت زیر بشمارید:



با استفاده از مسیری که در شکل بالا مشخص شده است، $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ را بشمارید. □

تمرین ۱۰۰. ضابطه‌ی نگاشت شمارش بالا را به دست بیاورید.

سوال ۸. آیا حکم مثال قبل را می‌شد با استقراء ثابت کرد؟

پاسخ سؤال بالا منفی است. دقت کنید که با استقراء می‌توان درباره‌ی اعداد طبیعی حکم ثابت کرد **نه درباره‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی.** اگر $p(0)$ درست باشد و از درستی $p(n)$ بتوان درستی $p(n+1)$ را نتیجه گرفت، آنگاه نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد طبیعیِ n حکم $p(n)$ درست است. مثلاً با استقرا می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعیِ n اجتماعِ n مجموعه‌ی شمارا، شماراست. اما اثبات این که اجتماع تعدادی شمارا مجموعه‌ی شمارا شماراست، با استقراء روی اعداد طبیعی ممکن نیست.

گفته‌ی بالا از لحاظ فلسفی نیز دارای بار معنائی است. وقتی در درون یک جهان از استقراء استفاده می‌کنیم، حکمی درباره‌ی اعضای آن جهان نتیجه می‌گیریم نه حکمی درباره‌ی کُلِّ آن جهان یا بیرون آن! مثال صف را در نظر بگیرید. فرض کنید صفی شمارا از افراد پیش روی شماست. نفر اول چشمان آبی دارد و از این که نفر n ام چشمان آبی دارد می‌توان نتیجه گرفت که نفر $n+1$ ام نیز چشمان آبی دارد. ازاین تنها نتیجه می‌شود که هر کس که در این صف قرار دارد دارای چشمان آبی است؛ اما نمی‌توان نتیجه گرفت که خودِ صف هم دارای چشم است و چشمان آن آبی است!

بگذریم! پس ثابت کردیم که اگر $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های شمارا باشد آنگاه $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i$ شماراست. تا به حال هر کار کرده‌ایم نتوانسته‌ایم مجموعه‌ای بزرگ‌تر از مجموعه‌ی اعداد طبیعی پیدا کنیم.

مثال ۱۷۸. مجموعه‌ی $\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\{(x,y)|x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$ شماراست.

اثبات. داریم

$$\{۰\}\times\mathbf{N}=\{(۰,۰)(۰,۱)(۰,۲)\ldots\}$$
$$\{۱\}\times\mathbf{N}=\{(۱,۰)(۱,۱)(۱,۲)\ldots\}$$
$$\vdots$$

می‌دانیم که

$$\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\{n\}\times\mathbf{N}$$

شماراست. گفتیم که اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارائی که دو به دو متمایزند، شماراست. □

مثال ۱۷۹. اگر X و Y شمارا باشند آنگاه $X\times Y$ هم شماراست. (همان اثبات بالا).

مثال ۱۸۰. هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbf{N}$ شماراست.

اثبات. فرض کنید $A\subseteq\mathbf{N}$ نامتناهی باشد. هر زیر مجموعه از $\mathbf{N}$ دارای یک کوچکترین عضو است. فرض کنید $x_۰$ کوچکترین عضو A باشد. حال فرض کنید $x_۰,\ldots,x_n$ پیدا شده باشند؛ $x_{n+۱}$ را کوچکترین عضو $A-\{x_۰,\ldots,x_n\}$ بگیرید. تابع زیر را از $\mathbf{N}$ به A در نظر بگیرید.

$$f(i)=x_i$$

اثبات پوشا بودن f: فرض کنید t عنصر دلخواهی از A باشد. پس $t=n$ یک عدد طبیعی است. تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از n برابر با n است. پس حداکثر پس از طی n مرحله در بالا به t می‌رسیم؛ به بیان دیگر از میان $f(۰),\ldots,f(n-۱)$ حتما یکی برابر با t خواهد بود. □

مثال ۱۸۱. مجموعه‌ی $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ شماراست. (منظورمان از $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ اعداد گویای بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.)

اثبات.

$$\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}=\{\frac{a}{b}|a,b\in\mathbf{N},(a,b)=۱\}$$

$$\begin{array}{ccccccll}
\cdots & & & & & ۰ & & \\
\cdots & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۱} & & \\
\cdots & \frac{۲}{۵} & & \frac{۲}{۳} & & \frac{۲}{۱} & \leftarrow & \text{مخرج اعداد فرد هستند پس شماراست.} \\
\cdots & \frac{۳}{۵} & \frac{۳}{۴} & & \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۱} & \leftarrow & \text{شمارا} \\
\cdots & \frac{۴}{۵} & & \frac{۴}{۳} & & \frac{۴}{۱} & \leftarrow & \text{شمارا}
\end{array}$$

همان طور که در بالا به طور نادقیق گفته‌ایم، $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست. پس $\mathbf{Q}^{\geqslant ۰}$ شماراست. آیا می‌توانید اثبات بالا را دقیق کنید؟ □

در جلسات آینده اثبات دیگری نیز برای مثال بالا ارائه خواهیم کرد.

مثال ۱۸۲. مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.

اثبات. داریم

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\leq} \cup \mathbb{Q}^{<\cdot}$$

دو مجموعه‌ی سمت راست شمارایند و اشتراکشان تهی است. □

۲.۱۱ الف‌صفر

گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان می‌خوانیم و می‌نویسیم:

$$X \cong Y$$

هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد.
همتوانی یک رابطه‌ی هم ارزی روی کلاس مجموعه‌هاست.

۱. اگر X یک مجموعه باشد آنگاه $X \cong X$

۲. اگر $X \cong Y$ آنگاه $Y \cong X$

۳. اگر $X \cong Y$ و $Y \cong Z$ آنگاه $X \cong Z$

رابطه‌ی همتوانی ($\cong$) کلاس همه‌ی مجموعه‌ها را افراز می‌کند. هر کلاس از این افراز را یک «کاردینال» یا یک «عدد اصلی» می‌نامیم. می‌توانیم برای هر کدام از کلاسهای رابطه‌ی هم‌ارزی بالا یک اسم کلی بگذاریم: کلاس مجموعه‌ی X را با $\mathbf{card}(X)$ نشان می‌دهیم. پس

$$\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y) \Leftrightarrow X \cong Y$$

برای برخی از این کلاسهای هم‌ارزی، که بیشتر مورد توجه ما هستند، اسامی خاصی انتخاب کرده‌ایم.
X متناهی است هرگاه $n \in \mathbf{N}$ موجود باشد به طوری که

$$X \cong n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$$

در این صورت می‌نویسیم:

$$\mathbf{card}(X) = n$$

$$\mathbf{card}(X) = n$$

$\emptyset$	۱	۲	$\ldots$	$[X]$	$\ldots$

شکل بالا افراز تمام مجموعه‌ها را به کلاس کاردینال‌ها نشان می دهد .در این افراز اولین خانه از سمت چپ نشان

دهنده‌ی کلاس همه‌ی مجموعه‌های صفر عضوی است. خانه‌ی بعد از آن (حرکت به سمت راست) نشان دهنده‌ی کلاس همه‌ی مجموعه‌های یک عضوی است و بقیه نیز به همین ترتیب.

کلاس اعداد طبیعی را تحت رابطه‌ی هم‌ارزی بالا با $\aleph_0$ نشان می‌دهیم. $\aleph$ حرف اول الفبای عبری است و عدد صفر اشاره به این دارد که $\aleph_0$ اولین کاردینال نامتناهی است.

پس یک مجموعه‌ی X شماراست هرگاه

$$\mathbf{card}(X) = \aleph_0.$$

در ادامه‌ی درس با این اعداد جدید بیشتر آشنا خواهیم شد و جمع و ضرب و ترتیب آنها را نیز تعریف خواهیم کرد. بسیاری حقایقی که در بخش قبلی ثابت کرده‌ایم با استفاده از کاردینالها راحت‌تر بیان می‌شوند:

$$a < \aleph_0 \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad a \cong n$$

یعنی الف‌صفر اولین کاردینال نامتناهی است.

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

یعنی اگر به یک مجموعه‌ی شمارا یک عنصر اضافه کنیم شمارا می‌ماند.

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

یعنی اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست.

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

یعنی اگر X, Y شمارا باشند آنگاه $X \times Y$ نیز شماراست.

تمرین ۱۰۱. فرض کنید که $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد به طوری که $\bigcup A_i$ شمارا نیست. نشان دهید که حداقل یکی از A_i شمارا نیست.

۳.۱۱ مجموعه‌های ناشمارا

در درسهای گذشته هر چه عنصر به مجموعه‌ی اعداد طبیعی اضافه کردیم مجموعه‌ی حاصل شمارا باقی ماند. حتی دیدیم که اجتماع شماراتا مجموعه‌ی شمارا نیز شمارا است. در زیر می‌خواهیم مجموعه‌ای معرفی کنیم که شمارا نیست. انجام این کار تحت یک روش استدلال معروف، به نام **روش قطری کانتور** صورت می‌گیرد.

فرض کنید که مجموعه‌ی A متشکل از تمام دنباله‌های شمارای ساخته‌ی شده از اعداد طبیعی ۰ تا ۹ باشد؛ یعنی هر عضو درمجموعه‌ی A به صورت $(a_i)_{i \in \omega}$ باشد، به طوری که $a_i \in \{۰, ۱, \ldots, ۹\}$. ادعا می‌کنم که تعداد اعضای مجموعه‌ی A را نمی‌توان شمارش کرد.

به برهان خلف فرض کنید که تمام دنباله‌ی موجود در A به صورت زیر شمارش شده‌اند:

$$\begin{array}{lllllll} ۰ & \to & a_{۰۰} & a_{۰۱} & a_{۰۲} & a_{۰۳} & \dots \\ ۱ & \to & a_{۱۰} & a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \dots \\ ۲ & \to & a_{۲۰} & a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \dots \\ \vdots & & & & & & \\ \mathrm{n} & \to & a_{n۰} & a_{n۱} & a_{n۲} & a_{n۳} & \dots \end{array}$$

پس هر دنباله‌ی ممکنی به صورت $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ که در آن a_i یک عدد طبیعی از ۰ تا ۹ باشد، در لیست بالا قرار دارد. اما در زیر دنباله‌ای به شکل گفته شده معرفی می‌کنم که در لیست بالا قرار ندارد و این تناقض است:

دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۰۰}$	عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۱۱}$	عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۲۲}$	$\dots$

دنباله‌ی بالا با تمام دنباله‌های نوشته شده در لیست متفاوت است: با دنباله‌ی i ام در عنصر i ام متفاوت است. در واقع عناصر این دنباله، با تغییر دادن قطر، در لیست بالا حاصل شده‌اند و از این رو، این برهان را برهان قطری کانتور می‌نامند. دقت کنید که مجموعه‌ی بالا متناهی نیست (چرا؟) و شمارا نیز نیست. به چنین مجموعه‌ای ناشمارا گفته می‌شود.

استدلال بالا حقایق جذابی را برای ما روشن می‌کند: در درس آنالیز، خواهید دید که هر عدد حقیقی یک دنباله‌ی شمارا ازاعداد طبیعی است. مثلاً

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۹\dots.$$

بنابراین تعداد اعداد حقیقی، برابر با تعداد دنباله‌های شمارا از اعداد طبیعی است؛ پس این تعداد شمارا نیست.

همچنین بازه‌ی $(۰,۱)$ را در نظر بگیرید. در هر عدد در بازه‌ی $(۰,۱)$ یک عدد اعشاری به صورت زیر است:

$$۰/a_۰a_۱,\dots$$

پس تعداد اعضای بازه‌ی $(۰,۱)$ نیز برابر با تعداد دنباله‌های شمارای ساخته شده از اعداد ۰ تا ۹ است؛ یعنی حتی بازه‌ی $(۰,۱)$ هم شمارا نیست (جالب اینجاست که این استدلال نشان می‌دهد که تعداد کل اعداد حقیقی برابر با تعداد اعداد حقیقی در بازه‌ی $(۰,۱)$ است؛ زیرا هر دو هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی متشکل از دنباله‌های شمارای ساخته شده از اعداد ۱ تا ۹ هستند). در زیر به روش دیگری هم این نکته را ثابت کرده‌ایم. البته قبل از آن نشان می‌دهیم که اصولاً همه‌ی بازه‌ها هم‌اندازه‌اند!

لم ۱۸۳. اگر $a \neq b$ آنگاه

$$(a,b) \cong (۰,۱).$$

اثبات. کافی است یک تناظر یک به یک بین بازه‌ی (a,b) و بازه‌ی $(۰,۱)$ پیدا کنیم. برای این کار، کافی است معادله‌ی خطی را بیابیم که از نقاط $(a,۰)$ و $(b,۱)$ می‌گذرد. □

پس همه‌ی بازه‌های باز، هم‌اندازه‌اند و همه‌ی آنها نامتناهی و ناشمارا هستند. در زیر نشان داده‌ایم که کُلِّ $\mathbb{R}$ نیز هم‌اندازه‌ی بازه‌ی $(۰,۱)$ است. پس $\mathbb{R}$ ناشمارای نامتناهی است.

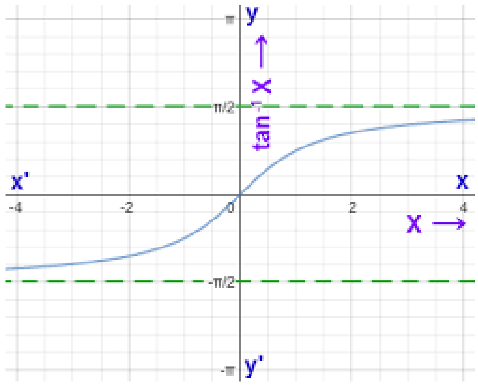
مثال ۱۸۴. نشان دهید که $\mathbf{R} \cong (۰,۱)$.

پاسخ. بنا به لم قبل کافی است یک بازه پیدا کنیم که با $\mathbb{R}$ همتوان باشد. تابعِ

$$f(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$$

یک تابع یک به یک و پوشاست. پس

$$\mathbb{R} \cong (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \cong (۰,۱)$$



□

۴.۱۱ تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی

در قسمت قبل، نشان دادیم که مجموعه‌های ناشمارا وجود دارند و مجموعه‌ی اعداد حقیقی یکی از آنهاست. در این بخش می‌خواهیم به بررسی این نکته بپردازیم که مجموعه‌ی اعداد حقیقی، از مجموعه‌ی اعداد طبیعی چقدر بزرگتر است.

نخست به این نکته توجه کنید که تعداد دنباله‌های به طول شمارا، ساخته شده از دو عدد ۰ و ۱ ناشماراست. این گفته را می‌توان به راحتی با استفاده از برهان قطری کانتور اثبات کرد:

تمرین ۱۰۲. با برهان قطری کانتور، نشان دهید که تعداد دنباله‌های به صورت

$$a_۰ a_۱ a_۲ \ldots$$

که در آن $a_i \in \{۰,۱\}$ ناشماراست.

دقت کنید که هر دنباله در تمرین بالا، چیزی شبیه به دنباله‌ی زیر است:

$$۰,۱,۰,۰,۱,۰,۱,۰,۰,\ldots$$

پس هر چنین دنباله‌ای، در واقع، بُردِ یک تابعِ $f:\mathbb{N}\to\{۰,۱\}$ است که به صورت

$$f(۰), f(۱), f(۲), \ldots$$

نوشته شده است. پس نتیجه می‌گیریم که

تمرین ۱۰۳. نشان دهید که تعداد توابعِ $f:\mathbb{N}\to\{۰,۱\}$ دقیقاً برابر با تعداد دنباله‌های شمارای ساخته‌شده از صفر و یک است.

مجموعه‌ی همه‌ی توابعِ

$$f:\mathbb{N}\to\{۰,۱\}$$

را با $۲^{\mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم. پس تا اینجا دیدیم که اندازه‌ی مجموعه‌ی $۲^{\mathbb{N}}$ برابر است با تعداد دنباله‌های به طول شمارای ساخته شده از ۰ و ۱.

هر عدد حقیقی دارای یک بسط شمارا در مبنای دو است. پس هر عدد حقیقی، در مبنای ۲، در واقع دنباله‌ای شمارا از ۰ و۱ است. بنابراین: تعداد اعداد حقیقی= تعداد دنباله‌های شمارای ساخته‌شده از صفر و یک = تعداد توابع از $\mathbb{N}$ به $\{۰,۱\}$ = اندازه‌ی مجموعه‌ی $۲^{\mathbb{N}}$.

قضیه ۱۸۵. اندازه‌ی $P(\mathbb{N})$، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ برابر است با اندازه‌ی مجموعه‌ی $۲^{\mathbb{N}}$، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی توابع از $\mathbb{N}$ به $\{۰,۱\}$. به بیان دیگر

$$P(\mathbb{N})\cong ۲^{\mathbb{N}}.$$

اثبات. باید یک تابع یک و پوشای h را از $P(\mathbf{N})$ به $\{۰,۱\}^{\mathbf{N}}$ تعریف کنیم. تابع h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: فرض کنید $A\in P(\mathbf{N})$ یعنی $A\subseteq\mathbf{N}$. باید $h(A)$ خود تابعی از $\mathbf{N}$ به $\{۰,۱\}$ باشد. تابع $h(A)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$h(A)(x)=\begin{cases}۱ & x\in A\\ ۰ & x\notin A\end{cases}$$

بررسی کنید که تابع h یک به یک و پوشاست. دوباره یادآوری می‌کنم که h مجموعه‌ی A را به تابعِ $h(A)$ می‌برد و تابع $h(A)$ به صورت بالاست. $\square$

در واقع تابع بالا نیز برای تعیین زیرمجموعه‌های $\mathbf{N}$ به این صورت عمل کرده است که اگر بخواهیم عضوی در مجموعه‌ی مورد نظر باشد، آن را با ۱ و در غیر این صورت با ۰ مشخص کرده‌ایم. برای مثال در شکل زیر، یکی از زیرمجموعه‌های $\mathbf{N}$ را مشخص کرده‌ایم:

$$\begin{array}{ccccccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & \ldots\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \ldots \end{array}$$

بنا به قضیه‌ی بالا و آنچه پیش از آن گفته شد:

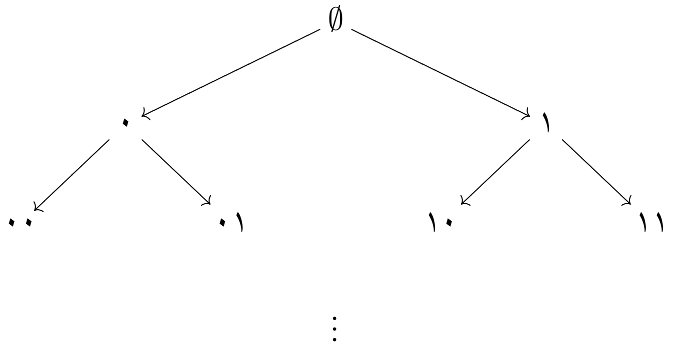
اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد حقیقی =

تعداد زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ =

اندازه‌ی مجموعه‌ی $۲^{\mathbb{N}}$.

اندازه‌ی مجموعه‌ی $۲^{\mathbb{N}}$ را با $۲^{\aleph_۰}$ نشان می‌دهیم. پس اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد حقیقی، برابر است با $۲^{\aleph_۰}$.

دقت کنید که یک روش مشاهده‌ی همه‌ی دنباله‌های شمارای ساخته شده از ۰ و۱ استفاده از یک درخت دودوئی به صورت زیر است:



هر شاخه‌ی درخت بالا (البته اگر آن را تا آخر ادامه بدهید!) نشان دهنده‌ی یک دنباله شمارا از ۱ ,۰ است. پس تعداد شاخه‌های این درخت برابر است با $۲^{\aleph_۰}$.

دقت کنید که اگر مجموعه‌ای متناهی و دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲^n است که اکیداً از n بیشتر است. در بالا ثابت کردیم که اگر مجموعه‌ای شمارا عضو داشته باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایش $۲^{\aleph_۰}$ است. حال در ادامه تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ $\mathbb{N}$ را محاسبه می‌کنیم.

تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی $\mathbb{N}$ برابر با $\aleph_۰$ است. در قسمت قبلی نشان دادیم که اگر X, Y شمارا باشند، آنگاه $X \times Y$ شماراست. پس $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست. از طرفی تعداد زیرمجموعه‌های دوعضویِ $\mathbb{N}$ از اندازه‌ی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ کوچکتر است. پس این تعداد نیز حداکثر شماراست. همچنین تعداد زیرمجموعه‌های n عضویِ $\mathbb{N}$ از اندازه‌ی $\mathbb{N}^n$ کمتر است، پس حداکثر شماراست.

از طرفی مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$ برابر با مجموعه‌ی زیر است:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{زیرمجموعه‌های } n \text{ عضویِ } \mathbb{N}$$

یعنی اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست. پس

قضیه ۱۸۶. تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ $\mathbb{N}$ شماراست.[۳]

تمرین ۱۰۴. نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ $\mathbb{N}$ برابر است با تعداد دنباله‌های با طول متناهی ساخته شده از ۰ و ۱.

[۳] البته استدلالی که در بالا ارائه شد، ناقص است. فعلا هدفهم تنها دادن شهود است.

تمرین ۱۰۵. نشان دهید که تعداد گره‌های درخت بالا شماراست. آیا این عجیب نیست که تعداد شاخه‌های درخت دودوئی نامتناهی از تعداد گره‌های آن بیشتر است؟

تمرین ۱۰۶. نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهیِ $\mathbb{N}$ شمارا **نیست**.

