

۱ جلسه‌ی بیست و پنجم

مثال ۱. توابع اولیه‌ی زیر را به دست آورید.

۱.

$$\int \cosh(\sqrt{x}) dx$$

پاسخ. نخست سعی می‌کنیم حاصل انتگرال را از طریق زیر بیابیم.

$$\int \underbrace{\cosh(\sqrt{x})}_u \underbrace{dx}_{dv} = uv - \int v du = uv - \int x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \sinh(\sqrt{x}) dx$$

همانطور که مشاهده می‌کنید ادامه‌ی این راه حل دشوار به نظر می‌رسد. پس باید روش دیگری پیدا کنیم.

$$\int \cosh(\sqrt{x}) dx = 2 \int \underbrace{\sqrt{x}}_u \underbrace{\frac{\cosh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}_{dv} dx =$$

$$2(\sqrt{x} \sinh(\sqrt{x}) - \int \frac{\sinh \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx) = 2\sqrt{x} \sinh(\sqrt{x}) - 2 \cosh(\sqrt{x}) + c$$

□

۲.

$$\int e^x \cos x dx$$

پاسخ.

$$\int \underbrace{e^x}_u \underbrace{\cos x dx}_{dv} =$$

$$uv - \int v du = e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_u \underbrace{\sin x dx}_{dv} =$$

$$e^x \sin x - (uv - \int v du) = e^x \sin x - e^x(-\cos x) - \int \cos x e^x dx$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$$

□

۳.

$$\int \sec^3 x dx$$

پاسخ.

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_u \times \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{dv} dx = \\ uv - \int v du &= \frac{1}{\cos x} \times \tan x - \int \tan x \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \\ \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx &= \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \int \frac{1}{\cos^3 x} dx + \underbrace{\int \frac{1}{\cos x} dx}_{=F} = \end{aligned}$$

F را در جلسه قبل محاسبه کرده‌ایم.

$$\Rightarrow \int \sec^3 x dx = \frac{\sin x}{\cos^3 x} + F$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 x dx = \frac{\frac{\sin x}{\cos^3 x} + F}{2}$$

در جلسه قبل دیدیم که

$$F(x) = \tan^{-1}(\sin(x))$$

پس

$$\int \sec^3 x dx = \frac{\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \tan^{-1}(\sin(x))}{2}$$

تمرین ۲. انتگرال فوق را با تغییر متغیر نصف کمان حل کنید؛ یعنی قرار دهید:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

در تغییر متغیر بالا، تابع \sin نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

□

.۴

$$\int \sin^{\mathfrak{Y}} x dx$$

پاسخ.

$$\int \sin^{\mathfrak{Y}} x dx = \int \frac{1 - \cos^{\mathfrak{Y}} x}{\mathfrak{Y}} = \frac{1}{\mathfrak{Y}} x - \frac{\sin^{\mathfrak{Y}} x}{\mathfrak{Y}} + c$$

□

توجه ۳.

$$\cos^{\mathfrak{Y}} x = \frac{1 + \cos^{\mathfrak{Y}} x}{\mathfrak{Y}}$$

$$\sin^{\mathfrak{Y}} x = \frac{1 - \cos^{\mathfrak{Y}} x}{\mathfrak{Y}}$$

.۵

تمرین ۴.

$$\int \cos^{\mathfrak{Y}}(x) dx$$

.۶

$$\int \sqrt{x^{\mathfrak{Y}} + \mathfrak{A}}$$

پاسخ. گفتیم که هرگاه $\sqrt{x^{\mathfrak{Y}} + a^{\mathfrak{Y}}}$ در انتگرالی ظاهر شود، می‌توان از تغییر متغیر $x =$

$a \sinh(t)$ یا $x = a \tan(t)$ استفاده کرد. در زیر هر دو راه را امتحان کرده‌ایم:

راه اول.

$$x = \mathfrak{Y} \sinh t \Rightarrow dx = \mathfrak{Y} \cosh t dt$$

$$\int \sqrt{x^{\mathfrak{Y}} + \mathfrak{A}} dx = \int \sqrt{\mathfrak{A} \sinh^{\mathfrak{Y}} t + \mathfrak{A}} \times (\mathfrak{Y} \cosh t dt) = \int \sqrt{\mathfrak{A} \cosh^{\mathfrak{Y}} t} \times (\mathfrak{Y} \cosh t) dt =$$

$$\int (\mathfrak{Y} \cosh t)(\mathfrak{Y} \cosh t) dt = \mathfrak{A} \int \frac{1 + \cosh^{\mathfrak{Y}} t}{\mathfrak{Y}} dt = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{Y}} t + \frac{\mathfrak{A} \sinh(\mathfrak{Y} t)}{\mathfrak{Y}}$$

$$\frac{9}{2} \sinh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{4} \sinh\left(2 \sinh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$

