جلسه‌ی دوم

ادامه‌ی مثالها:

مثال ۱. دنباله‌ی $a_n = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید که در آن r یک عدد گویای ثابت است و $۰ < r < ۱$. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

اگر فرض کنیم $r = \frac{۱}{۲}$ چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲^۲}, \frac{۱}{۲^۳}, \dots$$

بنابراین این ادعا که دنباله‌ی یادشده به صفر می‌گراید درست به نظر می‌رسد.

پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad r^n < \epsilon$$

علت این که ننوشته‌ایم $|r^n| < \epsilon$ این است که می‌دانیم جملات این دنباله همه مثبتند. فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. توجه کنید که $r^n < \epsilon$ معادل است با $\frac{۱}{\epsilon} < \frac{۱}{r^n}$. طبق فرض سوال می‌دانیم که $۰ < r < ۱$ پس $\frac{۱}{r} > ۱$. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که یک عددِ $a > ۰$ موجود است به طوری که $\frac{۱}{r} = ۱ + a$. پس می‌خواهیم که

$$\frac{۱}{r^n} = \left(\frac{۱}{r}\right)^n = (۱ + a)^n > \frac{۱}{\epsilon}$$

بنا به نامساوی برنولی $(۱ + a)^n \geqslant ۱ + na$. پس کافی است داشته باشیم:

$$۱ + na > \frac{۱}{\epsilon}$$

و برای آن کافی است که

$$n > \frac{\frac{۱}{\epsilon} - ۱}{a}.$$

پس اگر

$$N_\epsilon = \lfloor \frac{\frac{۱}{\epsilon} - ۱}{a} \rfloor + ۱$$

آنگاه

$$\forall n > N_\epsilon \quad r^n < \epsilon$$

از جمله‌ی a_{N_ϵ} به بعدِ دنباله مد نظر ماست. یعنی اگر a_n یکی از اعضای مجموعه‌ی زیر باشد

$$a_{N_\epsilon}, a_{N_\epsilon+۱}, a_{N_\epsilon+۲}, \ldots$$

آنگاه $|a_n| < \epsilon$. $\square$

قضیه ۲.

آ. فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنباله‌ی همگرا باشند، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

اثبات. فرض کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

برای این که نشان دهیم که $\lim a_n + b_b = A + B$ باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |(a_n+b_n) - (A+B)| < \epsilon$$

فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. از آنجا که a_n همگرا به A است می‌دانیم که یک $N^۱_{\epsilon/۲}$ موجود است، به طوری که

$$\forall n > N^۱_{\epsilon/۲} \quad |a_n - A| < \epsilon/۲$$

همچنین از آنجا که b_n همگرا به B است می‌دانیم که یک $N^۱_{\epsilon/۲}$ موجود است، به طوری که

$$\forall n > N^۱_{\epsilon/۲} \quad |b_n - B| < \epsilon/۲$$

پس اگر $N > \max\{N^۱_{\epsilon/۱}, N^۱_{\epsilon/۲}\}$ آنگاه

$$\forall n > N \quad |(a_n+b_n) - (A+B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| \le \frac{\epsilon}{۲} + \frac{\epsilon}{۲} = \epsilon.$$

$\square$

ب.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$

اثبات. فرض کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |\lambda a_n - \lambda A| = |\lambda||(a_n - A)| < \epsilon.$$

کافی است بگیریم $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ و از همگرائیِ دنباله‌ی a_n استفاده کنیم. $\square$

ج. اگر $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

اثبات. فرض کنیم که $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| < \epsilon$$

پس می‌خواهیم که داشته باشیم

$$|\frac{a_n B - A b_n}{B b_n}| < \epsilon$$

عبارتِ $-AB + AB$ را به درون صورت اضافه می‌کنیم:

$$|\frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{B b_n}| < \epsilon$$

داریم

$$|\frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{B b_n}| \leq \frac{|B||a_n - A| + |A||b_n - B|}{|B b_n|}$$

کافی است عبارت سمت راستِ بالا از ϵ کمتر باشد. توجه کنید که از آنجا که b_n همگراست، یک N_1 موجود است به طوری که

$$\forall n > N_1 \quad |b_n - B| < \epsilon \quad (*)$$

پس

$$\forall n > N_1 \quad B - \epsilon < b_n < B + \epsilon \quad (**)$$

بنا به $(**)$ می‌توان اعداد مثبتِ $M_۱, M_۲$ را چنان یافت که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M_۱ < |b_n| < M_۲ \quad (***).$$

