۱ جلسه‌ی چهاردهم، دوشنبه

۱.۱ رابطه‌ی هم‌ارزی

به رابطه‌ای که ویژگی‌های **انعکاسی، تقارنی و تعدی** داشته باشد، یک **رابطه‌ی هم‌ارزی** گفته می‌شود. فرض کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. فرض کنید $x. \in X$ عنصری دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\text{کلاس هم‌ارزی عنصر } x. \text{ تحت رابطه‌ی } R = [x.]_R = \{y \in X | yRx\} = \{y \in X | xRy\}$$

فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد. خانواده‌ی زیر از مجموعه‌ها را در نظر بگیرید:

$$\{[x]_R | x \in X\}$$

قضیه ۱. فرض کنید $x. \not R y.$ آنگاه

$$[x.] \cap [y.] = \emptyset$$

اثبات. کافی است بنا به تاتولوژی

$$\neg q \to \neg p \iff p \to q$$

ثابت کنیم که اگر $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$ آنگاه $x. R y.$. فرض کنید $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$. فرض کنید $z. \in [x.] \cap [y.]$. از آنجا که $z. \in [x.]$ و $[x.] = \{y | yRx.\}$ نتیجه می‌گیریم که

$$z. R x. \ (۱)$$

و به طور مشابه، از اینکه $z. \in [y.]$ نتیجه می‌گیریم که

$$z. R y. \ (۲)$$

از آنجا که R تقارنی است از (۱) نتیجه می‌شود که

$$x. R z. \ (۳)$$

بنا به متعدی بودن R از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که

$$x. R y.$$

بیایید همین اثبات را بار دیگر به صورت استنتاجی بنویسیم:

$$(۱) \quad [x.] \cap [y.] \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \quad z \in [x.] \cap [y.]$$

$$z. \in [x.] \cap [y.] \quad \text{فرض‌می‌کنیم}$$

۲ $z. \in [x.] \cap [y.] \Rightarrow (z. \in [x.]) \wedge (z. \in [y.])$

۳ $z. \in [x.] \Rightarrow z.Rx.$

۴ $z. \in [y.] \Rightarrow z.Ry.$

۵ $z.Rx. \overset{\text{تقارنی}}{\Rightarrow} x.Rz.$

۶ $(x.Rz.) \wedge (z.Ry.) \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} x.Ry.$

۷ $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset \Rightarrow x.Ry.$ بنا به ۱ تا ۶

□

قضیه ۲. اگر

$$[x.] \cap [y.] = \emptyset$$

آنگاه

$$x.\not R y.$$

اثبات. ثابت می‌کنیم که اگر $x.Ry.$ آنگاه

$$[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$$

اگر $x.Ry.$ آنگاه بنا به تعریفِ $[y.]$ داریم

$$x. \in [y.] \text{ ۱}$$

همچنین از از آنجا که R انعکاسی است داریم

$$x.Rx.$$

پس

$$x. \in [x.] \text{ ۲}$$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که

$$x. \in [x.] \cap [y.]$$

بنابراین

$$[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$$

□

نتیجه ۳.

$$x.\not R y. \iff [x.] \cap [y.] = \emptyset$$

$$x.Ry. \iff [x.] \cap [y.] \neq \emptyset$$

قضیه ۴. اگر $[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$ آنگاه

$$[x.] = [y.]$$

اثبات. فرض کنید که $[x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$. می‌خواهیم ثابت کنیم که در این صورت، $[x_0] \subseteq [y_0]$ و $[y_0] \subseteq [x_0]$.
فرض کنید که $z \in [x_0]$. پس

$$zRx_0. \quad (۱).$$

از آنجا که $[x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$ بنا به قضیه‌ی قبل داریم

$$x_0Ry_0. \quad (۲).$$

بنا به (۱)و(۲) و تعدی، نتیجه می‌گیریم که

$$zRy_0..$$

پس $z \in [y_0]$. از آنجا که z به صورت دلخواه انتخاب شده است، نتیجه می‌گیریم که

$$[x_0] \subseteq [y_0].$$

به طور مشابه شما ثابت کنید که $[y_0] \subseteq [x_0]$. □

فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. تعریف می‌کنیم:

$$X/R = \{[x] | x \in X\}.$$

توجه کنید که X/R در تعریف بالا یک خانواده از مجموعه‌هاست؛ زیرا برخی از اعضای آن می‌توانند تکراری باشند. همان طور که دیدیم اگر xRy آنگاه $[x] = [y]$. با این حال، این خانواده، در واقع یک مجموعه هم هست زیرا می‌توان تکرارها را در آن نادیده گرفت. **در ادامه‌ی درس X/R را یک مجموعه در نظر گرفته‌ایم.**

قضیه ۵.

$$\bigcup X/R = X$$

توجه ۶. یادآوری می‌کنیم که اگر A یک مجموعه باشد آنگاه

$$\bigcup A = \{x | \exists y \in A \quad x \in y\}$$

همچنین اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists i \in I \quad x \in A_i\}$$

در قضیه‌ی بالا از نمادگذاری اولی استفاده کرده‌ایم.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که

$$X \subseteq \bigcup X/R.$$

فرض کنید که $x_0 \in X$. از آنجا که رابطه‌ی R انعکاسی است داریم x_0Rx_0؛ به بیان دیگر

$$x_0 \in [x_0].$$

از آنجا که $[x_\circ] \in X/R$ و $x_\circ \in [x_\circ]$ بنا به توجه بالا نتیجه می‌شود که $x_\circ \in \bigcup X/R$.
حال ثابت می‌کنیم که

$$\bigcup X/R \subseteq X$$

اگر $x_\circ \in \bigcup X/R$ آنگاه $y \in X$ چنان موجود است که $x_\circ \in [y] = \{x \in X | xRy\} \subseteq X$ پس معلوم است که $x_\circ \in X$. $\square$

توجه کنید که

- X/R مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X است.
- هیچ دو عضو از X/R با هم اشتراک ندارند.
- $\bigcup X/R = X$.