مثال ۱۸۷. مجموعه‌ی $\mathbf{Q}^c$ (اعداد گنگ) ناشماراست.

اثبات. اگر $\mathbf{Q}^c$ شمارا باشد آنگاه $\mathbb{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^c$ شماراست که این تناقض است. $\lightning$ $\square$

پیش از آن که این فصل را با یک مبحث انحرافی به پایان برم، آن را به صورت زیر خلاصه می‌کنم: دسته‌بندی زیر را برای مجموعه‌ها، بر حسب سایز، معرفی کردیم:

$$\text{مجموعه‌ها}\begin{cases}\text{متناهی} \\ \text{نامتناهی}\begin{cases}\text{شمارا} & \cong \mathbb{N} \\ \text{ناشمارا} & \ncong \mathbb{N}\end{cases}\end{cases}$$

۵.۱۱ انحرافی کوتاه از بحث، برهان قطری و مسئله توقف

حال که درباره‌ی برهان قطری کانتور سخن گفته‌ام، حیفم آمد تا یک استفاده‌ی زیبا از آن را نشان ندهم. [۴]

یکی از مسائل معروف در علوم رایانه‌ی نظری، مسئله‌ی توقف است. بنا بر این مسئله، هیچ الگوریتمی وجود ندارد که تعیین کند که توقف یا عدم توقف همه‌ی الگوریتمهای رایانه‌ای را تعیین کند. در زیر این مفهوم را بیشتر توضیح داده‌ام.

برای ساده‌تر شدن بحث، فرض کنید که ورودی هر الگوریتم رایانه‌ای، یک عدد طبیعی است. اگر f یک الگوریتم رایانه‌ای باشد و ورودیِ n را بدان بدهیم، دو حالت وجود دارد: یا این الگوریتم متوقف می‌شود و جواب مورد نظر ما را می‌دهد، یا این که این الگوریتم روی دور می‌افتد و هیچگاه متوقف نمی‌شود. حال سوال این است که آیا الگوریتمی وجود دارد که تعیین کند که کدام الگوریتمها با کدام ورودی‌ها می‌ایستند و با کدام ورودی‌ها نمی‌ایستند و روی دور می‌افتند؟

دقت کنید که تعداد همه‌ی الگوریتمها شماراست. فرض کنید $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ فهرستی از همه‌ی الگوریتمهای رایانه‌ای باشد. فرض کنید که الگورتیمی وجود داشته باشد که تعیین کند کدام الگوریتمها با کدام ورودیها می‌ایستند و کدامها نمی‌ایستند.

فرض کنید که f یک الگوریتم رایانه‌ای باشد که ورودی‌های آن اعداد طبیعی هستند و به صورت زیر خروجی می‌دهد:

$$f(i) = \begin{cases} Yes & \text{اگر الگوریتم } f_i \text{ با دریافت ورودی } i \text{ نایستد} \\ LOOP & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

[۴] حداقل برای این که آوردن آن شعر حافظ را در ابتدای این فصل توجیه کرده باشم!

دقت کنید که f با تک‌تکِ الگوریتمهای فهرست شده فرق دارد. زیرا اگر الگوریتمِ i ام با ورودی i بایستد، f با این ورودی نمی‌ایستد. از طرفی خودِ f یک الگوریتم است؛ پس باید در فهرست بالا ظاهر شود؛ و این غیرممکن است.

فصل ۱۲

اعمال و ترتیب کاردینالها

با سر زلف تو مجموع پریشانی خویش
کو مجالی که سراسر همه تقریر کنم
حافظ

۱.۱۲ تعاریف

در درسهای جلسه‌ی گذشته مفهوم همتوانی را تعریف کردیم. گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان می‌خوانیم، و این را به صورت $X \cong Y$ نشان دادیم، هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد. واژه‌ی معادل همتوانی، هم‌اندازه بودن، یا هم‌کاردینال بودن است. پس در صورتی که دو مجموعه‌ی X, Y همتوان باشند از هر سه نماد زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$$

یا

$$|X| = |Y|$$

یا

$$X \cong Y$$

گفتیم که یک مجموعه‌ی دلخواهِ X را **متناهی** می‌نامیم هرگاه همتوان با یک مجموعه‌ی $n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$ باشد؛ یعنی هرگاه $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که

$$X \cong \{۰, ۱, \ldots, n\}.$$

همچنین یک مجموعه‌ی دلخواهِ X را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه با هیچ $n \in \mathbb{N}$ همتوان نباشد؛ به بیان دیگر هرگاه متناهی نباشد.

رابطه‌ی $\cong$ روی مجموعه‌ها، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. پس کلاس همه‌ی مجموعه‌ها را افراز می‌کند. پس

$$X \cong Y$$

در واقع یعنی X, Y در یک کلاس هم‌ارزی نسبت به رابطه‌ی هم‌توانی قرار دارند. به هر کلاس از این رابطه‌ی هم‌ارزی یک کاردینال، یا یک **عدد اصلی** گفته می‌شود. می‌توانیم برای هر یک ازاین کلاسها یک اسم خاص انتخاب کنیم، مثلا $\kappa, \lambda, \ldots$. گفتیم که کلاس همه‌ی مجموعه‌های شمارا را با $\aleph_\circ$ نشان می‌دهیم. پس مجموعه‌ی X شماراست هرگاه

$$card(X) = \aleph_\circ.$$

گاهی هم کلاس یک مجموعه‌ی X را با $card(X)$ نشان می‌دهیم.

روی اعداد اصلی (کاردینالها)، تساوی، جمع، ضرب، به توانرسانی و ترتیب نیز تعریف می‌شود.

تعریف ۱۸۸. فرض کنید که α, β, γ سه کاردینال باشند. پس مجموعه‌های X, Y, Z وجود دارند، به طوری که $\alpha = card(X)$، $\beta = card(Y)$ و $\gamma = card(Z)$.

۱. می‌گوییم

$$\alpha = \beta$$

هرگاه

$$X \cong Y.$$

به بیان دیگر، می‌گوییم

$$card(X) = card(Y)$$

هرگاه تابعی یک به یک و پوشا میان X, Y موجود باشد.

۲. می‌گوئیم

$$\alpha \leq \beta$$

یا

$$card(\alpha) \leq card(\beta)$$

هرگاه تابعی یک به یک از X به Y موجود باشد.

۳. می‌گوئیم $\alpha + \beta = \gamma$ یا

$$card(X) + card(Y) = card(Z)$$

هرگاه دو مجموعه‌ی X', Y' موجود باشند به طوری که $X \cong X', Y \cong Y'$ و $X' \cap Y' = \emptyset$ و $X' \cup Y' \cong Z$. به بیان ساده‌تر اگر X, Y دومجموعه باشند که با هم اشتراکی ندارند، تعریف می‌کنیم:

$$card(X) + card(Y) = card(X \cup Y).$$

۴. می‌گوئیم

$$\alpha \times \beta = \gamma$$

یا

$$card(X) \times card(Y) = card(Z)$$

هرگاه

$$Z \cong X \times Y.$$

۵. می‌گوییم

$$\alpha^{\beta} = \gamma$$

هرگاه

$$Z \cong X^{Y}$$

که در آن X^Y مجموعه‌ی همه‌ی توابع از مجموعه‌ی Y به مجموعه‌ی X است.

نگران تعریف بالا نباشید، در بخشهای بعدی آن را توصیف خواهم کرد. فعلا چند تمرین برای استفاده از تعریف بالا داشته باشید:

تمرین ۱۰۷. نشان دهید که

$$card(X) = card(X \times \{۰\}).$$

تمرین ۱۰۸. نشان دهید که اگر $\alpha = \beta$ و $\beta = \gamma$ آنگاه $\alpha = \gamma$.

تمرین ۱۰۹. نشان دهید که اگر $\alpha = \alpha'$ و $\beta = \beta'$ آنگاه

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'.$$

تمرین ۱۱۰. نشان دهید که اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ آنگاه $\alpha \leq \gamma$.

۲.۱۲ ترتیب کاردینالها، قضایای کانتور و شِرودر برنشتاین

گفتیم که مجموعه‌ها بر اساس رابطه‌ی هم‌توانی دسته‌بندی می‌شوند و به هر دسته یک کاردینال گفته می‌شود. کاردینالهای متناهی به صورت زیر هستند:

$$۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$$

هر کاردینالِ متناهیِ n در واقع کلاس مجموعه‌ای به صورت $\{۰, ۱, ۲, \ldots, n\}$ را مشخص می‌کند. جمع و ضرب و ترتیب کاردینالهای متناهی به صورت بدیهی صورت می‌گیرد. پس حاصلجمع و ضرب کاردینالهای متناهی، متناهی است.

پس از آن به کاردینالِ $\aleph_۰$ می‌رسیم که کلاس مجموعه‌ی $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ را مشخص می‌کند.

تعریف ۱۸۹. فرض کنید که $a = card(X)$ و $b = card(Y)$ دو کاردینال باشند. می‌گوئیم

$$a \leq b$$

هرگاه یک تابعِ یک به یک از X به Y موجود باشد.

تمرین ۱۱۱. اگر $a = c$ و $b = d$ آنگاه

$$a \leq b \iff c \leq d.$$

تمرین ۱۱۲. ۱. نشان دهید که برای هر کاردینالِ متناهیِ n داریم

$$n \lneqq \aleph_۰.$$

۲. فرض کنید که a یک کاردینال باشد به گونه‌ای که $a \lneqq \aleph_۰$. نشان دهید که a یک کاردینال متناهی است.

۳. اگر a یک کاردینال نامتناهی باشد آنگاه $\aleph_۰ \leq a$. (از این قضیه استفاده کنید که هر مجموعه‌ی نامتناهی شامل یک مجموعه‌ی شماراست).

بنا به تمرین بالا، $\aleph_۰$ کاردینال عجیبی است؛ زیرا از همه‌ی کاردینالهای متناهی اکیداً بزرگتر است، و هر کاردینال که از آن اکیداً کوچکتر باشد، متناهی است. پس مثلاً هیچ کاردینالی وجود ندارد که یک واحد از الف‌صفر کمتر باشد و الف‌صفر بلافاصله پس از آن بیاید. از طرفی الف‌صفر از همه‌ی کاردینالهای نامتناهی کمتر است. در واقع الف‌صفر کوچکترین کاردینال نامتناهی است. پس تا به حال دیدیم که

$$۰ \lneqq ۱ \lneqq ۲ \lneqq \ldots \lneqq \aleph_۰.$$

در بخش قبلی ثابت کردیم که اگر به الف‌صفر یک عنصر اضافه کنیم، اندازه‌ی آن بیشتر نمی‌شود، هم چنین دیدیم که اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا شماراست و حاصلضرب دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست پس:

$$۰ \lneqq ۱ \lneqq ۲ \lneqq \ldots \lneqq$$

$$\aleph_۰ = \aleph_۰ + ۱ = \aleph_۰ + ۲ = \ldots = \aleph_۰ + n = \ldots$$

$$\aleph_۰ + \aleph_۰ = \ldots \aleph_۰ + \aleph_۰ + \aleph_۰ = \ldots \underbrace{\aleph_۰ + \aleph_۰ + \ldots + \aleph_۰}_{n \text{ مرتبه}} = \ldots$$

$$\ldots = \aleph_۰ \times \aleph_۰ = \aleph_۰ \times \aleph_۰ + ۱ = \aleph_۰ \times \aleph_۰ + ۲ = \ldots$$

باز به نظر می‌رسد که هر چه تلاش می‌کنیم، کاردینالی بزرگتر از الف‌صفر پیدا نمی‌شود.

تعریف ۱۹۰. اندازه‌ی مجموعه‌ی $۲^{\mathbb{N}}$ را با $۲^{\aleph_۰}$ نشان می‌دهیم.

پس تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی برابر است با $۲^{\aleph_۰}$. واضح است که

تمرین ۱۱۳. نشان دهید که

$$\aleph_۰ \leq ۲^{\aleph_۰}$$

همچنین با برهان قطری کانتور نشان دادیم که

$$۲^{\aleph_۰} \neq \aleph_۰$$

پس

$$\aleph_۰ \lneqq ۲^{\aleph_۰}.$$

دوباره اتفاقات عجیبی در حال رخ دادن است. هر چه تلاش می‌کنیم به الف‌صفر عنصر اضافه کنیم اندازه‌ی آن تغییر نمی‌کند، ولی از طرفی می‌دانیم که $۲^{\aleph_۰}$ از $\aleph_۰$ بیشتر است! یک سوال طبیعی این است که آیا کاردینالی وجود دارد که از $\aleph_۰$ اکیداً بزرگتر باشد و از $۲^{\aleph_۰}$ اکیداً کمتر باشد؟ یکی از فرضیه‌های معروف در نظریه‌ی مجموعه‌ها، فرضیه‌ی پیوستار است که می‌گوید بین الف‌صفر و $۲^{\aleph_۰}$ هیچ اندازه‌ای وجود ندارد.

فرضیه‌ی پیوستار

عددی بین $\aleph_۰$ و $۲^{\aleph_۰}$ وجود ندارد.

از این گیج‌کننده‌تر هم می‌شود: فرضیه‌ی پیوستار در نظریه‌ی مجموعه‌ها قابل اثبات نیست. در واقع نظریه‌ی مجموعه‌ها هم با وجود فرضیه‌ی پیوستار کار می‌کند و هم با عدم فرضیه‌ی پیوستار! [۱] یعنی اگر فرضیه‌ی پیوستار را به اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها بیفزائیم، تناقضی رخ نمی‌دهد، همچنین اگر برعکس، نقیض فرضیه‌ی پیوستار را به اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها بیفزائیم، باز هم تناقضی رخ نمی‌دهد!

می‌دانیم که اگر n و m دو عدد طبیعی باشند، آنگاه اگر

$$(m \leqslant n) \wedge (n \leqslant m)$$

آنگاه

$$m = n$$

در واقع عبارت بالا، امری است که به صورت طبیعی از یک «ترتیب» انتظار داریم؛ پس طبیعی است که از خود بپرسیم که:

سوال ۹. آیا مشابه عبارت بالا برای ترتیب کاردینالها هم برقرار است؟ یعنی اگر

$$\mathbf{card}(X) \leqslant \mathbf{card}(Y)$$

و

$$\mathbf{card}(Y) \leqslant \mathbf{card}(X)$$

آیا لزوماً $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$؟

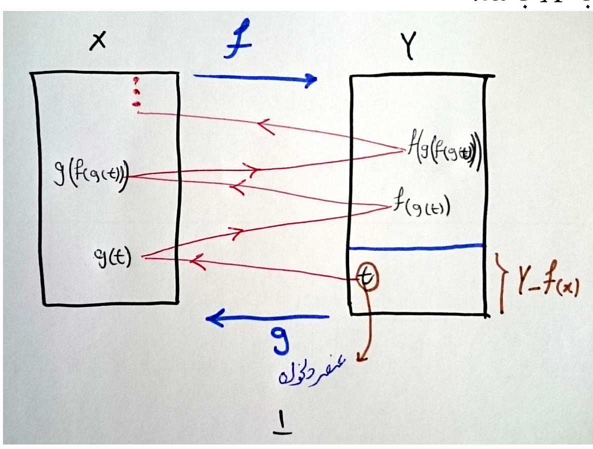
[۱] این را در درس منطق دقیقا روشن و اثبات می‌کنم.

آنچه در سؤال بالا پرسیده شده است، بیان دیگری از قضیه‌ی زیر است:

قضیه ۱۹۱ (کانتور_برنشتاین). فرض کنید یک تابع یک به یک از X به Y موجود باشد و یک تابع یک به یک از Y به X موجود باشد. آنگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود است.

برای قضیه‌ی کانتور برنشتاین اثباتهای مختلفی وجود دارد که می‌توانید آنها را صفحه‌ی ویکی‌پدیای فارسی بیابید. در اینجا سعی کرده‌ام اثباتی را بیاورم که قابل فهمتر باشد. [۲] این قضیه، یکی از مهمترین قضایائی است که در این درس ثابت کرده‌ایم.

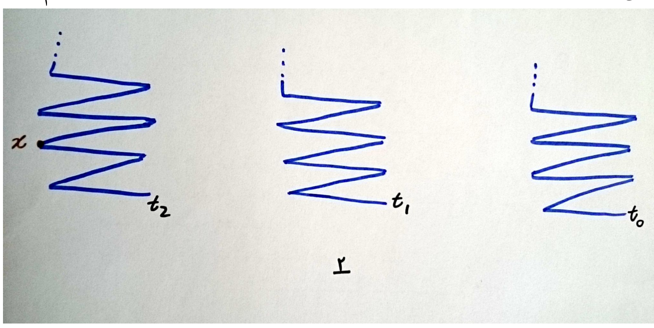
اثبات. اگر X و Y متناهی و به ترتیب دارای اندازه‌های m و n باشند، باشند، آنگاه وجود تابع یک به یک از X به Y معادلِ $n \leq m$ و وجود تابع یک به یک از Y به X معادل $m \leq n$ است. از این دو نتیجه می‌شود که $m = n$.
این که یکی متناهی باشد و دیگری نامتناهی ممکن نیست، زیرا از یک مجموعه‌ی نامتناهی نمی‌توان تابعی یک‌به‌یک به یک مجموعه‌ی متناهی تعریف کرد.
پس فرض کنیم ایندو نامتناهی باشند. فرض کنید f تابعی یک به یک از X به Y باشد و g تابعی یک به یک از Y به X باشد.



فرض کنید t یک عنصر دلخواهی در $Y - f(X)$ باشد. مطابق شکل بالا، دنباله‌ی زیر را بسازید:

$$t \to g(t) \to f\big(g(t)\big) \to g\Big(f\big(g(t)\big)\Big) \to f\Bigg(g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)\Bigg) \to \dots$$

این کار را برای همه‌ی tهای موجود در $Y - f(X)$ انجام دهید.

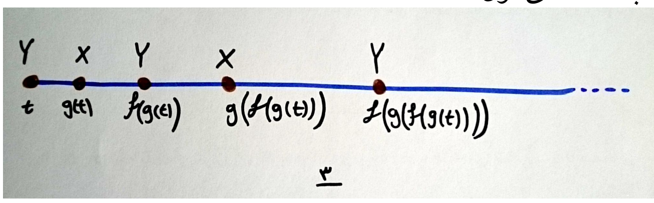


---
[۲] البته آن صفحه را نیز من نوشته‌ام!

ادعای اول. هر کدام از دنباله‌های نوشته شده در بالا نامتناهی است؛ یعنی از سمت چپ و راست هیچگاه در طولی متناهی متوقف نمی‌شوند.
ادعای دوم. دنباله‌های بالا هیچ اشتراکی با هم ندارند. یعنی جملات سمت چپ یکی با دیگری جملات سمت راست یکی با دیگری اشتراکی ندارد.
فرض کنید ادعاهای اول و دوم هر دو ثابت شده باشند. تابع $h : X \to Y$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{اگر } x \text{ در سمت چپ یکی از دنباله‌های یادشده باشد.} \\ f(x) & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

ادعای سوم. تابع h یک به یک و پوشاست.
اثبات ادعای اول.



برای سادگی نشان می‌دهیم که جمله‌ی اول و سوم هیچگاه با هم برابر نیستند. فرض کنید

$$f\big(g(t)\big) = f\Bigg(g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)\Bigg)$$

آنگاه از آنجا که f یک به یک است داریم:

$$g(t) = g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)$$

حال از آنجا که g یک به یک است داریم

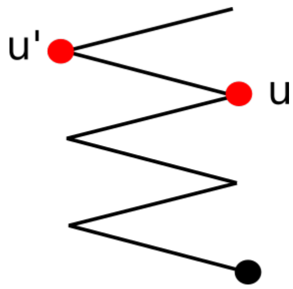
$$\underbrace{t}_{\in Y - f(X)} = \underbrace{f\big(g(t)\big)}_{\in f(X)} \quad \lightning$$

عبارت بالا، تناقض آمیز است. با همین ایده می‌توانید نشان دهید که هیچ دو جمله‌ی واقع در یک طرف یکسان از دنباله‌ی بالا با هم برابر نیستند. ادعای دوم نیز به طور کاملاً مشابه ثابت می‌شود.
اثبات ادعای سوم. می‌خواهیم ثابت کنیم تابع h یک به یک و پوشاست.

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{اگر } x \text{ در سمت چپ یکی از دنباله‌های یادشده باشد.} \\ f(x) & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

اثبات پوشابودن. عنصر دلخواه $u \in Y$ را در نظر بگیرید. اگر یک زیگزاک، مشابه شکل زیر، از u بگذرد آنگاه داریم:

$$u = h(u')$$



اگر هیچ زیگزاگی از u نگذرد معلوم می‌شود که $u \notin Y - f(X)$؛ زیرا در غیر این صورت u شروع یک زیگزاگ خواهد بود. پس $u \in f(X)$ یعنی $f(u') = u \quad \exists u' \in X$. اثبات یک به یک بودن تابعِ h به عهده‌ی شما. $\square$

در جلسات بعد کاربردهائی از قضیه‌ی بالا را خواهیم دید. در ادامه‌ی درس هدفمان این است که بدانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی دلخواه چقدر است.

در جلسات اول درس دیدیم که اگر X یک مجموعه‌ی متناهی و دارای n عضو باشد، آنگاه

$$|P(X)| = ۲^n$$

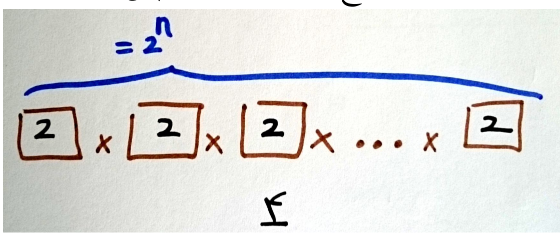
اثبات. قبلا ثابت کردیم که

$$|P(X)| = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \ldots + \binom{n}{n} = (۱+۱)^n = ۲^n$$

توجه کنید که بسط دوجمله‌ایِ $\binom{n}{m}$ در واقع نشان دهنده‌ی تعداد زیرمجموعه‌های m عضویِ مجموعه‌ی n عضوی مورد نظر ماست.

