

## چکیده

پیش از آنکه بخواهیم درباره‌ی مبانی ریاضی، به عنوان یک علم، سخن بگوئیم باید با مفهوم علم (دانش، ساینس) و تفاوت آن با مفهوم دانائی (آگاهی، نالچ) آشنا شویم. دانائی، کیفیتی است که در انسان، با استفاده از کسب تجارب یا مطالعه حاصل می‌شود. یک استاد دانشگاه، می‌تواند به سبب مطالعات زیادی که داشته است دانا باشد؛ در عین حال یک کشاورز که در مزرعه کار می‌کند نیز می‌تواند به سبب تجاربی که در زندگی کسب کرده است فرد دانائی باشد. عموماً کسی از دانائی‌های کس دیگر با خبر نیست، مگر این که این دانائی از رفتار یا «سخنان» او قابل برداشت باشد. گاهی دانائی را نمی‌توان به کسان دیگر منتقل کرد. مثلاً ممکن است فرزند کشاورز مثال بالا، از دانائی پدر چیزی بهره نبرد؛ شاید به این دلیل که پدر توانائی تدریس دانائی خود یا روش کسب این دانائی را به او نداشته است. شاید هم، مانند مثال بند بعد، اصولاً انتقال آن دانائی کار دشواری بوده باشد.

یک مثال از دانائی، «عرفان» است. در این نوع از دانائی، شخص نه تنها از طریق تجربه و مطالعه، بلکه شاید به طریق الهام کسب دانائی کرده است. اما باز هم همان مشکل قبلی برقرار است که شاید عارف نتواند دانائی خود را به دیگران منتقل کند. عموماً از سخن عارفان این ادعا برداشت می‌شود که آنها چیزهایی را می‌دانند و می‌بینند که دیگران نمی‌دانند و نمی‌بینند؛ و بدتر از آن، شاید هیچگاه بدان مقامات نرسند که درک کنند!

هر کسی از ظن خود شد یار من

وز درون من نجست اسرار من

از بیت بالا چنین برداشت می‌شود که: «من چیزهایی می‌دانم که دیگران حتی اگر سعی کنند، به ظن خودشان فهمیده‌اند». تفاوت میان دانش و دانائی دقیقاً همین است. دانش به دانائی‌ای گفته می‌شود که با سخن گفتن و نوشتن در یک زبان مشترک و دارای قاعده‌های مشخص (یعنی منطق) قابل انتقال به دیگران است. در دنیای علم هیچگاه نمی‌توان گفت «من چیزهایی می‌دانم که دیگران هرگز نخواهند فهمید». آن چیزها اگر هم وجود داشته باشند، علم محسوب نمی‌شوند. در واقع آن چیزها دقیقاً زمانی علم به حساب می‌آیند که از طریق منطق به نگارش و سخن درآیند و دیگران نیز با خواندشان به دانائی برسند و در صورت امکان بر آنها بیفزایند. بدین صورت است که یک دانائی، نخست به صورت علم درمی‌آید، سپس تبدیل به یک دانائی عمومی می‌شود و دوباره همان به علم تبدیل می‌شود و این روند ادامه می‌یابد.

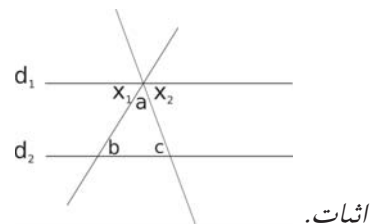
پس گفتیم که علم به نوعی، همان دانائی به صورت نوشتاریا گفتاروقابل انتقال درآمده است. نیز گفتیم که برای انتقال دانائی، یعنی تبدیل آن به علم، نیازمند زبانی مشترک هستیم. زبانی که هر کس که بر آن تسلط یابد، بتواند سخنان و نوشته‌های ما را درک کند. این زبان، همان «منطق» است. در این درس نه تنها با این زبان تا حدی آشنا می‌شویم، بلکه نحوه‌ی سخن گفتن در این زبان را نیز خواهیم آموخت. در واقع، در این درس خواهیم آموخت که تا زمانی که نتوانیم دانسته‌ی خود را به صورت صحیح بنویسیم، این دانسته، علم به حساب نمی‌آید. بسیاری از دانشجویان صحیح نوشتن را بلد نیستند. عموماً در برگه‌های امتحانی چیزهایی غیرقابل دنبال کردن می‌نویسند ولی مدعی می‌شوند که سوال را فهمیده‌اند و پاسخ را می‌دانند. در این درس، چنین ادعائی از کسی قابل پذیرش نیست. آنچه که دانشجو می‌فهمد دانائی او محسوب می‌شود. در این درس نحوه‌ی انتقال آن دانائی به صورتی که برای متخصصین قابل فهم باشد، مورد پرسش است. پیشنهاد من به دانشجویان تازه‌وارد، این است که صورت هر سوال را موضوع یک انشاء و پاسخ آن را متن آن بدانند. در واقع در پاسخ هر سوال دانشجو

باید مطلبی بنویسد که دارای شروع، بسط و پایان باشد. شروعش صورت سوال است و بیان اینکه این سوال از ما چه می‌خواهد. بسطش بررسی فرضها و نتیجه‌گیری از آنها، و پایان انشاء، رسیدن به خواسته‌ی سوال است.