به بیان دیگر، X/R یک افراز برای مجموعه‌ی X است. پس از هر رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی یک مجموعه‌ی X به یک افراز برای آن دست می‌یابیم. در درسهای آینده (پس از تعریف دقیق افراز) خواهیم دید که در واقع از هر افراز برای یک مجموعه‌ی X به یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی این مجموعه می‌رسیم به طوری که X/R همان افراز را به دست بدهد. یعنی دو مفهومِ **افراز و رابطه‌ی هم‌ارزی با هم هم‌ارزند.**

$$\text{افراز} \Leftrightarrow \text{رابطه‌ی هم‌ارزی}$$

به بیان دیگر، افرازهای یک مجموعه‌ی X در تناظر یک به یک با روابط هم‌ارزی روی آن هستند؛ یعنی، فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی X باشد و B مجموعه‌ی همه‌ی روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. تابعِ $f : B \to A$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(R) = X/R$$

تابع بالا، یک به یک و پوشاست. (فعلاً نگران سختی این گفته نباشید. مفاهیم تابع، یک‌به‌یک و پوشا را در درسهای آینده خواهیم دید.)

مثال ۷. روی مجموعه‌ی اعدادِ صحیح، $\mathbb{Z}$، رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv_۳ y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = ۳k$$

نشان دهید که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و X/R را مشخص کنید.

پاسخ. نخست ثابت می‌کنیم که R انعکاسی است. برای هر $x \in \mathbb{Z}$ می‌دانیم که $x \equiv_۳ x$ پس روشن است که رابطه‌ی R انعکاسی است. حال ثابت می‌کنیم که R تقارنی است. اگر $x \equiv_۳ y$ آنگاه $y - x = ۳k$ برای یک عددِ $k \in \mathbb{Z}$ و از این رو $x - y = -۳k = ۳(-k)$ یعنی عددِ $k' \in \mathbb{Z}$ موجود است که $x - y = ۳k'$ پس $y \equiv_۳ x$. حال ثابت می‌کنیم که رابطه‌ی R متعدی است. فرض کنید xRy, yRz پس اعداد صحیحِ k, k' چنان موجودند که

$$y - x = ۳k \quad z - y = ۳k'$$

پس

$$z - x = ۳(k + k')$$

یعنی

$$xRz.$$

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. حال ادعا می‌کنیم که این رابطه، تنها دارای سه کلاس هم‌ارزی است؛ به بیان دیگر ادعا می‌کنیم که

$$X/R = \{[۰], [۱], [۲]\}$$

فرض کنید که x یک عدد صحیح دلخواه باشد. می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی x بر ۳ یکی از ۰ و۱ و۲ است. پس $x \in [۰] \cup [۱] \cup [۳]$. به بیان دیگر یا $[x] = [۰]$ یا $[x] = [۱]$ یا $[x] = [۲]$. پس

$$X/R \subseteq \{[۰], [۱], [۲]\}.$$

همچنین واضح است که

$$\{[۰], [۱], [۲]\} \subseteq X/R$$

پس

$$X/R = \{[۰], [۱], [۲]\}.$$

توجه کنید که از آنجا که هیچ دو عدد از میان ۰ و۱ و۲ با هم به پیمانه‌ی ۳ همنهشت نیستند، اعضایِ

$$[۰], [۱], [۲]$$

هر سه با هم متمایزند؛ یعنی

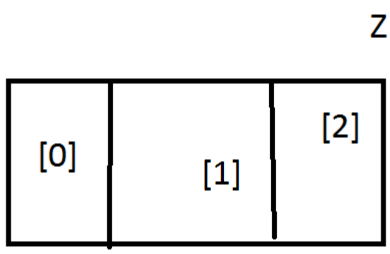
$$[۱] \cap [۲] = \emptyset, [۱] \cap [۰] = \emptyset, [۰] \cap ۲ = \emptyset$$

یعنی مجموعه‌ی

$$X/R$$

دقیقاً دارای سه عضو است. می‌نویسیم:

$$X/R = X/\equiv_۳ = \mathbb{Z}_۳ = \{[۰], [۱], [۲]\} = \{\overline{۰}, \overline{۱}, \overline{۲}\}$$



$\square$

توجه کنید که در مثال بالا، با استفاده از رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۳، مجموعه‌ی اعداد صحیح را به ۳ قسمت افراز کردیم. همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ صفر است با [۰] نشان دادیم؛ همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ برابر با ۱ است با [۱] نشان دادیم؛ و همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ برابر با ۲ است با [۲] نشان دادیم.

تعمیم ۸. برای عدد دلخواهِ $n \in \mathbb{N}$ روی $\mathbb{Z}$ رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv_n y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = nk$$

نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی با n کلاس است و

$$\mathbb{Z}/R = \{[۰], \ldots, [n-۱]\}.$$

مثال ۹. فرض کنید که $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ یک تابع دومتغیره با دامنه‌ی D باشد. روی D رابطه‌ی زیر را تعریف کنید:

$$(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow f(x,y) = f(x',y')$$

نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و کلاسهای هم‌ارزی آن دقیقاً همان منحنی‌های تراز تابعِ f هستند (یعنی رابطه‌ی بالا، دامنه‌ی تابع را با استفاده از منحنی‌های تراز افراز می‌کند.)