۶ جلسه‌ی ششم

اصل انتظام

در جلسه‌ی قبل، با اصل انتظام آشنا شدیم:

$$\forall X \quad \left(X \neq \emptyset \rightarrow \exists z \quad z \in X \wedge z \cap X = \emptyset\right)$$

دو نتیجه از اصل انتظام

۱. از اصول ZFC نتیجه می‌شود که:

$$\forall x \quad x \notin x.$$

یعنی عبارتی به صورت زیر (یعنی به صورتی که تعداد آکولادها نامتناهی باشد)، مجموعه **به حساب نمی‌آید:**

$$\left\{\left\{\{\dots\}\right\}\right\}$$

اثبات این گفته، از اثبات قسمت بعدی نتیجه می‌شود.

۲. به طور کلی‌تر، در نظریه‌ی مجموعه‌ها هیچ دنباله‌ی به صورت زیر پیدا نمی‌شود:

$$a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \dots$$

اثبات. فرض کنید که دنباله‌ای نزولی به صورت زیر موجود باشد.

$$a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \dots$$

بنا به اصل جانشانی $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ یک مجموعه است. [۱۳] بنا به اصل انتظام از آنجا که $A \neq \emptyset$ داریم:

$$\exists z \in A \quad z \cap A \neq \emptyset$$

[۱۳] این قسمت اثبات را فعلاً از من بپذیرید. از آنجا که پرداختن به اصل جانشانی به صورت دقیق، جزو اهداف درس نیست، فعلاً توضیح نمی‌دهم که چگونه با اصل جانشانی به این نتیجه رسیده‌ایم.

فرض کنیم که

$$z = a_k$$

اما $a_{k+1} \in a_k$ پس

$$\lightning \quad a_{k+1} \in \underbrace{z \cap A}_{a_k}$$

$\square$

مثال ۶۲. سعی کنید که اصل انتظام را در مجموعه‌ای نقض کنید، آیا این کار برایتان امکان‌پذیر است؟:

$$A = \left\{ \left\{ \{\{1,2\}\} \right\}, \left\{ \{1,2\} \right\}, \{1,2\} \right\}$$

اصل نهم، اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی

این که جهان هستی متناهی است یا نامتناهی، قابل اثبات نیست. در نظریه‌ی مجموعه‌ها، این که مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد، یک اصل است:

بیان غیر رسمی: یک مجموعه‌ی نامتناهی موجود است.

بیان رسمی این اصل در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها، به شیوه‌ی هوشمندانه‌ی زیر است:

بیان رسمی:

$$\exists X \quad \Big(\emptyset \in X \wedge \forall y \quad \big(y \in X \to y \cup \{y\} \in X \big) \Big)$$

پس مجموعه‌ی X که در اصل بالا بدان اشاره شده است، شامل مجموعه‌ی زیر است:

$$\left\{ \emptyset, \{\emptyset\}, \left\{ \emptyset, \{\emptyset\} \right\}, \left\{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \right\}, \dots \right\}$$

اصل دهم، اصل انتخاب

فرض کنید A_1, A_2, A_3 سه مجموعه‌ی ناتهی باشند؛ پس

$$\exists x_1, x_2, x_3 \quad x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge x_3 \in A_3$$

یعنی عنصرِ (x_1, x_2, x_3) در مجموعه‌ی $A_1 \times A_2 \times A_3$ واقع است. اما اگر تعداد این مجموعه‌ها نامتناهی باشد، چگونه می‌توان از هر یک از آنها عضوی انتخاب کرد. امکان‌پذیر بودن این امر، خودْ

یک اصل است.

بیان غیر رسمی اصل انتخاب: اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد، می‌توان از هر یک از آنها عضوی انتخاب کرد.

بیان رسمی:

$$\forall X \quad \Big(X \neq \emptyset \to \exists f : X \to \bigcup X \quad \forall x \in X \quad f(x) \in x\Big)$$

مثال ۶۳.

$$X = \Big\{\{۱,۲\},\{۴,۵,۶\},\{۷,۸\},\{۹\}\Big\}$$

$$\bigcup X = \Big\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\Big\}$$

$$f : X \to \bigcup X$$

$$f(\{۱,۲\}) = ۱ \quad f(\{۴,۵,۶\}) = ۶, \quad f(\{۷,۸\}) = ۷, \quad f(\{۹\}) = ۹$$

تابع f در بالا یک مثال از یک تابع انتخاب است. برای مجموعه‌ی X در بالا، توابع انتخاب دیگری نیز موجودند.

[۱۴] $\square$پایان اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

۱.۶ بررسی پارادوکس راسل در زداف‌سی

گفتیم که رهیافت اصل‌موضوعه‌ای به نظریه‌ی مجموعه‌ها، برای رهائیدن از پارادوکسهائی مانند پارادوکس راسل برگزیده شده است. در زیر بررسی کرده‌ایم که چرا در زداف‌سی پارادوکس راسل

[۱۴] در سال اول دانشگاه، هرگز متوجه نمی‌شدم که چرا اصل انتخاب، یک اصل است. با خود می‌گفتم که اصل انتخاب را می‌توان ثابت کرد، پس اصل نیست. اثبات من این بود: فرض کنیم $\{X_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. داریم

$$\forall i \in I \quad X_i \neq \emptyset$$

پس فرض کنیم

$$\forall i \quad x_i \in X_i$$

پس $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$! به نظر شما، اشکال استدلال من چه بوده است؟

رخ نمی‌دهد. نخست یک مشاهده‌ی مهم داشته باشیم: گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها، خودْ مجموعه نیست.