## ۱ جلسه‌ی اول

منظور از مبانی ریاضی، مبانی لازم برای کسب مدرک کارشناسی در ریاضیات نیست. بلکه منظور پایه‌ها و مبانی ریاضیات به عنوان یک علم بشری است. بیایید برای شروع، یک قضیه‌ی ریاضی را با هم اثبات کنیم:

**قضیه ۱.** مجموع زوایای داخلی یک مثلث  $۱۸۰$  درجه است.



از آنجا که خطوط  $d_1$  و  $d_2$  موازی‌اند، داریم:

$$x_2 = c, \quad x_1 = b \quad (*)$$

می‌دانیم که هر خطی یک زاویه‌ی  $۱۸۰$  درجه می‌سازد. بنابراین داریم:

$$x_1 + a + x_2 = ۱۸۰^\circ \quad (**)$$

از  $(*)$  و  $(**)$  نتیجه می‌شود که :

$$a + b + c = ۱۸۰^\circ$$

□

برای اثبات بالا به مواد زیر نیازمند هستیم:

۱. آشنایی با زبان (هم زبان فارسی و هم زبان ریاضی برای اعداد)

۲. آشنایی با نحوه‌ی صحیح استدلال کردن

۳. آشنایی با برخی قضیه‌هایی که قبلاً ثابت شده‌اند (دانسته‌های قبلی)

اینکه اگر دو خط  $d_1$  و  $d_2$  موازی باشند آنگاه زوایای  $x_1$  و  $b$  برابرند، معادل با یکی از اصول هندسه‌ی اقلیدسی است. ما از این دانسته در اثبات بالا استفاده کردیم. همچنین از این دانسته استفاده کردیم که یک خط، زاویه‌ی  $۱۸۰$  درجه می‌سازد. در بخشی از اثبات نیز از  $(*)$  و  $(**)$  کمک گرفتیم. یعنی گفتیم که می‌شود یکی از آنها را در دیگری جایگذاری کرد. این یک قانون استدلال کردن است.

در درس مبانی ریاضی، به دو جنبه خواهیم پرداخت؛ اول یافتن اصول اولیه ریاضی، و دوم آشنائی با روش صحیح استدلال کردن.

**سوال ۲.** آیا می‌توان مجموعه‌ای از اصول موضوعه نوشت که تمام علم ریاضی بر پایه‌ی آنها نهاده شده باشد؛ یعنی به طوری که هر قضیه‌ای در ریاضی نهایتاً به یکی از آن اصول برسد؟

در درس مبانی ریاضی اصول موضوعه اولیه ریاضی را تبیین خواهیم کرد. هدف دوم ما در این درس آشنایی با زبان مشترک ریاضیدانان و نحوه‌ی صحیح استدلال کردن است. موارد زیر را در این درس بررسی خواهیم کرد:

۱. آشنایی با زبان ریاضی

۲. اصول اولیه ریاضیات

۳. آشنایی با مفاهیم مجموعه و اعداد

۴. آشنایی با بی‌نهایت‌ها

بیاید نخست به زبان ریاضی بپردازیم. زبان ریاضی، منطق ریاضی است. در این درس با دو منطق آشنا خواهیم شد که بخش اعظمی از ریاضیات بر اساس آنها بنا شده است:

۱. منطق گزاره‌ها<sup>۱</sup>

۲. منطق مرتبه‌ی اول<sup>۲</sup>

## ۱.۱ منطق گزاره‌ها

اشیای اولیه (مواد اولیه‌ی) منطق گزاره‌ها، گزاره‌های اتمی هستند که آنها را با حروف  $p$ ،  $q$ ،  $h$  و ... نشان می‌دهیم. هر گزاره‌ی اتمی را می‌توان یک جمله‌ی خبری ساده پنداشت. مثال:

– حسن آدم است.

– هوا بارانی است.

– تخته‌سیاه، سبز است.

مثال‌های زیر گزاره‌ی اتمی نیستند:

– فردا خانه‌ی حسن می‌آیی؟

به‌به! چه هوای خوبی!

علاوه بر گزاره‌های اتمی در منطق گزاره‌ها علائم کمکی زیر نیز موجودند:

• «و» یا علامت عطف که آن را با  $\wedge$  نشان می‌دهیم.

• «یا» یا علامت فصل که آن را با  $\vee$  نشان می‌دهیم.

