۱ جلسه‌ی سوُم

مثال ۱. نشان دهید که $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x^p} dx$ برای $p > ۱$ همگراست و برای $۰ < p \leqslant ۱$ واگراست.

پاسخ. فرض کنیم $p > ۱$، داریم:

$$\int \frac{۱}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{x^{-p+۱}}{-p+۱}$$

تابع x^{-p} در $x \geq ۱$ پیوسته و از این رو در هر بازه‌ی $[۱, t]$ انتگرالپذیر است. داریم

$$\int_{۱}^{t} x^{-p} dx = \frac{x^{-p+۱}}{-p+۱}|_{۱}^{t} = \frac{t^{۱-p}}{۱-p} - \frac{۱}{۱-p}$$

حد عبارت سمت راست بالا، وقتی $t \to \infty$ موجود است، پس انتگرال مورد نظر همگراست.

حال فرض کنید $۰ < p < ۱$، دوباره بنا به پیوستگی تابع در $x \geq ۱$ این تابع در هر بازه‌ی $[۱, t]$ انتگرالپذیر است.

$$\int_{۱}^{t} \frac{۱}{x^p} dx = \frac{x^{۱-p}}{۱-p}|_{۱}^{t} = \frac{t^{۱-p}}{۱-p} - \frac{۱}{۱-p})$$

از آنجا که $p < ۱$ حد عبارت بالا وقتی $t \to \infty$ موجود نیست (بینهایت می‌شود). یعنی در این حالت انتگرال واگراست.

حالت $p = ۱$

$$\int_{۱}^{c} \frac{۱}{x} dx = \ln c - \ln ۱ = \ln c$$

$$\lim_{c \to \infty} \ln c = \infty$$

در این حالت نیز انتگرال واگراست. □

مثال ۲. نشان دهید که $\int_{-\infty}^{۰} e^x dx$ همگراست.

پاسخ. برای هر $c < ۰$ تابع e^x در بازه‌ی $[c, ۰]$ پیوسته و از این رو، انتگرال‌پذیر است.

$$\int_{c}^{۰} e^x dx = e^{۰} - e^c = ۱ - e^c$$

$$\lim_{c \to -\infty} ۱ - e^c = ۱$$

بنابراین انتگرال مورد نظر همگراست. □

توجه ۳. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ و $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ و $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ هر دو همگرا باشند، آنگاه می‌گوئیم $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ همگرا است و تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

توجه ۴. اگر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ مطابق توجه قبل همگرا باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)dx$$

مثال ۵. ثابت کنید که $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ واگراست.

پاسخ. تابع sin در هر بازه‌ی $[c, ۰]$ برای $c \leq ۰$ پیوسته و از این رو انتگرالپذیر است.

$$\int_{c}^{۰} \sin x dx = -\cos(۰) + \cos(c)$$

می‌دانیم که حد زیر موجود نیست:

$$\lim_{c\to-\infty} \cos(c) - ۱$$

پس $\int_{-\infty}^{۰} \sin x dx$ همگرا نیست. به طور مشابه $\int_{۰}^{\infty} \sin x dx$ هم موجود نیست. پس بنا به توجه قبل $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ همگرا نیست. □

توجه ۶. اما از طرفی، برای هر عدد c داریم

$$\int_{-c}^{c} \sin x dx = ۰$$

(چون $\sin x$ تابعی فرد است.) پس

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \sin x dx = ۰$$

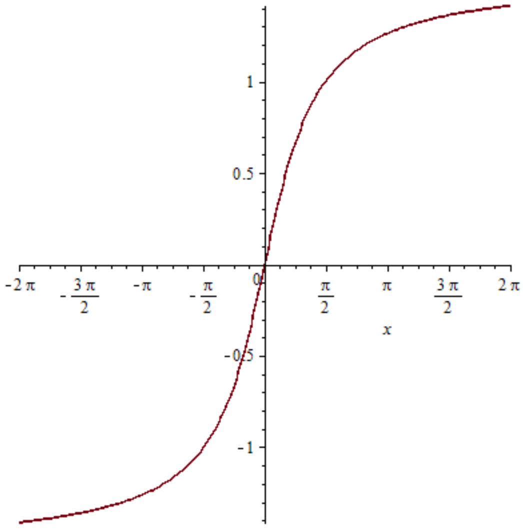
پس از اینکه $\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)dx$ همگرا باشد **نتیجه نمی‌گیریم** که $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ همگراست.

