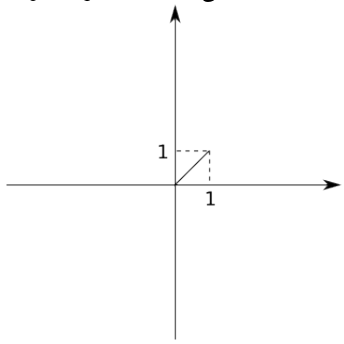
۱ جلسه‌ی بیست و هشتم

مثال ۱. $\int_{۰}^{۱} xdx$ را با استفاده از تعریف انتگرال محاسبه کنید.

اثبات. روش اول. انتگرال فوق، مساحت زیر منحنی $y = x$ را از نقطه‌ی ۰ تا ۱ معین می‌کند.



$$\frac{۱ \times ۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

روش دوم. تابع $y = x$ یک تابع پیوسته و از این‌رو، انتگرال‌پذیر است. یعنی با هر افرازی مانند p اگر $||p|| \to ۰$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=۱}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ موجود است. افراز زیر را برای بازه‌ی $[۰, ۱]$ در نظر می‌گیریم. طول هر بازه را برابر با $\frac{۱}{n}$ در نظر بگیرید.

$$\{۰, \frac{۱}{n}, \frac{۲}{n}, \frac{۳}{n}, \dots, \frac{n-۱}{n}, ۱\}$$

در هر زیربازه، x_i^* را برابر با نقطه‌ی ابتدائی آن زیربازه، یعنی $\frac{i}{n}$ در نظر بگیرید.

$$\sum_{i=۰}^{n-۱} \frac{i}{n} \times (\frac{۱}{n}) = \frac{۱}{n^۲} \sum_{i=۰}^{n-۱} i = \frac{۱}{n^۲} \times \frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲n^۲}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-۱)}{۲n^۲} = \frac{۱}{۲}$$

□

مثال ۲. حاصل عبارت زیر را با استفاده از تعریف انتگرال محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۳}(۱ + ۴ + ۹ + \dots + (n-۱)^۲)$$

اثبات.

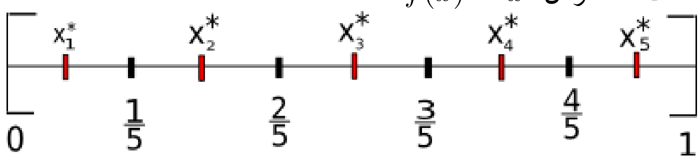
$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۳} \underbrace{(۱ + ۴ + ۹ + \dots + (n-۱)^۲)}_{=\sum_{i=۱}^{n-۱} i^۲} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \times \frac{\sum_{i=۰}^{n-۱} i^۲}{n^۲} =$$

$$\frac{۱}{n}\sum_{i=۰}^{n-۱}(\frac{i}{n})^۲$$

حاصل سری فوق به صورت

$$\underbrace{\frac{۱}{n}}_{=\Delta x_i}\sum_{i=۰}^{n-۱}f(\frac{i}{n})$$

است که در آن $f(x)=x^۲$.



از آنجا که تابع $f(x)=x^۲$ پیوسته است،پس انتگرال‌پذیر است و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۰}^{n-۱}(\frac{i}{n})^۲=$$

$$\int_۰^۱ x^۲dx=\frac{x^۳}{۳}|_۰^۱=\frac{۱}{۳}$$

$\square$

قضیه ۳.

۱. اگر توابع $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه $f\pm g$ و λf نیز انتگرال‌پذیرند.

۲. اگر

$$\forall x\in[a,b]\quad f(x)\leqslant g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$$

پس اگر $\forall x\quad f(x)\geqslant ۰$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant ۰$$

یا اگر $\forall x\in[a,b]\quad f(x)\geqslant m$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant\underbrace{\int_a^b mdx}_{=m(b-a)}$$

۳. اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه تابع $|f|$ هم انتگرال‌پذیر است و

$$|\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

۴. فرض کنیم تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ کراندار باشد و $c \in [a,b]$ آنگاه f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر f بر $[a,c]$ و $[c,d]$ انتگرال‌پذیر باشد، در این صورت

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

توجه ۴. اگر $a \geqslant b$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$$

