۱ جلسه‌ی نهم

مثال ۱. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

پاسخ.

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \times n^{\frac{1}{n}}}{(\frac{n^2+1}{n})^n}$$

داریم:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

و

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n^2}{n^2+1})^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{n^2+1}{n^2})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}}$$

همچنین قبلاً ثابت کرده‌ایم که

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$$

موجود است و از صفر بزرگتر است. پس و

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$$

موجود است.

از طرفی نشان داده‌ایم که اگر $a_n \mapsto a \neq 0$ آنگاه $\sqrt[n]{a_n} \mapsto 1$ پس $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}} = 1$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

پس سری بالا نمی‌تواند همگرا باشد. □

توجه ۲. در ادامه‌ی این درس ثابت خواهیم کرد که

$$\lim(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$$

که حاصل حد بالا را با e نشان می‌دهیم.

سری زیر را در نظر بگیرید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

در جلسات گذشته ثابت کردیم که سری فوق به ازاء هر مقدارِ a همگراست.

$$۱ + a + \frac{a^۲}{۲!} + \frac{a^۳}{۳!} + \frac{a^۴}{۴!} + \dots$$

یعنی برای هر مقدارِ a عبارت فوق یک مقدار متناهی می‌شود. پس می‌توان تابع زیر را در نظر گرفت:

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

داریم

$$\exp(۰) = ۱$$

$$\exp(۱) = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \dots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$$

حاصل $\exp(۱)$ را با e نشان می‌دهیم. این عدد تا چند رقم اول اعشار به صورت زیر است:

$$e \cong ۲/۷۱۸۲.$$

عدد e یک عدد غیر جبری است. یعنی هیچ چند جمله‌ای‌ای با ضرایبِ در اعداد گویا موجود نیست که ریشه‌ی آن e شود. اثبات این گفته با اطلاعاتی که در این درس می‌گیریم هنوز ممکن نیست.
تابع exp نیز یک تابع غیر جبری است. یعنی با متناهی بار استفاده از اعمال اصلی، هیچگاه به این تابع نمی‌رسیم.

توجه ۳. برای راحتی، تابع $\exp(x)$ را با e^x نشان می‌دهیم.

توجه ۴. در ریاضیات مقدماتی با «توان» آشنا شده‌ایم و معنی عبارتی چون $۲^۳$ را می‌دانیم. همچنین عبارتی چون $۲^{\frac{۲}{۳}}$ نیز برای ما قابل فهم است. اما چگونه می‌توان توان را به اعداد دیگرِ حقیقی تعمیم داد. مثلا چگونه می‌توان ۲^{π} یا $۲^{\sqrt{۲}}$ را تعریف کرد. در ادامه‌ی درس خواهیم دید که با استفاده از تابعِ e^x می‌توان از پس این کار برآمد.

توجه ۵. کلمه‌ی exp از exponential به معنای توان گرفته شده است.

قضیه ۶.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

به بیان دیگر

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

بیائید عبارات بالا را محاسبه کنیم:

$$e^a = ۱ + a + \frac{a^۲}{۲!} + \frac{a^۳}{۳!} + \frac{a^۴}{۴!} + \dots$$

$$e^b = ۱ + b + \frac{b^۲}{۲!} + \frac{b^۳}{۳!} + \frac{b^۴}{۴!} + \dots$$

$$e^{(a+b)} = ۱ + (a+b) + \frac{(a+b)^۲}{۲!} + \frac{(a+b)^۳}{۳!} + \frac{(a+b)^۴}{۴!} + \dots$$

همان طور که مشاهده می‌کنید برای محاسبه‌ی e^{a+b} باید دو سریِ نامتناهی را در هم ضرب کنیم. برای ضربی به صورت زیر:

$$(a_۱ + a_۲ + a_۳ + \dots)(b_۱ + b_۲ + \dots)$$

نیاز است که نخست $a_۱$ را در تمام b_i ها ضرب کنیم و هر وقت این کار تمام شد (!) $a_۲$ را در تمام آنها ضرب کنیم. یعنی باید یک الگوریتم بی‌پایان ادامه یابد تا ما به ضرب دومی برسیم. اگر ذهن خود را یک رایانه تجسم کنیم، این کار غیر ممکن است. خوشبختانه روش درست این کار هم موجود است:

