۱ جلسه‌ی ششم

در جلسه‌ی قبل دیدیم که

۱. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ آنگاه

۲. اگر $\forall n \quad 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$

- اگر $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست.
- اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ واگراست.

هم‌چنین در جلسه‌ی قبل درباره‌ی سریهای هندسی صحبت کردیم و گفتیم که اگر $|x| < 1$ داریم

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

حال تابعی را در نظر بگیرید که هر $x \in (-1, 1)$ را به حاصلجمع زیر ببرد:

$$1 + x + x^2 \ldots$$

این تابع دقیقاً برابر با تابعِ $\frac{1}{1-x}$ است. به بسط زیر برای تابع یادشده، بسط تیلور این تابع می‌گوئیم:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad \text{بسط تیلور} \quad |x| < 1$$

در این باره در جلسات آینده مفصلاً صحبت خواهیم کرد.

مثال ۱. تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^{n+1}}$ بازای چه مقادیری از x همگراست.

پاسخ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2x-5}{3})^n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2x-5}{3})^n$$

از آنجا که سری فوق یک سری هندسی است، برای این که همگرا باشد، باید داشته باشیم:

$$|\frac{2x-5}{3}| < 1$$

یعنی

$$-۱ < \frac{۲x-۵}{۳} < ۱ \Rightarrow -۳ < ۲x-۵ < ۳ \Rightarrow ۱ < x < ۴$$

$\square$

مثال ۲. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد نامنفی($\forall n \quad a_n, b_n \geqslant ۰$) و $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ هر دو همگرا باشند. نشان دهید در اینصورت $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n b_n$ نیز همگراست.

$$a_۰ + a_۱ + a_۲ + \ldots$$

$$b_۰ + b_۱ + b_۲ + \ldots$$

$$a_۰ b_۰ + a_۱ b_۱ + a_۲ b_۲ + \ldots$$

توجه کنید که ادعا نکرده‌ایم که

$$a_۰ b_۰ + a_۱ b_۱ + a_۲ b_۲ + \ldots = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \sum_{n=۰}^{\infty} b_n$$

همچنین توجه کنید که با فرض درست بودن مثال بالا، به ویژه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n^۲$ همگراست.

پاسخ. $\forall n \quad a_n, b_n \geqslant ۰$ بنابراین $S_n = \sum_{k=۰}^{n} a_k b_k$ صعودی است:

$$S_{n+۱} - S_n = a_n b_n \geqslant ۰$$

کافی است نشان دهیم که دنباله‌ی S_n کراندار است.

می‌دانیم که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست. پس داریم: $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$ بنابراین برای $\epsilon = ۱$ عدد $N_۱ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_۱ \quad \underbrace{a_n < ۱}_{|a_n - ۱| < ۰}$$

پس داریم:

$$\sum_{n=N_۱+۱}^{\infty} a_n b_n \leqslant \sum_{n=N_۱+۱}^{\infty} ۱ \times b_n$$

از طرفی b_n، $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگراست. پس عبارت $\sum_{n=N_1+1}^{\infty} b_n$ کراندار است. حال توجه کنید که

$$S_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = \underbrace{\sum_{n=0}^{N_1} a_n b_n}_{\text{کراندار، زیرا جمعی متناهی است}} + \underbrace{\sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n b_n}_{\text{کراندار}} \leqslant M$$

پس S_n کراندار است. $\square$

مثال ۳. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n+1}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. از آنجا که در صورت و مخرج، توان می‌بینیم منطقی به نظر می‌رسد که این سری را با یک pسری به صورت $\sum \frac{1}{n^p}$ مقایسه کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n+1}} \xrightarrow{\text{مخرج را بزرگ می‌کنیم تا کسر کوچک شود}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n^3+n^3}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3} \times n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3} \times n^{\frac{1}{2}}}$$

می‌دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ واگراست. زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

پس سری مورد نظر ما نیز واگراست. $\square$

در زیر آزمون مقایسه‌ی حدی را ارائه کرده‌ایم. این آزمون در واقع همان آزمون مقایسه است که به زبان دیگری نوشته شده است. به بیان بهتر، در آزمون مقایسه‌ی حدی، سریها را از جمله‌های به‌اندازه‌ی کافی بزرگ به بعد، با هم مقایسه می‌کنیم. وقتی سخن از به اندازه‌ی کافی بزرگ به میان آید، در واقع سخن از مفهوم حد است.