مثال ۷. نشان دهید که $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{۱+x^۲}dx$ همگراست.

پاسخ. تابع $\frac{1}{1+x^2}$ در هر بازه‌ی $[c, 0]$ برای $c \leq 0$ پیوسته و انتگرال‌پذیر است.

$$\int_c^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(0) - \tan^{-1}(c) = 0 - \tan^{-1}(c)$$

$$\lim_{c\to-\infty} \int_c^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{c\to-\infty} -\tan^{-1}(c) = 1$$



نمودار تابع $\tan^{-1}$:

تابع $\frac{1}{1+x^2}$ در هر بازه‌ی $[0, c]$ برای $c \geq 0$ انتگرال‌پذیر است.

$$\int_0^c \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(c)$$

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{c\to\infty} \tan^{-1}(c) = 1$$

از اینکه $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ و $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$ هر دو همگرا هستند، نتیجه می‌گیریم که $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ نیز همگراست. $\square$

۱.۱ آزمون مقایسه

فرض کنید توابع $f, g : I \to \mathbb{R}$ برای هر عدد $c \geqslant a$ در بازه‌ی $[a, c]$ انتگرال‌پذیر باشند و

$$\forall x \in [a, \infty) \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

آنگاه اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد، $\int_a^\infty f(x)dx$ هم همگراست.

مثال ۸. نشان دهید که $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ همگراست.

پاسخ. می‌دانیم که $\int e^{-x}dx = -e^{-x}$. نیز تابع e^{-x^2} در هر بازه‌ی $[0, c]$ (برای $c \geq 0$) پیوسته، و از این رو انتگرال‌پذیر است. همچنین

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx \quad (*)$$

از آنجا که e^{-x^2} همواره پیوسته و انتگرال‌پذیر است $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ همواره یک عدد است. حال:

$$\forall x \geqslant 1 \quad x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq x \Rightarrow \quad e^{-x^2} \leqslant e^{-x} \Rightarrow$$

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx \leqslant \int_1^\infty e^{-x}dx$$

ادعا می‌کنیم $\int_1^\infty e^{-x}dx$ همگراست. تابع e^{-x} در هر بازه‌ی $[1, c]$ (برای $c \geq 1$) پیوسته و انتگرال‌پذیر است.

$$\int_1^c e^{-x}dx = -e^{-x}|_1^c = -e^{-c} + \frac{1}{e}$$

$$\lim_{c\to\infty} -e^{-c} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

بنا به آزمون مقایسه، $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ همگراست. پس بنا به رابطه‌ی $(*)$، $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ نیز همگراست.

□

توجه ۹. یکی از انتگرال‌های مهم که در کاربرد، بدان نیازمندیم انتگرال زیر است:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$$

در زیر روشی برای محاسبه‌ی آن ارائه کرده‌ایم که مربوط به درس ریاضی ۱ و امتحان آن نیست: اولاً

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy$$

ثانیاً داریم:

$$\overbrace{\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (e^{-x^2} \times e^{-y^2})dxdy}^{A} = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx \times \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy = (\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx)^2$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲-y^۲} dxdy = \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\infty} e^{-r^۲} rdrd\theta$$
$$u = -r^۲ \Rightarrow du = -۲rdr$$
$$\int_{۰}^{\infty} e^u(-\frac{du}{۲}) = -\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty} e^u du = -\frac{۱}{۲}e^u|_{۰}^{\infty} = -\frac{۱}{۲}e^{-r^۲}|_{۰}^{\infty} = -\frac{۱}{۲}(۰ - ۱) = \frac{۱}{۲}$$
$$\lim_{r\to\infty} e^{-r^۲} = \lim_{r\to\infty} \frac{۱}{e^{r^۲}} = ۰$$
$$\int_{۰}^{۲\pi} \frac{۱}{۲} d\theta = \frac{۱}{۲} \times ۲\pi = \pi$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲} dx = \sqrt{\pi}$$

مثال ۱۰. نشان دهید $\int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{e^{x^۲}+۱}dx$ همگراست.