۱.۱ حاصلضرب کُشیِ دو سری

فرض کنید $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ دو سریِ عددی باشند. عبارت زیر را حاصلضرب کُشیِ این دو سری می‌نامیم.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} c_n$$

که در آن

$$c_n = \sum_{n=i+j}^{\infty} a_i b_j = \sum_{k=۰}^{n} a_k b_{n-k}$$

پس داریم

$$c_۰ = a_۰$$

$$c_۱ = a_۰ b_۱ + a_۱ b_۰$$

$$c_۲ = a_۰ b_۲ + a_۱ b_۱ + a_۲ b_۰$$

$$c_۳ = a_۰ b_۳ + a_۱ b_۲ + a_۲ b_۱ + a_۳ b_۰$$

$$c_n = a_۰ b_n + a_۱ b_{n-۱} + \ldots + a_n b_۰$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty} c_n = a_۰ b_۰ + (a_۰ b_۱ + a_۱ b_۰) + (a_۰ b_۲ + a_۱ b_۱ + a_۲ b_۰) + (a_۰ b_۳ + a_۱ b_۲ + a_۲ b_۱ + a_۳ b_۰) + \ldots$$

همان طور که در بالا مشاهده می‌کنید برای محاسبه‌ی هر c_n تنها به تعدادی متناهی عملیات نیازمندیم. به سری بالا، حاصلضرب کُشیِ [۱] دو سری مورد نظر می‌گوئیم. آیا سری بالا برابر با حاصلضرب دو سری مورد نظر ماست؟

قضیه ۷ (مِرْتِنِ). فرض کنید $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n \mapsto A$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n \mapsto B$ و حداقل یکی از ایندو همگرای مطلق باشد، آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} c_n$ (به گونه‌ای که در بالا تعریف کردیم) نیز همگراست و

$$\sum_{n=۰}^{\infty} c_n \mapsto AB$$

به عبارت دیگر

$$\sum_{n=۰}^{\infty} c_n = (\sum_{n=۰}^{\infty} a_n) \times (\sum_{n=۰}^{\infty} b_n).$$

توجه ۸. شرط همگرایی مطلقِ یکی از دو سری لازم است. برای مثال

$$a_n = b_n = \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n+۱}}$$

[۱] Cauchy

$$c_n = \sum_{k=۰}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{\overbrace{(-۱)^{k}}^{a_k}}{\underbrace{\sqrt{k+۱}}_{\leqslant \sqrt{n+۱}\sqrt{n+۱}}} \times \frac{\overbrace{(-۱)^{n-k}}^{b_{n-k}}}{\underbrace{\sqrt{n-k+۱}}_{\leqslant \sqrt{n+۱}\sqrt{n+۱}}}$$

$$\geqslant (-۱)^n \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{(n+۱)}$$

$$= (-۱)^n \underbrace{(\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۱} + \ldots + \frac{۱}{n+۱})}_{n+۱ \text{ بار}} = (-۱)^n \times \frac{n+۱}{n+۱} = (-۱)^n \times ۱$$

می‌بینیم که سری $\sum c_n$ همگرا نیست.

حال سریهای زیر را در نظر بگیرید.

$$e^a = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

$$e^b = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$$

هر دوی این سری‌ها همگرای مطلق هستند. پس حاصلضرب کُشی آنها را در نظر می‌گیریم.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} c_n$$

$$c_n = \sum_{k=۰}^{n} \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{(n-k)}}{(n-k)!} = \sum_{k=۰}^{n} \frac{a^k b^{(n-k)}}{k!(n-k)!}$$

با توجه به اینکه داریم:

$$\frac{۱}{k!(n-k)!} = \frac{\binom{n}{k}}{n!}$$

پس

$$c_n = \frac{۱}{n!} \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{۱}{n!}(a+b)^n$$

پس

$$e^a \times e^b = \sum \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b}.$$

۲.۱ چند ویژگی تابع نمایی

۱.

$$e^{۰} = ۱$$

۲.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

۳.

$$e^x \times e^{-x} = e^{۰} = ۱ \Rightarrow e^{-x} = \frac{۱}{e^x}$$

۴.

$$\forall x > ۰ \quad e^x > ۱$$

اثبات.

