مدرسه‌ی تابستانی درس‌هایی درباره‌ی مجموعه‌های شبه‌جبری و زیرتحلیلی

دانشگاه صنعتی اصفهان

تابستان ۹۸

همان‌طور که از موضوع پیدا است، هدف از این مدرسه‌ی کوتاه درس‌هایی درباره‌ی مجموعه‌های شبه‌جبری و زیرتحلیلی است. در این درس به اثبات قضیه‌ای که در مرجع [۱] آورده شده است و توسط ویلکی[۱] ارائه شده است، می‌پردازیم.

مرجع اصلی:

[1] J. Denef and L. van den Dries, "P-adic and Subanalytic Sets", Annals of Mathematics 128 (1988) 79-138.

[۱] Alex Wilkie

۱ جلسه‌ی اول

در این جلسه به مرور کارهایی که قرار است در این درس انجام شود، می‌پردازیم.

میدان اعداد مختلط $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, \circ, ۱)$ را در نظر بگیرید.

تعریف ۱. *مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{C}^n$ را ساخته‌شدنی می‌نامیم هرگاه ترکیبی بولی از مجموعه‌های به شکل زیر باشد:*

$$\{\bar{x} | f(\bar{x}) = \circ\}$$

که در آن f یک چندجمله‌ای با ضرایب در میدان اعداد مختلط ($f \in \mathbb{C}[X_۱, \ldots, X_n]$) است. منظور از ترکیب بولی از چنین مجموعه‌هایی، اشتراک و اجتماع این مجموعه‌ها و مکمل این مجموعه‌ها است. مجموعه‌های ساخته‌شدنی را همچنین می‌توان به عنوان ترکیبی بولی از مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی (وارایته‌ها) نیز تعریف کرد.

با توجه به این تعریف، واضح است که ترکیبات بولی مجموعه‌های ساخته‌شدنی، خود یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی است. اما این نکته در مورد تصویر مجموعه‌های ساخته‌شدنی در قضیه‌ی زیر آورده شده است.

قضیه ۲ (شوالی). *اگر $X \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ ساخته‌شدنی باشد، آنگاه تصویر X روی $\mathbb{C}^n$ نیز یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی است. علاوه‌بر این تصویر یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی تحت یک تابع چندجمله‌ای نیز یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی است.*

روش نظریه‌ی مدلی‌ای که برای اثبات این قضیه مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت زیر است. ابتدا ثابت‌می‌کنیم که ساختار $\mathcal{C}$ دارای خاصیت حذف سور است. به این معنی که هر فرمول دارای یک فرمول بدونِ سورِ معادل است. سپس با استفاده از حذف سور، ثابت می‌شود که مجموعه‌های ساخته‌شدنی دقیقاً مجموعه‌هایی هستند که با فرمول‌های بدون سور تعریف می‌شوند. بنابراین اگر مجموعه‌ی X توسط فرمول $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ تعریف شده باشد، تصویر X روی nــ مولفه‌ی اول ($\pi_n(X)$) توسط فرمول $\exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$، که یک فرمول با سور وجودی است، تعریف می‌شود. حال بنابر خاصیت حذف سور، فرمول $\exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ دارای یک معادل بدون سور است. پس مجموعه‌ی $\pi_n(X)$ یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی است.

یک نتیجه‌ی جالبتری که از حذف سور پذیرفتن این ساختار می‌توان نتیجه گرفت، اثبات قضیه‌ی ریشه‌های هیلبرت[۲] است.

قضیه ۳ (قضیه‌ی ریشه‌ها). *فرض کنید $\mathbf{K}$ یک میدان بسته‌ی جبری باشد. در این صورت یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی و ایده‌آل‌های رادیکال وجود دارد.*

هدف از این درس بررسی قضایایی مشابه در مورد میدان اعداد حقیقی است. دقت کنید که میدان اعداد مختلط و اعداد حقیقی بسیار شبیه هم هستند ولی تفاوت‌های عمده‌ای نیز دارد. به‌عنوان مثال میدان اعداد مختلط، بسته‌ی جبری است درصورتی که میدان اعداد حقیقی این‌چنین نیست، به این معنی که چندجمله‌ای‌هایی وجود دارند که در میدان اعداد حقیقی جواب ندارند. برای مثال چندجمله‌ای $x^۲ + ۱ = \circ$ در میدان اعداد حقیقی ریشه ندارد. با این حال چندجمله‌ای‌های با ضرایب فرد این میدان همواره دارای جواب هستند. تفاوت دیگر این دو میدان این است که میدان اعداد حقیقی میدانی مرتب است. به این معنی که دارای یک ترتیب است که با اعمال میدان سازگار است. ولی در میدان اعداد مختلط را نمی‌توان مرتب کرد، برای اینکه به‌عنوان مثال $i^۲ = -۱$. ولی یکی از خواص ترتیب این است که توان دوم هر عددی، مثبت باشد.

با این حال میدان اعداد حقیقی دارای یک ویژگی بسیار جالبی است. تنها فاصله‌ای که میان اعداد حقیقی و بستار جبری آن وجود دارد، همان عنصر i، ریشه‌ی چندجمله‌ای $x^۲ + ۱ = \circ$، است. به این معنی که میدان $\mathbb{R}(i)$ بسته‌ی جبری است.

حال به تعریف‌های مشابه در میدان اعداد حقیقی می‌پردازیم.