پاسخ. تابع زیرِ انتگرال در هر بازه‌ی $[۰, c]$ (برای $c \geq ۰$) پیوسته، و از این رو انتگرالپذیر است.

$$\forall x \geqslant ۰ \quad \frac{۱}{۱+e^{x^۲}} \leqslant \frac{۱}{e^{x^۲}} = e^{-x^۲}$$

در مثال قبل ثابت کردیم $\int_{۰}^{\infty} e^{-x^۲}dx$ همگراست. بنا به آزمون مقایسه $\int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{e^{x^۲}+۱}dx$ نیز همگراست. □

مثال ۱۱. نشان دهید که $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x+\sqrt[۳]{x}}dx$ واگراست.

پاسخ. تابع زیر انتگرال در هر بازه‌ی $[۱, c]$ (برای $c \geq ۱$) پیوسته و از این رو انتگرالپذیر است.

$$\forall x \geqslant ۱ \quad \frac{۱}{x+\sqrt[۳]{x}} \geqslant \frac{۱}{x+x} = \frac{۱}{۲x}$$

از آنجا که $\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x}dx$ واگراست پس $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x+\sqrt[۳]{x}}dx$ نیز بنا به آزمون مقایسه واگراست. □

۲.۱ آزمون مقایسه‌ی حدی

فرض کنید برای هر $c \geqslant a$ توابع $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ در بازه‌ی $[a, c]$ انتگرال‌پذیر و مثبت باشند. فرض کنید $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ آنگاه :

(آ.) اگر $l > ۰$ آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ همگراست، اگر و تنها اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد.

(ب.) اگر $l = ۰$ آنگاه اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز همگراست.

(ج.) اگر $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ آنگاه اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ واگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز واگراست.

مثال ۱۲. نشان دهید که $\int_۰^\infty \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx$ همگراست.

پاسخ. $f(x) = \frac{۱}{x^۳+x+۲}$ تابعی مثبت و پیوسته در هر بازه‌ی $[۰, c]$ (برای $c \geq ۰$) است. می‌دانیم که $\int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳}dx$ همگراست. قرار می‌دهیم $g(x) = \frac{۱}{x^۳}$. می‌دانیم که تابع g نیز تابعی مثبت است. داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ۱$$

بنابراین از همگرایی $\int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳}dx$، همگرایی $\int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx$ نتیجه می‌شود. همچنین داریم:

$$\int_۰^\infty \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx = \int_۰^۱ \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx + \int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx$$

پس $\int_۰^\infty \frac{۱}{x^۳+x+۲}dx$ همگراست. □

مثال ۱۳. نشان دهید که $\int_{-\infty}^۰ \frac{e^x}{۱+x^۴}dx$ همگراست.

پاسخ. نخست توجه کنید که $\int_{-\infty}^۰ e^{-x}dx$ همگراست. زیرا تابعِ e^{-x} در هر بازه‌ی $[c, ۰]$ (برای $c \leq ۰$) پیوسته و از این رو انتگرالپذیر است و داریم:

$$\int_{-\infty}^۰ e^x dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^۰ e^x dx = \lim_{c\to-\infty} (e^۰ - e^c) = ۱$$

قرار دهید $g(x) = e^x$ و $f(x) = \frac{e^x}{۱+x^۴}$ هر دوی این توابع در هر بازه‌ی $[c, ۰]$ پیوسته و انتگرالپذیر و مثبت هستند. همچنین

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{۱+x^۴} = ۰$$

بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی از آنجا که $\int_{-\infty}^۰ g(x)dx$ همگراست نتیجه می‌شود که $\int_{-\infty}^۰ f(x)dx$ همگراست. □

مثال ۱۴. نشان دهید که $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{۱+\ln x} dx$ واگراست.

