۱ جلسه‌ی بیست و ششم

۱.۱ ادامه‌ی تغییر متغیر مثلثاتی و هذلولوی

اگر عبارت زیر انتگرال $\sqrt{x^۲ - a^۲}$ باشد، آنگاه

$$x^۲ - a^۲ \geqslant ۰ \Rightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$

از آنجا که برای $۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}$ داریم

$$۰ \leq \cos\theta \leq ۱$$

پس برای $۰ \leq \theta < \frac{\pi}{۲}$

$$۱ \leq \frac{۱}{\cos\theta} < \infty$$

و اگر $a > ۰$ خواهیم داشت

$$a \leq \frac{a}{\cos\theta} < \infty$$

به طور مشابه، برای $\frac{\pi}{۲} < \theta < \pi$ بحث کنید. بنابراین برای حل انتگرال می‌توانیم از یکی از تغییرمتغیرهای زیر استفاده کنیم:

(آ).

$$x = \frac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta \quad \theta \in (۰, \frac{\pi}{۲}) \cup (\frac{\pi}{۲}, \pi]$$

$$\sqrt{x^۲ - a^۲} = \sqrt{\frac{a^۲}{\cos^۲\theta} - a^۲} = a\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲\theta} - ۱} = a\tan\theta$$

$$dx = \frac{a\sin\theta}{\cos^۲\theta}d\theta$$

(ب).

$$x = \pm a\cosh u$$

$$۱ \leqslant \cosh u < \infty$$

$$a > ۰ \Rightarrow a \leqslant a\cosh u < \infty$$

$$a < ۰ \Rightarrow -\infty < a\cosh u \leqslant -a$$

$$\sqrt{x^۲-a^۲}=\sqrt{a^۲\cosh^۲ u-a^۲}=a\sinh u$$

$$dx=a\sinh u du$$

مثال ۱. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^۲-۲}}$$

پاسخ.

$$x=\sqrt{۲}\cosh u$$

$$dx=\sqrt{۲}\sinh u du$$

$$\sqrt{x^۲-۲}=\sqrt{۲}\sinh u$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^۲-۲}}=\int \frac{\sqrt{۲}\sinh u du}{(\sqrt{۲}\cosh u)\times(\sqrt{۲}\sinh u)}=$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\int \frac{۱}{\cosh u}du=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\int \frac{\cosh u}{\cosh^۲ u}du=$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\int \frac{\cosh u}{۱+\sinh^۲ u}du$$

$$t=\sinh u$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\int \frac{\cosh u}{۱+\sinh^۲ u}du=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\int \frac{dt}{۱+t^۲}=$$

$$\frac{\tan^{-۱}(t)}{\sqrt{۲}}=\frac{\tan^{-۱}(\sinh u)}{\sqrt{۲}}=\frac{\tan^{-۱}(\sinh(\cosh^{-۱}(\frac{x}{\sqrt{۲}})))}{\sqrt{۲}}+c$$

راه دوم.

$$x=\frac{\sqrt{۲}}{\cos\theta}$$

$$dx=\frac{\sqrt{۲}\sin\theta}{\cos^۲\theta}d\theta$$

$$\sqrt{x^۲-۲}=\sqrt{۲}\tan\theta$$

$$\int \frac{۱}{x\sqrt{x^۲-۲}}dx=\int \frac{\frac{\sqrt{۲}\sin\theta}{\cos^۲\theta}dt}{\frac{\sqrt{۲}}{\cos\theta}\times\frac{\sqrt{۲}\sin\theta}{\cos\theta}}=\int \frac{۱}{\sqrt{۲}}d\theta$$

□

روش تجزیه‌ی کسرها (کسرهای جزئی)

مثال ۲.

$$\frac{۱}{۱-x}+\frac{۱}{۱+x}=\frac{۱+x+۱-x}{(۱+x)(۱-x)}=\frac{۲}{۱-x^۲}$$

$$\int\frac{۱}{۱-x^۲}dx=\frac{۱}{۲}(\int\frac{۱}{۱-x}dx+\int\frac{۱}{۱+x}dx)=-\frac{۱}{۲}\ln|۱-x|+\frac{۱}{۲}\ln|۱+x|$$

مثال ۳.

$$\frac{۱}{۱-x}-\frac{۱}{۱+x}=\frac{۱+x-۱+x}{۱-x^۲}=\frac{۲x}{۱-x^۲}$$

می‌خواهیم روشی ارائه کنیم که طی آن انتگرالی به صورت زیر را بتوانیم محاسبه کنیم:

$$\int\frac{ax^۴+bx^۳+cx^۲+d}{a'x^۲+b'x+c'}dx$$

توجه ۴. اگر f یک چند جمله‌ای باشد و $f(a)=۰$ آنگاه یک چند جمله‌ای $g(x)$ موجود است به طوری که

$$f(x)=(x-a)g(x)$$

اما آیا می‌توان هر چندجمله‌ای را طور کامل به عوامل درجه‌ی ۱ تجزیه کرد؟ یعنی اگر f یک چندجمله‌ای باشد، آیا می‌توان نوشت:

$$f(x)=(x-a_۱)^{m_۱}\times\ldots\times(x-a_n)^{m_n}$$

پاسخ سوال بالا منفی است. برای مثال اگر داشته باشیم $f(x)=x^۲+x+۱$ آنگاه این معادله در اعداد حقیقی جواب ندارد، زیرا:

$$\Delta=b^۲-۴ac=۱-۴=-۳<۰$$

۲.۱ قضیه‌ی اساسی جبر

فرض کنید $Q(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، آنگاه $Q(x)$ را می‌توان به نحو یکتائی به فاکتورهای $(x-r)$ و $x^۲+px+q$ تجزیه کرد که در آنها ($p^۲-۴q<۰$).

