۱ جلسه‌ی سیزدهم

در انتهای جلسه‌ی قبل، تابع x^r را برای r های حقیقی به صورت زیر تعریف کردیم:

تعریف ۱. اگر $a > ۰$ آنگاه برای $r \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$a^r := e^{r \ln a}$$

توجه کنید که در تعریف بالا شرط $a > ۰$ را دامنه‌ی تابعِ $\ln$ ایجاب کرده است.

ویژگی‌های تابع توان

۱. اگر $r \in \mathbb{N}$ آن‌گاه

$$a^r = e^{r \ln a} = e^{\ln(\overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{بار } r})} = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{بار } r}$$

یعنی تابع توان، تعمیم همان تابع توانی است که در ریاضیات مقدماتی فراگرفته‌ایم.

۲. به طور مشابه

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

توجه کنید که $\sqrt[n]{a}$ را در جلسات قبل، با استفاده از قضیه‌ی بولتسانو تعریف کرده‌ایم.

۳.

$$\forall r_۱, r_۲ \in \mathbb{R} \quad a^{r_۱ + r_۲} = a^{r_۱} a^{r_۲}$$

اثبات:

$$e^{(r_۱ + r_۲)\ln a} = e^{r_۱ \ln a + r_۲ \ln a} = e^{r_۱ \ln a} e^{r_۲ \ln a} = a^{r_۱} a^{r_۲}$$

۴.

$$\forall r_۱, r_۲ \in \mathbb{R} \quad (a^{r_۱})^{r_۲} = a^{r_۱ r_۲}$$

۵.

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad a^{-r} = e^{-r \ln a} = e^{\frac{۱}{r \ln a}} = \frac{۱}{a^r}$$

۶. تابع $a^x = e^{x \ln a}$ که در آن $a > ۰$، در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته است (زیرا ترکیب دو تابعِ پیوسته‌ی $x \ln a$ و e^x است).

۷. اگر $a > ۱$ آنگاه

$$\ln a > ۰$$

پس اگر $x_۱ > x_۲$ آنگاه

$$x_۱ \ln a > x_۲ \ln a$$

از آنجا که e تابعی صعودی است داریم:

$$e^{x_۱ \ln a} > e^{x_۲ \ln a}$$

یعنی

$$a^{x_۱} > a^{x_۲}$$

پس ثابت کردیم که اگر $a > ۱$ آنگاه a^x صعودی است.

۸. اگر $a < ۱$ آنگاه

$$\ln a < ۰$$

اگر $x_۱ < x_۲$ آنگاه

$$x_۱ \ln a > x_۲ \ln a$$

پس

$$e^{x_۱ \ln a} > e^{x_۲ \ln a}$$

پس

$$a^{x_۱} > a^{x_۲}$$

یعنی در این صورت تابع a^x نزولی است.

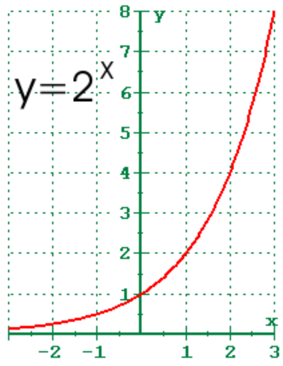
۹.

$$۱^x = e^{x \ln ۱} = e^۰ = ۱$$

۱۰. اگر $a > ۱$ ، آنگاه

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = +\infty$$

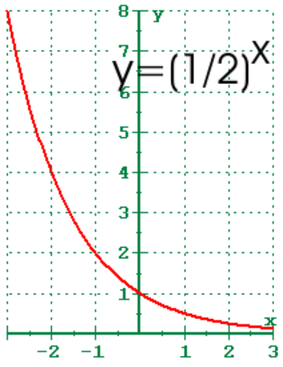
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = ۰$$



