۱۸ جلسه‌ی شانزدهم، دوشنبه

فرض کنید X یک مجموعه باشد. در جلسات قبل درباره‌ی یک تابع f صحبت کردیم که میانِ مجموعه‌ی افرازهای مجموعه‌ی X و روابط هم‌ارزی روی این مجموعه، یک تناظر یک به یک ایجاد می‌کند:

$$f : R \mapsto X/R$$

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که تابع f پوشاست؛ یعنی اگر $\mathcal{A}$ یک افراز از مجموعه‌ی X باشد، آنگاه یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی مجموعه‌ی X چنان موجود است که $X/R = \mathcal{A}$. در این جلسه ثابت می‌کنیم که این تابع، یک به یک است. به بیان دیگر:

قضیه ۱۷۹. فرض کنید R و S دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه X باشند. اگر

$$X/R = X/S$$

آنگاه

$$R = S.$$

اثبات. فرض کنید R و S دو رابطه هم ارزی باشند و

$$X/R = X/S$$

فرض کنید $(x_\circ, y_\circ) \in R$ هدفمان نشان دادن این است که $(x_\circ, y_\circ) \in S$.

از اینکه $(x_\circ, y_\circ) \in R$ نتیجه می گیریم که $x_\circ \; R \, y_\circ$.

از آنجا که $x_\circ \; R \, y_\circ$ بنا به این که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی نتیجه می‌گیریم که : $[x_\circ]_R = [y_\circ]_R$

از آنجا که $X/R = X/S$ نتیجه می‌گیریم که عنصر $z_\circ$ موجود است به طوریکه $[x_\circ]_R = [y_\circ]_R = [z_\circ]_S$

می دانیم که $x_\circ \in [x_\circ]_R$ پس $x_\circ \in [z_\circ]_S$

به طور مشابه $y_\circ \in [z_\circ]_S$

پس $x_\circ \; S \, z_\circ \; S \, y_\circ$

حال بنا به تعدی رابطه S داریم:

$$x_\circ \; S \, y_\circ$$

پس $(x_\circ, y_\circ) \in S$. پس ثابت شد که $R \subseteq S$. اثبات این که $S \subseteq R$ به طور کاملاً مشابه است. □

پس اثبات قضیه‌ی مهم زیر در اینجا به پایان رسید:

قضیه ۱۸۰. میان افرازهای یک مجموعه و روابط هم‌ارزی روی آن، یک تناظر یک به یک وجود دارد. [۲۰]

[۲۰] برای کسی که این قضیه را فرا بگیرد و شفاهاً در اتاق کار من ثابت کند، یک نمره‌ی کامل در نظر گرفته‌ام.

بگذارید بحث رابطه‌ی هم‌ارزی را با یک نکته به پایان ببریم.
گفتیم که اگر A یک افراز باشد، آنگاه رابطه هم ارزی R موجود است به طوریکه $X/R = A$. حکم قضیه‌ی این است که یک رابطه‌ی هم‌ارزی موجود است که فلان ویژگی را دارد. این نوع احکام عموماً دارای دو نوع اثبات هستند: اثبات وجودی، و اثبات ساختی. در اثبات وجودی، تنها ثابت می‌کنیم که آن موجودی در پی آن هستیم موجود است، ولی شاید نتوانیم دقیقاً آن موجود را مشخص کنیم. در اثبات ساختی، موجود مورد نظر را به طور دقیق پیدا می‌کنیم. به نظر شما، اثباتی که برای حکم فوق آمد، ساختی بود یا وجودی؟

۱.۱۸ مقدمه‌ای بر مفاهیم هم‌توانی و متناهی و نامتناهی

مفهوم همتوانی را باید بعد از مفهوم تابع درس داد؛ ولی از آنجا که می‌دانم همه‌ی شما با مفهوم تابع آشنا هستید و برای جلوگیری از یکنواخت شدن درس، مفهوم تابع را دانسته فرض می‌کنم و نخست چند کلمه درباره‌ی همتوانی، متناهی و نامتناهی سخن می‌گویم. در جلسات بعد مفهوم تابع را دقیقاً توضیح خواهم داد و دوباره به مفاهیم یادشده بازخواهم گشت. در واقع آنچه در ادامه آمده است، مقدمه‌ای است برای بحثهای پیش رو در این درس.

