۳ جلسه‌ی سوم

پیش از شروع درس یادآوری می‌کنیم که عبارت

$$p \to q$$

یعنی p شرط کافی برای q است، و q شرط لازم برای p است.

مثال ۳۲. شرط لازم برای ورود به دانشگاه در کنکور است.

q: علی به دانشگاه وارد شده است.

p: علی کنکور داده است.

جمله‌ی شرط لازم برای ورود به دانشگاه، کنکوردادن است، در مورد علی به صورت زیر درمی‌آید:

$$q \to p$$

معادلاً به صورت زیر:

$$\neg p \to \neg q$$

وقتی می‌گوئیم شرط لازم برای ورود به دانشگاه، کنکور دادن است، یعنی اگر کنکور ندهیم، به دانشگاه وارد نمی‌شویم. این جمله را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:
تنهااگر کنکور دهیم وارد دانشگاه می‌شویم.

مرور درس ۳۳. در جلسه‌ی قبل، با برخی **تاتولوژی‌ها** آشنا شدیم. تاتولوژی‌ها صرف نظر از معنی گزاره‌های به‌کار رفته در آنها همواره درستند. برای اثبات اینکه یک گزاره تاتولوژی است می‌توان جدول ارزش آن را بررسی کرد. اینکه «گزاره‌ی p تاتولوژی است» جمله‌ای فرا منطقی است. تاتولوژی‌ها در واقع قضایایی درباره‌ی منطق گزاره‌ها هستند. برای اثبات تاتولوژی‌های جدید می‌توان از تاتولوژی‌های دیگر استفاده کرد. استفاده از تاتولوژیهای قبل برای اثبات تاتولوژیهای جدید را «**استنتاج**» کردن می‌گویند. [۹]

[۹] البته تعریف دقیق استنتاج کردن، چیزی غیر از این است که آن را در درس منطق ریاضی خواهید آموخت.

مثال ۳۴. گزاره‌ی زیر تاتولوژی است.

۱.

$$(p \to q) \wedge p \to q \quad \text{قیاس استثنایی}$$

اثبات. با توجه به تاتولوژی‌های قبلی مانند

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

داریم:

$$(p \to q) \wedge p \equiv (\neg p \vee q) \wedge p$$

بنا به تاتولوژی‌های قبلی داریم:

$$(\neg p \vee q) \wedge p \equiv p \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$$

حال توجه می‌کنیم که $p \wedge \neg p \equiv \perp$ (جدول بکشید).

توجه کنید که $p \vee \perp \equiv p$ (جدول بکشید). پس داریم:

$$(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

تا اینجا ثابت کردیم که

$$(p \to q) \wedge p \equiv p \wedge q$$

پس برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که

$$p \wedge q \to q$$

اما حکم بالا، خود یک تاتولوژی است که قبلاً آن را ثابت کرده‌ایم. $\square$

۲.

$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p \quad \text{نفی تالی}$$

اثبات.

$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p \equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \to \neg p \equiv$$

$$(\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \to \neg p \equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee \underbrace{(\neg q \wedge q)}_{\perp}) \to \neg p \equiv$$

$$\underbrace{(\neg q \wedge \neg p \to \neg p)}_{T}$$

□

.۳

برهان خُلف $\quad (p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q \to \perp)$

اثبات. به عنوان تمرین بر عهده‌ی شما. □

مثال ۳۵. نشان دهید

$$p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$$

پاسخ. می‌خواهیم نشان دهیم که $p \wedge q \to r \leftrightarrow p \to (q \to r)$ یک تاتولوژی است. باید نشان دهیم که دو ستون آخر جدول زیر با هم یکسانند:

p	q	r	p∧q	q→r	p∧q→r	p→(q→r)
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

(1)

تکمیل جدول به عهده‌ی شما. □

۱.۳ منطق مرتبه‌ی اول

منطق گزاره‌ها از بیان عبارتهایی مانند زیر ناتوان است:

ـ هر عدد اول بزرگتر از ۲ فرد است.

ـ حداقل دو نفر در کلاسِ ما قد بلندتر از ۱۷۰ سانتی متر دارند.

عبارت‌های بالا در منطق مرتبه‌ی اول (یا منطق محمولات، یا منطق سورها) نوشته شده‌اند. بخش اعظمی از ریاضیات با استفاده از منطق مرتبه‌ی اول قابل بیان است. منطق مرتبه‌ی اول از افزودن اجزاء زیر به منطق گزاره‌ها بدست می‌آید:

۱. متغیرها $x, y, z, \ldots$

۲. روابط و توابع $R(x,y), f(x,y) = z$

۳. سورهای عمومی و وجودی: $\exists$ و $\forall$

۱.۱.۳ نحو منطق مرتبه‌ی اول

ترتیب اهمیت ادوات به صورت زیر است:

۱. $(,)$

۲. $\forall, \exists$

۳. $\neg$

۴. $\wedge, \vee$

۵. $\rightarrow, \leftrightarrow$

توجه ۳۶. در میان ادوات هم‌ارزش، آنکه زودتر پدیدار شود، ارجح است.