تعریف ۴. *مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را شبه‌جبری[۳] می‌نامیم هرگاه X را بتوان به‌صورت ترکیبی بولی از مجموعه‌هایی به‌صورت زیر نوشت:*

$$\{\bar{x} | f(\bar{x}) > \circ\}$$

که در آن $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$. دقت کنید که مجموعه‌ی $\{\bar{x} | f(\bar{x}) = \circ\}$ نیز یک مجموعه‌ی شبه‌جبری است. زیرا برابر اشتراک دو مجموعه‌ی $\{\bar{x} | f(\bar{x}) > \circ\}^\complement$ و $\{\bar{x} | f(\bar{x}) < \circ\}^\complement$ است.

[۲] Hilbert's Nullstellensatz

[۳] semialgebraic

واضح است که مجموعه‌های شبه‌جبری تحت ترکیبات بولی بسته هستند. همچنین مشابه قضیه‌ی شوالی، سوالی که اینجا مطرح می‌شود این است که آیا تصویر یک مجموعه‌ی شبه‌جبری، یک مجموعه‌ی شبه‌جبری است؟

قضیه ۵ (تارسکی)**.** *فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ یک مجموعه‌ی شبه‌جبری باشد. آنگاه تصویر X روی $\mathbb{R}^n$ نیز شبه‌جبری است.*

این قضیه را در اوایل این درس ثابت خواهیم کرد. برای اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه‌ی شوالی، ابتدا ثابت می‌کنیم که ساختار $(\mathbb{R}, +, <, \cdot, ۰, ۱)$ سورها را حذف می‌کند. سپس با توجه به اینکه مجموعه‌های شبه‌جبری دقیقاً مجموعه‌هایی هستند که با فرمول بدون سور تعریف می‌شوند و همچنین حذف سور این ساختار، نتیجه‌ی مطلوب را استنتاج می‌کنیم.

پروژه ۱. *درباره‌ی قضیه‌ی حقیقی ریشه‌ها تحقیق کنید.*

گابریلُف[۴] مشابه این نظریه را برای مجموعه‌ی توابع تحلیلی ارائه می‌دهد. در ادامه‌ی این درس به بیان اثبات قضایایی مشابه در این نظریه خواهیم پرداخت.

توابع تحلیلی توابعی هستند که توسط یک سری توانی قابل نمایش هستند. مهمترین ویژگی سری‌ها این است که دامنه‌ی همگرایی آنها یا یک نقطه است یا یک دیسک باز است. به بیانی دیگر، توابع تحلیلی دارای یک جرِم[۵] هستند. به بیانی دیگر اگر دو تابع تحلیلی (سری توانی) در یک دیسک باز کوچک با هم برابر باشند، این دو تابع تحلیلی یکسان هستند. بنابراین تمام توابعی که در یک دیسک با هم برابر هستند را یک تابع درنظر می‌گیریم. پس منظور از توابع تحلیلی، جرِم توابع تحلیلی است.

تعریف ۶. *مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را شبه‌تحلیلی[۶] می‌نامیم هرگاه برای هر $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ یک همسایگی باز $U_{\bar{a}}$ از $\bar{a}$ موجود باشد به طوری که $X \cap U_{\bar{a}}$ ترکیبی بولی از مجموعه‌هایی به صورت زیر باشد:*

$$\{\bar{x} | f(\bar{x} - \bar{a}) > ۰\}$$

که در آن f یک تابع تحلیلی است. توجه کنید که شرط $\bar{x} - \bar{a} \in D_f$ لازم است.

برخلاف مجموعه‌های شبه‌جبری، ترکیبات بولی مجموعه‌های شبه‌تحلیلی، مجموعه‌ی شبه‌جبری نیست.

تعریف ۷. *مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را زیرتحلیلی[۷] می‌نامیم هرگاه برای هر $\bar{a} \in \mathbb{R}$ یک همسایگی $U_{\bar{a}}$ و یک مجموعه‌ی شبه‌تحلیلی $Y \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ موجود باشد به‌طوری که $X \cap U_{\bar{a}} = \pi_n(Y)$.*

مهم‌ترین قضیه‌ای که در این دوره ثابت خواهیم کرد، قضیه‌ی زیر خواهد بود.

قضیه ۸ (گابریلُف)**.** *مکمل هر مجموعه‌ی زیرتحلیلی، یک مجموعه‌ی زیرتحلیلی است.*

از آنجایی که در تعریف مجموعه‌های زیرتحلیلی، تصویر گرفتن آورده شده است، بسته بودن این مجموعه‌ها نسبت به مکمل‌گیری یک قضیه‌ی اساسی است. ولی اگر با ابزار نظریه مدلی ثابت کنیم که مجموعه‌های شبه‌تحلیلی، مجموعه‌هایی هستند که در یک ساختار خاص تعریف‌پذیر هستند، در این صورت واضح است که مکمل یک مجموعه‌ی زیرتحلیلی، زیرتحلیلی است. زیرا مکمل یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر با فرمول φ، با فرمول $\neg\varphi$ تعریف می‌شود.
ایده‌ی اثبات: مطالعه‌ی نظریه‌ی مدلی ساختار $\mathbb{R}_{\text{an}} = (\mathbb{R}, \{f | f$ جرم یک تابع تحلیلی است$\})$. دقت کنید که توابع جمع و ضرب، توابع تحلیلی هستند، همینطور ۰ و ۱ توابع ثابت هستند. در این صورت مجموعه‌های تعریف پذیر در این ساختار، دقیقاً مجموعه‌های شبه‌تحلیلی هستند. اما مجموعه‌های زیرتحلیلی، مجموعه‌هایی هستند که با سور وجودی در این ساختار تعریف می‌شوند. بنابراین باید ثابت کنیم که اگر یک مجموعه با سور وجودی تعریف شود، مکمل آن نیز با سور وجودی تعریف می‌شود (در حالی که نقیض یک فرمول وجودی، یک فرمول عمومی است!).

[۴] Gabrielov
[۵] germ
[۶] semianalytic
[۷] subanalytic