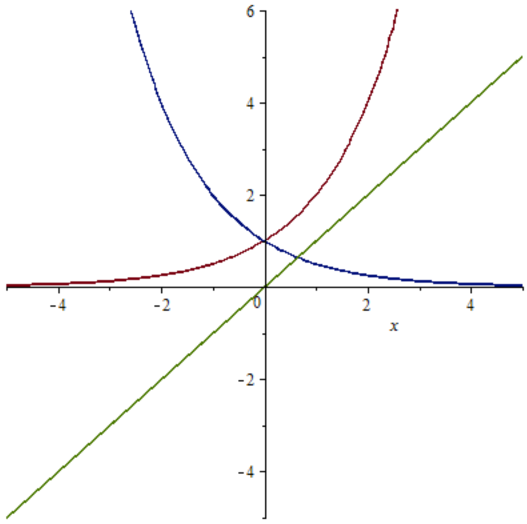
اگر $۰ < a < ۱$ آنگاه

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = ۰$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$



در زیر توابعِ $x, (\frac{۱}{۲})^x, ۲^x$ را کشیده‌ایم:



مثال ۲. نشان دهید که تابع زیر در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$$

پاسخ.

$$f(x) = \begin{cases} x^x & x > ۰ \\ (-x)^x & x < ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$$

تابعِ f در بازه‌ی $(۰, +\infty)$ تابع پیوسته است. زیرا $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$ و توابع $\ln x$ و $x \ln x$ پیوسته هستند. پس $e^{x \ln x}$ هم پیوسته است. به طور مشابه تابع f در $(-\infty, ۰)$ پیوسته است (تحقیق کنید). حال

$$\lim_{x \to ۰^+} x^x = \lim_{x \to ۰^+} e^{x \ln x}$$

با استفاده از تغییر متغیر $e^t = x$ داریم:

$$\lim_{e^t \to ۰^+} e^{e^t \ln e^t} = \lim_{t \to -\infty} e^t \ln e^t = \lim_{t \to -\infty} e^t t$$

بار دیگر از تغییر متغیر $t = -u$ استفاده می‌کنیم. پس

$$\lim_{t \to -\infty} e^t t = \lim_{u \to +\infty} e^{-u}(-u) = \lim_{u \to +\infty} \frac{۱}{e^u}(-u) = ۰$$

پس

$$\lim_{x\to ۰} x^x = e^۰ = ۱$$

به طور مشابه ثابت کنید که

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۱$$

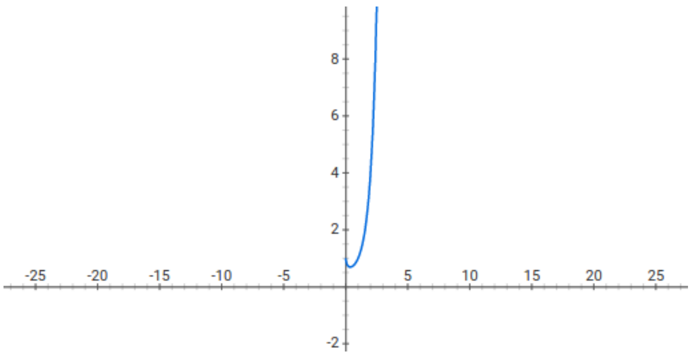
و از آن نتیجه بگیرید که تابعِ f در همه‌ی نقاط پیوسته است. $\square$

بررسی تابعِ x^x

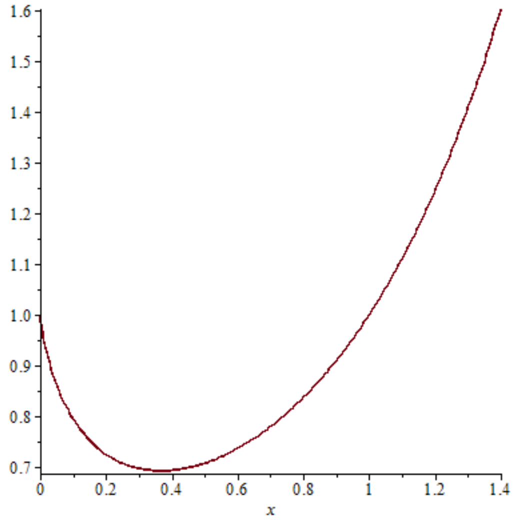
دامنه‌تابع برابر است با $\{x \in \mathbb{R} : x > ۰\}$.