برای گفته‌ی بالا می‌توان اثباتی آماری نیز ارائه کرد.

فرض کنید بخواهیم تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی n عضویِ X را بشماریم. هر عنصر دلخواه در X در یک مجموعه‌ی A یا واقع است یا نیست. پس برای هر عضو دو حالت موجود است.



به بیان دیگر، برای این که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی را بشماریم، کافی است تعداد دنباله‌های به طول n را بشماریم که از $۰, ۱$ ساخته شده‌اند. یعنی هر عضوی را که بخواهیم در زیرمجموعه‌ی مورد نظرمان باشد، با شماره‌ی ۱ و هر عضوی را که نخواهیم با شماره‌ی ۰ مشخص کنیم. $\square$

در ادامه‌ی درس می‌خواهیم ایده‌ی اثبات بالا را تعمیم دهیم.

تعریف ۱۹۲. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$X^Y = \text{مجموعه‌ی همه‌ی توابعِ از } Y \text{ به } X$$

بنابراین برای مثال $۲^{\mathbf{N}}$ یا همان $\{۰,۱\}^{\mathbf{N}}$ برابر است با مجموعه‌ی همه‌ی توابع از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی $\{۰,۱\}$.

قضیه ۱۹۳.

$$|P(\mathbf{N})| = |۲^{\mathbf{N}}|$$

به بیان دیگر

$$\mathbf{card}\big(P(\mathbf{N})\big) = ۲^{\aleph_۰}$$

تا اینجا ثابت کردیم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، برابر است با تعداد توابعِ از مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی $\{۰,۱\}$. گفتیم که این را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۲^{\aleph_۰} = \big(P(\mathbf{N})\big)$$

در مثال بعدی نشان داده‌ایم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، در واقع برابر با تعداد اعداد حقیقی است:

مثال ۱۹۴.

$$|\mathbf{R}| = ۲^{\aleph_۰} = \mathbf{card}(۰,۱) = \mathbf{card}(\mathbf{R})$$

اثبات. هر عدد حقیقی در بازه‌ی $(۰,۱)$ دارای یک بسط اعشاری شمارا در مبنای ۲ است. برای مثال عبارت زیر یکی از این اعداد است:

$$۰/۰۱۰۱۱۰\ldots$$

تعداد اینگونه بسطها برابر است با تعداد دنباله‌های ۰ و ۱ به طول اعداد طبیعی و تعداد این دنباله‌ها برابر است با تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\{۰,۱\}$. (این اثبات را دقیق کنید). □

نتیجه ۱۹۵. در جلسات قبل نشان دادیم که تعداد اعداد حقیقی برابر است با اندازه‌ی بازه‌ی $(۰,۱)$ و این بازه ناشماراست. پس از آنجا که $|(۰,۱)| = ۲^{\aleph_۰}$ پس $\aleph_۰ \neq ۲^{\aleph_۰}$.

پس تا اینجا به این نکته‌ی مهم رسیدیم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی ناشماراست و از این رو با $\aleph_۰$ برابر نیست.

لم ۱۹۶. $\aleph_۰ \lneqq ۲^{\aleph_۰}$

اثبات. در بالا گفتیم که تساوی برقرار نیست. برای این که نامساوی برقرار باشد، کافی است یک تابع یک به یک از $\mathbf{N}$ به $P(\mathbf{N})$ پیدا کنیم. تابع زیر، جواب می‌دهد:

$$x \to \{x\}$$

□

در جلسه‌ی گذشته با قضیه‌ی مهم کانتور ـ برنشتاین آشنا شدیم:

قضیه ۱۹۷ (قضیه‌ی کانتور ـ برنشتاین)**.** اگر $X \leqslant Y$ و $Y \leqslant X$ آنگاه $X = Y$.

در این جلسه می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهیِ اعداد طبیعی را بیابیم. نخست تعداد زیرمجموعه‌های متناهی آن را در مثال زیر حساب می‌کنیم و می‌بینیم که تعداد زیرمجموعه‌های متناهی اعداد طبیعی برابر با اندازه‌ی اعداد طبیعی است.

مثال ۱۹۸. تعداد زیر مجموعه‌های متناهیِ $\mathbf{N}$ شماراست.

اثبات. تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی $\mathbf{N}$ برابر $\aleph_0$. است. ادعا می‌کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbf{N}$ نیز برابر است با $\aleph_0$.
اثبات ادعا. می‌دانیم که تعداد زوج مرتب‌های (a,b) که $a,b \in \mathbf{N}$ بزرگتریامساوی تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbf{N}$ است، زیرا

$$|\{a,b\}| \leqslant |\{(a,b),(b,a)\}|$$

قبلاً ثابت کرده‌ایم که $\mathbf{N}^2$ هم‌اندازه‌ی $\mathbf{N}$ است. پس

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی } \mathbf{N} \leqslant \aleph_0.$$

حال دقت می‌کنیم که

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی } \mathbf{N} \geqslant \aleph_0.$$

برای اثبات این گفته به یک تابع یک به یک از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbf{N}$ نیازمندیم؛ تابعی که کار زیر را بکند:

$$\mathbf{N} \to \{\text{تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی}\}$$

$$n \mapsto \text{زیر مجموعه‌ی دو عضوی}$$

تعریف می‌کنیم:

$$f(n) = \{n, n+1\}$$

$$\begin{aligned} 0 &\to \{0,1\} \\ 1 &\to \{1,2\} \\ 2 &\to \{2,3\} \\ 3 &\to \{3,4\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

تابع بالا یک به یک است.
حال ادعا می‌کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های n عضویِ $\mathbf{N}$ برابر $\aleph_0$ است.

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های } n \text{ عضوی } \mathbf{N} \leqslant |\mathbf{N}^n| = |\{(x_1, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{N}\}|$$

کافی است نشان دهیم که

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های} n \text{عضوی } \mathbf{N} \leqslant \aleph_0$$

تابع یک به یکِ f از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی زیر مجموعه‌های n عضوی $\mathbf{N}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \{x, x+1, \ldots, x+n-1\}$$

بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های n عضوی $\mathbf{N}$ برابر با $\aleph_0$ است.
پس مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های متناهی اعداد طبیعی $\mathbf{N}$ اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست؛ و از این رو شماراست.

$$\underbrace{\{\text{تک عضوی}\} \cup \{\text{دو عضوی}\} \cup \ldots \cup}_{\text{شمارا}}$$

$\square$

سوال ۱۰. تعداد **زیرمجموعه‌های نامتناهی** $\mathbf{N}$ چندتاست؟

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی } \mathbf{N} + \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های متناهی } \mathbf{N}}_{\text{شمارا}} = \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های } \mathbf{N}}_{\text{ناشمارا}}$$

بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی $\mathbf{N}$ برابر **نیست** با $\aleph_0$. زیرا قبلاً ثابت کرده‌ایم که اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست، و مجموعه‌ی سمت چپ در بالا شمارا نیست. برای تعیین تعداد دقیق زیرمجموعه‌های نامتناهیِ $\mathbf{N}$ به لم زیر نیازمندیم.

لم ۱۹۹. فرض کنید A شمارا باشد و B یک مجموعه‌ی نامتناهی دلخواه باشد و $A \cap B = \emptyset$. آنگاه $|A \cup B| = |B|$.
به بیان دیگر اگر κ یک کاردینال نامتناهی دلخواه باشد آنگاه

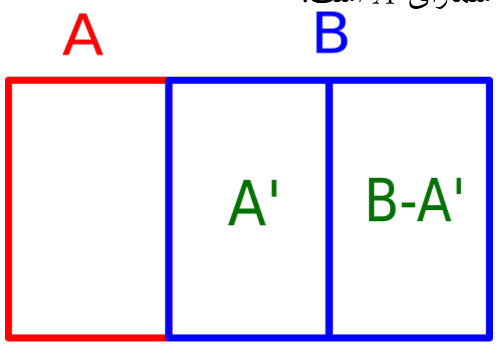
$$\kappa + \aleph_0 = \kappa$$

پس به طور ویژه

$$2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$$

توجه کنید که لم بالا بر اصل انتخاب استوار است.

اثبات. از آنجا که B نامتناهی است، بنا بر آنچه در جلسات پیش ثابت کرده‌ایم، B شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارای A' است.



از آنجا که A, A' هر دو شمارا هستند داریم:

$$A \cup A' \cong A'$$

پس

$$A \cup B = (A \cup A') \cup (B - A') \cong A' \cup (B - A') \cong B$$

$\square$

توجه ۲۰۰. در جلسات آینده ثابت خواهیم کرد که به طور کلّی اگر $|A| \geq |B|$ آنگاه

$$|A \cup B| = |B|$$

به بیان دیگر

$$\underbrace{\kappa}_{\text{کاردینال}} + \underbrace{\lambda}_{\text{کاردینال}} = \max\{\kappa, \lambda\}$$

گفتیم که

$$\underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی } \mathbf{N}}_{?} + \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های متناهی } \mathbf{N}}_{\aleph_0} = \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های } \mathbf{N}}_{2^{\aleph_0}}$$

پس تعداد زیر مجموعه‌های **نامتناهی** $\mathbf{N}$ برابر با $2^{\aleph_0}$ است. (زیرا اگر تعداد آنها کاردینالی غیر از $2^{\aleph_0}$ مانند κ باشد، آنگاه حاصل جمع بالا نیز κ می‌شود.

تا کنون آموخته‌ایم که مجموعه‌های هم‌اندازه ی اعداد طبیعی، نامتناهی هستند و به آنها شمارا می‌گویند. نیز آموختیم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی نامتناهی است، ولی از تعداد اعضای اعداد طبیعی اکیداً بیشتر است (برابر است با تعداد اعداد حقیقی). یعنی دو نامتناهی معرفی کرده‌ایم که هم‌اندازه‌ی هم نیستند. تفاوت قائل شدن برای اندازه‌ی نامتناهی‌ها تنها در ریاضیات قابل فهم است. یک سوال طبیعی این است که آیا نامتناهی‌های دیگری نیز وجود دارند؟ مثلاً آیا مجموعه‌ای بزرگتر از مجموعه‌ی اعداد حقیقی نیز وجود دارد؟

سوال ۱۱. غیر از $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ چه اندازه‌های دیگری وجود دارند؟

یک سوال طبیعی دیگر را در زیر نوشته‌ایم. این سوال، سالها ذهن کانتور را به خود مشغول کرده بود. از دید تاریخی نیاز به ذکر است که رویکرد کانتور به نامتناهی‌ها و مقایسه‌ی آنها با هم، در میان همعصرانش بسیار مطرود بود. کانتور همه‌ی سالهای پایانی عمر خود را صرف سوال زیر کرد. وی در آن سالها از مشکلات روحی فراوانی رنج برد.

توجه ۲۰۱. تاکنون ثابت کرده‌ایم

$$\underbrace{\aleph_0}_{|\mathbf{N}|} \lneqq \underbrace{2^{\aleph_0}}_{|\mathbf{R}|}$$

سوال ۱۲. آیا مجموعه‌ای پیدا می‌شود که اندازه‌ی آن از اندازه‌ی اعداد طبیعی بیشتر و از اندازه‌ی اعداد حقیقی کمتر باشد؟ به بیان دیگر آیا عددی هست که $\aleph_0$ بیشتر و از $2^{\aleph_0}$ کمتر باشد؟

توجه ۲۰۲. هر چند برای درک جملات پیش رو نیازمند گذراندن درس منطق هستید ولی به طور گذرا اشاره می‌کنم که فرضیه‌ی پیوستار از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها مستقل است. یعنی با اصولی که در ابتدای این ترم برای نظریه‌ی مجموعه‌ها نوشتیم این فرضیه نه قابل اثبات است و نه قابل رد.

با این حال کانتور قضیه‌ی زیبای دیگری نیز دارد: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه‌ی دلخواه، همواره از تعداد اعضای آن بیشتر است. به بیان دیگر اگر κ یک کاردینال دلخواه باشد، آنگاه $\kappa < 2^{\kappa}$. (این گفته را برای $\kappa = \aleph_0$ قبلاً ثابت کرده‌ایم.) **بدینسان همواره یک نامتناهیِ بزرگتر از یک نامتناهی داده شده موجود است:**

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \dots$$

قضیه ۲۰۳ (کانتور)**.** همواره $|P(X)| \gneqq |X|$.

اثبات. اولاً $|X| \leqslant |2^X|$ زیرا تابع زیر یک به یک است.

$$f : X \to P(X)$$

$$n \to \{n\}$$

در ادامه‌ی ثابت می‌کنیم که هیچ تابع یک به یک و پوشایی بین X و $P(X)$ وجود ندارد. به بیان دیگر $|X| \neq |P(X)|$.

به طور کلی‌تر ادعا می‌کنیم که هیچ تابع $g : X \to P(X)$ پوشا نیست. فرض کنید تابع g به صورت بالا داده شده باشد. ادعا می‌کنیم که g مجموعه‌ی زیر را نمی‌پوشاند:

$$P(X) \ni A = \{x \in X | x \notin g(x)\}$$

اگر تابع g پوشا باشد، آنگاه عنصر $t_0 \in X$ موجود است به طوری که

$$g(t_0) = A$$

حال اگر $t_0 \in g(t_0)$ آنگاه $t_0 \notin g(t_0)$ و اگر $t_0 \notin g(t_0)$ آنگاه $t_0 \in g(t_0)$. این تناقض نشان می‌دهد که تابع g نمی‌تواند پوشا باشد. $\square$

ثابت کردیم که

$$|X| \gneqq \underbrace{|\text{تعداد زیر مجموعه‌های } X|}_{|2^X|}$$

سوال طبیعی دیگر درباره‌ی اندازه‌ها این است آیا لزوماً اندازه‌ی دو مجموعه‌ی نامتناهی با هم قابل مقایسه است؟ به بیان دیگر اگر X, Y دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، آیا لزوماً یا تابعی یک به یک از X به Y و یا تابعی یک به یک از Y به X موجود است؟

در جلسات آینده خواهیم توانست مطالب زیر را ثابت کنیم:

۱. اگر X و Y دو مجموعه باشند آنگاه یا $|X| \leqslant |Y|$ یا $|Y| \leqslant |Y|$ (برای اثبات این به لم زرن نیاز است که در فصل بعدی بدان پرداخته شده است).

۲. اگر κ و λ دو کاردینال باشند (یعنی دو سایز مجموعه باشند) آنگاه

$$\underbrace{\kappa + \lambda}_{|X \cup Y|} = \underbrace{\kappa \cdot \lambda}_{|X \cdot Y|} = \max\{\kappa, \lambda\}$$

برای اثبات آنچه در بالا نوشته‌ایم به درک بهتری از اصل انتخاب و معادلهای آن (بالاخص لم زرن) محتاجیم.

۳.۱۲ سخنی بیشتر درباره‌ی مجموعه‌های متناهی

در جلسات قبل درباره‌ی مجموعه‌های نامتناهی بسیار سخن گفتیم. فهمیدیم که نامتناهی‌ها نیز اندازه‌های مختلف دارند و از هر نامتناهی، یک نامتناهی بزرگتر هم پیدا می‌شود. فهمیدیم که کوچکترین نامتناهی، هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. این که اندازه‌ی اولین نامتناهی بعد از اندازه‌ی اعداد طبیعی چیست، هنوز دانسته نیست و فرضیه‌ی پیوستار در همین باره است. فرضیه‌ی پیوستار بیانگر این است که اولین نامتناهی بزرگتر از اعداد طبیعی، هم‌اندازه‌ی اعداد حقیقی است.

در این جلسه می‌خواهیم کمی هم درباره‌ی متناهی صحبت کنیم.

۱.۳.۱۲ مجموعه‌های متناهی

مجموعه‌ی A را متناهی می‌نامیم هرگاه عدد n موجود باشد به طوری که

$$A \cong \{۰, ۱, ۲, \dots, n - ۱\}$$

توجه ۲۰۴. (درصورت پذیرش اصل انتخاب) مجموعه‌ی A متناهی است اگر و تنها اگر

$$|A| \lneqq \aleph_۰.$$

توجه بالا بیانگر این است که اولین مجموعه‌ی نامتناهی، هم‌اندازه‌ی اعداد طبیعی است و هر مجموعه‌ای که از مجموعه‌ی اعداد طبیعی اکیداً کوچکتر باشد، متناهی است.

اثبات. قبلا ثابت کردیم که اگر A نامتناهی باشد آنگاه A دارای زیر مجموعه‌ای شماراست. یعنی $|A| \geqslant \aleph_۰$. □

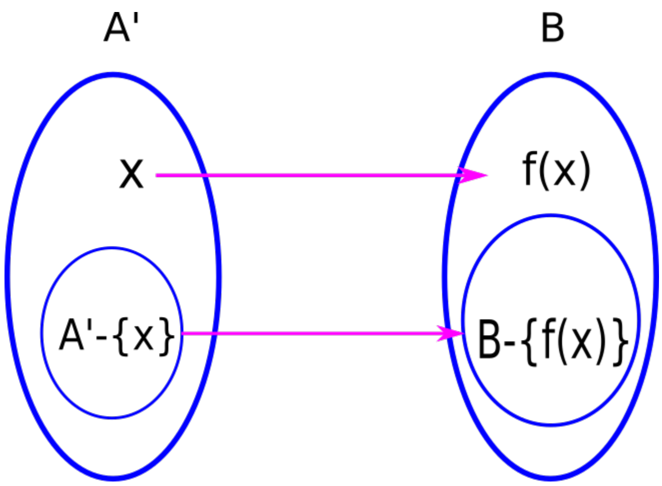
قضیه ۲۰۵. اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد و B یک مجموعه‌ی دلخواه و $f : A \to B$ تابعی پوشا باشد آنگاه B نیز متناهی است و $|B| \leqslant |A|$.

اثبات. حکم را با استقراء روی $|A|$ ثابت می‌کنیم. اگر $|A| = ۰$ آنگاه $A = \emptyset$ پس $B = \emptyset$. یعنی $|B| \leqslant |A| = ۰$. فرض کنیم حکم برای $|A| = n$ درست باشد. فرض کنید که $|A'| = n + ۱$ و تابع $f : A' \to B$ پوشا باشد. عنصر $x \in A'$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $f(A' - \{x\})$ تمام $B - \{f(x)\}$ را می‌پوشاند. بنا به فرض استقراء $|B - \{f(x)\}| \leqslant |A' - \{x\}|$ به بیان دیگر

$$|B| - ۱ \leq |A| - ۱$$

و در نتیجه داریم

$$|B| \leqslant |A'|$$



□

لم ۲۰۶. اگر A و B متناهی باشند و $|A| = |B|$ و $f : B \to A$ پوشا باشد، آنگاه f یک به یک است.

اثبات. فرض کنید f یک به یک نباشد و عناصر $x_۱, x_۲ \in B$ موجود باشند به طوری که

$$f(x_۱) = f(x_۲) = y \in A$$

می‌دانیم که تابع f از $B - \{x_۱, x_۲\}$ به $A - \{y\}$ پوشاست. پس بنا به لم قبل

$$|A - \{y\}| \leqslant |B - \{x_۱, x_۲\}|$$

یعنی

$$|A| - ۱ \leqslant |B| - ۲$$

بنابراین

$$|A| \leqslant |B| - ۱$$

و این نتیجه با فرض $|A| = |B|$ متناقض است. □

لم ۲۰۷. فرض کنید A یک مجموعه‌ی دلخواه و B یک مجموعه‌ی متناهی باشند. فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع یک به یک باشد. آنگاه A نیز متناهی است و $|A| \leqslant |B|$.

اثبات. می‌دانیم که $|A| = |f(A)|$ زیرا تابع f یک به یک است. و نیز می‌دانیم که $f(A) \subseteq B$ پس

$$|B| \geqslant |f(A)| = |A|$$

□

نتیجه ۲۰۸. اگر A و B متناهی باشند و $|A| = |B|$ و تابع $f : A \to B$ یک به یک باشد آنگاه تابع f پوشاست.

همه‌ی این لمها را گفتیم تا به نتیجه‌ی جالب زیر برسیم: بین دو مجموعه‌ی متناهی هم‌اندازه، پوشا بودن یک تابع و یک‌به‌یک بودن آن با هم معادلند:

نتیجه ۲۰۹. اگر $|A| = |B|$ و A و B متناهی باشند موارد زیر با هم معادلند:

۱. تابع $f : A \to B$ پوشاست.

۲. تابع $f : A \to B$ یک به یک است.

۳. تابع $f : A \to B$ دو سوئی است.

نتیجه ۲۱۰. اگر B متناهی باشد و $A \subseteq B$ آنگاه A هم متناهی است. (زیرا تابع همانی از A به B تابعی یک به یک است).

نتیجه ۲۱۱. اگر A نامتناهی باشد و $A \subseteq B$ آنگاه B نامتناهی است. (عکسِ نقیض جملهی بالا).

نتیجه ۲۱۲. (اصل لانهی کبوتری) اگر A و B متناهی باشند و $|A| \leqslant |B|$ و $f : A \to B$ یک تابع باشد آنگاه

$$\exists x_۱, x_۲ \in A \quad f(x_۱) = f(x_۲).$$

.