توجه ۵. در قضیه‌ی قبلی، قسمت چهارم نیازی نیست که c بین a,b باشد. در واقع رابطه‌ی یادشده برای هر ترتیبی از a,b,c برقرار است: اگر f در بازه‌ی I انتگرال‌پذیر باشد و $a,b,c \in I$ نقاطی دلخواه باشند (یعنی نیازی نیست که $a < c < b$) آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

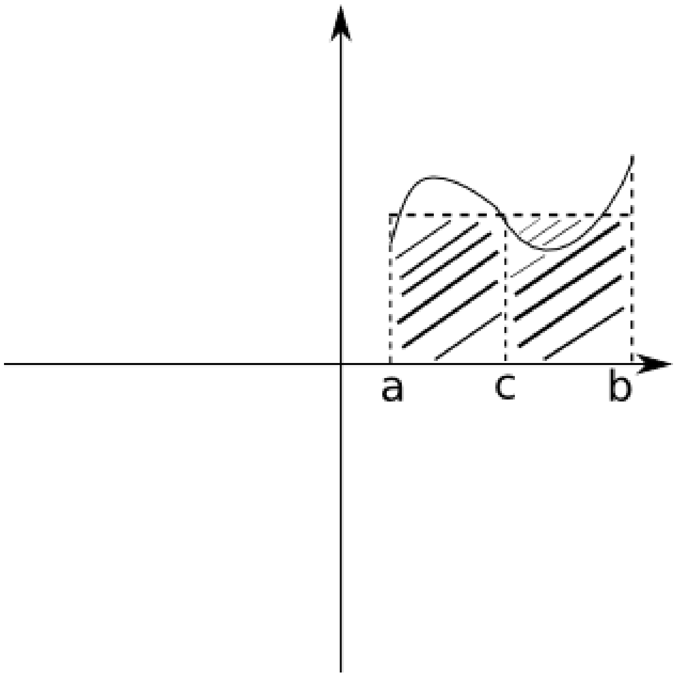
قضیه ۶ (قضیه‌ی مقدار میانگین)**.** فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\exists c \in [a,b] \quad \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$$

به بیان دیگر

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

در شکل زیر، مساحت زیر منحنی برابر با مساحت مستطیل هاشور خورده است.



اثبات. از آنجا که تابع f پیوسته است فرض می‌کنیم

$$m = \min f(x) \quad x \in [a,b]$$

$$M = \max f(x) \quad x \in [a,b]$$

$$\forall x \in [a,b] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$$

پس

$$\int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M dx$$

پس

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

$$m \leqslant \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}}_{=A} \leqslant M$$

بنا به قضیه‌ی مقدار میانی

$$\exists c \in [a,b] \quad f(c) = A$$

□

قضیه‌ی اساسی حساب، به بیان نادقیق بیانگر این است که انتگرالگیری، عکس مشتقگیری است. یعنی

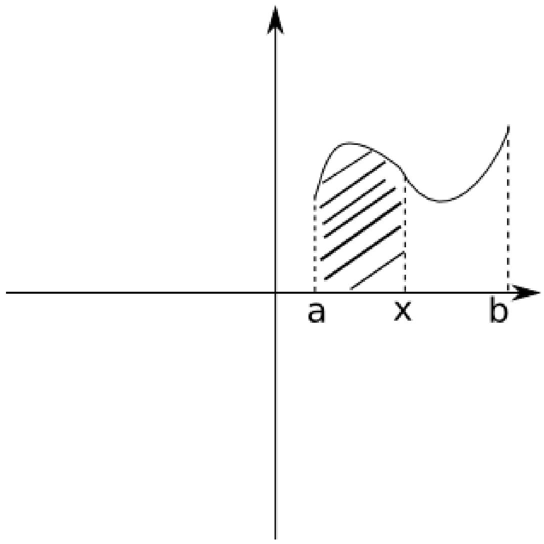
$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a)$$

در زیر، این گفته‌ها را دقیق بیان و اثبات کرده‌ایم.