$$Q(x)=(x-r_۱)^{l_۱}\times\ldots\times(x-r_n)^{l_n}\times(x^۲+p_۱x+q_۱)^{k_۱}\times\ldots\times(x^۲+p_mx+q_m)^{k_m}$$

مثال ۵. عبارت زیر را تجزیه می‌کنیم.

$$x^{6} - 1 = (x^{3} - 1)(x^{3} + 1) = (x - 1)(1 + x + x^{2})(x + 1)(1 - x + x^{2})$$

توجه ۶. در اعداد مختلط که بعداً به آنها خواهیم پرداخت، هر چند جمله‌ای را می‌توان به عوامل درجه‌ی ۱ تجزیه کرد.

۳.۱ اعداد مختلط

دنیای اعداد را اعداد طبیعی شروع کرده‌ایم؛ یعنی اعدادِ

$$0, 1, 2, \ldots$$

در اعداد طبیعی بسیاری ازمعادلات ساده‌ی خطی جواب ندارند؛ مثلاً معادله‌ی $x + 1 = 0$ با این که ضرایبش طبیعی است، در اعداد طبیعی جواب ندارد. از این رو، مجموعه‌ی بزرگتری از اعداد، به نام اعداد صحیح را ساختیم:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

در اعداد صحیح، معادله‌ی ساده‌ای مانند معادله‌ی زیر جواب ندارد.

$$3x - 2 = 0$$

اگر قرار بود فقط این اعداد را می‌داشتیم نمی‌شد یک پاره‌خط را به چندقطعه تقسیم کنیم! از این رو اعداد گویا را ساختیم:

$$\{\frac{p}{q} | q \neq 0 \text{ و } \text{صحیحند } p, q\}$$

در اعداد گویا هم خیلی از معادلات جواب ندارند؛ مثلاً معادله‌ی زیر

$$x^{2} - 2 = 0$$

علاوه بر آن مجموعه‌ی اعداد گویا حفره‌های زیادی دارد. مثلاً دنباله‌های زیادی از اعداد گویا هستند که حدشان در اعداد گویا نیست. مثلاً دنباله‌ای که به $\sqrt{2}$ میل کند. به بیان دیگر، مجموعه‌ی اعداد گویا از لحاظ ترتیبی کامل نیست؛ یعنی هر زیرمجموعه‌ی از بالاکراندار از آن دارای کوچکترین کران

بالا نیست. با پر کردن حفره‌های مجموعه‌ی اعداد گویا به اعداد حقیقی می‌رسیم. این مجموعه از اعداد از لحاظ ترتیبی، کامل است. اما از لحاظ جبری چطور؟
معادله‌ی بسیار ساده‌ی $x^2 + 1 = 0$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پاسخی ندارد. آیا مجموعه‌ی شامل اعداد حقیقی هست که از لحاظ جبری کامل باشد، یعنی هر چندجمله‌ای در آن ریشه داشته باشد؟
بیائید چنین مجموعه‌ای را با هم بسازیم: اگر قرار بود معادله‌ی فوق جواب می‌داشت:

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1}$$

$\sqrt{-1}$ در $\mathbb{R}$ نیست. شیئی به نام $i = \sqrt{-1}$ را به عنوان مهمان به اعداد حقیقی اضافه می‌کنیم. فعلا تنها می‌دانیم که

$$i \times i = -1$$

از اعداد حقیقی می‌خواهیم که با احترام گزاردن به حکم بالا، عدد i را در جمع خود بپذیرند؛ یعنی با آن چهارعمل‌اصلی انجام دهند:

$$2 \times i = 2i$$

$$a \times i = ai$$

$$a \times i \times b \times i = ai \times bi = -abi^2 = -ab$$

$$a_2 i^2 + a_1 i + b = -a_2 + a_1 i + b$$

$$a_3 i^3 + a_2 i^2 + a_1 i + a_0 = -a_3 i - a_2 + a_1 i + a_0 = (a_1 - a_3)i + (a_0 - a_2)$$

$$\dots$$

نتیجه ۷. با اضافه شدن صوریِ i به اعداد حقیقی و با چهار عمل اصلی به اعداد زیر می‌رسیم.

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\underbrace{a}_{\text{بخش حقیقی}} + \underbrace{b}_{\text{بخش موهومی}} i$$

روی مجموعه‌ی بالا باید جمع و ضرب تعریف کنیم: جمع.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

توجه ۸.

$$\sqrt{-۲} = \sqrt{۲ \times (-۱)} = \sqrt{۲}i$$

ضرب.