با استقراء میتوان اصول شمارشی زیادی برای مجموعههای متناهی ثابت کرد. چند تا از آنها را در زیر آوردهایم.

توجه ۲۱۳. اگر A و B متناهی باشند

۱. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

۲. $|A \times B| = |A| \times |B|$ (این را با اصول شمارشی آمار و احتمال نیز به آسانی میتوان ثابت کرد: برای هر عضو در A به اندازهی $|B|$ انتخاب داریم)

۳. $|A^B| = |A|^{|B|}$ (این را نیز با اصول احتمال میتوان ثابت کرد. به اندازهی $|A|$ جعبه داریم که میخواهیم آنها را با عناصر B پر کنیم.) یادآوری میکنم که با A^B مجموعهی همهی توابع از B به A را نشان میدهیم.

۴. $|P(A)| = ۲^{|A|}$ (برای هر عنصر در A دو حالت داریم، یا در زیرمجموعهی مورد نظر موجود است و یا نیست، بنابراین $۲^{|A|}$ زیرمجموعه به دست میآوریم).

بحث دربارهی اندازهی مجموعهها را فعلاً با چند تمرین زیر رها میکنیم؛ هر چند در جلسات آینده میخواهیم ثابت کنیم که اگر برای هر دو مجموعهی دلخواه A, B همواره یا $A \leqslant B$ و یا $B \leqslant A$. یعنی برای هر دو مجموعهی دلخواه A و B با یک تابع یک به یک از A به B موجود است یا یک تابع یک به یک از B به A موجود است. یعنی اندازهی دو مجموعهی داده شده همواره با هم قابل مقایسه است. برای اثبات این گفته نیازمند معرفی مفاهیم جدیدی هستیم.

تمرین ۱۱۴. نشان دهید که

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

تمرین ۱۱۵. نشان دهید که تعداد بازه‌های دو به دو مجزا در اعداد حقیقی، شماراست.

تمرین ۱۱۶. نشان دهید که تعداد دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی شماراست.

تمرین ۱۱۷. عدد $x \in \mathbb{R}$ را یک عدد جبری می‌گوئیم هرگاه یک چندجمله‌ای f با ضرایب در اعداد گویا موجود باشد، به طوری که $f(x) = ۰$. نشان دهید که تعداد اعداد جبری شماراست.

تمرین ۱۱۸. فرض کنید که اندازه‌ی مجموعه‌های A, B برابر با $۲^{\aleph_۰}$ باشد و ایندو با هم اشتراکی نداشته باشند. نشان دهید که اندازه‌ی $A \cup B$ برابر با $۲^{\aleph_۰}$ است.

تمرین ۱۱۹. برای مجموعه‌های دلخواهِ X, Y, Z که در آن $Y \cap Z = \emptyset$ نشان دهید که

$$X^Y \times X^Z \cong X^{Y \cup Z}$$

$$(X^Y)^Z \cong X^{Y \times Z}$$

خلاصه‌ای از مهمترین مطالب این فصل را در زیر آورده‌ام:

- مجموعه‌ها دو دسته‌اند: متناهی و نامتناهی. مجموعه‌های نامتناهی یا شمارا هستند و یا ناشمارا.
- از هر مجموعه‌ای، مجموعه‌ای بزرگتر وجود دارد. بنا به قضیه‌ی کانتور، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه از اندازه‌ی خود آن مجموعه بزرگتر است. پس جهان نظریه‌ی مجموعه‌ها بی‌کران است.
- اجتماع شمارا مجموعه‌ی شمارا شماراست.
- اگر $X \leq Y$ و $Y \leq X$ آنگاه $X \cong Y$.
- تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی برابر است با تعداد دنباله‌های شمارای ساخته شده از صفر و یک و برابر است با تعداد اعداد حقیقی.

فصل ۱۳

اصل انتخاب، لم زرن و اصل خوشترتیبی

از هر طرف که رفتم جز وحشتم نیفزود

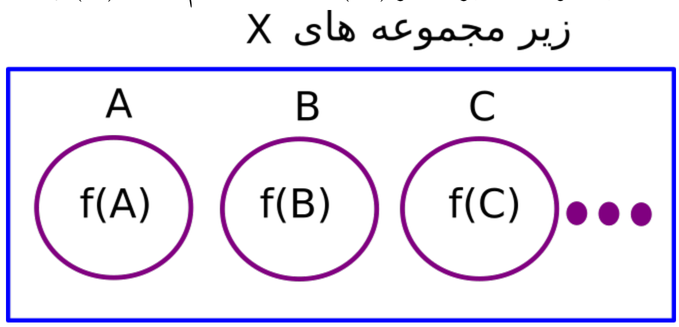
زینهار زین بیابان وین راه بی‌نهایت

حافظ

هدفمان در این بخش این است که ثابت کنیم که در اصول زرملو فرانکل، می‌توان اصل انتخاب را با اصول دیگری جایگزین کرد و قدرت این اصول به همان اندازه باقی می‌ماند.

اصل انتخاب

اصل انتخاب را در جلسات قبل دیده‌ایم. خوب است با چند بیان مختلف از این اصل آشنا شویم: اگر به تعداد نامتناهی مجموعه داشته باشیم، آنگاه **یک تابع انتخاب** موجود است که از هر یک از این مجموعه‌ها عنصری انتخاب می‌کند. به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه یک تابع $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ موجود است به طوری که برای هر $i \in I$ داریم $f(i) \in A_i$. به بیان معادل اگر X یک مجموعه‌ی ناتهیِ دلخواه باشد و $P(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های آن باشد. آنگاه تابعی مانند f از $P(X) - \{\emptyset\}$ به X موجود است به طوری که برای هر $A \in P(X)$ داریم $f(A) \in A$.



$$P(X) \xrightarrow{f} X$$

$$f(A) \in A$$

$$f(B) \in B$$

$$f(C) \in C \dots$$

باز به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه $\Pi_{i\in I}A_i \neq \emptyset$. توجه کنید که طبق تعریف حاصلضرب نامتناهی مجموعه، داریم:

$$(x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}A_i \iff \forall i \quad x_i \in A_i$$

(من نیز در سال اول کارشناسی اصل انتخاب را درک نمی‌کردم. در واقع برای آن «اثبات» زیر را داشتم و از این رو با خود می‌گفتم که چیزی که به این آسانی اثبات می‌شود، دیگر نباید اصلش خواند! استدلال ساده‌لوحانه‌ی آن زمانم را در زیر نوشته‌ام. شما ایرادش را بگویید:
اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه

$$\forall i \in I \quad A_i \neq \emptyset$$

بنابراین

$$\forall i \in I \exists x_i \quad x_i \in A_i$$

پس بنا به تعریف

$$(x_i)_{i\in I} \in \prod A_i$$

!) همان طور که در استدلال بالا اشتباه بالا می‌بینید، اصل انتخاب آنقدر برای ما بدیهی به نظر می‌رسد که گاهی نمی‌توانیم تشخیص دهیم که آیا از آن در اثبات خود استفاده کرده‌ایم یا نه. در ریاضیات سطوح بالاتر، بررسی این که کدام اثباتها بر اصل انتخاب استوارند مهم است. گاهی می‌کوشیم که در صورت ممکن برای برخی از آنها اثباتی بیاوریم که در آن از اصل انتخاب استفاده نشده باشد.
لم زرن، در ابتدا به عنوان اصلی جایگزین اصل انتخاب (یا اصل خوش‌ترتیبی) ارائه شده بود، اما بعدها ثابت شد که این اصل در واقع معادل اصل انتخاب است. یعنی اصل انتخاب از لم زرن و باقی اصول نتیجه می‌شود و لم زرن از اصل انتخاب و باقی اصول نتیجه می‌شود. با این حال، فرمول‌بندی لم زرن به گونه‌ای است که کاربرد آن در بسیاری شاخه‌های ریاضی، بالاخص جبر، بسیار مشهودتر از اصل انتخاب است. برای ورود به بحث لم زرن، نیازمند مقدمات بخش بعدی هستیم.

مجموعه‌های مرتب

رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X را یک **رابطه‌ی ترتیبی** می‌خوانیم هرگاه R انعکاسی، **پادتقارنی** و متعدی باشد. معمولاً در این صورت به جای xRy می‌نویسیم $x \leqslant y$. اگر R یک رابطه‌ی ترتیبی روی X باشد، (X, R) را یک مجموعه‌ی مرتب می‌خوانیم.

مثال ۲۱۴. ساختارِ $(\mathbf{N}, \leqslant)$، یعنی مجموعه‌ی اعداد طبیعی با ترتیب معمولش(همان ترتیبی که شما از ریاضی مقدماتی به خاطر دارید) یک مجموعه‌ی مرتب است، زیرا

$$\forall x \quad x \leqslant x$$

$$\forall x, y \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant x \rightarrow x = y$$

$$\forall x, y, z \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant z \rightarrow x \leqslant z$$

توجه ۲۱۵. ترتیب روی اعداد طبیعی تام (یا خطی) است. یعنی

$$\forall x, y \in \mathbf{N} \quad x \leqslant y \vee y \leqslant x$$

تعریف ۲۱۶. مجموعه‌ی مرتب $(X, \leqslant)$ را مرتب خطی (مرتب تام) می‌نامیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$$

در غیر این صورت $(X, \leqslant)$ را مرتب جزئی می‌نامیم.

دقت کنید که هم در مجموعه‌ی مرتب جزئی و هم در مجموعه‌ی مرتب خطی عبارت زیر درست است:

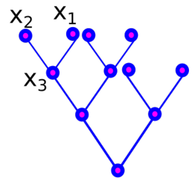
$$\forall x, y \quad (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$$

ولی تفاوت این است که در مجموعه‌ی مرتب خطی جمله‌ی زیر درست است ولی در مجموعه‌ی مرتب جزئی جمله‌ی زیر لزوماً درست نیست:

$$\forall x, y \quad (x \leq y \vee y \leq x)$$

یعنی در یک مجموعه‌ی مرتب جزئی ممکن است دو عنصرِ x, y پیدا شوند که با هم قابل مقایسه نباشند (یعنی هیچیک از دیگری بیشتر یا کمتر نباشد). مجموعه‌ی مرتب خطی را می‌توان به صورت یک زنجیر تجسم کرد که ممکن است نامتناهی باشد:

مجموعه‌ی مرتب جزئی را می‌توان به صورت درختی تجسم کرد:



در شکل بالا x_3 با هر یک از عناصر x_1 و x_2 قابل مقایسه است و از آنها کمتر است، ولی عناصر x_2 و x_1 قابل مقایسه با هم نیستند. همچنین x_2 با آخرین نقطه سمت راست درخت قابل مقایسه نیست. عنصر پایین درخت با همه‌ی عناصر قابل مقایسه و از همه‌ی آنها کمتر است. دقت کنید که درخت بالا می‌تواند از بالا و پائین نامتناهی باشد و نیز ممکن است در جاهائی از آن شکل لوزی نیز داشته باشیم.

درباره‌ی مجموعه‌های مرتب جزئی در جلسه‌ی آینده بیشتر صحبت خواهیم کرد.

تعریف ۲۱۷. مجموعه‌ی X را به همراه رابطه‌ی $\leqslant$ یک مجموعه‌ی مرتب می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad x \leqslant x$$

$$\forall x, y \in X \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant x \to x = y$$

$$\forall x, y, z \in X \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant z \to x \leqslant z$$

وقتی می‌گوییم $(X, \leqslant)$ مرتب جزئی است یعنی جمله‌ی زیر در آن لزوماً درست نیست.

$$\forall x, y \in X \quad x \leqslant y \vee y \leqslant x$$

یعنی هر دو عضو داده شده، لزوماً با هم قابل مقایسه نیستند.

دقت کنید که معمولاً یک رابطه‌ی ترتیب را با علامت $\leq$ نشان می‌دهیم، ولی منظورمان این نیست که اعضای مجموعه، عدد هستند. اعضای مجموعه می‌توانند هر چیزی باشند و رابطه‌ی $\leq$ فقط باید دارای ویژگی‌های انعکاسی، پادتقارنی و تعدی باشد.

مثال ۲۱۸. روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$x \overset{\bullet}{\leqslant} \leftrightarrow x|y$$

سوال ۱۳. نشان دهید رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی ترتیبی است.

پاسخ. می‌دانیم که

$$\text{(۱)} \forall x \in \mathbf{N} \quad x|x$$

$$\text{۲}\ \forall x, y \in \mathbf{N} \quad x|y \wedge y|x \to x = y$$

$$\text{۳}\ \forall x, y, z \in \mathbf{N} \quad x|y \wedge y|z \to x|z$$

پس | (عاد کردن) یک رابطه‌ی ترتیبی است.

توجه ۲۱۹. داریم ۱۳ $\dot{\nleqslant}$ ۲ زیرا ۱۳∤۲ و همچنین ۲ $\dot{\nleqslant}$ ۱۳ زیرا ۲∤۱۳. پس رابطه‌ی ترتیبی فوق خطی (تام) نیست.

□

مثال ۲۲۰. فرض کنید X یک مجموعه باشد. روی $P(X)$ رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$A \leqslant B \iff A \subseteq B$$

ادعا: $(P(X), \subseteq)$ یک مجموعه‌ی مرتب است.

پاسخ. می‌دانیم که عبارتهای زیر درستند:

$$\forall A \in P(X) \quad A \subseteq A$$

$$\forall A, B \in P(X) \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A \to A = B$$

$$\forall A, B, C \in P(X) \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C$$

پس رابطه‌ی فوق یک رابطه‌ی ترتیبی است.
فرض کنیم X دارای دو عضو a, b باشد که $a \neq b$ آنگاه

$$\{a\} \nsubseteq \{b\}$$

$$\{b\} \nsubseteq \{a\}$$

پس $(P(X), \subseteq)$ مرتب خطی نیست. □

مثال ۲۲۱. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. قرار دهید

$$\mathcal{A} = \text{مجموعه‌ی همه‌ی توابع جزئی از } Y \text{ به } X$$

به بیان دیگر تابع f در $\mathcal{A}$ است هرگاه دامنه‌ی آن زیرمجموعه‌ای از Y و برد آن زیرمجموعه‌ای از X باشد. می‌خواهیم روی $\mathcal{A}$ یک رابطه ی ترتیبی تعریف کنیم. فرض کنید $f, g \in \mathcal{A}$. تعریف کنید

$$f \leqslant g \iff dom(f) \subseteq dom(g) \wedge \underbrace{g|_{dom(f)} = f}_{\text{تحدید توابع}}$$

به بیان دیگر می گوئیم تابع f از تابع g کمتر است هرگاه دامنه‌ی آن زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی g باشد و تابع g تعمیمی از تابع f باشد (یعنی

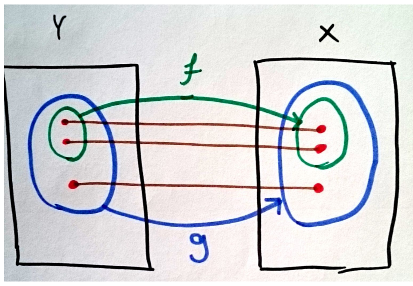
$$\forall x \in dom(f) \quad f(x) = g(x).$$

) به بیان دیگر تابع f از تابع g کمتر است هرگاه

$$\Gamma f \subseteq \Gamma g$$

یادآوری می‌کنم که

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)|x \in dom(f)\}.$$



مثلاً اگر $\Gamma f = \{(a,b),(c,d)\}$ آنگاه g می‌تواند به صورت زیر باشد

$$\Gamma g = \{(a,b),(c,d),(h,k)\}$$

تمرین ۱۲۰. نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی ترتیبی است ولی لزوماً خطی نیست.

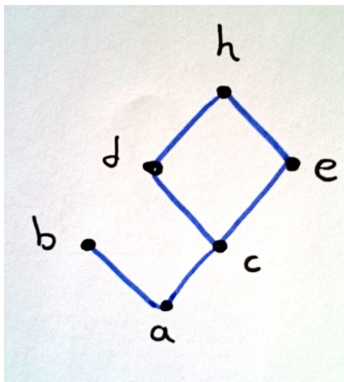
مثال ۲۲۲. روی مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e\}$ ترتیب زیر را تعریف کنید:

$$a \leqslant b, a \leqslant c \quad , \quad a \leqslant d, a \leqslant e$$

$$c \leqslant d, c \leqslant e$$

به بیان دیگر رابطه‌ی ترتیبی زیر را در نظر بگیرید:

$$\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(c,d),(c,e),(a,h),(d,h),(c,h)\}$$



رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت بالا در یک درخت نمایش داد.

تعریف ۲۲۳. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد. عنصر $a \in X$ را عنصر ماکزیمم (یا بیشینه) می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad x \leqslant a$$

دقت کنید که در تعریف ماکزیمم دو نکته نهفته است: اولاً هر عنصری با عنصر ماکزیمم قابل مقایسه است و ثانیاً هر عنصری از آن کمتر است. برای این که یک مجموعه، ماکزیمم داشته باشد نیازی نیست که همه‌ی اعضایش با هم قابل مقایسه باشند.

مثال ۲۲۴. در ساختار $(\{۴,۶,۱۲\},|)$، عدد ۱۲ ماکزیمم است زیرا

۴|۱۲

۶|۱۲

۱۲|۱۲

مثال ۲۲۵. مجموعه‌ی اعداد طبیعی با ترتیب عادی خود، دارای ماکزیمم (بیشینه) نیست.

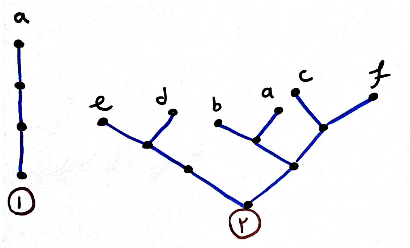
مثال ۲۲۶. در $(P(X),\subseteq)$ مجموعه‌ی X ماکزیمم است.

در مجموعه‌های مرتب جزئی مفهوم مهم دیگری به نام ماکزیمال بودن را نیز داریم:

تعریف ۲۲۷. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد. عنصر $a \in X$ را یک عنصر ماکزیمال (بیشینال) می‌خوانیم

$$\nexists x \in X \quad x \geqslant a$$

دقت کنید که: هیچ عنصری ازعنصر ماکزیمال بیشتر نیست. اما عنصر ماکزیمال لزوماً با همه‌ی عناصر قابل



مقایسه نیست. هر عنصری که با عنصر ماکزیمال قابل مقایسه باشد، از آن کمتر است.

سوال ۱۴. آیا در شکل ۲ عنصر a ماکزیمم است؟ خیر، زیرا a یا b قابل مقایسه نیست.

در شکل ۲ تمامی عناصر $\{a,b,c,d,e,f\}$ ماکزیمال هستند ولی هیچ یک ماکزیمم نیستند.

تمرین ۱۲۱. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. نقیض جمله‌های زیر را بنویسید.

$$\forall x \in X \quad x \leqslant a$$

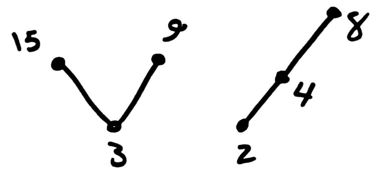
$$\nexists x \in X \quad x \geq a$$

پاسخ. نقیض جمله‌ی اول به صورت زیر است:

$$\exists x \in X \quad \Big(x \geqslant a \vee \underbrace{\big(\neg(x \leqslant a) \wedge \neg(x \geqslant a)\big)}_{\text{قابل مقایسه نیستند.}}\Big)$$

□

مثال ۲۲۸. در $\Big(\{۳, ۹, ۱۵, ۲, ۴, ۸\}, |\Big)$ عناصر ۸ ,۱۵ ,۹ ماکزیمال هستند ولی هیچ یک ماکزیمم نیستند.



تعریف ۲۲۹. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد و $A \subseteq X$. عنصر $a \in X$ را یک کران بالا برای A می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in A \quad x \leqslant a$$

توجه ۲۳۰. در تعریف بالا، ممکن است a در $X - A$ باشد. اگر $a \in A$ آنگاه a عنصر ماکزیمم است.

مثال ۲۳۱. مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{R}, \leqslant)$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $A = (۰, ۱)$. مجموعه‌ی کران‌های بالای A برابر است با

$$\{x \in \mathbf{R}, ۱ \leqslant x\}$$

در مثال بالا هیچ کدام از کران‌های بالای A در A واقع نشده است.

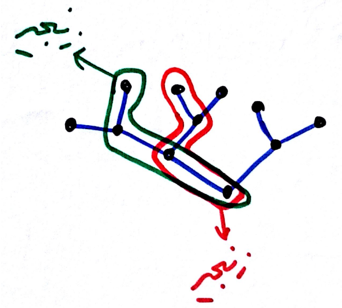
توجه ۲۳۲. اگر $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد و $A \subseteq X$ و $a \in X$ یک کران بالا برای A باشد و $a \in A$ آنگاه a عنصر ماکزیمم A است.

توجه ۲۳۳. ساختار $(P(X), \subseteq)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های متناهی X باشد. تنها کران بالا برای این مجموعه، خود X است و این کران بالا در A نیست.

توجه ۲۳۴. در $(\mathbf{N}, |)$ مجموعه‌ی اعداد اول دارای کران بالا نیست.

حال همه‌ی مواد لازم برای بیان لم زُرن را در اختیار داریم:
فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرتب جزئی متناهی باشد؛ یعنی X یک درخت متناهی باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که X دارای عنصر یا عناصر ماکزیمال است. کافی است هر یک از شاخه‌های درخت را طی کنیم تا به یکنقطه‌ی انتهائي برسیم. عناصر انتهای هر شاخه، ماکزیمال هستند. حال اگر X یک مجموعه‌ی مرتب نامتناهی باشد، یعنی یک درخت نامتناهی باشد، وجود یا عدم وجود عناصر ماکزیمال در آن به راحتی قابل تشخیص نیست. لم زرن یک محک برای تشخیص وجود عناصر ماکزیمال به دست می‌دهد.