$$\lim_{x\to +\infty} x^x = +\infty$$

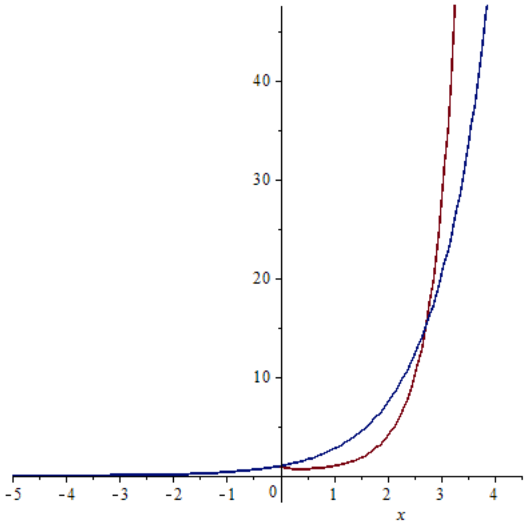
$$\lim_{x\to ۰^+} x^x = ۱$$



در زیر تابعِ x^x را از نزدیک نشان داده‌ایم:



در زیر تابعِ x^x و تابع e^x را در یک شکل نمایش داده‌ایم. توجه کنید که دو نمودار در نقطه‌ی $x = e$ با هم تقاطع دارند.



توجه ۳. گفتیم که تابع a^x اگر $a > ۱$ اکیداً صعودی است و اگر $a < ۱$ اکیداً نزولی است. تابع مورد نظر پیوسته است. بنابراین تابع معکوسِ نیز قابل تعریف و پیوسته است که آن را با $\log_a^x$ نمایش می‌دهیم.

$$a > ۱ \leftarrow \log_a^x \text{ صعودی}$$

$$a < ۱ \leftarrow \log_a^x \text{ نزولی}$$

از آنجا که $\log_a^x$ معکوس a^x است، پس

$$a^{\log_a^x} = x$$

زیرا همواره داریم:

$$f \circ f^{-۱} = x$$

همچنین

$$\log_a^{a^x} = x$$

زیرا همواره داریم:

$$f^{-۱} \circ f = x$$

همچنین توجه کنید که دامنه‌ی $\log_a^x$ (و نیز بُردِ a^x) تمامِ x های بزرگتر از صفر است.

توجه ۴.

$$\log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

اثبات. کافی است ثابت کنیم که

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = x$$

زیرا معکوس یک تابع در صورت وجود یکتاست. داریم:

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\frac{\ln x}{\ln a}\ln a} = e^{\ln x} = x.$$

□

تمرین ۵. نمودار $\log_a^x$ را در حالات مختلف رسم کنید.

مثال ۶. نشان دهید

$$\exists x \in (۰, +\infty) \quad \ln x = \frac{x}{۱ + x^۲}$$

پاسخ. قرار دهید:

$$f(x) = \ln x - \frac{x}{۱ + x^۲}$$

$$f(۱) = -\frac{۱}{۲} < ۰$$

$$f(e) = ۱ - \frac{e}{۱ + e^{۲}} > ۰$$

پس بنا به قضیه‌ی بولتسانو، تابع مورد نظر در بازه‌ی $[۱, e]$ حداقل یک بار صفر می‌شود. $\square$

توجه ۷. اگر

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

آنگاه

$$\forall N \quad \exists M \quad x > M \quad f(x) > N$$

یعنی از جایی به بعد تابع از هر N بزرگتر و به ویژه مثبت است. از این نکته در زیر به همراه قضیه‌ی بولتسانو استفاده شده است.