---

<sup>۱</sup>propositional logic

<sup>۲</sup>first order logic

- علامت «آنگاه» که آن را با  $\rightarrow$  نشان می‌دهیم.
- علامت «اگروتنها اگر» که آن را با  $\leftrightarrow$  نشان می‌دهیم.
- علامت «نقیض» که آن را با  $\neg$  نشان می‌دهیم.
- علامت تناقض که آن را با  $\perp$  نشان می‌دهیم.

با استفاده از علائم یاد شده می‌توان جملات پیچیده‌تری در منطق گزاره‌ها نوشت:

$$(p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_3 \rightarrow p_4) \vee (\neg(\neg p_5) \rightarrow p_2 \wedge p_3)$$

توجه ۳. هر منطقی دارای دو بخش است:

۱. نحو<sup>۳</sup>

۲. معناشناسی<sup>۴</sup>

یک گزاره، در منطق گزاره‌ها، از لحاظ نحوی فقط یک دنباله از علامتها است. مانند آنچه در بالا نوشته‌ایم. در بخش معناشناسی باید به این گزاره‌ها معنا بخشید.

## ۲.۱ معنا شناسی منطق گزاره‌ها

در منطق گزاره‌ها هر جمله‌ای یا دارای ارزش درست (T) یا دارای ارزش غلط (F) است. معمولاً در این منطق برای گزاره‌ها جدول ارزش کشیده می‌شود.

p
T
F

توجه ۴. علامت‌های  $\forall$  و  $\exists$  در منطق گزاره‌ها نداریم. متغیر آزاد هم نداریم.

تعریف ۵. فرض کنید  $p$  و  $q$  دو گزاره (نه لزوماً اتمی) در منطق گزاره‌ها باشند. عطف  $p$  و  $q$  که آن را به صورت  $p \wedge q$  نشان می‌دهیم؛ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

<sup>۳</sup>syntax

<sup>۴</sup>semantics

فصل دو گزاره‌ی  $p$  و  $q$  که آن را به صورت  $p \vee q$  نشان می‌دهیم؛ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

$p$	$q$	$q \vee p$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

توجه ۶. علامت «یا» در بالا، یای مانع جمع نیست و از این رو، با «یا» ای که در زبان محاوره‌ای استفاده می‌شود فرق می‌کند. جمله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

یا حسن در خانه بوده است، یا حسین (در صورتی که فقط یک نفر در خانه بوده باشد)

فرض کنید  $p$  گزاره‌ی «حسن در خانه است» باشد، و  $q$  «گزاره‌ی حسین در خانه است». اگر  $p$  و  $q$  هر دو درست باشند، گزاره‌ی بالا (در زبان محاوره‌ای) غلط می‌شود؛ در حالی که در جدول بالا دیدیم که در منطق گزاره‌ها، در صورت درست بودن  $p, q$  گزاره‌ی  $p \vee q$  نیز درست است.

## ۲ جلسه‌ی دوم

در این جلسه به ادامه‌ی معناشناسی منطق گزاره‌ها می‌پردازیم. لازم می‌دانم که دوباره درباره‌ی  $p \vee q$  توضیحی بدهم.

توجه ۷. علامت  $\vee$  «یا» مانع جمع نیست. در واقع اگر بخواهیم مانع جمع شویم، گزاره‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

سوال ۸ (سوال دانشجویان). معنی کلمه‌ی جمع در یای مانع جمع چیست؟

جمع دو چیز در فارسی یعنی داشتن هر دوی آنها با همدیگر. بیت زیر از حافظ را مثال می‌زنم:  
عشق و شباب و رندی، مجموعه‌ی مراد است  
چون جمع شد معانی، گوی بیان توان زد

تعریف ۹. اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، گزاره‌ی  $p \rightarrow q$  به صورت زیر معنا شناسی می‌شود.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

توجه کنید که در سطر سوم و چهارم جدول ارزش بالا، می‌گوئیم که گزاره‌ی موردنظر به انتفاء مقدم درست است. در این حالت به محض دیدن فرض، تلاش برای یافتن درستی گزاره منتفی است! (یعنی گزاره درست است). این را در زبان روزمره را هم تا حدودی می‌توان دید. فرض کنید که کسی بگوید که «اگر سنگ سخن بگوید، اسب شتر است». این گزاره، با این که بی‌معنی به نظر می‌رسد، درست است! در واقع ما هیچگاه نیاز به تحقیق این نداریم که اسب شتر است، چون می‌دانیم که سنگ سخن نمی‌گوید! <sup>۵</sup>

تعریف ۱۰. اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، گزاره‌ی  $p \leftrightarrow q$  به صورت زیر معنا شناسی می‌شود.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

تعریف ۱۱. اگر  $p$  یک گزاره باشد  $\neg p$  نیز یک گزاره است و به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

<sup>۵</sup> شاید این را هم شنیده باشید که از فرض محال همه چیز نتیجه می‌شود.