راه دوم.

$$x = 3 \tan t \Rightarrow dx = 3 \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$$\int \sqrt{x^2 + 9} dx = \int \sqrt{9 \tan^2 t + 9} \times \left(\frac{3}{\cos^2 t}\right) dt = \int \frac{3}{\cos t} \times \frac{3}{\cos^2 t} dt = \int 9 \sec^3(t) dt$$

در همین جلسه، $\int \sec^3(x) dx$ را محاسبه کرده‌ایم:

$$9 \int \sec^3(t) dt = 9 \left(\frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \tan^{-1}(\sin t)}{2} \right) =$$

$$9 \frac{\frac{\sin(\tan^{-1}(\frac{x}{3}))}{\cos^2(\tan^{-1}(\frac{x}{3}))} + \tan^{-1}(\sin(\tan^{-1}(\frac{x}{3})))}{2}$$

□

ادامه‌ی روش محاسبه‌ی انتگرال با استفاده از تغییر متغیر مثلثاتی

فرض کنید عبارت زیر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^2 - x^2}$ باشد. باید داشته باشیم:

$$a^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-a, a]$$

از آنجا که

$$-1 \leq \sin(t) \leq 1$$

داریم

$$-a \leq a \sin(t) \leq a$$

قرار می‌دهیم:

$$x = a \sin t \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

آنگاه

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t$$

$$dx = a \cos t dt$$

توجه کنید که علت این که دامنه‌ی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ را برای t در نظر گرفته‌ایم این است که در این دامنه، تابع \sin صعودی و یک به یک است و با حرکت کردن t در این دامنه، x دقیقاً در بازه‌ی $[-a, a]$ حرکت می‌کند.

روش دوم. از آنجا که تابع $\tanh(x)$ اکیداً صعودی است و

$$\forall x \quad -1 \leq \tanh(x) \leq 1$$

داریم

$$-a \leq a \tanh(x) \leq a$$

پس، از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = \tanh t$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \tanh^2 t} = \frac{a}{\cosh t}$$

مثال ۵. تابع اولیه‌ی زیر را بدست آورید.

$$\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx$$

پاسخ.

$$x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$$

$$\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos t$$

$$\int \frac{2 \cos t}{2 \sin t} \times (2 \cos t) dt = 2 \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt$$

$$2 \int \frac{1}{\sin t} dt - 2 \int \sin t dt$$

$$\int \frac{1}{\sin t} dt = \int \frac{\sin t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} dt$$

$$u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t dt$$

$$\int \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} dt = \int \frac{-du}{1 - u^2} = \dots$$

□

تمرین ۶. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

۲ ایجاد آمادگی برای کوئیز دوم

یادآوری ۷. اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0$$

آنگاه f در $[a, b]$ صعودی است.

علت: فرض کنید $x_1 \in [a, b]$ ، آنگاه اگر $x_1 > x_0$ ، بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین، عددی چون c در بازه‌ی مورد نظر موجود است به طوری که

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_0)$$

فرض کنید c یک نقطه‌ی بحرانی در (a, b) باشد. اگر در همسایگی $(c - \delta, c)$ مشتق تابع f منفی باشد و در $(c, c + \delta)$ مشتق تابع مثبت باشد، آنگاه c یک مینیمم نسبی برای تابع f است. به طور مشابه اگر در $(c - \delta, c)$ مشتق تابع مثبت باشد و در $(c, c + \delta)$ منفی باشد، c یک ماکزیمم نسبی است. توجه کنید که در این شرایط نیاز نیست که تابع f در نقطه‌ی c مشتق‌پذیر باشد، ولی اگر مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن در نقطه‌ی c صفر می‌شود.

مثال ۸. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = 3x + \sin^3 x$ مفروض است. نشان دهید که بر \mathbb{R} وارون‌پذیر است و تابع وارون آن مشتق‌پذیر است و $(f^{-1})'(3\pi)$ را محاسبه کنید.