مثال ۸. هر چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد در $\mathbb{R}$ ریشه دارد.

پاسخ. فرض کنیم $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد باشد. ثابت کنید که

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

پس بنا بر آنچه در بالا گفته‌ایم $f(x)$ از جایی به بعد مثبت است. همچنین ثابت کنید که

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

یعنی f از جایی به قبل کمتر از صفر است. بنا به قضیه‌ی بولتسانو

$$\exists x \quad f(x) = ۰$$

$\square$

گفته‌ی بالا در مورد چندجمله‌های با درجه‌ی زوج درست نیست. مثلاً چندجمله‌ای زیر در $\mathbb{R}$ هیچ ریشه‌ای ندارد.

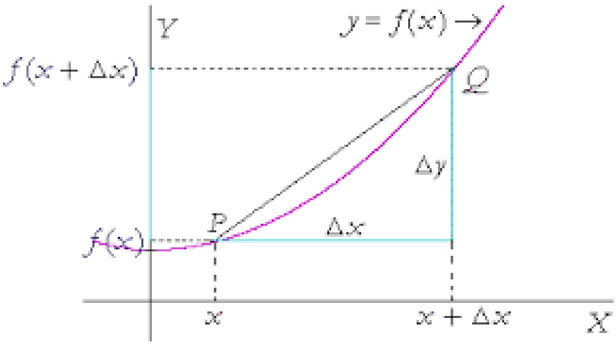
$$x^{۲} + ۱ = ۰$$

تعمیم ۹. هر چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد پوشاست.

مشتق و کاربردهای آن

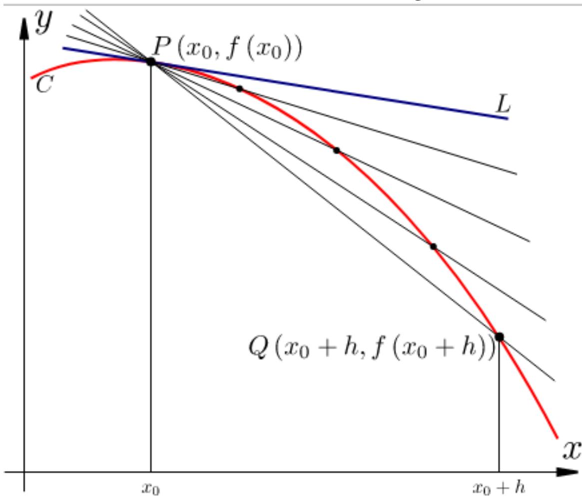
مطالعه‌ی مشتق، یعنی مطالعه‌ی تغییرات یک متغیر بر حسب تغییرات بی‌نهایت کوچک یک متغیر دیگر. همان گونه که تا کنون یاد گرفته‌ایم، در حساب هرگاه سخن از بی‌نهایت کوچک یا بی‌نهایت بزرگ شود، منظور حد گرفتن است. مفهوم مشتق، معادل مفهوم سرعت لحظه‌ای در فیزیک است.

در شکل زیر شیب خط PQ به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\text{شیب خط } PQ : \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

حال اگر Q روی منحنی حرکت کند و بی‌نهایت به P نزدیک شود، یعنی اگر Δx به صفر میل کند، شیب خط PQ میل می‌کند به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی x:



$$\lim_{\triangle x\to ۰}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \overset{\text{لایبنیتز}}{=} \frac{dy}{dx}$$

تعریف ۱۰. فرض کنید تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی $x_{\circ}$ تعریف شده باشد. این تابع را در $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر می‌خوانیم هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{h\to \circ}\frac{f(x_{\circ}+h)-f(x_{\circ})}{h}$$

اگر حد بالا موجود باشد آن را با $f'(x_{\circ})$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر

$$f'(x_{\circ})=\lim_{x\to x_{\circ}}\frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}$$

می‌گوییم تابع f در بازه‌ی I مشتق‌پذیر است، هرگاه در تمام نقاط این بازه مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، f' نیز روی بازه‌ی I، یک تابع است:

$$x\in I\to f'(x)$$

مثال ۱۱. مشتق تابع $f(x)=x^n$ را در هر $x_{\circ}$ بیابید.