تعریف ۲۳۵. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. مجموعه‌ی $A \subseteq X$ را یک زنجیر در X می‌نامیم هرگاه $(A, \leqslant)$ مرتب خطی باشد.



توجه کنید که زنجیرها لزوماً شمارا نیستند یعنی همیشه نمی‌توان آنها را به صورت $\{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ نمایش داد. امکان دارد اندازه‌ی یک زنجیر ناشمارا باشد. مهم فقط این است که همه‌ی عناصر مجموعه‌ی مورد نظر با هم قابل مقایسه باشند.

۱.۱۳ لم زُرن

قضیه ۲۳۶ (لم زُرن). فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی ناتهیِ مرتب جزئی باشد. فرض کنید هر زنجیر $A \subseteq X$ دارای یک کران بالا در X باشد. آنگاه X دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال است.

توجه ۲۳۷. در فرض لم زرن ادعا **نکرده‌ایم** که هر زنجیر دارای عنصر ماکزیمم است.

توجه ۲۳۸. لم زرن ابزار بسیار قدرتمندی در بسیاری اثباتهای ریاضیاتی، خصوصا در علم جبر است. در ابتدا این لم به عنوان جایگزینی برای اصل انتخاب ارائه شده بود اما بعدها ثابت شد که این لم با اصل انتخاب معادل است. یعنی با استفاده از اصل انتخاب و سایر اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها لم زرن ثابت می‌شود و نیز با استفاده از لم زرن و بقیه‌ی اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌توان اصل انتخاب را ثابت کرد. در منطق این گفته را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$ZF + Zorn \vdash C(= Choice)$$

$$ZFC \vdash Zorn$$

به دانشجویانی که علاقه‌مند به فهم دقیق علامتهای بالا هستند پیشنهاد می‌کنم درس منطق ریاضی را در ترم آینده بگیرند.

در جلسه‌ی آینده اصل انتخاب را با استفاده از لم زرن ثابت خواهیم کرد و چند نمونه کاربرد این لم را خواهیم دید. توجه کنید که «زُرن» را در برخی کتابها، به صورت تسرن می‌نویسند؛ بدین علت که z در زبان آلمانی، «تْزْ» خوانده می‌شود.

۲.۱۳ اثبات لمِ زُرن با استفاده از اصل انتخاب

فرض کنید که در درون یک زنجیر مجموعه‌ی مرتب جزئی هستیم. انتهای این زنجیر را نمی‌بینیم ولی می‌دانیم که از عناصر هر زنجیری بزرگتر در داخل مجموعه‌ی ما وجود دارد. در این صورت لم زرن به ما می‌گوید که زنجیر مورد نظر دارای انتهاست. در زیر این گفته را به صورت دقیق بیان کرده‌ایم:

قضیه ۲۳۹. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک **مجموعه‌ی مرتب جزئیِ ناتهی** باشد. اگر هر زنجیرِ $A \subseteq X$ دارای یک کران بالا در X باشد، آنگاه X دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال است.

اثبات لم زرن با استفاده از ابزار اردینالها ساده است، ولی در این درس اثباتی برای این لم نوشته‌ام که در آن به مفهوم اردینال به طور مستقیم اشاره نشده است.

تمرین ۱۲۲. آیا مجموعه‌ی $(۰, ۱)$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی، با ترتیب اعداد حقیقی، شرایط لم زرن را داراست؟

در ادامه به اثبات لم زرن، با **فرض درست بودن اصل انتخاب** می‌پردازم. ایده‌ی کلی اثبات لم زرن به صورت زیر است. اگر لم زرن درست نباشد، یعنی اگر مجموعه‌ی X، در عین داشتن شرایط لم زرن، هیچ عنصر ماکزیمالی نداشته باشد، آنگاه اگر یک عنصرِ د لخواهِ $x_۰ \in X$ را انتخاب کنیم، این عنصر ماکزیمال نیست؛ یعنی از آن عنصری بزرگتر مانند $x_۱$ پیدا می‌شود. پس

$$x_۰ < x_۱$$

اما خودِ $x_۱$ نیز ماکزیمال نیست پس عنصری از آن بزرگتر پیدا می‌شود؛ بدین ترتیب زنجیری مانند زیر داریم:

$$x_۰ < x_۱ < x_۲ < \dots$$

اما کار در اینجا ختم نمی‌شود. هیچ عنصری وجود ندارد که در انتهای این زنجیر، حتی پس از شمارا مرتبه قرار بگیرد؛ زیرا از آن عنصر بزرگتر هم وجود دارد. پس طول زنجیری که می‌توان بدین طریق ساخت، از هر چه مجموعه وجود دارد، بیشتر است و این یک تناقض است. در ادامه این اثبات را دقیق کرده‌ام. البته آماده باشید زیرا اثبات پیش رو اثبات آسانی نیست!

فرض کنید اصل انتخاب درست باشد و X یک مجموعه باشد که شرایط ذکر شده در لم زرن را داراست. می‌دانیم که هر زنجیر در X دارای حداقل یک کران بالاست. با استفاده از اصل انتخاب، برای هر زنجیرِ A در X یک کرانِ بالای x_A انتخاب می‌کنیم.

در ادامه به نوع خاصی از زنجیرها علاقه‌مند هستیم. این زنجیرها ساختاری به صورت زیر دارند. مثلاً اگر $x_۱ < x_۲ < x_۳$ بخشی از زنجیر باشد، آنگاه $x_۳$ همان کران بالائی است که تابع انتخاب مورد نظر ما برای زنجیرِ $x_۱ < x_۲$ انتخاب کرده است و $x_۲$ همان کران بالائی است که تابع انتخاب ما برای زنجیر تک عضویِ $x_۱$ انتخاب کرده است. چنین زنجیری را مطلوب می‌نامیم. در زیر این گفته را دقیقتر کرده‌ام. ابتدا یک عنصرِ $c \in X$ را در نظر بگیرید.

زنجیرِ A را یک زنجیر **مطلوب** بنامید هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد:

- $c = \min A$.

- هر زیرمجموعه از A دارای عنصر ابتدا باشد.

- هر عنصر در این زنجیر، کران بالای عناصر قبلی این زنجیر باشد؛ همان کران بالائی که تابع انتخابمان انتخاب کرده است.

زنجیرهای مطلوب دارای ویژگی‌های جالبی هستند:

تمرین ۱۲۳. اگر A, B دو زنجیر مطلوب باشند، آنگاه $A \cap B$ یک زنجیر مطلوب است.

تمرین ۱۲۴. فرض کنید که A, B دو زنجیر مطلوب باشند. نشان دهید که در این صورت یا A, B با هم هیچ اشتراکی ندارند، و یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.

تمرین ۱۲۵. اگر $A \subseteq B$ دو زنجیر مطلوب باشند آنگاه A یک بخش ابتدائیِ B است؛ یعنی:

$$\forall x \in A \quad \{y \in A | y < x\} = \{y \in B | y < x\}.$$

بنا به تمرین بالا، روی مجموعه‌ی زنجیرهای مطلوب یک ترتیب تعریف می‌کنم. برای دو چنین زنجیری می‌نویسیم

$$A \leq B$$

هرگاه

$$A \subseteq B.$$

تمرین ۱۲۶. فرض کنید که $\{A_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر (با ترتیب شمول) از زنجیرهای مطلوب باشد، نشان دهید که $\bigcup_{i \in I} A_i$ نیز خودْ یک زنجیر مطلوب است.

اما دقت کنید که مجموعه‌ی همه‌ی زنجیرهای مطلوب، بنا به تمرینِ ۱۲۴ خود تشکیل یک زنجیر می‌دهد. به طور خاص اجتماع همه‌ی زنجیرهای مطلوب، خود یک زنجیر است. پس بنا به شرایط ذکر شده برای مجموعه‌ی X این زنجیر دارای یک کران بالا در X است. اگر این کران بالا در خودِ زنجیر باشد، یک عنصر ماکزیمال است و قضیه ثابت می‌شود. اما اگر این کران بالا در خودِ زنجیر نباشد آنگاه با اضافه کردن به این زنجیر به زنجیر مطلوب بزرگتری می‌رسیم و این متناقض با این فرض است که زنجیر ما اجتماع همه‌ی زنجیرهای مطلوب است.

۳.۱۳ اثبات اصل انتخاب با استفاده از لم زرن

قضیه ۲۴۰. اصل انتخاب از لم زُرن نتیجه می‌شود.

بگذارید یک بار دیگر اصل انتخاب را یادآوری کنم:

اصل انتخاب. اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه یک تابع $f : I \to \bigcup A_i$ موجود است به طوری که

$$\forall i \in I \quad f(i) \in A_i$$

توجه ۲۴۱. اگر A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد برای انتخاب یک عنصر در A نیازی به اصل انتخاب نداریم. همچنین اگر $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌ها باشد، برای انتخاب عناصرِ $a_i \in A_i$ نیازی به اصل انتخاب نداریم. تنها وقتی که خانواده‌ی مورد نظر نامتناهی است به این اصل نیاز است.

توجه ۲۴۲. در زیر ثابت کرده‌ایم که اصل انتخاب چگونه از لم زُرن نتیجه می‌شود. خلاصه‌ی اثبات بدین صورت است. فرض کنید که $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. برای پیدا کردنِ یک تابع انتخاب از I به $\bigcup A_i$، روی **مجموعه‌ی همه‌ی توابع جزئیِ انتخاب** یک ترتیب جزئی تعریف می‌کنیم و سپس با استفاده از لمِ زرن یک تابع انتخاب ماکزیمال پیدا می‌کنیم؛ که همان تابع انتخابِ مورد نیاز ما خواهد بود.

اثبات قضیه‌ی ۲۴۰ . فرض کنید لم زُرن درست باشد. مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathcal{A} = \{(f,J) | J \subseteq I \quad \text{و} \quad \text{یک تابع است}\ f : J \to \bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{و}\ \forall j \in J \quad f(j) \in A_j\}$$

به بیان دیگر $\mathcal{A}$ مجموعه‌ی همه‌ی **توابعِ جزئیِ** انتخاب است (که به همراه دامنه‌شان نوشته شده‌اند).

ادعا: $\mathcal{A} \neq \emptyset$

اثبات. فرض کنید $i_0 \in I$. از آنجا که $A_{i_0} \neq \emptyset$. فرض کنید $a_{i_0} \in A_{i_0}$. تابع زیر در $\mathcal{A}$ است.

$$\{i_0\} \xrightarrow{f} \bigcup A_{i_0}$$

$$i_0 \mapsto a_{i_0}$$

به بیان دیگر

$$(f, \{i_0\}) \in \mathcal{A}$$

$\square$

پایان اثبات ادعا

روی $\mathcal{A}$ ترتیب زیر را تعریف می‌کنیم:

تابعِ جزئی انتخابِ f_2 را از تابعِ جزئیِ انتخابِ f_1 بزرگتر می‌خوانیم هرگاه f_2 انتخابهای f_1 را حفظ کند و انتخابهای دیگری نیز بر آنها بیفزاید. به بیان دقیقتر ریاضی:

$$(f_1, J_1) \leqslant (f_2, J_2) \iff (J_1 \subseteq J_2 \wedge f_2|_{J_1} = f_1)$$

و باز به بیان دیگر

$$(f_1, J_1) \leqslant (f_2, J_2) \iff J_1 \subseteq J_2 \wedge \forall j \in J_1 \quad f_1(j) = f_2(j)$$

و باز به بیان دیگر

$$(f_1, J_1) \leqslant (f_2, J_2) \iff \underbrace{\Gamma f_1}_{\{(i, f_1(i)) | i \in J_1\}} \subseteq \underbrace{\Gamma f_2}_{\{(i, f_2(i)) | i \in J_2\}}$$

تمرین ۱۲۷. نشان دهید که رابطه‌ی بالا رابطه‌ی ترتیبی است. (یعنی انعکاسی، پادتقارنی و متعدی است).

پس تا اینجا (با فرض این که تمرین بالا را حل کنید) دیدیم که مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ یک مجموعه‌ی مرتب ناتهی است. حال در ادامه نشان می‌دهیم که هر زنجیر در این مجموعه، دارای یک کران بالاست، یعنی این مجموعه در شرط لم زرن صدق می‌کند.

فرض کنید $\{(f_k, J_k)\}_{k \in K}$ زنجیری در $\mathcal{A}$ باشد. ادعا می‌کنیم که این زنجیر در $\mathcal{A}$ یک کران بالا دارد. زوجِ $(h, L) \in \mathcal{A}$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم و ادعا می‌کنیم که این زوج، کران بالای زنجیر یادشده است. فرض کنید h یک تابع باشد که دامنه‌ی آن، مجموعه‌ی $\bigcup J_k$ است. همچنین فرض کنید که ضابطه‌ی این تابع به صورت زیر باشد:

$$x \in J_k \Rightarrow \quad h(x) = f_k(x)$$

تمرین ۱۲۸. نشان دهید که $(h, L) \in \mathcal{A}$ و برای هر تابعِ (f_k, J_k) در زنجیر یادشده داریم $(f_k, J_k) \leq (h, L)$.

پس $\mathcal{A}$ شرایط استفاده از لم زرن را داراست. پس بنا به لم زُرن، $\mathcal{A}$ دارای یک عنصر ماکزیمال است. فرض کنید (P, Q) عنصر ماکزیمالِ $\mathcal{A}$ باشد. کافی است ثابت کنیم که

$$Q = I$$

اگر عبارت بالا ثابت شود، از آنجا که $(P, Q) \in \mathcal{A}$ و بنا به نحوه‌ی تعریفِ $\mathcal{A}$ تابع $P : I \to \bigcup A_i$ یک تابع انتخاب خواهد بود.

فرض کنید $Q \neq I$ و $i \in I - Q$. فرض کنید $a_i \in A_i$ عنصر دلخواهی باشد. داریم

$$\underbrace{P \cup \{(i, a_i)\}}_{R} \in \mathcal{A}$$

و

$$P \lneqq R$$

و این با ماکزیمال بودن P متناقض است. $\square$

بیایید یک بار دیگر اثبات را مرور کنیم. فرض کنیم لم زرن درست باشد، می‌خواهیم نشان دهیم که اصل انتخاب درست است. فرض کنیم $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و به دنبال یک تابع انتخاب از I به $\bigcup A_i$ هستیم. نخست مجموعه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{A} = \{(f, J) | J \subseteq I, \quad \forall j \in J \quad f(j) \in A_j \text{ و } \text{یک تابع است } f : J \to \bigcup_{i \in I} A_i\}$$

روی مجموعه‌ی بالا یک ترتیب تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با آن ترتیب، مجموعه بالا یک مجموعه‌ی ناتهی مرتب است. سپس نشان می‌دهیم که هر زنجیر با آن ترتیب دارای یک کران بالاست، پس مجموعه‌ی بالا در شرایط لم زرن صدق می‌کند، پس عنصر ماکزیمال دارد. عنصر ماکزیمال این مجموعه، همان تابع انتخابی است که در پی آن هستیم.

این بخش از درس را با یک قضیه‌ی خیلی زیبا به پایان می‌برم. می‌دانیم که اعداد طبیعی همیشه با هم قابل مقایسه‌اند؛ یعنی اگر m, n دو عدد طبیعی باشند همواره یا $m \leq n$ یا $n \leq m$. در درسهای گذشته با اعداد جدیدی به نام کاردینالها آشنا شدیم و برای آنها یک ترتیب تعریف کردیم. گفتیم که اگر u, v دو کاردینال باشند و $u = card(A)$ و $v = card(B)$ آنگاه می‌گوییم $u \leq v$ هرگاه یک تابع یک به یک از A به B موجود باشد. حال طبیعی است از خودمان بپرسیم که آیا لزوماً دو کاردینال با هم قابل مقایسه‌اند؟ به بیان دیگر اگر A, B دو مجموعه باشند آیا لزوماً یا تابعی یک به یک از A به B موجود است یا تابعی یک به یک از B به A؟ پاسخ سوال بالا (در نتیجه‌ی لم زرن) مثبت است.

قضیه ۲۴۳. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی دلخواه باشند. آنگاه یا $X \leqslant Y$ یا $Y \leqslant X$.

اثبات. مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\mathcal{A} = \{(f, Z) | Z \subseteq X, \quad \text{یک تابع یک به یک است } f : Z \to Y\}$$

توجه کنید که $\mathcal{A} \neq \emptyset$. علت: فرض کنید

$$y_{\circ} \in Y \quad , \quad z_{\circ} \in X$$

آنگاه تابع $f = \{(z_{\circ}, y_{\circ})\}$ در $\mathcal{A}$ است. به بیان دقیقتر

$$(f, \{z_{\circ}\}) \in \mathcal{A}$$

ترتیب زیر را روی $\mathcal{A}$ تعریف کنید.

$$(f_1, Z_1) \leqslant (f_2, Z_2) \iff \Gamma f_1 \subseteq \Gamma f_2$$

فرض کنید $\{(f_j, Z_j)\}_{j \in J}$ زنجیری در A باشد آنگاه این زنجیر دارای یک کران بالا در $\mathcal{A}$ است که این کران بالا، مشابه قضیه‌ی قبل تابعی است که گرافش $\bigcup \Gamma f_j$ است. پس $\mathcal{A}$ دارای یک عنصر ماکزیمال است. فرض کنید

$$P : Z \to Y$$

عنصر ماکزیمال مورد نظر باشد. به بیان دیگر فرض کنید $(P, Z) \in \mathcal{A}$ ماکزیمال باشد. اگر $Z = X$ حکم اثبات شده است، یعنی تابع یک به یکِ P از X به Y پیدا شده است و این مطلوب قضیه است زیرا در این صورت $X \leq Y$. اگر $Z \neq X$ آنگاه از دو حال خارج نیست.

۱. یا P پوشاست.

۲. یا P پوشا نیست.(مثلا P عنصر $y \in Y$ را نمی‌پوشاند.)

در حالتی که P پوشا نیست، فرض کنید $x \in X - Z$. حال $P \cup \{(x, y)\} \in \mathcal{A}$ و این ماکزیمال بودن P را نقض می‌کند.
حال اگر P پوشا باشد آنگا بنا به قضایای قبل یک تابع یک به یک از Y به X موجود است؛ یعنی $Y \leqslant X$. پس نشان دادیم که یا $X \leq Y$ یا $Y \leq X$. □

تمرین ۱۲۹. فرض کنید که $\mathcal{A}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد که تحت اجتماع زنجیرها بسته است؛ یعنی اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathcal{A}$ باشد، به طوری که برای هر $i < j \in I$ داریم $A_i \subseteq A_j$، آنگاه $\bigcup A_i \in \mathcal{A}$. نشان دهید که $\mathcal{A}$ حاوی یک مجموعه است که زیرمجموعه‌ی سره‌ی هیچکدام از مجموعه‌های موجود در $\mathcal{A}$ نیست.

۴.۱۳ اصل خوش ترتیبی

اصل خوش‌ترتیبی یکی از اصول مهم ریاضی است که قضایای بسیاری با استفاده از آن ثابت می‌شوند. این اصل در واقع معادل اصل انتخاب و از این رو معادل با لم زُرن است. پس می‌توان یکی از اینها را اصل فرض کرد و بقیه را قضیه دانست.

تعریف ۲۴۴. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب خطی باشد. (یعنی یک مجموعه‌ی مرتب باشد که همه‌ی اعضای آن با هم قابل مقایسه‌اند). می‌گوییم $(X, \leqslant)$ خوش ترتیب است هرگاه هر زیر مجموعه از X دارای یک مینی‌موم باشد (به بیان دیگر هر زیرمجموعه‌ای یک عضو ابتدا داشته باشد).

مثال ۲۴۵. $(\mathbf{N}, \leqslant)$ خوش ترتیب است.

مثال ۲۴۶. $(\mathbf{R}, \leqslant)$ خوش ترتیب نیست. برای مثال بازه‌ی $(۰, ۱) \subseteq \mathbf{R}$ دارای مینی‌موم نیست. همچنین $(-\infty, ۰)$ مینی‌موم ندارد.

قضیه ۲۴۷ (اصل خوش ترتیبی). فرض کنید X یک مجموعه باشد. می‌توان یک ترتیبِ $\leqslant_X$ روی X تعریف کرد، به طوری که $(X, \leqslant)$ خوش ترتیب باشد.

دقت کنید که $\mathbb{R}$ با ترتیب معمولی خودش، خوشترتیب نیست؛ ولی بنا به اصل خوشترتیبی می‌توان یک ترتیب دیگر روی آن در نظر گرفت که با آن ترتیب، خوش ترتیب باشد.
گفتیم که اصل خوشترتیبی با اصل انتخاب معادل است. در این دوره فرصت اثبات این گفته را نداریم و تنها نتیجه شدن اصل انتخاب از اصل خوشترتیبی را، که ساده تر است، اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲۴۸. اصل انتخاب از اصل خوش ترتیبی نتیجه می‌شود.

اثبات. فرض کنید اصل خوش ترتیبی درست باشد. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد.

هدف. تعریف یک تابع $f: I \to \bigcup A_i$ به طوری که $f(i) \in A_i \quad \forall i \in I$.