قضیه ۷ (قضیه‌ی اساسی اول). فرض کنید f بر بازه‌ی I پیوسته باشد و $a \in I$. تابع F را در بازه‌ی I به صورت زیر تعریف کنید:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$



آنگاه F بر I مشتق‌پذیر است و در واقع $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$. یعنی تابع F یک تابع اولیّه برای f است. (یعنی اگر G یک تابع اولیّه برای f باشد داریم:

$$G = F + c \Rightarrow$$

به بیان دیگر

$$G = \int_a^b f(x)dx + c$$

و این علت استفاده از نماد انتگرال در بحث تابع اولیه است).

اثبات.

$$x_\cdot \in I \quad \lim_{h\to \cdot} \frac{F(x_\cdot + h) - F(x_\cdot)}{h} = \frac{\lim_{h\to\cdot} \int_a^{x_\cdot + h} f(u)du - \int_a^{x_\cdot} f(u)du}{h} =$$

$$\lim_{h\to\cdot} \frac{\int_{x_\cdot}^{x_\cdot + h} f(u)du}{h} = \lim_{c\to x_\cdot} f(c) = f(x_\cdot) \quad x_\cdot \leqslant c \leqslant x_\cdot + h$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

□

قضیه ۸ (قضیه‌ی اساسی دوم)**.** فرض کنید F بر $[a,b]$ پیوسته باشد و F یک تابع اولیه برای f باشد. آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

اثبات. بنا به قضیه‌ی قبل تابع زیر یک تابع اولیه برای f است.

$$\int_a^x f(u)du$$

از آنجا که F هم یک تابع اولیه است، پس داریم:

$$F(x) = \int_a^x f(u)du + c$$

$$F(b) = \int_a^b f(u)du + c$$

$$F(a) = \underbrace{\int_a^a f(u)du}_{=\cdot} + c$$

در نتیجه داریم:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)du$$

□

توجه ۹ (رابطه با قضیه‌ی مقدار میانگین)**.** در مبحث مشتق هم یک قضیه‌ی مقدار میانگین بیان کرده بودیم. قضیه‌ی مقدار میانگین در مبحث انتگرال در واقع دوگان آن قضیه است:

$$\exists c \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\frac{\int_a^b f'(u)du}{b - a} = f'(c)$$

مثالها

مثال ۱۰. فرض کنید $F(x) = \int_{۰}^{x^۲} d^{t^۲} dt$ آنگاه نشان دهید F مشتق‌پذیر است و مشتق آن را محاسبه کنید.

اثبات. از آنجا که تابع $e^{t^۲}$ پیوسته است پس انتگرال‌پذیر است. پس بنا به قضیه‌ی اساسی اول تابع F مشتق‌پذیر است. دوباره بنا به قضیه‌ی اساسی اول

$$F'(x) = e^{x^۲}$$

$\square$

مثال ۱۱. فرض کنید $G(x) = \int_{۰}^{\sin x} e^{t^۲} dt$. نشان دهید که G مشتق‌پذیر است و مشتق آن را بیابید.

اثبات. تابع G در واقع ترکیب دو تابع زیر است:

$$H(x) = \int_a^x e^{t^۲} dt$$

و

$$\sin x$$

$$G(x) = H(\sin x)$$

تابع H مشابه سوال قبل مشتق‌پذیر است. تابع $\sin x$ هم مشتق‌پذیر است. پس $H(\sin x)$ هم مشتق‌پذیر است.

$$(H(\sin x))' = (\cos x) \times H'(\sin x) = \cos x e^{\sin^۲ x}$$

$\square$

مثال ۱۲. فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $u, v : J \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه تابع زیر مشتق‌پذیر است.

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = \int_{u(x)}^{a} f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt =$$

$$-\int_a^{u(x)} f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt$$

$$F'(x) = -u'(x)f(u(x)) + v'(x)f(v(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

توجه ۱۳. انتگرالهای زیر در واقع با هم برابرند:

$$\int_a^b f(t)dt, \int_a^b f(u)du, \int_a^b f(x)dx$$

اگر به تعریف انتگرال دقت کنیم، می‌بینیم که انتگرال در واقع یک نوع سیگما است. عنصر شمارنده در یک جمع سیگمائی، نقشی در حاصل آن سیگما ندارد؛ مثلاً

$$\sum_{i=۱}^{n} f(i) = \sum_{t=۱}^{n} f(t) = \sum_{u=۱}^{n} f(u).$$