۱ جلسه‌ی دوازدهم

در ریاضیات مقدماتی با تابع توان آشنا شده‌ایم. وقتی n یک عدد طبیعی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ بار}}$$

هدف ما در ادامه‌ی این درس، تعریف تعریف x^a است برای هر $x > ۰$ و هر عدد دلخواهِ $r \in \mathbb{R}$.
تعمیم توان به اعدادِ گویا کار ساده‌ای است:

مثال ۱. فرض کنید که $a > ۰$؛ ، نشان دهید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ عدد $b > ۰$ چنان موجود است که

$$b^n = a$$

(پس می‌توانیم $a^{\frac{۱}{n}}$ را برابر با عدد b در این مثال تعریف کنیم).

پاسخ. تابع $f(x) = x^n - a$ را در نظر بگیرید. نخست فرض کنید $a > ۱$.

$$f(۱) = ۱ - a < ۰$$

$$f(a) = a^n - a > ۰$$

بنا به قضیه‌ی بولتسانو

$$\exists x \in [۰, a] \quad f(x) = ۰ \Rightarrow x^n = a$$

حال اگر $a < ۱$، داریم

$$f(۱) = ۱ - a > ۰$$

$$f(a) = a^n - a < ۰$$

پس دوباره بنا به قضیه‌ی بولتسانو

$$\exists x \in [۰, a] \quad f(x) = ۰ \Rightarrow x^n = a$$

$\square$

توجه ۲. حال که $a^{\frac{۱}{n}}$ را تعریف کرده‌ایم، $a^{\frac{m}{n}}$ نیز به آسانی قابل تعریف است:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{۱}{n}})^m$$

برای رسیدن به هدف مورد نظر، یعنی تعریفِ a^r برای تمامِ r های حقیقی نیازمند طی کردن مسیر زیر هستیم.

مثال ۳. نشان دهید که تابع

$$e : \mathbb{R} \to (۰, \infty)$$

بازه‌ی $(۰, \infty)$ را می‌پوشاند. یعنی

$$\exp(\mathbb{R}) = (۰, \infty)$$

به بیان دیگر

$$\forall y \in (۰, \infty) \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad e^x = y.$$

پاسخ. عدد دلخواه $b \in (۰, \infty)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم معادله‌ی $e^x - b = ۰$ دارای جواب باشد.

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

پس برای $x > ۰$ داریم:

$$e^x > x$$

بنابراین $e^b > b$ یعنی

$$e^b - b > ۰$$

از طرفی از آنجا که $b > ۰$ داریم $\frac{۱}{b} > ۰$ پس

$$e^{\frac{۱}{b}} > \frac{۱}{b}$$

پس

$$\frac{۱}{e^{\frac{۱}{b}}} < b$$

یعنی

$$e^{-\frac{۱}{b}} < b$$

یعنی

$$e^{-\frac{۱}{b}} - b < ۰$$

قرار دهید : $\quad f(x) = e^x - b$ بنا بر آنچه گفته شد داریم

$$f(b) > ۰$$

$$f(-\frac{۱}{b}) < ۰$$

و f تابعی پیوسته است بنابراین

$$\exists x \in (-\frac{۱}{b}, b) \quad f(x) = ۰ \Rightarrow e^x = b$$

پس ثابت کردیم که e^x پوشاست. $\square$

توجه ۴. در مثال بالا گفتیم که بازه‌ی $(۰, \infty)$ دقیقاً برابر است با

$$\{e^x | x \in \mathbb{R}\}.$$

توجه کنید که عدد x به دست آمده در مثال بالا یکتاست. زیرا تابع e^x اکیداً صعودی و از این رو یک به یک است. پس اگر $y = e^{x_۱}$ آنگاه اگر $x_۱ \neq x_۲$ دو حالت داریم. اگر $x_۱ > x_۲$ آنگاه $y = e^{x_۱} > e^{x_۲}$ و اگر $x_۱ < x_۲$ آنگاه $y = e^{x_۱} < e^{x_۲}$.

نتیجه ۵ (یک نتیجه از قضیه‌ی مقدار میانی)**.** فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و I یک بازه باشد؛ یعنی به یکی از صورتهای زیر باشد:

$$I = [a, b], \quad I = (-\infty, a], \quad I = [a, +\infty), \quad I = (-\infty, \infty)$$

در اینصورت $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ نیز یک بازه است.

برای اثبات این گفته، دقت کنید که هرگاه $f(d)$ و $f(c)$ دو نقطه در $f(I)$ باشند و $f(c) < f(d)$ آنگاه بنا به قضیه‌ی مقدار میانی تمام بازه‌ی $(f(c), f(d))$ در $f(I)$ واقع می‌شود.

