۱۰ جلسه‌ی دهم

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که درباره‌ی اعدادِ حقیقی جمله‌ی اول در زیر درست است ولی جمله‌ی دوم نادرست:

۱. $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists r \in \mathbf{R} \quad ۰ < r < \frac{۱}{n}$

۲. $\exists r \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad ۰ < r < \frac{۱}{n}$

گفتیم که جمله‌ی دوم در بالا همان ویژگی ارشمیدسی است.

ویژگی ارشمیدسی:

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (۰, \frac{۱}{n}) = \emptyset$$

سوال ۱۱۳. آیا $P(A\cup B) = P(A)\cup P(B)$ ؟

پاسخ. در زیر نشان داده‌ایم که حکم بالا برقرار نیست، هر چند عبارت ۱ در پایین برقرار است. نخست ثابت می‌کنیم که

$$(۱) \quad P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$$

عبارت بالا را با روش استنتاجی زیر ثابت می‌کنیم:

۱ $\quad c \in P(A)\cup P(B) \to c\in P(A) \vee c \in P(B)$

۲ $\quad c\in P(A) \to c\subseteq A$

۳ $\quad A \subseteq A\cup B$

۴ $\quad c\in P(A) \to c\subseteq A\cup B$ بنا به $۲, ۳$

۵ $\quad c\in P(B) \to c\subseteq A\cup B A$ تکرار ۲و۳و۴ برای B به جای

۶ $\quad c\in P(A)\vee c\in P(B) \to c\subseteq A\cup B$۵ بنا به ۴و

۷ $\quad c\in P(A)\cup P(B) \to c\in P(A\cup B).$

حال فرض کنید $c\in P(A\cup B)$. آنگاه $c\subseteq A\cup B$. می‌خواهیم ببینیم که آیا $c\in P(A)\cup P(B)$؟

داریم:

$$** \quad c\in P(A)\cup P(B) \leftrightarrow c\in P(A)\vee c\in P(B)$$
$$\leftrightarrow c\subseteq A \vee c\subseteq B$$

سوال ۱۱۴. آیا $c\subseteq A\cup B \to (c\subseteq A)\vee(c\subseteq B)$ ؟

حکم بالا غلط است. مثال نقض:

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

$$A = \{۱, ۲\} \quad B = \{۳, ۴\}$$

$$c = \{۲, ۳\}$$

بنابراین این حکم که

$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

غلط است. $\square$

۱.۱۰ ادامه‌ی خانواده‌ها

مثال ۱۱۵. حاصل

$$\bigcup_{k \in \mathbf{N}} (k, k+۱]$$

را بیابید:

$$\bigcup_{k \in \mathbf{N}} (k, k+۱] = (۰, ۱] \cup (۱, ۲] \cup (۲, ۳] \cup \ldots \cup (k, k+۱] \cup \ldots$$
$$= (۰, \infty) = \{x \in \mathbf{R} | x > ۰\}$$

مثال ۱۱۶.

$$① \quad \bigcap_{k \in \mathbf{N}} (-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k})$$

$$② \quad \bigcap_{k \in \{۱,۲,\ldots,n\}} (-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k}) = (-۱, ۱) \cap (-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}) \cap (-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}) \cap \ldots \cap (-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n})$$

نخست نشان می‌دهیم ① مجموعه‌ی تهی است: توجه کنید که

$$x_۰ \in \bigcap_{k \in \mathbf{N}} (-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k}) \to \forall k \in \mathbf{N} \quad x_۰ \in (-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k})$$

$$\to \quad \star \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad -\frac{۱}{k} < x_۰ < \frac{۱}{k}$$

فرض کنید $x_۰ > ۰$. از $\star$ نتیجه می‌گیریم که

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad ۰ < x_۰ < \frac{۱}{k} \quad \text{بنا به ویژگی ارشمیدسی } \lightning$$

اگر $x_۰ < ۰$ آنگاه

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad -\frac{۱}{k} < x_۰ < ۰$$

$$\to \forall k \in \mathbf{N} \quad ۰ < -x_۰ < \frac{۱}{k} \quad \text{بنا به ویژگی ارشمیدسی } \lightning$$

همچنین توجه کنید که حاصلِ ② مجموعه‌ی $(-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n})$ است.

مثال ۱۱۷. قضیه‌ی (دمورگان) $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$ را ثابت کنید.

اثبات. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\underbrace{\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c}_{C} = \underbrace{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c}_{D}$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x_\cdot \in C \Leftrightarrow x_\cdot \in \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c$$

$$\Longleftrightarrow\ x_\cdot \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \ \Longleftrightarrow\ \forall\gamma\in\Gamma \quad (x_\cdot \notin A_\gamma)$$

$$\Longleftrightarrow\ \forall\gamma\in\Gamma \quad x_\cdot \in A_\gamma^c \ \Longleftrightarrow\ x_\cdot \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$$

□

مثال ۱۱۸. قضیه‌ی پخش‌پذیری را ثابت کنید:

اثبات پخش‌پذیری. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$A\cap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x_\cdot \in A\cap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) \Leftrightarrow x_\cdot \in A \wedge x_\cdot \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$$

$$\Leftrightarrow (x_\cdot \in A)\wedge(\exists\gamma_\cdot \in\Gamma \quad x_\cdot \in B_{\gamma_\cdot})$$

از $(x_\cdot \in A)\wedge(x_\cdot \in B_{\gamma_\cdot})$ نتیجه می‌گیریم که

$$x_\cdot \in A\cap B_{\gamma_\cdot}$$

از آنجا که

$$A\cap B_{\gamma_\cdot} \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$x_\cdot \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$A\cap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

حال می‌خواهیم بدانیم که آیا $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(A\cap B_\gamma\right)\subseteq A\cap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\right)$ نیز برقرار است؟

$$x_0\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(A\cap B_\gamma\right)\Rightarrow\exists\gamma_0\in\Gamma\quad x_0\in A\cap B_{\gamma_0}$$

$$\Rightarrow x_0\in A\wedge x_0\in B_{\gamma_0}\Rightarrow(x_0\in A)\wedge(x_0\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_{\gamma_0})$$

$$\Rightarrow x_0\in A\cap\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\Big)$$

□

۲.۱۰ ضربهای دکارتی

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند و $x\in A$ و $y\in B$. بنا به اصل جفت‌سازی $\{x,y\}$ یک مجموعه است و $\{x\}$ نیز یک مجموعه است. دوباره بنا به اصل جفت‌سازی $\{\{x\},\{x,y\}\}$ یک مجموعه است. این مجموعه را با (x,y) نشان می‌دهیم. پس

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

تمرین ۱۱۹. نشان دهید که

$$(x_0,y_0)=(x_1,y_1)\iff(x_0=x_1)\wedge(y_0=y_1)$$

ایده‌ی اثبات.

$$\{\{x_0\},\{x_0,y_0\}\}=\{\{x_1\},\{x_1,y_1\}\}$$

$$\{x_0\}=\{x_1\}\Rightarrow x_0=x_1$$

$$\{x_1,y_0\}=\{x_1,y_1\}\Rightarrow y_0=y_1$$

□

تعریف ۱۲۰. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}$$

تمرین ۱۲۱. نشان دهید که $A\times B$ یک مجموعه است.