از آنجا که اصل خوش ترتیبی را داریم، می‌دانیم که روی هر A_i یک ترتیب $\leqslant_i$ وجود دارد به طوری که $(A_i, \leqslant_i)$ خوش ترتیب است. پس تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(i) = \min_{\leqslant_i} A_i$$

□

برای اثبات اصل انتخاب با استفاده از خوشترتیبی، تابع انتخاب را تابعی در نظر گرفته‌ایم که از هر مجموعه، مینی‌موم آن را برمی‌دارد. در اینجا دیگر تابع انتخاب دارای یک ضابطه است و وجودش به اصل انتخاب نیازی ندارد. اصل خوشترتیبی همچنین با لم زرن معادل است. در زیر نشان داده‌ایم که چگونه با استفاده از لم زرن می‌توان اصل خوشترتیبی را ثابت کرد.

قضیه ۲۴۹. لم زُرن اصل خوش ترتیبی را نتیجه می‌دهد.

اثبات.

یادآوریِ **لم زُرن**. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی و ناتهی باشد به طوری که هر زنجیر $A \subseteq X$ دارای کران بالا در X باشد. آنگاه X دارای یک عنصرِ ماکزیمال است.

فرض کنیم لم زُرن درست باشد و Y یک مجموعه‌ی دلخواه باشد.

هدف. تعریف یک ترتیب روی Y به طوری که $(Y, \leqslant_Y)$ یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد.

مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{A} = \{(B, \leqslant_B) | \text{یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد.} \ (B, \leqslant_B) \ \text{و} \ B \subseteq Y\}$$

ادعا: $\mathcal{A}$ ناتهی است.

فرض کنید $y_\circ \in Y$. روی $\{y_\circ\}$ ترتیب زیر را در نظر بگیرید:

$$y_\circ \leqslant y_\circ$$

مجموعه‌ی $\{y_\circ\}$ به همراه ترتیبِ بالا در $\mathcal{A}$ است. پس $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

قدم دوم. تعریف یک ترتیب روی $\mathcal{A}$. تعریف کنید:

$$(B_1, \leqslant_{B_1}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_2, \leqslant_{B_2}) \iff (B_1 \subseteq B_2) \wedge \text{گسترشی از ترتیب } \leqslant_{B_1} \text{ باشد} \ \leqslant_{B_2} \wedge$$

$$\wedge \forall b_1 \in B_1 \forall b_2 \in B_2 \quad b_1 \leq_{B_2} b_2$$

یعنی

$$(B_1 \subseteq B_2) \wedge \forall x, y \in B_1 \quad (x \leqslant_{B_1} y \rightarrow x \leqslant_{B_2} y)$$

$$\wedge \forall b_1 \in B_1 \forall b_2 \in B_2 \quad b_1 \leq_{B_2} b_2$$

قدم سوم. هر زنجیر در $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای کران بالا در $\mathcal{A}$ است. فرض کنید

$$(B_1, \leqslant_{B_1}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_2, \leqslant_{B_2}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_3, \leqslant_{B_3}) \leqslant_{\mathcal{A}} \dots$$

یک زنجیر دلخواه در $\mathcal{A}$ باشد. [1] ادعا: این زنجیر دارای کران بالا در $\mathcal{A}$ است.
قرار دهید $B = \bigcup B_i$ روی B ترتیب زیر را تعریف کنید.

$$x \leqslant_B y \leftrightarrow \exists i \quad x, y \in B_i \quad x \leqslant_{B_i} y$$

تمرین ۱۳۰. نشان دهید که $(B, \leqslant_B) \in \mathcal{A}$ و همچنین نشان دهید که $(B, \leqslant_B)$ یک کران بالا برای زنجیر یادشده است.

توجه کنید که قسمت سختِ تمرین بالا نشان دادن این است که هر زیرمجموعه از B دارای یک مینیموم است. فرض کنید $C \subseteq B$. می‌خواهیم عنصر مینی‌مومِ C را بیابیم. از آنجا که $C \subseteq \bigcup B_i$ واضح است که i وجود دارد به طوری که

$$C \cap B_i \neq \emptyset.$$

می‌دانیم که $C \cap B_i \subseteq B_i$ پس از آنجا که B_i خوش‌ترتیب است، $C \cap B_i$ دارای یک عنصر مینی‌موم است. فرض کنیم نام این عنصر t باشد. ادعا می‌کنیم که $t = \min C$. فرض کنید $y \in C$ عنصر دلخواهی باشد. کافی است نشان دهیم که $t \leq y$.
از آنجا که $y \in C \subseteq \bigcup B_i$ می‌دانیم که $i_1 \in I$ وجود دارد به طوری که $y \in B_{i_1}$. از آنجا که B_i ها زنجیر می‌سازند، یا $B_i \subseteq B_{i_\circ}$ یا $B_{i_\circ} \subseteq B_i$. اگر $B_i \subseteq B_{i_\circ}$ آنگاه هر عنصر در B_i از تمام عناصرِ $B_{i_\circ}$ کمتر است، پس $t \leq y$. اگر $B_{i_\circ} \subseteq B_i$ آنگاه $C \cap B_{i_\circ} \subseteq C \cap B_i$ و از این رو $\min C \cap B_i$ از تمامِ عناصرِ $C \cap B_{i_\circ}$ از جمله y کمتر است. (دقت کنید که اگر $M \subseteq N$ آنگاه $\min N \leq \min M$.)

پس (بعد از حل تمرین بالا) هر زنجیر در $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای کران بالاست . بنا به لم زُرن $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای عنصر ماکزیمال بنام $(C, \leqslant_C)$ است.
ادعا: $C = Y$.
اثبات ادعا: فرض کنید $y_\circ \in Y - C$.

[1] زنجیرها می‌توانند ناشمارا باشند و اینجا تنها برای سادگی، زنجیر را شمارا گرفته‌ایم.

هدف. پیدا کردن یک عنصر بزرگتر از $(C,\leqslant_C)$ در $\mathcal{A}$. قرار دهید $C'=C\cup\{y_0\}$ و فرض کنید $y_0\geqslant c \quad \forall c\in C$ آنگاه $(C',\leqslant_{C'})\in\mathcal{A}$ و $(C',\leqslant_{C'})\gneqq_A(C,\leqslant_C)$ و این تناقض با ماکزیمال بودن C دارد.

$\square$

دقت کنید که در بالا با استفاده از لم زرن ثابت کردیم که روی هر مجموعه‌ای می‌توان یک ترتیب تعریف کرد که مجموعه‌ی مورد نظر با آن خوشترتیب باشد. در اثبات بالا، تنها وجود یک ترتیب را ثابت کردیم بی آنکه کوچکترین ایده‌ای درباره‌ی چگونگی این ترتیب به دست بدهیم. این نوع اثباتها از توانائیِ بالای لم زرن ناشی می‌شوند. در واحدهای جبری (احتمالاً در ترمهای آینده) قضایای فراوانی را خواهید دید که همه بر پایه‌ی لم زرن بنا شده‌اند.

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی اصل خوشترتیبی صحبت کردیم. گفتیم که بنا به این اصل اگر A یک مجموعه‌ی دلخواه باشد آنگاه می‌توان یک رابطه‌ی ترتیبی $\leqslant_A$ روی A تعریف کرد به طوری که $(A,\leqslant_A)$ خوشترتیب باشد.

تمرین ۱۳۱. نشان دهید که ساختار $(A,\leqslant)$ خوش ترتیب است اگر و تنها اگر هیچ دنباله‌ی نزولیِ نامتناهی‌ای مانند دنباله‌ی زیر از اعضای A یافت نشود.

$$a_1\geqslant_A a_2\geqslant_A a_3\geqslant_A\dots$$

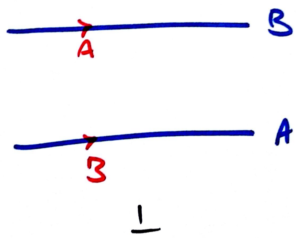
تا اینجا ثابت کرده‌ایم که

اصل خوش‌ترتیبی $\longrightarrow$ لم‌زرن $\longleftrightarrow$ اصل‌انتخاب

در واقع نشان داده‌ایم که سه اصل بالا با هم معادلند؛ هر کدام از دیگری نتیجه می‌شوند.

اصل خوشترتیبی مقدمه‌ی مقوله‌ی مهم دیگری در نظریه‌ی مجموعه‌ها، به نام اُردینالها است. قصد ندارم وارد مبحثِ اردینالها شوم، ولی توضیحی چند درباره‌ی آنها می‌دهم. به معرفی عمیقتر آنها را در درس منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها در ترم آینده خواهم پرداخت.

گفتیم که بنا اصل خوشترتیبی هر مجموعه‌ای را می‌توان دارای ترتیبی فرض کرد که با آن ترتیب خوشترتیب باشد. اگر $(A,\leqslant_A)$ و $(B,\leqslant_B)$ خوش ترتیب باشند آنگاه (بنا به قضیه‌ای)یا A بخشی آغازین از B است یا B بخشی آغازین از A است.



منظور از این که A بخش آغازینِ B است، عبارت زیر است:

$$\exists y\in B \quad A=\{x|x\leqslant y\}$$

پس مجموعه‌های خوشترتیب همه مانند اعداد پشت سر هم قابل مرتب شدن‌اند. به اعدادی که از این طریق حاصل می‌شوند، اعداد ترتیبی، یا **اردینالها** گفته می‌شود. برخی از اردینالها را در زیر نوشته‌ام.

$$۰, ۱, ۲, \dots, \omega, \omega+۱, \omega+۲, \dots, \omega+\omega, \omega+\omega+\omega, \dots, \omega.\omega, \omega.\omega+۱, \dots, \omega.\omega+\omega, \dots, \omega^۳, \dots, \omega^\omega, \dots$$

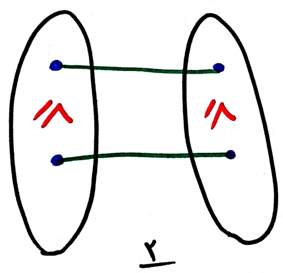
دقت کنید که اردینالهای $\omega, \omega+۱, \omega+۲, \dots, \omega+\omega$ و بسیاری اردینالهای دیگر بعد از آن، از لحاظ کاردینالی همه برابر با $\aleph_۰$ هستند. به بیان دیگر اگر ترتیب روی آنها در نظر گرفته نشود، همه، هم‌اندازه با $\aleph_۰$ هستند. اما وقتی پای ترتیب به میان می‌آید، $\omega+۱$ دارای عنصری است که از همه‌ی عناصرِ ω بزرگتر است؛ پس $\omega+۱$ از لحاظ اردینالی با ω برابر نیست. حساب اردینالها داستان مفصل خود را دارد: روی آنها هم جمع و ضرب و توان تعریف می‌شود و این اعمال، با آنهائی که برای کاردینالها تعریف کردیم کاملاً متفاوتند. در زیر، تعریف دقیقتری برای اردینالها ارائه کرده‌ام.

تعریف ۲۵۰. اگر X و Y دو مجموعه باشند می‌گوییم X و Y یک اُردینال یکسان هستند (یا دارای نوع ترتیبیِ یکسانند) هر گاه

$$\exists \quad \overset{\text{یک به یک و پوشا}}{\overset{\uparrow}{f}} \quad : (X, \leqslant_X) \to (Y, \leqslant_Y)$$

به طوری که

$$\forall x, x' \in X \quad \Big(x \leqslant_X x' \to f(x) \leqslant_Y f(x')\Big)$$



پس این که دو مجموعه دارای نوع ترتیبی یکسان هستند، یعنی هم تعداد اعضای آنها برابر باشند و هم ترتیب اعضا یکسان باشد. تعریف بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی به دست می‌دهد که هر کلاس رابطه‌ی بالا را یک **اُردینال** می‌نامیم. بیش از این درباره‌ی اردینالها سخن نمی‌گویم و به عنوان آخرین بخش این درس، به بررسی اعداد طبیعی خواهم پرداخت.

فصل ۱۴

مرور کاردینالها

پیش از آنکه وارد بحث کاردینالها شویم، بیایید آنچه را که تا کنون یادگرفته‌ایم به سرعت مرور کنیم. گفتیم که در درس مبانی ریاضی قرار است که علم ریاضی را از اصول اولیه و پایه‌ای آن دوباره معرفی کنیم. برای این کار نخست به زبان این علم نیازمندیم که همان منطق است. با دو نوع منطق آشنا شدیم:

۱. منطق گزاره‌ها (جبر بولی)

$$\wedge, \vee, \neg, \to$$

در این منطق، گزاره‌ها تنها دارای ارزش درست و غلط هستند و ارزش گزاره‌های پیچیده‌تر با استفاده از جدول ارزش مشخص می‌شود.

۲. منطق مرتبه‌ی اول (منطق محمولات) که از افزودن دو علامت

$$\forall x \exists y$$

به منطق گزاره‌ها به دست می‌آید. گفتیم که بخش مهمی از ریاضیات (به ویژه نظریه‌ی مجموعه‌ها)بر پایه‌ی این منطق بنا شده است.

پس از آن وارد بحث نظریه‌ی مجموعه‌ها شدیم. همه‌ی پدیده‌های ریاضی مانند تابع، رابطه، گروه، میدان و غیره منشأ نظریه‌ی مجموعه‌ای دارند. بنابراین لازم است که ریاضی‌دان تکلیف خود را نخست با مجموعه معلوم کند.
گفتیم که تعریف شهودی ساده‌انگارانه برای مجموعه‌ها، ما را به تناقض راسل دچار می‌کند. از این رو به رویکرد اصل‌موضوعه‌ای برای مجموعه‌ها روی آوردیم. در این رویکرد، مجموعه یک متغیرِ $x, y, z, \ldots$ است که از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها پیروی کند. اصول زدافسی را به عنوان اصول پذیرفته شده برای مجموعه ها معرفی کردیم.

یکی از این اصول، **اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی** بود. گفتیم که به محض پذیرفتن این اصل، متوجه می‌شویم که اگر نامتناهی وجود داشته باشد، نامتناهی‌ها نیز اندازه‌های متفاوتی خواهند داشت. در ادامه‌ی درس می‌خواهیم این گفته را بیشتر توضیح دهیم.

۱.۰.۱۴ کاردینالها یا اعداد اصلی

روی کلاس همه‌ی مجموعه‌ها رابطه‌ی زیر را تعریف می‌کنیم.

$$X \cong Y \iff \text{یک تابع یک به یک و پوشا از } X \text{ به } Y \text{ موجود باشد.}$$

ویژگی‌های رابطه‌ی $\cong$:

۱.

$$\forall X \quad X \cong X$$

تابع همانی از X به X یک به یک و پوشاست.

۲.

$$\forall X, Y \quad (X \cong Y \to Y \cong X)$$

اگر $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد آنگاه $f^{-1} : Y \to X$ یک به یک و پوشاست.

۳.

$$\forall X, Y, Z \quad (X \cong Y \wedge Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z)$$

فرض کنید توابع $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ یک به یک و پوشا باشند. آنگاه $gof : X \to Z$ یک به یک و پوشاست. (ثابت کنید.) پس رابطه‌ی $\cong$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. از این رو، این رابطه، کلاس همه‌ی مجموعه‌ها را افراز می‌کند:

$\dots$	$[Y]$	$[X]$	$\dots$

تعریف ۲۵۱. کلاس هر مجموعه‌ی X را در رابطه‌ی هم‌ارزی بالا با $\mathbf{card}X$ نشان می‌دهیم و هر کلاس در بالا را یک **کاردینال** می‌نامیم. پس هرگاه بگوئیم $\mathbf{card}X$ برابر است با $\mathbf{card}Y$ یعنی

$$X \cong Y$$

کلاسهای هم‌ارزی رابطه‌ی بالا به صورت زیر هستند:

۱. کلاس مجموعه‌ی تهی که آن را با ۰ نشان می‌دهیم.

۲. کلاس همه‌ی مجموعه‌های تک عضوی که آن را با ۱ نشان می‌دهیم.

۳. $\vdots$

۴. کلاس همه‌ی مجموعه‌های n عضوی که آن را با n نشان می‌دهیم.

۵. کلاس همه‌ی مجموعه‌های شمارا، مانند $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ که آن را با $\aleph_0$ نمایش می‌دهیم.

۶. اگر فرضیه‌ی پیوستار درست باشد، اولین کلاس بعدی، کلاس مجموعه‌های هم‌اندازه‌ی اعداد حقیقی است.

۷. تعداد این کلاسها نامتناهی است. اگر A در یک کلاس واقع شده باشد آنگاه $P(A)$ در کلاسی متفاوت واقع است.

۲.۰.۱۴ حساب کاردینالها

منظور از حساب کاردینالها، بررسی اعمال اصلی و ترتیب روی آنهاست. فرض کنید α و β دو کاردینال باشند و فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$. تعریف می‌کنیم

$$\alpha \leqslant \beta \iff \exists \overset{\text{یک به یک}}{\overset{\uparrow}{f}} : X \to Y$$

دقت کنید که رابطه‌ی ترتیب در بالا، خوش‌تعریف است؛ یعنی با انتخاب مجموعه‌های X, Y بستگی ندارد. در زیر این گفته را اثبات کرده‌ایم.

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(X')$ و $\beta = \mathbf{card}(Y) = \mathbf{card}(Y')$ و فرض کنید $f : X \to Y$ یک به یک است.

$$X' \cong X \to Y \cong Y'$$

بنابراین

$$X' \leq Y' \Leftrightarrow X \leq Y.$$

□

ترتیب کاردینالها

رابطه‌ی $\leq$ در بالا واقعاً یک رابطه‌ی ترتیبی است؛ یعنی ویژگی‌های زیر را داراست:

۱.

$$\forall \alpha \quad \alpha \leqslant \alpha$$

۲.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \quad (\alpha \leqslant \beta \wedge \beta \leqslant \gamma \to \alpha \leqslant \gamma)$$

برای اثبات فرض کنید

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

$$\gamma = \mathbf{card}(Z)$$

و دیاگرام زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

۳. اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \alpha$ آنگاه $\alpha = \beta$. (قضیه‌ی کانتور ـ برنشتاین)

جمع کاردینالها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ ، $\beta = \mathbf{card}(Y)$ و $X \cap Y = \emptyset$. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\alpha + \beta = \mathbf{card}(X \cup Y)$$

دقت کنید که تعریف بالا نیز به انتخاب X, Y بستگی ندارد.

۱. در جلسات گذشته ثابت کرده‌ایم که

$$\aleph_0 + n = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$[n] + [m] = n + m$$

۲. اگر $\alpha \lneqq \aleph_0$ آنگاه $\exists n \in \mathbf{N}$ به طوری که $\alpha = n$. مجموعه‌ی زیر ماکزیمم ندارد.

$$\{\alpha | \alpha \lneqq \aleph_0\}$$

اگر $\alpha < \aleph_0$ آنگاه α را متناهی و اگر $\alpha \geqslant \aleph_0$ آنگاه α را نامتناهی می‌نامیم.

ضرب کاردینالها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند به طوری که

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \times \beta = \mathbf{card}(X \times Y)$$

توجه ۲۵۲.

$$\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$$

علت:

$$X \times Y \xrightarrow{h} Y \times X$$

$$h(x,y) = (y,x)$$

مثال ۲۵۳. ثابت کنید $\alpha \times ۱ = \alpha$.

اثبات.

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\alpha \times ۱ = \mathbf{card}(X \times ۱) = \mathbf{card}(X \times \{a\})$$

کافی است نشان دهیم که

$$\underbrace{X \times \{a\}}_{\{(x,a) | x \in X\}} \cong X$$

تابع زیر ما را به هدف می‌رساند:

$$(x,a) \mapsto x$$

$\square$

لم ۲۵۴. اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\gamma \leqslant \lambda$ آنگاه

$$\alpha \times \gamma \leqslant \beta \times \lambda$$

فرض کنید

اثبات.

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

$$\gamma = \mathbf{card}(Z)$$

$$\lambda = \mathbf{card}(W)$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$Z \xrightarrow{g} W$$

آنگاه تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$h : X \times Z \to Y \times W$$

$$(x,z) \mapsto \big(f(x), g(z)\big)$$

$\square$

مثال ۲۵۵. در جلسات قبل ثابت کردیم که

$$\aleph_\circ \times ۱ = \aleph_\circ$$

$$\aleph_\circ \times n = \aleph_\circ$$

$$\aleph_\circ \times \aleph_\circ = \aleph_\circ$$

در اینجا برای مورد آخر، اثبات دیگری ارائه می‌کنیم.

اثبات. می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \cong \mathbf{N}$$

با استفاده از قضیه‌ی کانتور برنشتاین کافی است نشان دهیم

$$۱ \quad \mathbf{N} \leqslant \mathbf{N} \times \mathbf{N}$$

$$۲ \quad \mathbf{N} \times \mathbf{N} \leqslant \mathbf{N}$$

اثبات اولی.

$$\mathbf{N} \xrightarrow{f} \mathbf{N} \times \mathbf{N}$$

$$n \mapsto (n, n)$$

بررسی کنید که تابع بالا یک به یک است. اثبات دومی.