دو مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{\text{علی، حسن، حسین}\}$$

و

$$B = \{۰, ۱, ۲\}$$

با این که ایندو به ظاهر خیلی متفاوت به نظر می‌رسند ولی از نظر «اندازه» با هم برابرند. در واقع این طور به نظر می‌آید که اگر نامها را در مجموعه‌ی بالا عوض کنیم، به یک کپی از مجموعه‌ی پائین می‌رسیم؛ یعنی اگر علی را۰ و حسن را ۱ و حسین را ۲ بنامیم، به مجموعه‌ی پائین می‌رسیم. اصطلاحاً در این موقع می‌گوئیم که این دو مجموعه **همتوان** هستند. بیائید همین نکته را دقیقتر بیان کنیم. فرض کنید f یک تابع از A به B باشد به طوری که

$$f(\text{علی}) = ۰, f(\text{حسن}) = ۱, f(\text{حسین}) = ۲$$

تابع f هم یک به یک است و هم‌پوشا. در واقع این تابع، یک تابع «تغییر نام» است.

تعریف ۱۸۱. دو مجموعه‌ی دلخواهِ X, Y را همتوان می‌خوانیم هرگاه تابعی یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد.

وقتی دو مجموعه همتوان هستند در واقع، می‌توان اینگونه اندیشید که هر دو یک مجموعه هستند که اعضایش دو صورت مختلف نامگذاری شده‌اند.
در درسهای پیشین با مفهوم اعداد طبیعی آشنا شدید: گفتیم که بنا به اصل وجود مجموعه‌ی استقرائی یک مجموعه‌ی استقرائی موجود است. ثابت کردیم که کوچکترین مجموعه‌ی استقرائي نیز موجود است که آن را مجموعه‌ی اعداد

طبیعی می‌خوانیم و با $\mathbb{N}$ نشان می دهیم. به بیان دیگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای اعضای زیر است:

$$
\begin{aligned}
&۰ = \emptyset \\
&۱ = \{۰\} \\
&\vdots \\
&n = \{۰, \ldots, n - ۱\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

تعریف ۱۸۲. ۱. می‌گوئیم مجموعه‌ی X دارای n عضو است هرگاه همتوان با مجموعه‌ی $\{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$ باشد؛ یعنی یک تابع یک به یک و پوشا بین n و X موجود باشد.

۲. می‌گوئیم مجموعه‌ی X متناهی است هرگاه یک عددِ $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که X با n همتوان باشد. در واقع مجموعه‌ی X متناهی است هرگاه یک عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که مجموعه‌ی X دارای n عضو باشد.

پس تا اینجا مجموعه‌های متناهی را شناختیم. اما مجموعه‌ی نامتناهی چه می‌تواند باشد؟

تعریف ۱۸۳. مجموعه‌ی X را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه متناهی نباشد (!).

قضیه ۱۸۴. مجموعه‌ی اعداد طبیعی نامتناهی است.

دوست دارم پیش از ورود کردن جدی تر به بحث، کمی بحث فلسفی بکنیم: اصل عمومیِ ششم اقلیدس برای ورود به اصول هندسه‌ی اقلیدسی این است که «همواره یک کُل از جزء خودش بزرگتر است». برای آشنا شدن با اصول اقلیدس پیوند زیر را مطالعه کنید:

`https://www.math.ust.hk/~mabfchen/Math4221/Euclidean%20Geometry.pdf`

پس، از نظر اقلیدس، هیچ کُلّی نمی‌تواند «هم‌اندازه» با جزئی از خودش باشد. گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان، یعنی هم‌اندازه، می‌خوانیم هرگاه بین آنها یک تابع یک به یک و پوشا موجود باشد. مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathbb{N} = \{۰, ۱, ۲, \ldots, \}$$