توجه ۳۷. $\exists$ «سور وجودی» و $\forall$ «سور عمومی» نامیده می‌شوند.

متغیری که در دامنه‌ی سوری قرار بگیرد، متغیر **پای‌بند** نامیده می‌شود. متغیری که در دامنه‌ی هیچ سوری نباشد، متغیر **آزاد** نامیده می‌شود.

مثال ۳۸. در فرمول‌های زیر متغیر آزاد و پای‌بند را مشخص کنید و فرمول مورد نظر را پرانتزگذاری کنید.

۱. $\forall x \quad R_1(x,y) \to \exists y(s(y) \vee R_2(x,y))$

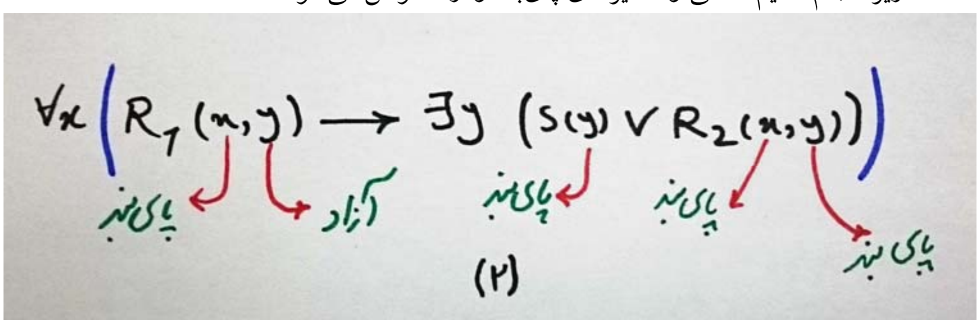
پاسخ. ابتدا پرانتزگذاری می‌کنیم:

$$(\forall x \quad R_1(x,y)) \to \exists y(s(y) \vee R_2(x,y))$$

حال متغیرهای آزاد و پای‌بند را شناسایی می‌کنیم:

$$(\forall x \quad R_1(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \overbrace{y}^{\text{آزاد}})) \to \exists y(s(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}) \vee R_2(\overbrace{x}^{\text{آزاد}}, \underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}))$$

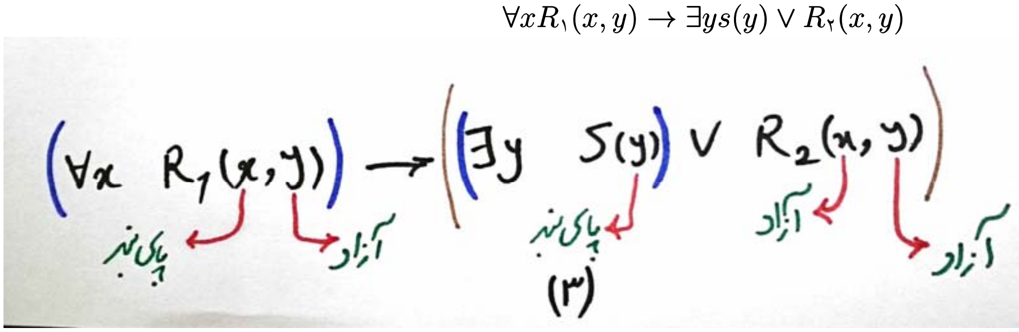
توجه: پرانتزگذاری فرمول بالا فقط به صورت بالا درست است؛ اگر پرانتزگذاری را به صورت زیر انجام دهیم، معنی و متغیرهای پای‌بند و آزاد عوض می‌شوند:



□

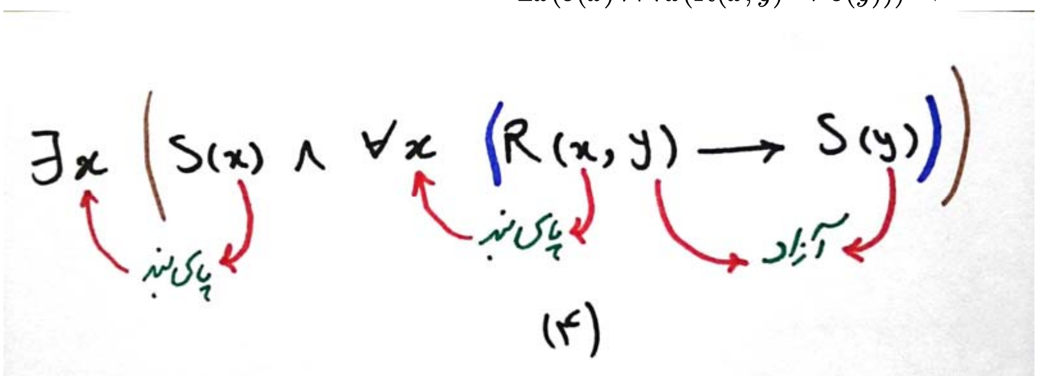
۲. فرمول زیر را پرانتزگذاری کنید:

$\forall x R_1(x,y) \to \exists y s(y) \vee R_2(x,y)$

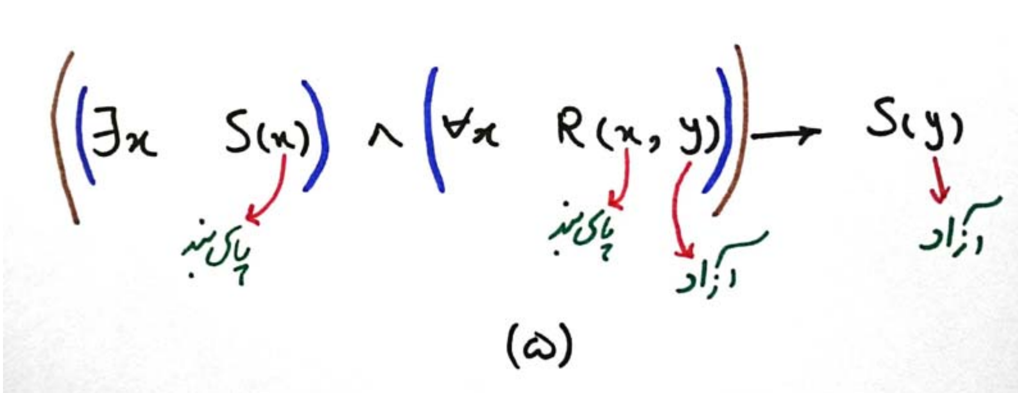


پاسخ. □

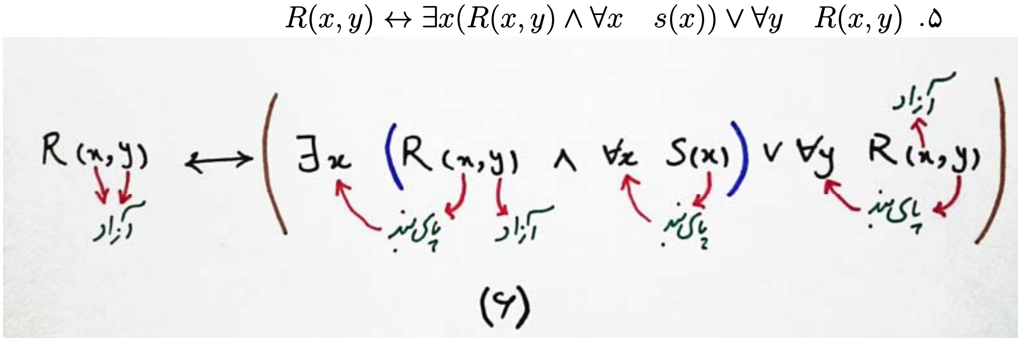
۳. $\exists x(s(x) \wedge \forall x(R(x,y) \to s(y)))$



۴. $\exists x s(x) \wedge \forall x R(x,y) \to s(y)$



۵. $R(x,y) \leftrightarrow \exists x(R(x,y) \wedge \forall x \quad s(x)) \vee \forall y \quad R(x,y)$



توجه ۳۹. در منطق مرتبه‌ی اول بسته به اینکه در مورد چه چیزی صحبت می‌کنیم، به زبان، رابطه یا تابع اضافه می‌کنیم. این را در مثالها بررسی خواهیم کرد.

۲.۳ معناشناسی منطق مرتبه‌ی اول

معناشناسی منطق مرتبه‌ی اول با استفاده از جدول ارزش صورت نمی‌گیرد. در اینجا باید گزاره‌ها و فرمولها را در **جهان** مربوط بدانها ارزیابی کرد. برای مثال، برای بررسی صحت جمله‌ی «در کلاس مبانی ریاضی سه نفر قد بلندتر از ۱۷۰ سانتی‌متر دارند» باید وارد این کلاس شد، و به دنبال سه نفر گشت که شرط ذکر شده را برآورده کنند.

مثال ۴۰. عبارت زیر را در یک **زبان** مناسب در منطق مرتبه‌ی اول بنویسید.

- در کلاس حداقل ۵ دانشجوی خانم وجود دارند.

پاسخ. زبان را $L = \{D(x)\}$ می‌گیریم که در آن D یک محمول تک‌موضعی است به معنی این که x یک دختر است.

$\underbrace{D(x)}_{\text{محمول}}$: x دختر است.

$$\exists x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ (D(x_۱) \wedge D(x_۲) \wedge D(x_۳) \wedge D(x_۴) \wedge D(x_۵) \wedge \bigwedge_{i,j=۱,\ldots,۵, i\neq j} x_i \neq x_j)$$

□

مثال ۴۱. ـ در کلاس دقیقاً ۵ خانم وجود دارد.

پاسخ. دوباره از همان زبان L در بالا استفاده می‌کنیم:

$$\big(\exists x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ (D(x_۱) \wedge D(x_۲) \wedge D(x_۳) \wedge D(x_۴) \wedge D(x_۵) \wedge \bigwedge_{i,j=۱,\ldots,۵, i\neq j} x_i \neq x_j)\big)$$
$$\wedge \forall x (D(x) \to (x = x_۱) \vee \ldots \vee (x = x_۵))$$

□