توجه ۶. ادعّا نکرده‌ایم که هر تابع پیوسته یک به یک است.

لم ۷. فرض کنید تابع $f\,:\,I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و یک به یک باشد و I یک بازه باشد و $J = f(I)$، و به علاوه تابعِ f در I یا اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد، [1] آنگاه

(آ) $f^{-1}\,:\,J \to I$ در تمام J پیوسته است.

اثبات. فرض کنید $c \in J$. داریم

$$\exists x_0 \in I \quad c = f(x_0)$$

فرض کنید (c_n) دنباله‌ای از اعضای J باشد به طوری که $\{c_n\} \to c$. باید نشان دهیم که دنباله‌ی $\{f^{-1}(c_i)\} \to x_0$. فرض کنیم $c_i = f(t_i)$. باید نشان دهیم که دنباله‌ی t_i به x_0 میل می‌کند.

اگر t_i به x_0 میل نکند، یک $\epsilon > 0$ موجود است به طوری که

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad |t_n - x_0| > \epsilon$$

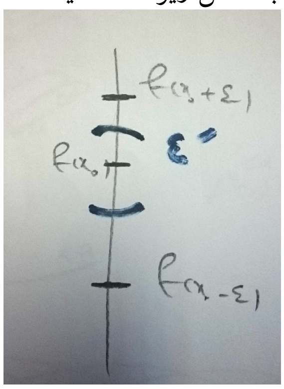
یعنی

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad [t_n > x_0 + \epsilon \quad \text{یا} \quad t_n < x_0 - \epsilon]$$

حال اگر تابعِ f صعودی باشد داریم

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad [f(t_n) > f(x_0 + \epsilon) \quad \text{یا} \quad f(t_n) < f(x_0 - \epsilon)]$$

به شکل زیر نگاه کنید:



[1] توجه: شرط اکیداً صعودی با اکیداً نزولی بودن تابع، در صورتی که I یک بازه‌ی محدودِ بسته به صورت $[a,b]$ باشد لازم نیست. در اینجا چون بازه‌های نامحدود هم در نظر گرفته شده است، به این شرط نیاز داریم.

همان طور که در شکل بالا مشخص است، از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که دنباله‌ی $f(t_n)$ هیچگاه نمی‌تواند به اندازه‌ی ϵ' به $f(x_۰)$ نزدیک شود، و این تناقض است. بحث در حالتی که تابع مورد نظر نزولی باشد نیز، مشابه است. $\square$

(ب) اگر f اکیداً صعودی باشد آنگاه $f^{-۱}$ اکیداً صعودی است.

اثبات. اگر f صعودی باشد داریم

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

حال اگر

$$f(x) < f(y)$$

دو مقدار در J باشند، حتما باید داشته باشیم $x < y$. زیرا در غیر این صورت یا $y < x$ یا $x = y$. اگر $y < x$ از آنجا که تابع صعودی است خواهیم داشت $f(x) > f(y)$. اگر $x = y$ از آنجا که تابع یک به یک است خواهیم داشت $f(x) = f(y)$. $\square$

توجه ۸. گفتیم که تابع $\exp : \mathbb{R} \to (۰, \infty)$ اکیداً صعودی است. (از این رو یک به یک است.) همچنین گفتیم که

$$\exp(\mathbb{R}) = \{e^x | x \in \mathbb{R}\} = (۰, \infty)$$

پس تابع وارون exp نیز پیوسته و اکیداً صعودی است. آن را با ln نمایش می‌دهیم.

$$\ln : (۰, \infty) \to \mathbb{R}$$

پیوسته، اکیداً صعودی، یک به یک

ویژگی‌های تابع ln

۱.

$$\forall x \in (۰, \infty) \quad e^{\ln x} = x$$

توجه کنید که دامنه‌ی این تابع، بازه‌ی $(۰, +\infty)$ است.

۲.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$$

۳.

$$\forall a, b \in (۰, \infty) \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\exists x \quad a = e^x$$

$$\exists y \quad b = e^y$$

$$ab = e^x e^y$$

$$\ln(ab) = \ln(e^{xy}) = x + y = \ln(a) + \ln(b)$$

۴.

$$\forall a \in (۰, \infty) \quad \ln(\frac{۱}{a}) = -\ln(a)$$

۵.

$$\forall a \in (۰, \infty) \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \ln(a^r) = r \ln a$$

۶.

$$\forall x \in (۰, ۱) \quad \ln(x) < \ln(۱) = ۰$$

(زیرا ln اکیداً صعودی است.)