پاسخ. اولاً دامنه‌ی تابع یاد شده کل \mathbb{R} است. داریم:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3 + 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$$

پس تابع f اکیداً صعودی است. این تابع همچنین پیوسته است پس f^{-1} موجود و تابعی پیوسته است. از آنجا که $f'(x) > 0$ تابع f^{-1} در تمام نقاط دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است. بنا به قضیه‌ی مشتق تابع وارون داریم:

$$(f^{-1})'(\pi) = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{3}$$

□

مثال ۹. فرض کنید تابع f بر \mathbb{R} مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x)$$

نشان دهید که

$$\exists c \quad f = ce^x.$$

پاسخ. تعریف کنید:

$$G(x) = \frac{f(x)}{e^x}$$

داریم

$$G'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{e^{2x}} = 0$$

پس G یک تابع ثابت است. یعنی

$$\exists c \quad G = c \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x} = c \Rightarrow f(x) = ce^x$$

□

مثال ۱۰. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \quad f'(x) = \frac{2x^3}{1+x^6}$$

و $f(0) = 0$ نشان دهید که

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq |x|$$

پاسخ. در اینجا فقط برای $x > 0$ حکم را ثابت می‌کنیم و اثبات حکم برای حالت $x < 0$ را به عهده‌ی دانشجو می‌گذاریم. نشان می‌دهیم که

$$\forall x > 0 \quad f(x) \leq x$$

به بیان دیگر

$$\forall x > 0 \quad \underbrace{x - f(x)}_{g(x)} \geq 0$$

داریم

$$g(0) = 0$$

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{2x^3}{1+x^6} = \frac{1+x^6-2x^3}{1+x^6} = \frac{(x^3-1)^2}{1+x^6} \geq 0$$

پس تابع $g(x)$ صعودی است. از آنجا که $g(0) = 0$ و این که تابع صعودی است، نتیجه می‌گیریم که

$$\forall x > 0 \quad g(x) \geq 0$$

پس

$$\forall x > 0 \quad f(x) \leq x$$

□

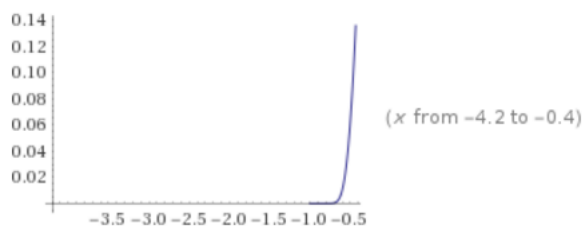
تمرین ۱۱. با استفاده از تحلیل مشتق، توابع زیر را رسم کنید (اکسترم‌های آنها را مشخص کنید).

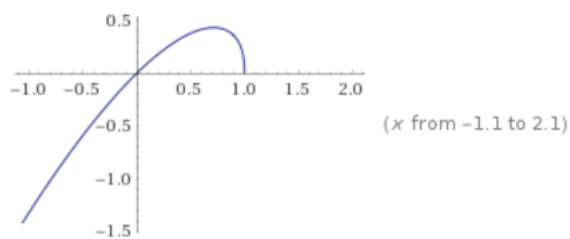
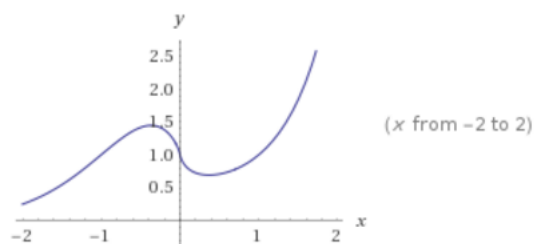
$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$$

$$f(x) = |x|^x$$

$$f(x) = x(1-x)^{\frac{1}{5}}$$

در زیر نمودارهای خواسته شده را (به همان ترتیب بالا) رسم کرده‌ایم:





مثال ۱۲. فرض کنید $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ بر $[0, \infty)$ پیوسته باشد و بر $(0, \infty)$ مشتق پذیر، و بدانیم که

$$\forall x \in (0, \infty) \quad f'(x) \geq 2x$$

و $f(0) = 1$ نشان دهید

$$\forall x \quad f(x) \geq x^2 + 1$$

پاسخ.

$$f(x) \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow \underbrace{f(x) - (x^2 + 1)}_{g(x)} \geq 0$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - 2x$$

از آن جا که $f'(x) \geq 2x$ تابع g تابع صعودی است و از آنجا که $g(0) = 0$ داریم:

$$\forall x \quad g(x) \geq 0.$$

□