حال توجه کنید که دنباله‌ی a_n به A همگراست. پس عددِطبیعی $N_۲$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_۲ \quad |a_n - A| < \epsilon.$$

حال اگر $n > \max\{N_۱, N_۲\}$ آنگاه

$$|a_n - A| < \epsilon, \quad |b_n - B| < \epsilon$$

پس

$$\frac{|B||a_n - A| + |A||b_n - B|}{|Bb_n|} \leq \frac{|B|\epsilon + |A|\epsilon}{|B|M_۱} = \frac{(|A| + |B|)\epsilon}{|B|M_۱}$$

بحث تقریباًتمام شده است؛ تا اینجا ثابت کرده‌ایم که:
برای هر $\epsilon > ۰$ عددِ $N \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N \quad |\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| < \frac{(|A| + |B|)\epsilon}{|B|M_۱}$$

در بند بالا، به جای ϵ مقدارِ $\frac{|B|M_۱}{|A|+|B|}\epsilon$ را بگذارید. [۱] □

مثال ۳. حد دنباله‌های زیر را بیابید.

•

$$a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۴^{n+۳} + ۷}{۵^n}$$

پاسخ.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۴^{n+۳}}{۵^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{۷}{۵^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{۴}{۵})^n \times ۴^۳ + \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۵^n} \times ۷ = ۰ + ۰ = ۰$$

□

[۱] نه! در امتحان نمی‌آید!

•

$$a_n = \frac{۳^n}{۲^n + ۴^n}$$

راهنمایی: صورت و مخرج را بر ۴^n تقسیم کنید.

در قضیه‌ی زیر می‌بینیم که اگر دنباله‌ای میان دو دنباله‌ی همگرا فشرده شود، همگراست. فرض کنیم $\lim a_n = L, \lim b_n = L$ و $a_n \leq c_n \leq b_n$. برای n های به‌اندازه‌ی کافی بزرگ جملات دنباله‌های a_n, b_n به L نزدیکند. جملات دنباله‌ی c_n که میان این دو دنباله هستند نیز به ناچار در نزدیکی L قرار می‌گیرند. در زیر این گفته را دقیق بیان و اثبات کرده‌ایم. [۲]

قضیه ۴ (فشردگی). اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ و

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n,$$

آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

اثبات. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |c_n - L| < \epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$$

فرض کنیم که $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. از آنجا که $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ می‌دانیم که $N_۱ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_۱ \quad a_n < L + \epsilon$$

نیز از آنجا که $\lim b_n = L$ می‌دانیم که $N_۲ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_۲ \quad L - \epsilon < b_n$$

[۲] Squeeze Lemma

پس اگر $n > \max\{\mathbb{N}_۱, \mathbb{N}_۲\}$ آنگاه

$$L_\epsilon < b_n \leq c_n \leq a_n < L + \epsilon.$$

□

مثال ۵. با استفاده از قضیه‌ی فشردگی ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n!} = ۰$$

پاسخ. داریم

$$۰ \leqslant \frac{۲^n}{n!} = \frac{\overbrace{۲ \times ۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}^{n \text{ بار}}}{۱ \times ۲ \times \underbrace{\times \ldots \times n}_{\geq ۳\times\ldots\times ۳}} \leqslant ۲ \times \frac{۲^{n-۲}}{۳^{n-۲}} = ۲ \times (\frac{۲}{۳})^{n-۲}$$

دنباله‌ی ثابتِ ۰ و دنباله‌ی $۲ \times (\frac{۲}{۳})^{n-۲}$ هر دو به صفر میل می‌کنند، پس بنا به فشردگی

$$\lim \frac{۲^n}{n!} = ۰.$$

□

توجه ۶. همان اثبات بالا نشان می‌دهد که برای هر $a > ۰$ داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = ۰$.

توجه ۷. از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n!} = ۰$ برای هر $\epsilon > ۰$ دلخواه، یک $N \in \mathbb{N}$ چنان یافت می‌شود که

$$\forall n > N \quad \frac{۲^n}{n!} < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N \quad ۲^n < \epsilon n!$$

و این تقریباً همان «نرخ رشد» است که درباره‌اش صحبت کرده‌ایم.