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

$$(n, m) \mapsto ۲^n \times ۳^m$$

بررسی کنید که تابع بالا یک به یک است. بنابراین

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \cong \mathbf{N}$$

یعنی

$$\aleph_\circ \times \aleph_\circ = \aleph_\circ$$

□

توان کاردینالها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند و $\alpha = \mathbf{card}(X), \beta = \mathbf{card}(Y)$. تعریف می‌کنیم

$$\alpha^{\beta} = \mathbf{card}\big(X^{Y}\big).$$

یادآوری می‌کنیم که X^Y مجموعه‌ی تمامی توابع از Y به X است.
اگر $\alpha = \mathbf{card}(X)$ آنگاه

$$۲^{\alpha} = \mathbf{card}(\{۰, ۱\}^{X})$$

در جلسات قبل ثابت کردیم که

$$\mathbf{card}(\{۰, ۱\}^{X}) = \mathbf{card}\big(P(X)\big)$$

پس

$$۲^{\alpha} = \mathbf{card}\big(P(X)\big)$$

همچنین در جلسات قبل ثابت کرده‌ایم که

$$|\mathbf{R}| = |(a, b)| = |(۰, ۱)| = ۲^{\aleph_۰} = |P(\mathbf{N})|$$

توجه ۲۵۶. در جلسات قبل قضیه‌ی کانتور را ثابت کردیم که می‌گفت $|P(X)| > |X|$ پس به بیان کاردینالی داریم:

$$۲^{\alpha} > \alpha$$

مانند اعداد طبیعی، توانرسانی کاردینالها با جمع و ضرب آنها سازگار است:

قضیه ۲۵۷.

$$\alpha^{\beta} \times \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$$

به بیان دیگر

$$X^{Y} \times X^{Z} \cong X^{Y \cup Z}$$

(با فرض اینکه $Y \cap Z = \emptyset$)

اثبات.

هدف. پیدا کردن یک تابع یک به یک و پوشا (که نامش را H گذاشته‌ایم) از $X^Y \times X^Z$ به $X^{Y \cup Z}$.
دامنه‌ی تابع H قرار است به صورت زیر باشد.

$$Dom(H) = \{(f, g) | f : Y \to X, g : Z \to X\}$$

هدف. تعریف $H(f, g)$.

قرار است $H(f,g) \in X^{Y \cup Z}$ یعنی

$$H(f,g) : Y \cup Z \to X$$

پس $H(f,g)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$H(f,g)(t) = \begin{cases} f(t) & t \in Y \\ g(t) & t \in Z \end{cases}$$

به بیان خلاصه‌تر

$$H(f,g) : Y \cup Z \to X$$

$$(f,g) \mapsto H(f,g)$$

$$H(f,g)(t) = \begin{cases} f(t) & t \in Y \\ g(t) & t \in Z \end{cases}$$

بررسی یک به یک و پوشا بودن تابع بالا به عهده‌ی شما. $\square$

تمرین ۱۳۲. • تعداد توابعِ از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ را بیابید. (به بیان دیگر حاصلِ $\aleph_0^{\aleph_0}$ را محاسبه کنید.)

- یکبار با استفاده از قوانین ضرب کاردینالها و یکبار به طور مستقیم نشان دهید که

$$\mathbf{N} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R} \qquad \mathbf{R} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$$

- نشان دهید که هر اجتماع شمارا از مجموعه‌های متناهی، شماراست.
- نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.
- نشان دهید که تعداد نقاط روی یک دایره برابر با تعداد اعداد حقیقی است.
- فرض کنید که $\{A_i\}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌ها باشد به طوری که $\bigcup A_i$ ناشماراست. نشان دهید حداقل یکی از A_i ها ناشماراست.

در درسهای گذشته، اثباتی نادقیق برای شمارا بودن مجموعه‌ی اعداد گویا آوردیم. در اینجا با استفاده از قضیه‌ی کانتور — برنشتاین، اثباتی دقیق و ساده ارائه می‌کنیم. عموماً پیدا کردن یک تابع یک به یک و پوشا برای اثبات همتوانی دو مجموعه، کار آسانی نیست. ولی بنا به قضیه‌ی کانتور برنشتاین، اگر توابعی یک به یک از هر یک به دیگری پیدا کنیم، آن دو مجموعه همتوان خواهند بود.

مثال ۲۵۸. نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.

$$Q = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbf{N}, (a,b) = ۱\}$$

پاسخ. می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\mathbf{card}(Q) = \aleph_{\circ}$$

برای این منظور کافی است نشان دهیم که

$$(1)\quad \mathbf{card}(Q) \leqslant \aleph_{\circ}$$

$$(2)\quad \aleph_{\circ} \leqslant \mathbf{card}(Q)$$

اثبات (۲). تابع همانی $id: \begin{array}{c} \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \\ x \mapsto x \end{array}$ یک تابع یک به یک است. بنابراین $\aleph_{\circ} \leqslant \mathbf{card}(Q)$.

توجه ۲۵۹. در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ شماراست.

پس برای اثباتِ $\mathbf{card}(Q) \leqslant \aleph_{\circ}$ کافی است تابعی یک به یک از $\mathbf{Q}$ به $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ بیابیم.

تمرین ۱۳۳. نشان دهید که تابع زیر از $\mathbf{Q}$ به $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ یک به یک است.

$$f(\frac{x}{y}) = (x, y)$$

که در بالا فرض کرده‌ایم که ب‌م‌مِ x, y برابر با یک باشد. دقت کنید که عبارت سمت راست، زوج مرتب متشکل از x, y است.

□

توانی که برای کاردینالها تعریف کردیم، موافق انتظار، با ضرب کاردینالها سازگار است:

لم ۲۶۰. فرض کنید α, β, γ سه کاردینال باشند آنگاه

$$\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta \times \gamma}$$

اثبات. فرض کنید

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

$$\gamma = \mathbf{card}(Z)$$

کافی است ثابت کنیم که

$$\left(X^{Y}\right)^{Z} \cong X^{Y \times Z}$$

برای این منظور کافی است یک تابع یک به یک و پوشا (مثلا به نام H)از $\left(X^{Y}\right)^{Z}$ به $X^{Y \times Z}$ بیابیم. فرض کنید $f \in \left(X^{Y}\right)^{Z}$. پس f تابعی از Z به X^{Y} است.

هدف. تعریف $H(f)$.

توجه ۲۶۱. قرار است که $H(f) \in X^{Y\times Z}$. یعنی $H(f)$ باید تابعی از $Y \times Z$ به X باشد. پس باید برای هر $(y,z) \in Y \times X$ بتوانیم $H(f)(y,z) \in X$ را تعریف کنیم.

$$f : Z \to X^Y$$

$$\forall z. \in Z \quad f(z) \in X^Y$$

$$\forall z. \in Z \quad f(z) : Y \to X$$

$$y \mapsto f(z)(y)$$

پس برای تعریفِ

$$H(f)(\underset{\uparrow}{y}^{(۲)}, \underset{\uparrow}{z}^{(۱)})$$

(۱) z را به f می‌دهیم.
(۲) y را به $f(z) : Y \to X$ می‌دهیم.
به بیان دیگر، ضابطه‌ی تابع مورد نظر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$H(f)(z,y) : Z \times Y \to X$$

$$(z,y) \mapsto f(z)(y)$$

□

مثال ۲۶۲. نشان دهید که $\mathbf{N} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$. به بیان دیگر $\aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$.

اثبات. راه حل اول. تابع زیر را از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{Z} \times [۰,۱)$ تعریف کنید.

$$x \mapsto (\lfloor x \rfloor, x - \lfloor x \rfloor)$$

به عنوان تمرین نشان دهید که تابع فوق یک به یک و پوشا است. می‌دانیم که $\mathbf{Z} \cong \mathbf{N}$ و $\mathbf{R} \cong [۰,۱)$. پس ثابت کردیم که $\mathbf{R} \cong \mathbf{N} \times \mathbf{R}$.
راه حل دوم. کافی است نشان دهیم که

۱. $۲^{\aleph_۰} \leqslant \aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰}$

۲. $\aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰} \leqslant ۲^{\aleph_۰}$

اثبات ۱.

$$۲^{\aleph_۰} = ۱ \times ۲^{\aleph_۰} \leqslant \aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰}$$

اثبات ۲.

$$\aleph_۰ \leqslant ۲^{\aleph_۰}$$

پس

$$\aleph_۰ \times ۲^{\aleph_۰} \leqslant ۲^{\aleph_۰} \times ۲^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰+\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$$

$\square$

مثال ۲۶۳. نشان دهید که $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$.

اثبات. راه حل اول.

$$۲^{\aleph_۰} \times ۲^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰+\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$$

راه حل دوم. می‌دانیم که $|\mathbf{R}|$ برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی، و تعداد زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی با تعداد زیر مجموعه‌های اعداد زوج برابر است و آن هم با تعداد زیرمجموعه‌های اعداد فرد برابر است. در زیر نشان خواهیم داد که:

زیر مجموعه‌های اعداد فرد $\times$ زیر مجموعه‌های اعداد زوج $\cong$ زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی

کافی است تابع زیر را در نظر بگیریم

$$A \mapsto \big(A \cap \mathbf{N}_E, A \cap \mathbf{N}_O\big)$$

که در آن N_E اعداد زوج و N_O اعداد فرد را نشان می‌دهند. E اعداد زوج و O اعداد فرد هستند. به طور مثال فرض کنید مجموعه‌ی

$$\{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

را داشته باشیم آنگاه

$$\{۱, ۲, ۳, ۴\} \mapsto \big(\{۱, ۳\}, \{۲, ۴\}\big)$$

$\square$

مثال ۲۶۴. تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ را بیابید.

پاسخ. کافی است $\aleph_۰^{\aleph_۰}$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$\text{(۱)} \quad \aleph_۰^{\aleph_۰} \leqslant \left(۲^{\aleph_۰}\right)^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰ \times \aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$$

$$\text{(۲)} \quad ۲^{\aleph_۰} \leqslant \aleph_۰^{\aleph_۰}$$

پس
$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$
پس تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ برابر است با $|\mathbf{R}|$. به بیان دیگر تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ برابر است با تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی $\{0, 1\}$. $\square$

مبحث کاردینالها را در همین جا ختم می‌کنیم.

فصل ۱۵

اعداد طبیعی در منطق مرتبه‌ی دوم

اعداد طبیعی برای افراد در هر سطحی از ریاضی، قابل فهمند. اما برای ریاضیدان، دانستن سرمنشأ آنها و آگاهی درباره‌ی امکان اصل‌بندی آنها ضروری است. سایر مجموعه‌های اعداد، مانند اعداد صحیح و اعداد گویا و اعداد حقیقی همه با شروع از اعداد طبیعی تعریف می‌شوند. پس استحکام دانشمان از اعداد طبیعی برای حساب لازم است. همچنین اعداد طبیعی موضوع شاخه‌ای از ریاضیات به نام «نظریه‌ی اعداد» هستند.

بیایید نخست آنچه را که تا کنون درباره‌ی اعداد طبیعی می‌دانیم مرور کنیم. مجموعه‌ی اعداد طبیعی، همانند آنچه در ابتدای درس گفتیم، از طریق اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها به صورتی که در ادامه گفته‌ایم تعریف می‌شود. یادآوری می‌کنم که **اصل وجود مجموعه‌ی استقرایی** به صورت زیر است:

$$\exists A \quad (\emptyset \in A \wedge \forall x \in A \quad x \cup \{x\} \in A)$$

اصل بالا را **اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی** نیز می‌نامند. پس بنا به این اصل حداقل یک مجموعه‌ی استقرایی موجود است. این مجموعه، بنا به اصل بالا، حداقل شامل عناصر زیر است:

$$\emptyset$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\}$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}\}$$

$$\cdots$$

تعریف ۲۶۵. منظور از یک عدد طبیعی مجموعه‌ای (عنصری) است که به همه‌ی مجموعه‌های استقرائی تعلق دارد.

لم ۲۶۶. گردایه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی، یک مجموعه است. (که آن را با $\mathbf{N}$ نشان می‌دهیم.)

اثبات. باید نشان دهیم که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با استفاده از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها قابل تعریف است. فرض کنید B یک مجموعه‌ی استقرائی باشد. چنین مجموعه‌ای بنا به اصل وجود مجموعه‌ی استقرائی وجود دارد. گردایه‌ی اعداد طبیعی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\mathbf{N} = \{x \in B | \forall A \quad (\underbrace{A \text{ استقرائی}}_{\emptyset \in A \wedge \forall t \in A \quad t \cup \{t\} \in A} \quad \to x \in A)\}$$

در تعریف بالا از اصل تصریح و منطق مرتبه‌ی اول استفاده شده است. پس آنچه در بالا تعریف شده است، یک مجموعه است. $\square$

در بالا در واقع گفته‌ایم که

$$\mathbf{N} = \bigcap_{A \text{استقرائی}} A$$

تمرین ۱۳۴. نشان دهید که $\mathbf{N}$ خودْ مجموعه‌ای استقرائی است.

بنا به تمرین بالا و آنچه پیش از آن گفتیم، $\mathbf{N}$ در واقع **کوچکترین مجموعه‌ی استقرائی** است. زیرا هم استقرائی است و هم زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌های استقرائی است. پس $\mathbf{N}$ مجموعه‌ی زیر است:

$$\mathbf{N} = \{\overset{\cdot}{\emptyset}, \overset{۱}{\emptyset \cup \{\emptyset\}}, \underbrace{\overset{۲}{\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}}}_{A}, A \cup \{A\}, \ldots\}$$

اعضای مجموعه‌ی بالا را می‌توانیم به صورت همان اعداد آشنای طبیعی نشان دهیم. اما می‌دانیم که اعداد طبیعی فقط یک مجموعه‌ی صِرف نیستند. آنها را می‌توان با هم جمع و ضرب کرد. در زیر روش تعریف اعمال اصلی را توضیح داده‌ام.

تعریف ۲۶۷. روی $\mathbf{N}$ تابع S (تابع تالی) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

$$S(x) = x \cup \{x\}$$

به بیان دیگر، تابع تالی، همان تابعی است که عمل زیر را انجام می‌دهد:

$$x \mapsto x + ۱$$

قضیه ۲۶۸ (استقراء)**.** فرض کنید $B \subseteq \mathbf{N}$ و $۰ \in B$ و برای هر $x \in B$ داشته باشیم $S(x) \in B$ آنگاه

$$B = \mathbf{N}$$

اثبات. بنا به شرایط بالا، B یک مجموعه‌ی استقرائی است. پس $\mathbf{N} = \bigcap_{A \text{استقرائی}} A \subseteq B$. از طرفی $B \subseteq \mathbf{N}$ پس $B = \mathbf{N}$. $\square$

حال با استفاده از استقراء جمع و ضرب را روی اعداد طبیعی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۶۹. ۱. (جمع اعداد طبیعی) فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. تعریف می‌کنیم

$$n + ۱ = S(n)$$

فرض کنید $n + m$ تعریف شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$n + (m + ۱) = (n + m) + ۱ = S(n + m)$$

۲. (ضرب اعداد طبیعی) فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. تعریف می‌کنیم:

$$n \times ۰ = ۰$$

فرض کنید $m \times n$ تعریف شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$n \times (m + ۱) := n \times m + n$$

۳. (ترتیب اعداد طبیعی)

$$x \leqslant y \iff \exists z \quad y = x + z$$

همان گونه که تا کنون فهمیده‌ایم ارائه‌ی اصل‌بندی برای یک ساختار ریاضی از امور مهم است. مجموعه‌ی اعداد طبیعی را می‌توان هم در منطق مرتبه‌ی اول اصل بندی کرد و هم در منطق مرتبه‌ی دوم.

منطق مرتبه‌ی اول منطق مطلوب تری است اما اصل‌بندی اعداد طبیعی در آنها مشکلاتی دارد که به آنها به طور خلاصه اشاره می‌کنم.

اول این که مجموعه‌ی همه‌ی جملات درست در مورد اعداد طبیعی، قابل تولید توسط یک الگوریتم نیست. دوم این که هر مجموعه از اصولی که برای اعداد طبیعی در نظر گرفته شود، اگر قابل تولید توسط یک الگوریتم باشد، کامل نیست. یعنی همیشه یک قضیه‌ی درست در باره‌ی اعداد طبیعی وجود دارد که از این اصول نتیجه نمی‌شود. سوم این که مجموعه‌ی اصولی که برای اعداد طبیعی در منطق مرتبه‌ی اول نوشته می‌شود، تنها خودِ اعداد طبیعی را به دست نمی‌دهند. ساختارهائی پیدا می‌شوند که در آنها اعدادی وجود دارند که از همه‌ی $۱ + ۱ + \ldots + ۱$ های متناهی بزرگتر هستند و در اصول اعداد طبیعی صدق می‌کنند.

درباره‌ی اعداد طبیعی در منطق مرتبه‌ی اول زیاد صحبت کرده‌ام. در زیر به اعداد طبیعی در منطق مرتبه‌ی دوم پرداخته‌ام. هر چند بسیاری از ارزشهای مرتبه‌ی اولی در این میان از بین می‌روند، مهمترین سودمندی این اصول این است که تنها «یک مدل واحد» برای اعداد طبیعی ارائه می‌کنند.

۳.۰.۱۵ اصول پئانو

تعریف ۲۷۰. سه‌تایی (X, a, S_X) را **یک مدل برای حساب پئانو** می‌نامیم هرگاه X یک مجموعه باشد، $S_X : X \to X$ یک تابع باشد و a یک عنصر مشخص در X باشد و (X, a, S_X) در اصول زیر صدق کند.

۱. $\forall x \in X \quad S_X(x) \neq a$

۲. $\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad S_X(x) \neq S_X(y)$

۳. $\forall A \subseteq X \quad (a \in A \wedge \forall x \in A \quad S_X(x) \in A \to A = X)$ (استقراء)

بنا به آنچه در قسمت قبل گفتیم، سه‌تائیِ $(\mathbf{N}, ۰, S)$ مدلی برای حساب پئانو است زیرا در تمام اصول بالا صدق می‌کند. آیا حساب پئانو، دقیقاً مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به دست می‌دهد؟ آیا حساب پئانو مدل دیگری غیر از اعداد طبیعی دارد؟

قضیه ۲۷۱. (با در نظر گرفتن ایزومرفیسم) $(\mathbf{N}, ۰, S)$ تنها مدل حساب پئانو است.

اثبات. می‌دانیم که $(\mathbf{N}, ۰, S)$ یک مدل برای حساب پئانو است. فرض کنید (X, a, S_X) مدل دیگری باشد. تابع زیر را با استفاده از استقراء از $\mathbf{N}$ به X تعریف می‌کنیم:

$$f : \mathbf{N} \to X$$

$$f(۰) = a$$

فرض کنید $f(n)$ تعریف شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f(n + ۱) = S_X\Big(f(n)\Big)$$

ادعا: تابع f پوشاست.

اثبات ادعا: فرض کنید B بُرد تابعِ f باشد. پس $B \subseteq X$. داریم:

۱. $f(۰) = a \in B$

۲. اگر $t = f(x) \in B$ آنگاه

$$S_X(t) = f(x + ۱) \in B$$

پس $B \subseteq X$ و B در شرط اصل سوم پئانو صدق می‌کند. بنابراین

$$B = X$$

ادعای دوم. f یک به یک است.

اثبات ادعا: فرض کنید $n, m \in \mathbf{N}$ و $n \lneqq m$ آنگاه $n = S^n(۰), m = S^m(۰)$ و

$$f(m) = S_X^m(a) \text{ و } f(n) = S_X^n(a)$$

تمرین ۱۳۵. نشان دهید که

$$S_X^m(a) \neq S_X^n(a)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & S(\cdot) & S^{۲}(\cdot) & \ldots \\ \mathbf{N} & \cdot & ۱ & ۲ & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ X & a & S_X(a) & S_X^{۲}(a) & \ldots \end{array}$$

پس تابع بالا هم یک به یک است و هم پوشا. بنابراین تنها یک مدل برای حساب پئانو وجود دارد و آن $(\mathbf{N}, \cdot, S)$ است. (یعنی هر مدل دیگری که وجود داشته باشد، یکی کُپی از همین مدل است) □

شاید اتفاق بالا خوشحالتان کرده باشد: اعداد طبیعی دارای اصلبندی است. اما اصول پئانو در زبان مرتبه‌ی اول نوشته نشده‌اند. در اصل سوم روی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی سور زده شده است که این کار در منطق مرتبه‌ی اول مجاز نیست. (بنا به ویژگیهای مهم منطق مرتبه‌ی اول) مهم است که بدانیم که آیا می‌شود مجموعه‌ای از اصول برای اعداد طبیعی در منطق مرتبه‌ی اول نوشت، به طوری که هر قضیه‌ای درباره‌ی اعداد طبیعی در منطق مرتبه‌ی اول از آنها نتیجه شود؟ از پسِ پاسخ این سوال، «گودل» [۱] منطقدانِ آلمانی برآمده است. بر خلاف آنچه انتظار طبیعی ریاضیدانان است، گودل ثابت کرده است که هر مجموعه‌ی (شمارا) از اصول که برای اعداد طبیعی نوشته شود، از پس اثبات همه‌ی حقایق اعداد طبیعی برنمی‌آید؛ یعنی همواره قضیه‌ای درباره‌ی اعداد طبیعی پیدا می‌شود که با این اصول، نه ثابت می‌شود و نه رَد. این قضیه‌ی مهم، **قضیه‌ی ناتمامیت گودل** نام دارد.
قضیه‌ی ناتمامیت گودل شاید برایتان ناراحت‌کننده باشد:نمی‌شود ریاضیات را به طور کامل اصلبندی کرد و مطمئن بود که همه‌چیز از اصول خاصی نتیجه می‌شوند. در واقع حتی معلوم نیست که ریاضیات (و از این رو علم) حاوی تناقض باشد یا نه، و خالی بودن ریاضیات از تناقضات نیز قابل اثبات نیست. در عین حال، اگر مجموعه‌ای از اصول برای ریاضیات (مثلا اصول زرملو فرانکل) در نظر بگیریم، آنگاه هر چه که با این اصول اثبات می‌کنیم درست است. پس اثباتهائی که داریم درستند. این نتیجه‌ای از **قضیه‌ی درستی و تمامیت گودل** است.