لم ۴ (آزمون مقایسه‌ی حدی)**.** فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به گونه‌ای که

$$\forall n \begin{cases} a_n \geqslant 0 \\ b_n > 0 \end{cases}$$

۱. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۰$ آنگاه اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگرا باشد $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

$$\begin{array}{cccc} a_۰ & a_۱ & a_۲ & \dots \\ b_۰ & b_۱ & b_۲ & \dots \end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۰$$

توجه کنید که در این آزمون بحثِ همگرائی یا واگرائی سریِ $\sum \frac{a_n}{b_n}$ نیست. بلکه می‌خواهیم بدانیم که چگونه می‌شود از همگرائی یا واگرائي $\sum a_n$ همگرائي یا واگرائیِ $\sum b_n$ را نتیجه گرفت.

اثبات. فرض: $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست.
حکم: $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست.

سری $\sum a_n$ صعودی است (زیرا جمله‌های آن نامنفیند) پس کافی است کرانداری آن را ثابت کنیم.

داریم: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۰$ پس برای $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ عددِ $N_{\frac{۱}{۲}} \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$\forall n > N_{\frac{۱}{۲}} \quad \frac{a_n}{b_n} < \frac{۱}{۲}$$

یعنی

$$\forall n > N_{\frac{۱}{۲}} \quad a_n < \frac{b_n}{۲}$$

پس

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n \leqslant \frac{۱}{۲} \sum_{n=۰}^{\infty} b_n.$$

حال از آن جا که $\frac{۱}{۲} \sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست، بنا به آزمون مقایسه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.
□

همان گونه که مشاهده کردید، در اثبات بالا همان آزمون مقایسه را از جمله‌ای به بعد به کار گرفتیم.

۲. (قسمت دوم لم) اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > ۰$ آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگرا است اگروتنهااگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا باشد (یا از همگرائی هر یک از این دو سری، همگرائی دیگری نتیجه می‌شود و از واگرائي هر یک از این دو سری، واگرائی دیگری نتیجه می‌شود)

اثبات. از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$، داریم:

$$\forall\epsilon > ۰ \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |\frac{a_n}{b_n} - L| < \epsilon$$

$$\forall n > N_\epsilon \quad L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon$$

می‌دانیم که $L > ۰$ پس یک عددِ $\epsilon > ۰$ را چنان در نظر بگیرید که $L > \epsilon > ۰$ در نتیجه داریم:

$$\forall n > N_\epsilon \quad b_n(L-\epsilon) < a_n < b_n(L+\epsilon)$$

نشان می‌دهیم که اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست. داریم

$$\sum_{n=N_\epsilon+۱}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=N_\epsilon+۱}^{\infty} b_n$$

عبارت سمت راست همگراست، پس $\sum_{n=N_\epsilon+۱}^{\infty} a_n$ نیز همگراست. همچنین

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n = \sum_{n=۰}^{N_\epsilon} a_n + \sum_{n=N_\epsilon+۱}^{\infty} a_n$$

پس $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست.

به طور مشابه با استفاده از نامساویِ

$$\forall n > N_\epsilon \quad b_n(L-\epsilon) < a_n$$

نشان دهید که اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum b_n$ همگراست.