پاسخ.

$$\lim_{x\to x_{\circ}}\frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}=\lim_{x\to x_{\circ}}\frac{x^n-x_{\circ}^n}{x-x_{\circ}}$$

یادآوری ۱۲.

$$a^n-b^n=(a-b)(\underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^{2}+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}}_{\sum_{i+j=n-1}a^ib^j})$$

$$\lim_{x\to x_{\circ}}\frac{x^n-x_{\circ}^n}{x-x_{\circ}}=\lim_{x\to x_{\circ}}\frac{(x-x_{\circ})(x^{n-1}+x^{n-2}x_{\circ}+x^{n-3}x_{\circ}^{2}+\ldots+xx_{\circ}^{n-2}+x_{\circ}^{n-1})}{x-x_{\circ}}=$$

$$\underbrace{x_{\circ}^{n-1}+x_{\circ}^{n-1}+\ldots+x_{\circ}^{n-1}}_{n\ \text{بار}}=nx_{\circ}^{n-1}$$

□

مثال ۱۳. مشتق $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ را در بازه‌ی $(\circ,\infty)$ محاسبه کنید.

اثبات.

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{x^{\frac{۱}{n}}-x_۰^{\frac{۱}{n}}}{x-x_۰}$$

$$x-x_۰=(x^{\frac{۱}{n}})^n-(x_۰^{\frac{۱}{n}})^n=(x_۰^{\frac{۱}{n}})(x^{\frac{n-۱}{n}}+x^{\frac{n-۲}{n}}x_۰^{\frac{۱}{n}}+\ldots+x^{\frac{۱}{n}}x_۰^{\frac{n-۲}{n}}+x_۰^{\frac{n-۱}{n}})$$

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{x^{\frac{۱}{n}}-x_۰^{\frac{۱}{n}}}{x-x_۰}=\lim_{x\to x_۰}\frac{x^{\frac{۱}{n}}-x_۰^{\frac{۱}{n}}}{(x^{\frac{۱}{n}}-x_۰^{\frac{۱}{n}})(x^{\frac{n-۱}{n}}+x^{\frac{n-۲}{n}}x_۰^{\frac{۱}{n}}+\ldots+x^{\frac{۱}{n}}x_۰^{\frac{n-۲}{n}}+x_۰^{\frac{n-۱}{n}})}=$$

$$\frac{۱}{nx_۰^{\frac{n-۱}{n}}}=\frac{۱}{nx^{۱-\frac{۱}{n}}}=\frac{۱}{n}x_۰^{\frac{۱}{n}-۱}$$

$\square$

مثال ۱۴. مشتق تابع e^x را در $x_۰=۰$ بیابید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-e^۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-۱}{x}$$

$$e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\ldots$$

$$e^x-۱=x(۱+\underbrace{\frac{x}{۲!}+\frac{x^۲}{۳!}+\ldots}_{A})$$

$$A=x(\frac{۱}{۲!}+\frac{x}{۳!}+\frac{x^۲}{۴!}+\ldots)$$

توجه کنید که مقدار عبارتِ

$$(\frac{۱}{۲!}+\frac{x}{۳!}+\frac{x^۲}{۴!}+\ldots)$$

در $x=۱$ برابر می‌شود با $e-۲$. پس اگر $|x|\leq ۱$ آن گاه داریم

$$۰\leqslant |A|\leqslant |x|(e-۲)$$

پس

$$\lim_{x\to ۰}A=۰$$

و

$$\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-۱}{x}=۱+\lim_{x\to ۰}A=۱$$

پس اگر $f(x)=e^x$ آنگاه

$$f'(۰)=۱=e^۰$$