[۱] Gödel

فصل ۱۶

نتیجه‌گیری‌ها و کلی‌گوئی‌ها

سالها باید که تا یک سنگ اصلی ز آفتاب
لعل گردد در بدخشان یا عقیق اندر یمن
ماهها باید که تا یک پنبه دانه ز آب و خاک
شاهدی را حلّه گردد یا شهیدی را کفن
روزها باید که تا یک مشت پشم از پشت میش
زاهدی را خرقه گردد یا حماری را رسن
عمرها باید که تا یک کودکی از روی طبع
عالمی گردد نکو یا شاعری شیرین سخن
قرنها باید که تا از پشت آدم نطفه‌ای
بوالوفای کُرد گردد یا شود ویس قرن
سنائی

۱.۱۶ نتیجه‌گیری‌ها

امیدوارم که خواننده‌ای که تا به اینجای این کتاب را مطالعه کرده باشد، به درکی از «مبانی ریاضی» رسیده باشد. در هرَمِ علوم، مبانی ریاضیات، در پائینترین قسمت واقع است. منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها علومیند که مبانی ریاضیات محض بر پایه‌ی آنها بنا شده است. سایر شاخه‌های ریاضی محض، مانندِ جبر، هندسه، آنالیز، توپولوژی و غیره در طبقه‌ای بالاتر در این هرم واقعند.

عموماً آنچه در ریاضیات محض بررسی می‌شود مسائل خام ریاضی هستند که شاید حل آنها مستقیماً کاربردی در زندگی روزمره نداشته باشد، بلکه پاسخ آنها باید در هرم علوم بالا برود تا به کاربرد برسد. ریاضی محض از این حیث، به فلسفه می‌ماند که در آن دغدغه‌ی یافتن حقیقت بر همه چیز مقدم است. البته، با این تفاوت که همواره این امید وجود دارد که آنچه که امروز در ریاضی محض بدان پرداخته می‌شود، در آینده راهگشای صنعت یا موجب

ایجاد صنعتی جدید شود. [1]

در پله‌ی بالاتر این هرم به ریاضیات کاربردی می‌رسیم که در آن، از قضایائی که در پائین هرم، در ریاضیات محض ثابت می‌شود، استفاده‌های کاربردی می‌کنیم و قضایایی (شاید با عمق کمتر ولی با کاربرد بیشتر) بدانها می‌افزائیم. در ریاضی کاربردی، مسئله‌ی پیش روی ما، عموماً مسئله‌ای است که به جهانی که در آن زندگی می‌کنیم می‌پردازد و حل آن قرار است به درد طبقه‌های بالاتر هرم بخورد. عموماً این مسائل خودشان نیز از طبقات بالاتر هرم می‌آیند. در این طبقات، انواع مهندسی‌ها واقع شده‌اند. آنچه برای مهندس بیش از همه‌چیز اهمیت دارد، پاسخ دادن به سوالی است که پاسخ آن موجب چرخش چرخ صنعت شود. شاید از این حیث، مهندس کمتر وقتش را صرف دانستن کُنهِ فلسفی سوالی بکند. مسئله برای او زمانی حل است که مشکل صنعت را حل کند.

به عنوان تمرین، هرم علوم را برای خود رسم کنید و بررسی کنید که علومی مانند پزشکی، جامعه‌شناسی، جغرافیا و فیزیک در کجای این هرم می‌توانند واقع شوند. دقت کنید که برخی از این علوم می‌توانند به چند طبقه‌ی مختلف از هرم تعلق داشته باشند.

۲.۱۶ کلی‌گوئی‌ها

یکی از زیبائی‌های متون ریاضی این است که در آن مطالب در بسته‌های مختلف بیان می‌شوند. ابتدای هر متن ریاضی باید یک بسته‌ی نمادگذاری وجود داشته باشد تا خواننده را با نمادهای به کار رفته در آن متن آشنا کند.

در ریاضی هیچ مطلب جدیدی به صورت غیر منتظره وارد بحث نمی‌شود. هر چیز جدیدی نخست در یک بسته‌ی تعریف، تعریف می‌شود و از آن پس آزادانه وارد بحث می‌شود.

اما مهمترین بسته‌ها، بسته‌ی قضیه هستند. در آنجا در یک جمله‌ی خلاصه و دقیق حکمی بیان می‌شود که قرار است در بسته‌ی اثبات به اثبات آن پرداخته شود.

گاهی اثبات یک قضیه خیلی طولانی است و در آن نیازمند به بسته‌های مفهومی دیگری به نام لم است. لمها قضایای کوچکی هستند که برای اثبات قضایای اصلی بدانها نیاز است؛ هر چند بسیار پیش آمده است که لمی از یک مقاله‌ی علمی از قضیه‌ی اصلی ثابت شده در آن مقاله معروفتر شده است.

آنچه در کتابهای دانشگاهی نوشته می‌شود، حاوی ریاضیات نیم تا یک قرن است. هر چند در برخی کتابهای دانشگاهی به قضایای جدید ریاضی هم اشاره می‌شود، ولی جدیدترین قضایای ریاضی در مقاله‌های روز ریاضی قرار دارند. معمولاًروش کار این گونه است که دانشجو تحت نظر یک استاد، سابقه‌ی قدیم و جدید یک موضوع را در کتابها و مقالات مطالعه می‌کند و پس از باخبر شدن از آخرین پیشرفتها، به دنبال حل سوالی در همان راستا می‌افتد. در صورتی که در حل آن سوال موفق باشد، حاصل یافته‌های خود را، با رعایت دقیق زبان علمی، در یک مقاله می‌نویسد و از یک مجله‌ی معتبر درخواست چاپ آن را می‌کند. در صورتی که مقاله، توسط آن مجله تأئید شود، چاپ می‌شود. هر چه مسأله‌ی پرداخته شده در مقاله مهم‌تر و سخت‌تر باشد، در مجله‌ی معتبرتری می‌توان آن را به چاپ رساند.

[1] پیش می‌آید که دانشجویان ریاضی محض در دوره‌های مختلف تحصیل مأیوس و دلسرد می‌شوند و کار خود را بی‌ارزش برای اجتماع می‌پندارند. یکی از دوستانم با ریاضیدان بزرگی درددل کرده بود و از او شنیده بود که :«کار ما در واقع تولید و تزریق اندیشه به درون جامعه است».

متأسفانه باور بسیاری عوام بر این است که هر کسی که کمی ریاضی بداند می‌تواند وارد این رشته شود و ناگهان از تمام بزرگان ریاضی پیش بیفتد. بارها شده است که دانشجویانی، حتی از رشته‌هائی غیر از ریاضی، به اینجانب مراجعه کرده‌اند و ادعای حل مسائل مهم ریاضی، در سطح قضیه‌ی فرما داشته‌اند؛ بی‌آنکه از مسیر طی شده در طی سالها برای حل آن خبری داشته باشند و یا حتی سطح ریاضی خود را دقیق بدانند! در ریاضی محض، داشتن هوش کافی تنها یک شرط لازم و بسیار ناکافی است. فقط مسائل آسان را می‌توان یک روزه و دوروزه حل کرد و تحقیق روی مسائل سخت، نیاز به سالها فکر و تلاش دارد. ریاضیدان خوب کسی است که روش تحقیق بداند و بتواند به طور مسمتر، سالها روی یک مسئله فکر کند. صدالبته تربیت چنین شخصیتی، از طریق کنکورهای تستی و سرعتی و کم‌عمق، محال است. حتی سیستمی که به المپیادهای دانشجوئی اهمیت فراوان می‌دهد، از تربیت ریاضیدان واقعی بازمی‌ماند؛ زیرا همان طور که گفتم ریاضیات تنها توانائی حل سریع یک مسأله نیست. [۲]

از نظر اینجانب مهمترین کاری که یک دانشجوی کارشناسی می‌تواند انجام دهد این است که در طول چهارسال دوره‌ی کارشناسی، نقاط قوت و ضعف خود را به خوبی بشناسد و ارتباطات سازنده با اساتید و هم قطاران پیدا کند. در صورتی که خود را برای کار در خارج از دانشگاه می‌داند، به هیچ روی به تحصیلات تکمیلی روی نیاورد ولی در صورتی که دقیقا موضوع مورد علاقه‌ی خود، و استاد مورد علاقه‌ی خود را پیدا کرده است، به ادامه‌ی تحصیل بپردازد. در واقع، از پس از دوره‌ی کارشناسی، داشتن دغدغه‌ی علمی مهم است. قبول شدن در کنکور کار سختی نیست، ولی کسانی که بی‌انگیزه‌ی کافی وارد تحصیلات تکمیلی شوند، علاوه بر محروم کردن خود از کسب درآمد، نخواهند توانست تولید علمی قابل دفاعی داشته باشند.

[۲] پس اگر هیچ مدال المپیادی کسب نکرده‌اید یا رتبه‌ی کنکور تک‌رقمی ندارید، اصلاً ناراحت نباشید. در راه ریاضیدان خوب شدن، آنها فقط بیراهه هستند.

فصل ۱۷

امتحانها

توجه. پاسخ‌ها و استدلالها را به صورت انشائی و دقیق بنویسید. از نوشتن فرمولها پشت سر هم و بدون هیچ توضیحی خودداری کنید. مدت آزمون ۱۵۰ دقیقه است.

سوال ۱۵. صورت کاملاً دقیقِ قضایا یا اصول زیر را بنویسید.

۱. لمِ زُرن

۲. اصل انتخاب

۳. اصل انتظام

سوال ۱۶. نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد حقیقی ناشماراست. (برای این کار کافی است نشان دهید که بازه‌ی $(\circ, 1)$ ناشماراست.)

سوال ۱۷.

۱. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. نشان دهید که f یک به یک و پوشاست اگروتنهااگر تابعِ $g : Y \to X$ موجود باشد به طوری که $f \circ g = id_Y$ و $g \circ f = id_X$. توجه کنید که منظور از id_X تابع همانی روی مجموعه‌ی X است و منظور از id_Y تابع همانی روی مجموعه‌ی Y است. (برای اطلاع عمومی: در اثبات بالا نیازی به اصل انتخاب نداریم.)

سوال ۱۸. فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد و $x, y \in X$. نشان دهید که $[x]_R = [y]_R$ اگروتنهااگر xRy.

سوال ۱۹. جمله‌های زیر را فرمولبندیِ ریاضی کنید. با $A(x, y)$ عبارتِ «x عموی y است» را نشان دهید و با $D(x, y)$ عبارتِ «x دائیِ y است» را نشان دهید و با $R(x, y)$ عبارتِ «x و y همدیگر را می‌شناسند» را نشان دهید.

۱. هر کس که عموئی داشته باشد، دائیِ همه است.

۲. اگر همه عمو داشته باشند، یکی هست که دائیِ همه است.

۳. عموی هر کس دائی‌های او را می‌شناسد.

۱.۱۷ امتحان پایانترم

امتحان پایانترم درس مبانی ریاضی

نیمسال دوم ۹۷-۹۶

مدرس: محسن خانی

پاسخ‌های سوالات و استدلالها را به صورت انشائی و دقیق بنویسید. از نوشتن فرمولها پشت سر هم و بدون هیچ توضیحی خودداری کنید. مدت آزمون ۱۵۰ دقیقه است. انتخاب تعداد سوالات به اختیار شماست، ولی امتحان بیش از ۱۳ نمره نخواهد داشت.

سوالهای اصلی

سوال ۲۰ (۲ نمره). دربارهٔ مفاهیم زیر توضیحی (دقیق و کوتاه) دهید، به طوری که معلوم شود که آنها را به خوبی متوجه شده‌اید. نیازی نیست که چیزی را اثبات کنید.

۱. اصل خوش‌ترتیبی

۲. ارتباط میان افرازهای یک مجموعه و روابط هم‌ارزی روی آن.

۳. قضیهٔ کانتور ـ برنشتاین

سوال ۲۱ (۲ نمره). فرض کنید A مجموعه‌ای نامتناهی باشد. نشان دهید که A زیرمجموعه‌ای سره مانند B دارد به طوری که $A \cong B$.

سوال ۲۲ (۲ نمره).

۱. فرض کنید که B مجموعه‌ای نامتناهی باشد و A مجموعه‌ای شمارا. نشان دهید که $A \cup B \cong B$. (راهنمائی: هر مجموعهٔ نامتناهی شامل مجموعه‌ای شماراست).

۲. (در صورت نیاز) با استفاده از مورد قبل، تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهیِ اعداد طبیعی را تعیین کنید.

سوال ۲۳ (۲ نمره). فرض کنید که $f: X \to Y$ یک تابع دلخواه باشد. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را توجیه کنید:

- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
- $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

سوال ۲۴ (۲ نمره). برای یک مجموعهٔ دلخواه X نشان دهید که $|P(X)| \gneqq |X|$ (قضیهٔ کانتور).

سوال ۲۵ (۱ نمره). فرض کنید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد. نشان دهید که اگر $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ آنگاه $[x]_R = [y]_R$.

سوال ۲۶ (۲ نمره). نشان دهید مجموعهٔ اعداد گویا شماراست.

سوالهای کُمَکی

سوال ۲۷ (۱ نمره). تعدادِ توابعِ از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ را بیابید.

سوال ۲۸ (۱ نمره). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. تابع $f : P(X) \times P(X) \to P(X)$ را با ضابطه‌ی $f(A, B) = A \cup B$ در نظر بگیرید. درباره‌ی یک‌به‌یک بودن این تابع و درباره‌ی پوشا بودن آن بحث کنید.

سوال ۲۹ (۱ نمره). فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. نشان دهید که f یک‌به یک است اگروتنهااگر برای هر $A, B \subseteq X$ داشته باشیم $f(A - B) = f(A) - f(B)$.

سوال ۳۰ (۲ نمره). عددِ $a \in \mathbb{R}$ را *جبری روی اعداد گویا* می‌نامیم هرگاه یک چندجمله‌ای $f(x)$ با ضرایب در اعداد گویا موجود باشد به طوری که $f(a) = ۰$. نشان دهید که تعداد اعداد حقیقیِ **غیرجبری** ناشماراست.

سوال ۳۱ (۲ نمره). نشان دهید که تعداد بازه‌های دو به دو مجزا در اعداد حقیقی شماراست.

سوال ۳۲ (۳ نمره). فرض کنید X, Y دو مجموعه باشند. با استفاده از لمِ زُرن نشان دهید که یا $X \leq Y$ و یا $Y \leq X$.

سوال ۳۳ (۱ نمره). فرض کنید که $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد به طوری که هر A_i شماراست.

- نشان دهید که $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ شماراست.
- نتیجه بگیرید که اگر $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد به طوری که $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ ناشمارا باشد، آنگاه حداقل یکی از B_i ها ناشماراست.

سوال ۳۴ (۰٫۲۵ نمره). چه انتقادی از من دارید؟ چه پیشنهادی برای بهبود تدریسِ من دارید؟ چه نقطه‌ی قوّتی دیده‌اید؟

سوال ۳۵ (۰٫۲۵ نمره). جالبترین چیزی که از درس مبانی ریاضی آموخته‌اید، به نظر خودتان، چه بوده است؟

چند تمرین اضافه

تمرین ۱۳۶. نشان دهید که تعداد نقاط روی یک دایره برابر با تعداد اعداد حقیقی است.

تمرین ۱۳۷. نشان دهید که مکمل یک زیرمجموعه‌ی شمارا از اعداد حقیقی، هم‌اندازه‌ی اعداد حقیقی است.

تمرین ۱۳۸. نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد طبیعی را می‌توان به صورت اجتماعی شمارا از زیرمجموعه‌های مجزای هم‌اندازه‌ی اعداد طبیعی نوشت.

امتحان اول

توجه. غیر از سوال اول، پاسخ‌های سوالات و استدلالها را به صورت انشائی و دقیق بنویسید. از نوشتن فرمولها پشت سر هم و بدون هیچ توضیحی خودداری کنید.

منطق و بیان

سوال ۳۶. فرض کنید که عبارت $A(x,y)$ به معنی این باشد که «x عموی y است» و $D(x,y)$ به این معنی باشد که «x دائی y است». جملات زیر را در منطق مرتبه‌ی اول فرمولبندی کنید:

۱. عموی هر کس، دائی‌های او را می‌شناسد.

۲. هر کس عموئی دارد که دائی‌های او را می‌شناسد.

مجموعه‌ها

سوال ۳۷. درباره‌ی پارادوکس راسل، توضیح کوتاهی دهید که معلوم شود آن را فهمیده‌اید.

سوال ۳۸. نشان دهید که $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ اگروتنهااگر $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$.

روابط و توابع

سوال ۳۹. فرض کنید X یک مجموعه باشد. مجموعه‌های A,B را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$A=$ مجموعه‌ی همه‌ی روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X

$B=$ مجموعه‌ی همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی X

یک تابعِ یک به یک و پوشا از A به B معرفی کنید و پوشا بودن آن را ثابت کنید.

سوال ۴۰. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد. ثابت کنید که f پوشاست اگروتنهااگر تابع $g:Y\to X$ موجود باشد به طوری که $f\circ g=id_Y$. در کدام سمت اثبات به اصل انتخاب نیاز دارید؟

همتوانی و کاردینالها

سوال ۴۱. فرض کنید X, Y, Z سه مجموعه باشند. همتوانی زیر را ثابت کنید:

$$(X^Y)^Z \cong X^{Y\times Z}$$

سوال ۴۲. فرض کنید X یک مجموعه باشد. ثابت کنید که

$$P(X) \cong \{۰, ۱\}^X$$

سوال ۴۳. نشان دهید که

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

امتحان پایان‌ترم درس مبانی ریاضی، تیرماه ۹۸

دانشگاه صنعتی اصفهان

محسن خانی

وقت: ۳ ساعت.

توجه ۲۷۲.

- عدد داخل پرانتز، شماره‌ی جلسه را نشان می‌دهد.
- با هر مصداقی از تقلب، به شدیدترین صورت ممکن بر طبق قوانین برخورد خواهد شد.
- روشن بودن موبایل در طی جلسه‌ی امتحان تقلب محسوب می‌شود.
- به پاسخهای نامفهوم و حفظی نمره‌ای تعلق نخواهد گرفت.

سوال ۴۴ (۲۷)**.** مفاهیم زیر را به صورت دقیق تعریف کنید. ۲ نمره

- عنصر ماکزیمال
- لم زرن
- مجموعه شمارا
- اصل انتخاب

سوال ۴۵ (۲۶)**.** نشان دهید که اصل انتخاب از لم زرن نتیجه می‌شود. ۲ نمره

سوال ۴۶ (۲۵)**.**

- صورت دقیق قضیه‌ی شرودر ـ برنشتاین را بیان کنید.
- با استفاده از قضیه‌ی شرودر ـ برنشتاین (و نه با روش دیگری) نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.

یک‌ونیم‌نمره

سوال ۴۷ (۲۴)**.** مفهوم کاردینال (عدد اصلی) را باختصار، ولی دقیق، توضیح دهید. ۱ نمره

سوال ۴۸ (۲۴)**.** فرض کنید X, Y, Z مجموعه باشند. نخست X^Y را تعریف کنید و سپس یک تابع یک به یک و پوشا میان $X^{Y\times Z}$ و $(X^Y)^Z$ معرفی کنید. یک‌ونیم‌نمره

سوال ۴۹ (۲۳)**.** با استفاده از روش قطری کانتور، نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد حقیقی شمارش‌پذیر نیست. ۱ نمره

سوال ۵۰. نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، یک مجموعه‌ی شماراست. ۱ نمره

سوال ۵۱. فرض کنید که $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک خانواده از مجموعه‌های شمارا باشد. نشان دهید که $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ شماراست. (یعنی نشان دهید که اجتماع شمارا تا مجموعه‌ی شمارا، شماراست). ۱ نمره

سوال ۵۲ (۱۹). فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X, B \subseteq Y$.

- مجموعه‌های $f^{-1}(B), f(A)$ را تعریف کنید.
- نشان دهید که اگر تابع $f : X \to Y$ یک به یک باشد، آنگاه برای هر دومجموعه‌ی $A, B \subseteq X$ داریم $f(A - B) = f(A) - f(B)$. ۱ نمره

سوال ۵۳ (۱۶). فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. نشان دهید که

- اگر $[x]_R = [y]_R$ آنگاه xRy.
- نشان دهید که اگر xRy آنگاه $[x]_R = [y]_R$. ۱ نمره

سوال ۵۴ (۵). در منطق مرتبه‌ی اول و با فرض این که $R(x, y)$ یعنی x و y با هم دوستند و $D(x, y)$ یعنی x, y با هم دشمن هستند، جملات زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

۱. یک نفر هست که اگر او یک دوست داشته باشد، همه دارای دوست هستند.

۲. اگر یک نفر دارای دوست باشد، همه دارای دوست هستند.

۳. دشمنِ دشمنِ هر کس دوست اوست.

۴. هر فردی که دوستی داشته باشد، دشمن هم دارد.

۵. اگر همه‌ی افراد دارای دوست باشند، همه‌ی افراد دارای دشمن هستند. ۲ نمره

سوال ۵۵. یک تابع یک به یک و پوشا میان $P(X)$ و 2^X تعریف کنید.

نیم‌نمره

سوال ۵۶ (ارفاقی).

- چه پیشنهادی برای بهبود کیفیت کلاس اینجانب دارید؟
- با توجه به تلاشتان، رعایت شئون دانشجوئی و علاقه‌تان به درس، خود را لایق چه نمره‌ای می‌دانید؟ نیم‌نمره

توجه: کسب ده نمره از این امتحان، لزوماً موجب پاس شدن درس نخواهد شد. در این برگه، مجموع نمرات ۱۶ است ولی در پایان (بنا به صلاحدید مدرس بر اساس نمرات میانترم) نمره‌ی این برگه از عددی کمتر (عددی بین ۱۲ و ۱۶) محاسبه خواهد شد.