۷.

$$\forall x > ۱ \quad \ln x > ۰$$

۸.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = \lim_{e^t \to +\infty} \ln(e^t) = \lim_{t \to +\infty} \ln(e^t) = \lim_{t \to +\infty} t = +\infty$$

۹.

$$\lim_{x \to ۰^+} \ln x = \lim_{t \to -\infty} \ln(e^t) = \lim_{t \to -\infty} t = -\infty$$

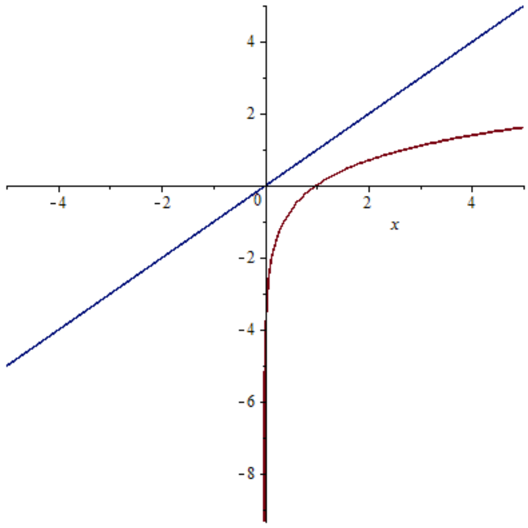
۱۰.

$$\forall x \in (۰, \infty) \quad x > \ln x$$

زیرا:

$$x < \ln x \Rightarrow e^x < x ⚠$$

نمودار تابع $\ln(x)$ به صورت زیر است:



در بالا با رنگ آبی نمودارِ $y = x$ را مشخص کرده‌ایم.

مثال ۹. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ نشان دهید که

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n}$$

پاسخ.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(e^t)}{e^{nt}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{nt}} = ۰$$

□

مثال ۱۰. ثابت کنید

$$\lim_{x\to ۰^+} x^n \ln x = ۰$$

پاسخ.

$$\lim_{x\to ۰^+} x^n \ln x = \lim_{t\to-\infty} e^{tn} \ln e^t \overset{u=-t}{=} \lim_{u\to\infty} e^{-nu} \ln e^{-u} = \lim_{u\to\infty} \ln \frac{-u}{e^{nu}} = ۰$$

$\square$

بالاخره به جائی رسیدیم که تابع توان را برای تمام توانهای حقیقی تعریف کنیم. فرض کنید $a > ۰$ و $r \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم.

$$a^r = e^{r \ln a}$$

مثلاً

$$۲^{\sqrt{۲}} = e^{\sqrt{۲} \ln ۲}$$

در مورد این تابع در جلسه‌ی بعد مفصلاً صحبت خواهیم کرد.

مثال ۱۱. نشان دهید که

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad ۲^x + ۳^x = x^۲ + x^۳$$

پاسخ. دقت کنید که

$$x = ۲ \to ۲^۲ + ۳^۲ > ۲^۲ + ۲^۳$$

$$x = ۳ \to ۲^۳ + ۳^۳ < ۳^۲ + ۳^۳$$

قرار دهید

$$f(x) = ۲^x + ۳^x - x^۲ - x^۳$$

داریم

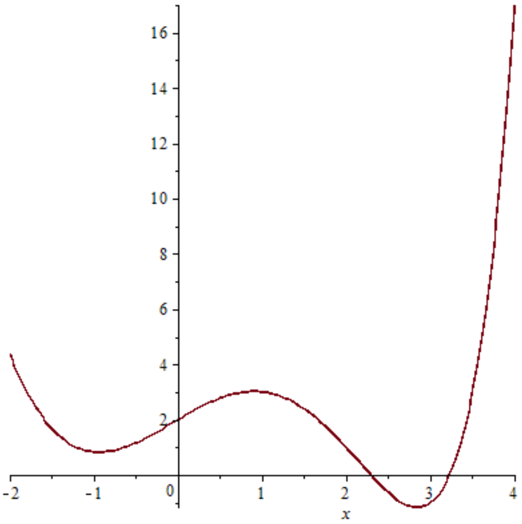
$$f(۲) > ۰$$

$$f(۳) < ۰$$

حال از آنجا که تابع f پیوسته است بنا به قضیه‌ی بولتسانو داریم:

$$\Rightarrow \exists x \in [۲, ۳] \quad f(x) = ۰$$

نمودار تابع f به صورت زیر است:



$$f(x) = ۲^x + ۳^x - x^۲ - x^۳$$

$\square$