مشاهده ۶۴. نشان دهید که از اصول ZFC نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها نداریم.

اثبات. راه اول (با استفاده از اصل تصریح). فرض کنیم گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها، یک مجموعه باشد؛ آن را A بنامیم. پس از آنجا که A یک مجموعه است و A گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست پس $A \in A$. اما این با اصل انتظام تناقض دارد.
راه دوم (بدون استفاده از اصل انتظام و با استفاده از اصل تصریح). فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها باشد. بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$B = \{x \in A | x \notin x\}$$

حال دو حالت داریم، یا $B \in B$ یا $B \notin B$. اگر $B \in B$ آنگاه $B \in \{x \in A | x \notin x\}$ پس $B \notin B$. و به طور مشابه اگر $B \notin B$ آنگاه $B \in B$ و این تناقض است. □

معمولاً در ریاضیات برای سخن گفتن درباره‌ی گردایه‌هائی که مجموعه نیستند از کلمه‌ی **کلاس** استفاده می‌شود.

کلاسِ همه‌ی مجموعه‌ها : V

سوال ۶۵. آیا پارادوکس راسل، اصول ZFC را دچار مشکل می‌کند؟

پاسخ. عبارت $\{x | x \notin x\}$، بنا به اصل انتظام، کلاس همه‌ی مجموعه‌هاست. پس مجموعه نیست!
□

۲.۶ کار با اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

تعریف ۶۶. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، می‌نویسیم $A \subseteq B$ هرگاه:

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \in B\Big)$$

قضیه ۶۷. مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست؛ به بیان ریاضی:

$$\forall X \quad \emptyset \subseteq X$$

اثبات. باید نشان دهیم که

$$\forall X \forall x \quad \Big(x \in \emptyset \to x \in X\Big)$$

حال فرض کنیم X یک مجموعه باشد، باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad \Big(x \in \emptyset \to x \in X\Big)$$

حال یک مجموعه‌ی دلخواهِ x را در نظر می‌گیریم. باید نشان دهیم که عبارت زیر درست است:

$$x \in \emptyset \to x \in A$$

عبارت بالا به انتفاء مقدم درست است. $\square$

قضیه ۶۸. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$.

اثبات. فرض کنید A ، B و C مجموعه باشند و $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. برای نشان دادن این که $A \subseteq C$ باید عبارت زیر را ثابت کنیم:

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \in C\Big)$$

اگر a یک عضو دلخواه باشد، آنگاه

$$a \in A \to a \in B \quad (۱)$$

از آنجا که $B \subseteq C$ داریم

$$a \in B \to a \in C \quad (۲)$$

پس بنا به تاتولوژیهای بخش قبل، از (۲) ,(۱) نتیجه می‌شود که

$$a \in A \to a \in C.$$

از آنجا که a به دلخواه انتخاب شده است، پس نشان داده‌ایم که

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \in C\Big)$$

یعنی

$$A \subseteq C$$

$\square$

۳.۶ اعداد طبیعی و استقراء

روشی که زِرمِلو برای تعریف اعداد طبیعی پیشنهاد کرده است، روش زیر است:

$$
\begin{aligned}
&۰ = \emptyset \\
&۱ = \{۰\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \\
&۲ = \{۰, ۱\} = \{\emptyset\} \cup \big\{\{\emptyset\}\big\} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \\
&۳ = \{۰, ۱, ۲\} = \Bigg\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}\Bigg\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

تعریف ۶۹. فرض کنید A یک مجموعه باشد. آن را استقرائی می‌خوانیم هرگاه $\emptyset \in A$ و

$$\forall x \quad \Big(x \in A \to x \cup \{x\} \in A\Big)$$

توجه ۷۰. اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی در واقع بیانگر این است که یک مجموعه‌ی استقرائی موجود است.

تعریف ۷۱. هر عنصری (یعنی هر مجموعه‌ای) که متعلق به تمام مجموعه‌های استقرائی باشد، یک **عدد طبیعی** می‌نامیم.

قضیه ۷۲. مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد.
(منظور: یک مجموعه هست که اعضای آن دقیقاً اعداد طبیعی هستند.)

قضیه‌ی بالا را در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد.

توجه ۷۳. در نظریه‌ی مجموعه‌های اصل‌موضوعه‌ای، هر متغیری که درباره‌ی آن صحبت شود، یک مجموعه است. در واقع جهانی که روی آن سور زده می‌شود جهان مجموعه‌هاست. پس برای ما مجموعه و عنصر دو مفهوم متفاوت نیستند. هر عنصری از یک مجموعه، خود نیز یک مجموعه است.