مثال ۸. قرار دهید $a_n = \sqrt[n]{n}$ و نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۱$$

پاسخ. چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند:

$$1 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[4]{4} \quad \dots$$

داریم

$$a_n = \sqrt[n]{n} \geqslant \sqrt[n]{1} = 1$$

پس می‌توان نوشت

$$a_n = 1 + b_n \quad b_n \geqslant 0$$

نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$$a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + b_n \quad \Rightarrow \quad n = (1+b_n)^n = 1 + nb_n + \binom{n}{2} b_n^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \quad n \geqslant \binom{n}{2} b_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$$

$$\Rightarrow \quad b_n^2 \leqslant \frac{2}{n-1} \Rightarrow 0 \leqslant b_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

بنا به فشردگی

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

□

مثال ۹. اگر $a_n = \sqrt[n]{1+2^n}$ نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

پاسخ.

$$a_n = \sqrt[n]{1+2^n} \geqslant \sqrt[n]{2^n} = 2 \quad \Rightarrow \quad a_n \geqslant 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{2} \geqslant 1$$

$$(a_n)^n = 1 + 2^n \quad \Rightarrow \quad (\frac{a_n}{2})^2 = \frac{1}{2^n} + 1$$

$$1 \leqslant \frac{a_n}{2} \leqslant \quad \underbrace{(\frac{a_n}{2})^n}_{\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{2})^n = 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

□

تعریف ۱۰ (دنباله‌ی کراندار). دنباله‌ی (a_n) را کراندار می‌خوانیم هرگاه

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < M$$

یعنی

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -M < a_n < M.$$

مشاهده. هر دنباله‌ی همگرا کراندار است.

$$a_n \mapsto L$$

$$\epsilon = \frac{۱}{۲} \quad \exists N_\epsilon \quad \forall n > N_\epsilon \quad |a_n - L| < \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow \quad \forall n > N_\epsilon \quad L - \frac{۱}{۲} < a_n < L + \frac{۱}{۲}$$

□

توجه ۱۱. $(-۱)^n$ کراندار نیست ولی همگراست.

قضیه ۱۲. هر دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار همگراست (و هر دنباله‌ی نزولی و از پائین‌کراندار همگراست).

یک دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار به کوچکترین کرانِ بالای خود همگراست. وجودِ کوچکترین کرانِ بالا را اصل تمامیت در اعدادِ حقیقی تضمین می‌کند:

توجه ۱۳. هر زیرمجموعه‌ی کراندار از اعدادِ حقیقی، دارای کوچکترین کران بالا است.

آیا آنچه در بالا گفته‌ایم درباره‌ی اعدادِ گویا هم درست است؟

مثال ۱۴. نشان دهید که دنباله‌ی $a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k!}$ همگراست.

پاسخ. چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند:

$$a_۱ = ۱ \quad a_۲ = ۱ + \frac{۱}{۲!} \quad a_۳ = ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!}$$

دقت کنید که

$$a_n - a_{n-۱} = \frac{۱}{n!} \geqslant ۰$$

یعنی دنباله‌ی (a_n) صعودی است. کافی است نشان دهیم که دنباله‌ی یادشده از بالا کراندار است.

$$a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k!} = ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \ldots + \frac{۱}{n!} \leqslant ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۲ \times ۲} + \ldots + \frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

$$a_n \leqslant \underbrace{(\frac{۱}{۲})^{۰} + (\frac{۱}{۲})^{۱} + (\frac{۱}{۲})^{۲} + \ldots + (\frac{۱}{۲})^{n-۱}}_{=\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{\frac{۱}{۲}}=۲(۱-(\frac{۱}{۲})^n)\leqslant ۳}$$

$\square$

در جلسات بعد این را که

$$\frac{۱}{۲})^{۱} + (\frac{۱}{۲})^{۲} + \ldots + (\frac{۱}{۲})^{n-۱} = \frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}}$$

ثابت خواهیم کرد.

در این جلسه نشان دادیم که

- برای هر عددِ حقیقیِ $۰ < r < ۱$ داریم $\lim_{n\to\infty} r^n = ۰$.
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$.
- دنباله‌ی $a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k!}$ همگراست.