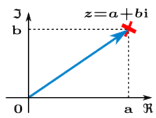
$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + -bd = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

از آنجا که جمع و ضرب در اعداد مختلط معنی دارد، می‌توان در این اعداد، چند جمله‌ای ساخت.

۴.۱ ادامه‌ی قضیه‌ی اساسی جبر

قضیه ۹. هر معادله‌ی چند جمله‌ای از درجه‌ی n با ضرایب در اعداد مختلط دارای $\underbrace{n}_{\text{با تکرار}}$ ریشه در اعداد مختلط است. به بیان دیگر، در هر چند جمله‌ای با ضرایب در اعداد مختلط، به طور کامل به عوامل درجه‌ی ۱ تجزیه می‌شود.

هر عدد مختلط را می‌توان به صورت یک زوج مرتب در نظر گرفت:



فاصله‌ی میان دو عدد حقیقی a و b برابر است با

$$d(a,b) = b - a$$

فاصله‌ی میان دو عدد مختلط $a+bi$ و $c+di$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(a+bi, c+di) = \sqrt{(a-c)^{۲} + (b-d)^{۲}}$$

توجه ۱۰. $a+bi > ۰$ و به طور کلی $a+bi < c+di$ معنی ندارد؛ یعنی در اعداد مختلط ترتیب معنا ندارد! اگر معنا می‌داشت باید هر عددی به توان ۲ مثبت می‌شد؛ ولی می‌دانیم که $i^{۲} = -۱$.

نه تنها چهار عمل اصلی در اعداد مختلط قابل تعریفند، بلکه بسیاری از توابع نیز در اعداد مختلط تعریف می‌شوند و تحدید آنها به اعداد حقیقی همان توابع آشنا هستند.

۵.۱ تعریف تابع نمایی در اعداد مختلط

اگر قرار باشد تابع نمائی، با همان ویژگی‌های همیشگیش در اعداد مختلط تعریف شود، باید داشته باشیم:

$$e^{a+bi} = e^a \times e^{bi}$$

معنی e^a را می‌دانیم، پس بیائید e^{bi} را تعریف کنیم:

توجه ۱۱. سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ در اعداد مختلط هم، همگراست و آن را با $\exp(z)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\theta^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}\theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

توجه ۱۲.

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

$$i^7 = -i$$

$$i^8 = 1$$

$$i^9 = i$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \frac{i^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = i \sum_{i=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n\theta}{(2n+1)!} = i\sin\theta$$

پس داریم:

توجه ۱۳.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

این بحث شیرین را فعلاً همینجا خاتمه می‌دهیم و در جلسه‌ی آخر دوباره بدان خواهیم پرداخت.

۶.۱ ادامه‌ی تجزیه‌ی کسرها

فرض کنید $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن P و Q چند جمله‌ای‌هایی با ضرایب حقیقی هستند. در روش تجزیه‌ی کسرها، ابتدا با تقسیم کردن P بر Q می‌توان به یک کسر رسید که در آن درجه‌ی صورت کمتر از درجه‌ی مخرج است. پس بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $\deg P < \deg Q$. به ازای هر عامل $(x-r)^l$ در تجزیه‌ی Q ، l کسرِ

$$\frac{A_1}{(x-r_1)^1} + \frac{A_2}{(x-r_2)^2} + \ldots + \frac{A_l}{(x-r_l)^l}$$

(l و A در اینجا عدد هستند) را در تجزیه‌ی $\frac{P}{Q}$ قرار می‌دهیم. همچنین به ازای هر عاملِ $(x^2+px+q)^k$ در تجزیه‌ی Q، باید k عاملِ

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^3} + \ldots \frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}$$

را در تجزیه‌ی $\frac{P}{Q}$ در نظر بگیریم. گفته‌ی بالا را در مثالهای زیر خواهید فهمید:

مثال ۱۴. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{1}{1+x^3}dx$$

اثبات.

$$1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$$

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2} = \frac{(A-Ax+Ax^2)+Bx+C+Bx^2+Cx}{(1+x)(1-x+x^2)}$$

$$(A+B)x^2 + (B-A+C)x + A + C = 1$$

$$A + C = 1 \Rightarrow c = 1 - A$$

$$A + B = 0 \Rightarrow A = -B \Rightarrow C = 1 + B$$

$$B - A + C = ۰ \Rightarrow B + B + (۱ + B) = ۰ \Rightarrow ۳B + ۱ = ۰ \Rightarrow B = -\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow A = \frac{۱}{۳}, \quad C = \frac{۲}{۳}$$

$$\int \frac{۱}{۱ + x^{۳}} dx = \int \frac{\frac{۱}{۳}}{۱ + x} dx + \int \frac{-\frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳}}{(۱ - x + x^{۲})} dx = \frac{۱}{۳} \ln(۱+x) + \int \frac{-\frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳}}{(۱ - x + x^{۲})} dx$$

به علت کم آوردن وقت، قسمت پایانی انتگرال بالا را در جلسه‌ی بعد محاسبه خواهیم کرد.

□