پاسخ. می‌دانیم که $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x} dx$ واگراست.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{۱}{۱+\ln x}}{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{۱+\ln x}$$

از لُپیتال استفاده می‌کنیم:

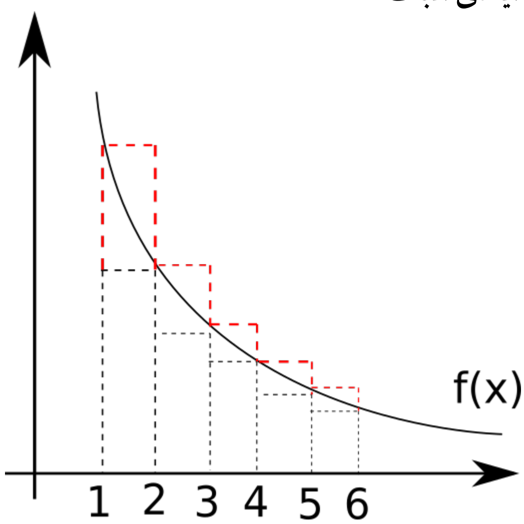
$$\lim_{x\to\infty} \frac{۱}{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{۱+\ln x} dx$ واگراست. (به مثبت بودن این دو تابع و انتگرال‌پذیر بودن آنها در هر بازه‌ی به شکل $[۱, c]$ (برای $c \geq ۱$) توجه شود.) $\square$

۳.۱ آزمون انتگرال (برای سری‌ها)

فرض کنید تابع $f : [۱, \infty) \to \mathbb{R}$ بر بازه‌ی $[۱, \infty)$ مثبت، انتگرال‌پذیر، نزولی و پیوسته باشد. آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$ همگراست اگر و تنها اگر $\int_{۱}^{\infty} f(x)dx$ همگرا باشد.

ایده‌ی اثبات



$$\sum_{n=۲}^{\infty} f(x) \leqslant \int_{۱}^{\infty} f(x)dx$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} f(x) \geqslant \int_{۱}^{\infty} f(x)dx$$

نتیجه ۱۵. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p > 1$ همگرا و برای $0 < p \leqslant 1$ واگراست.

توجه ۱۶. به هیچ وجه ادعا نکرده‌ایم که

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(x)$$

مثلاً

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

توجه ۱۷. شاید برایتان مهم باشد که با یک روش عددی، علت همگرائی $\sum \frac{1}{n^2}$ و واگرائی $\sum \frac{1}{n}$ را بررسی کنید. قرار دهید: $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. داریم

$$A = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) +$$
$$(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}) + \dots$$

$$A \geqslant 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{8}) + (8 \times \frac{1}{16}) + (16 \times \frac{1}{32}) + \dots$$
$$A \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$
$$\Rightarrow A \mapsto \infty$$

$$B = 1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}) +$$
$$(\frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2}) + \frac{1}{16^2} + \dots$$
$$B \leqslant 1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}) + (\frac{4}{4^2}) + (\frac{8}{8^2}) + (\frac{16}{16^2}) + \dots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

مثال ۱۸. نشان دهید که انتگرال‌های زیر همه، همگرا هستند.

۱.

$$\int_{۱}^{\infty} e^{-x}dx$$

۲.

$$\int_{۱}^{\infty} xe^{-x}dx$$

۳.

$$\int_{۱}^{\infty} x^{۲}e^{-x}dx$$

۴.

$$\int_{۱}^{\infty} x^{n}e^{-x}dx$$

پاسخ. می‌دانیم که $\int_{۱}^{\infty}\frac{۱}{x^{۲}}dx$ همگراست.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n e^{-x}}{\frac{۱}{x^{۲}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+۲}}{e^x}=۰ \quad (*)$$

از آنجا که تابعهای $x^n e^{-x}$ و $\frac{۱}{x^{۲}}$ در بازه‌های به شکل $[۱,c]$ (برای $c\geq ۱$) پیوسته و انتگرالپذیر و مثبت هستند، بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی و رابطه‌ی $(*)$ انتگرال‌های یاد شده همه همگرا هستند. □

خارج از درس: پاسخ ۲۰۸ در پیوند زیر، روش جالبی برای محاسبه‌ی $\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin x}{x}$ ارائه کرده است:

https://math.stackexchange.com/questions/5248/evaluating-the-integral-int-0-infty-frac-sin-x-x-dx-frac-pi-2

همان انتگرال را می‌توان با استفاده از توابع مختلط، به روش زیر محاسبه کرد:

https://math.stackexchange.com/questions/1739621/the-infinite-integral-of-frac-sin-xx-using-complex-analysis