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۳}}{۳!} + \dots$$

$$\forall x > ۰ \quad e^x > ۱ + x$$

□

۵.

$$\forall x < ۰ \quad ۰ < e^x < ۱$$

اثبات.

$$x < ۰ \Rightarrow -x > ۰ \Rightarrow e^{-x} > ۱ \Rightarrow e^x < ۱$$

$$e^x \times e^{-x} = ۱ \Rightarrow e^x > ۰$$

□

۶. تابع e^x اکیداً صعودی است:

$$x < y \rightarrow e^x < e^y$$

اثبات.

$$x < y \to y - x > ۰ \Rightarrow e^{y-x} > ۱ \Rightarrow \frac{e^y}{e^x} > ۱ \Rightarrow e^y > e^x$$

□

.۷

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{nx} = (e^x)^n$$

اثبات.

$$(e^x)^n = \underbrace{e^x \times e^x \times e^x \times \ldots \times e^x}_{n\text{بار}} = e^{nx}$$

□

.۸

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (e^{\frac{۱}{m}x})^m = e^x$$

پس

$$(e^{\frac{۱}{m}x}) = (e^x)^{\frac{۱}{m}}$$

.۹

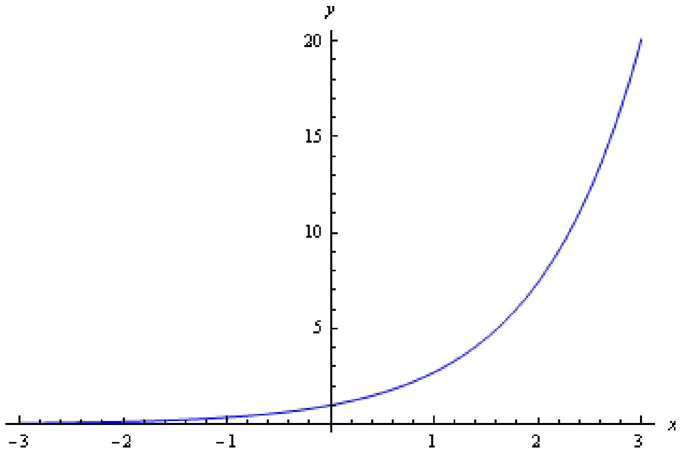
$$\forall r \in \mathbb{Q}^+ \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

$$e^{\frac{m}{n}x} = (e^{\frac{۱}{n}x})^m$$

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad r^{rx} = (e^x)^r$$

در زیر نمودار تابع exp را کشیده‌ایم. برای تحلیلِ بیشتر این نمودار، نیازمند مفاهیم حد و پیوستگی

هستیم.



توجه ۹. برای رسم نمودار می‌توان از نرم‌افزارهای زیر بهره جست: maple,matlab. آشنائی با دو نرم‌افزار یادشده را به طور جدی به شما توصیه می‌کنم. در پیوند زیر می‌توانید توابع دو بعدی را رسم کنید:

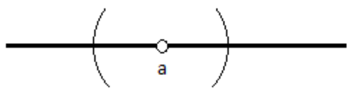
`http://fooplot.com`

در پیوند زیر توابع سه بعدی را رسم کنید:

`http://web.monroecc.edu/manila/webfiles/pseeburger/CalcPlot3D/`

۳.۱ یادآوری (حد و پیوستگی توابع)

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی a تعریف شده باشد.



همسایگی محذوف . مجموعه‌ی U را یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی a می خوانیم هرگاه

$$\exists\delta \quad U=\{x: ۰<|x-a|<\delta\}$$

توجه کنید که

$$\begin{cases}|x-a|<\delta\Rightarrow -\delta<x-a<\delta\Rightarrow a-\delta<x<a+\delta\\ |x-a|>۰\Rightarrow x\neq a\end{cases}$$

می‌گوییم حدِّ تابع f وقتی x به سمتِ a میل می‌کند برابر است با L و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

هرگاه مقادیر f به **اندازه‌ی دلخواه** به L نزدیک شوند به شرط اینکه x به **اندازه‌ی کافی** به a نزدیک شده باشد. این گفته را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff$$

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta_\epsilon > ۰ \quad \forall x \quad (۰ < |x-a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon).$$