□

۳. (قسمت سوم لم) اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ آنگاه اگر $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ واگرا باشد $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

اثبات. از آنجا که $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$$

حال بنا به قسمت اول لم اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ نیز همگراست. پس اگر $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ نیز واگراست. □

مثال ۵. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[4]{3n+2n^5}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. با نگاهی به توانهای n در صورت و مخرج عبارت داخل سری متوجه می‌شویم که اگر صورت را در n ضرب کنیم (یعنی اگر عبارت داخل سری را بر $\frac{1}{n}$ تقسیم کنیم) حاصل به بی‌نهایت میل خواهد کرد. به بیان دیگر، این سری را با $\sum\frac{1}{n}$ مقایسه می‌کنیم. فرض کنید $b_n=\frac{1}{n}$. می‌دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگراست. اگر $a_n=\frac{n}{\sqrt[4]{3n+2n^5}}$ و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[4]{3n+2n^5}}=\infty$$

پس $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگراست (با توجه به آزمون مقایسه‌ی حدی). در زیر علت این را که حد فوق بی‌نهایت شده است بیان کرده‌ایم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[4]{3n+2n^5}}\overset{\text{مخرج را بزرگ می‌کنیم}}{\geqslant}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[4]{5n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[4]{5}\times n^{\frac{5}{4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2-\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{5}}=\infty$$

□

بهتر است پیش از ادامه‌ی درس، مختصری درباره‌ی بی‌نهایت شدن حد دنباله‌ها بگوئیم.

توجه ۶. عبارتِ $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$ یعنی:
جملات دنباله **به اندازه‌ی دلخواه** بزرگ می‌شوند، به شرط اینکه اندیسهای آنها **به اندازه‌ی کافی** بزرگ شوند.

$$\overbrace{\forall M\in\mathbb{N}}^{\text{اندازه‌ی دلخواه}}\quad\overbrace{\exists N_M\in\mathbb{N}}^{\text{اندازه‌ی کافی}}\quad\forall n>N_M\quad |a_n|>M$$

بحث را با حل مثالی از دنباله‌ها پی می‌گیریم.

مثال ۷ (از دنباله‌ها)**.** فرض کنید که $a > ۱$ نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = ۰$.

معنی عبارت بالا این است که «نرخ رشدِ» دنباله‌ی a^n از نرخ رشدِ دنباله‌ی n بیشتر است. اگر بخواهید با استناد به «نرخ رشد» این سوال را حل کنید، نوشتن چند جمله‌ی اول دو دنباله و مقایسه‌ی آنها کافی نیست.

پاسخ. می‌دانیم که $a > ۱$ پس $b \geqslant ۰$ موجود است به طوری که $a = b + ۱$.

$$\frac{n}{a^n} = \frac{n}{(b+۱)^n} = \frac{n}{۱ + nb + \underbrace{\binom{n}{۲}}_{\frac{n(n-۱)}{۲}} b^۲ + \ldots + \binom{n}{n} b^n}$$

داریم $\binom{n}{۲} b^۲ \geqslant (b+۱)^n$ پس

$$۰ \leqslant \frac{n}{(b+۱)^n} \leqslant \frac{n}{\frac{n(n-۱)}{۲} b^۲}$$

دنباله‌ی $\frac{n}{\frac{n(n-۱)}{۲} b^۲}$ به صفر میل می‌کند، پس بنا به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = ۰$$

علت این که جمله‌ی $\binom{n}{۲} b^۲$ را استفاده کردیم این بود که می‌خواستیم توانِ ۲ برای n ظاهر شود. $\square$

از مثال بالا نتیجه می‌شود که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N \quad \forall n > N \quad n < (a^n)\epsilon.$$

در این جلسه ثابت کردیم که • اگر a_n و b_n دو دنباله با جملات نامنفی باشند و b_n ها مخالف صفر باشند، آنگاه اگر $\lim \frac{a_n}{b_n} = ۰$ آنگاه از همگرائی $\sum b_n$ همگرائیِ $\sum a_n$ نتیجه می‌شود و از واگرائیِ $\sum a_n$ واگرائی $\sum b_n$ نتیجه می‌شود.

- با فرضهای بالا اگر $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > ۰$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست اگروتنهااگر $\sum b_n$ همگرا باشد.
- $\lim \frac{n}{a^n} = ۰$ برای هر $a > ۱$.