مجموعه‌ی اعداد زوج، جزئی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی است:

$$E = \{۰, ۲, ۴, \ldots\}$$

حال تابعِ $f : \mathbb{N} \to E$ را در نظر بگیرید که $f(x) = ۲.x$. به نظر می‌آید که با استفاده از این تابع می‌توان نشان داد که مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و E هم‌اندازه هستند. در واقع E تنها یک نام‌گذاری دیگر برای $\mathbb{N}$ است. به نظر می‌آید که در اینجا اصل اقلیدس رد شده است. [۲۱] علت چنین اتفاقی، اصل «وجود مجموعه‌ی نامتناهی» است. این که مجموعه‌ای

[۲۱] اقلیدس با چه پیش‌فرضی اصل خود را نوشته است که ما آن پیش‌فرض را نداریم؟

نامتناهی وجود داشته باشد، یا این که جهان هستی متناهی باشد یا نامتناهی، تأثیر بزرگی بر ایدئولوژی و روش زندگی ما دارد. بسیاری از براهین خداشناسی نیز، مانند برهان علیت، بر این استوارند که گیتی، مجموعه‌ای متناهی است.
با فرض پذیرفتن وجود مجموعه‌ی نامتناهی، **می‌توان نشان داد که مجموعه‌ی X نامتناهی است اگروتنهااگر با جزئی از خودش هم‌اندازه باشد.** مثلاً مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ به این علت نامتناهی است که هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد زوج است. توجه کنید که مجموعه‌ی اعداد فرد هم، هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد زوج است. پس مجموعه‌ی اعداد طبیعی، از دو مجموعه ساخته شده است که هم‌اندازه‌ی خودش هستند! در جلسات آینده با این اتفاقات عجیب و غریب بیشتر آشنا خواهیم شد. فعلاً بحث را با پارادوکس «هتل هیلبرت»، که بیان دیگری برای گفته‌ی بالاست، پی می‌گیریم.
فرض کنید که یک هتل داریم که به اندازه‌ی اعداد طبیعی اتاق دارد و همه‌ی اتاقهای آن پُر است. اگر یک مسافر جدید بیاید آیا می‌شود او را هم در هتل جای داد؟ به نظر می‌آید که بشود: کافی است که به هر کس بگوئیم که یک اتاق جلوتر برود تا اتاق شماره‌ی ۱ خالی شود! حال همان هتل را در نظر بگیرید و فرض کنید به اندازه‌ی اعداد طبیعی مسافر جدید وارد شود که نیازمند جا هستند. در این صورت هم هتل برای آنها جا دارد: کافی است که هر کس که در اتاق n است به اتاق $۲n$ برود. در این صورت اتاقهای فرد خالی می شوند و مسافران جدید می‌توانند وارد آنها شوند. حال اگر به‌اندازه‌ی اعداد طبیعی اتوبوس بیایند که هر کدام حاوی به اندازه‌ی اعداد طبیعی مسافرند، آیا باز هم هتل برای آنها جا دارد؟ بررسی این قسمت به عهده‌ی شما. (فیلمهای زیر را ببینید)

https://www.youtube.com/watch?v=faQBrAQ87l4

https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

گفتیم که مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای است که زیرمجموعه‌ای ازآن هم‌اندازه با خودِ مجموعه شود. اگر جهان هستی نامتناهی باشد، بخشی از جهان شبیه به کُلِّ جهان است. آن بخش نیز بخشی شبیه به خود دارد! بنابراین چه بسا نامتناهی کُپی از خودِ ما و سیاره‌ی ما در جاهای دیگر گیتی وجود داشته باشد و این جهانها به صورت موازی در جریان باشند.

۲.۱۸ ورود به بحث، توابع

نخستین ترکیب سازنده‌ی مباحث بالا، مفهوم تابع است. می‌دانم که در دبیرستان با توابع آشنا شده‌اید، ولی بد نیست دوباره این مفهوم را با هم مرور کنیم. تا کنون مسیر زیر را پی گرفته‌ایم:
معرفی اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

معرفی ضرب مجموعه‌ها و مفهوم رابطه

و اکنون معرفی مفهوم تابع، به عنوان نوعی رابطه.

تعریف ۱۸۵. فرض کنید R یک رابطه از مجموعه X به Y باشد. رابطه‌ی R را یک تابع می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad \forall y_۱, y_۲ \in Y \quad (xRy_۱ \wedge xRy_۲ \rightarrow y_۱ = y_۲)$$

برای نشان دادن چنین تابعی از نمادهایی مانند f, g ,... استفاده می کنیم. مثلا اگر رابطه R یک تابع و $(x, y) \in$

R باشند، می نویسیم

$$f: \quad X \to Y$$

$$x \mapsto y$$

به تفاوت پیکانهای بالا توجه کنید. اگر f یک تابع متناظر با رابطه R باشد، می‌نویسیم: $\Gamma(f) = R$ به بیان دیگر، $\Gamma(f)$ که آن را «گراف تابع f» می‌خوانیم، مجموعه‌ی زیر است:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

توجه ۱۸۶. از این به بعد وقتی می گوییم f تابع است، منظورمان این است که f یک تابع تمام است؛ یعنی اگر f از رابطه R آمده باشد، آنگاه $DomR = X$.

اگر $f: X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه X را دامنه f می خوانیم و مجموعه زیر را بُردِ f:

$$\{f(x) | x \in X\}$$

توجه ۱۸۷. بنا بر آنچه گفتیم اگر $f: X \to Y$ تابع باشد، آنگاه

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \quad f(x) = y.$$

مثال ۱۸۸. فرض کنید X یک مجموعه باشد و R یک رابطه هم ارزی روی X. عمل زیر یک تابع است:

$f: X \to X/R$

$x \mapsto [x]_R$

تعریف : تابع $f: X \to Y$ را یک به یک می خوانیم هرگاه

$$\forall x_۱, x_۲ \in X \quad \big(f(x_۱) = f(x_۲) \to x_۱ = x_۲\big)$$

به بیان دیگر

$$\forall x_۱, x_۲ \in X \quad \big(x_۱ \neq x_۲ \to f(x_۱) \neq f(x_۲)\big)$$

سوال ۱۸۹. آیا تابع مثال ۱۸۸ در حالت کلی یک به یک است؟

پاسخ سوال بالا منفی است. اگر مجموعه‌ی X دارای دو عضوِ متفاوتِ $x_۱, x_۲$ باشد که با هم در رابطه باشند، آنگاه $[x_۱]_R = [x_۲]_R$.

مثال ۱۹۰. فرض کنید X یک مجموعه باشد و $B \subseteq X$ یک زیرمجموعه باشد. عمل زیر یک تابع از $P(X)$ به $P(X)$ است :

$$f: P(X) \to P(X)$$

$$A \mapsto A \cup B$$

تعریف ۱۹۱. تابع $f : X \to Y$ را پوشا می خوانیم هرگاه :

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y$$

تمرین ۱۹۲. نشان دهید که تابع مثال ۱۹۰ یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد اگر و تنها اگر $B = \emptyset$

اثبات. نشان می دهیم تابع f در مثال ۲ یک به یک است اگر و تنها اگر $B = \emptyset$. بقیه‌ی اثبات را نیز به عهده‌ی شما می‌گذارم.

اگر $B \neq \emptyset$ آنگاه B دارای حداقل دو زیر مجموعه‌ي A_1, A_2 است به طوری که $A_1 \neq A_2$. داریم:

$$f(A_1) = f(A_2) = B$$

پس f یک به یک نیست.

اگر $B = \emptyset$ آنگاه برای هر $A \in X$ داریم

$$f(A) = A$$

واضح است که f یک به یک است.

□