۱ نیم‌جلسه‌ی سوم

مثال ۱. نشان دهید دنباله‌ی $(۱ + \frac{۱}{n})^n$ همگراست.

پاسخ. نشان می‌دهیم که دنباله‌ی یاد شده‌ی صعودی و از بالا کراندار است. صعودی بودن دنباله یعنی:

$$\forall n \quad a_n \leqslant a_{n+۱}$$

پس از آنجا که جملات دنباله مثبتند، کافی است برای اثبات صعودی بودن دنباله، نشان دهیم:

$$\forall n \quad \frac{a_{n+۱}}{a_n} \geqslant ۱$$

داریم

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{(۱ + \frac{۱}{n+۱})^{n+۱}}{(۱ + \frac{۱}{n})^n} = \frac{(\frac{n+۲}{n+۱})^{n+۱}}{(\frac{n+۱}{n})^n} \times \frac{\frac{n+۱}{n}}{\frac{n+۱}{n}} = (\frac{n+۱}{n})(\frac{n(n+۲)}{(n+۱)^۲})^{n+۱} = (\frac{n+۱}{n})(\frac{n^۲+۲n}{(n+۱)^۲})^{n+۱}$$

$$= (\frac{n+۱}{n})(\frac{(n+۱)^۲-۱}{(n+۱)^۲})^{n+۱} = (\frac{n+۱}{n})(۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲})^{n+۱}$$

با توجه به نامساوی برنولی، داریم $(۱+a)^{n+۱} \geqslant ۱ + (n+۱)a$ پس

$$(\frac{n+۱}{n})(۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲})^{n+۱} \geqslant \frac{n+۱}{n} \times (۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲}) = \frac{n+۱}{n} - \frac{\cancel{n+۱}}{n\cancel{(n+۱)}} = ۱+\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n} = ۱$$

پایان اثبات صعودی بودن. □

اثبات کراندار بودن دنباله:

$$a_n = (۱+\frac{۱}{n})^n = \sum_{k=۰}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}(\frac{۱}{n})^k}_{\text{ادعا:}\ \leqslant \frac{۱}{k!}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k}(\frac{۱}{n}) = \frac{۱}{k!} \times \frac{n \times (n-۱) \times ... \times (n-k+۱)}{n^k}$$

$$\frac{n \times (n-۱) \times ... \times (n-k+۱)}{n^k} \leqslant ۱$$

$$\Rightarrow \quad a_n \leqslant \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!}$$

جلسه‌ی قبل نشان دادیم که $\sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!}$ کراندار است. □

توجه ۲. بعداً در همین درس خواهیم دید که حد دنباله‌ی $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ برابر است با e، عددِ نپر. عددِ نپر همچنین برابر است با حاصلجمعِ سری زیر:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

مثال ۳. حد دنباله‌ی زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$a_n = \sqrt{2n^5 - 5n} - \sqrt{2n^5 - n^2}$$

پاسخ.

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2n^5 - 5n}}_{a} - \underbrace{\sqrt{2n^5 - n^2}}_{b}$$

با توجه به رابطه‌ی $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ داریم:

$$a_n = a_n \times \frac{a+b}{a+b} = \frac{\overbrace{5n}^{\leqslant 5n^2} + n^2}{\sqrt{2n^5 - 5n} + \sqrt{2n^5 - n^2}} \geqslant 0$$

مخرج کسر را کوچک و صورت آن را بزرگ می‌کنیم

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{6n^2}{\sqrt{2n^5} + \sqrt{n^5}} = \frac{6n^2}{(\sqrt{2}+1)n^{\frac{5}{2}}} = \frac{6}{(\sqrt{2}+1)} n^{2-\frac{5}{2}}$$

$6n^{2-\frac{5}{2}}$ به صفر میل می‌کند. در نتیجه حد a_n نیز بنا به فشردگی صفر است. $\square$

مثال ۴. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

پاسخ.

$$1 = \sqrt[n]{1} \leqslant \sqrt[n]{2} = 1 + b_n \quad b_n \geqslant 0$$

نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ می‌دانیم $b_n \geqslant 0$ همچنین $(1+b_n)^n = 2$ پس

$$2 = 1 + \binom{n}{1} b_n + \binom{n}{2} b_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} b_n^n$$

پس

$$2 \geq \binom{n}{1} b_n \Rightarrow 1 \geqslant n b_n$$

$$b_n \leqslant \frac{۱}{n}$$

بنابراین

$$۰ \leqslant b_n \leqslant \frac{۱}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$$

در نتیجه بنا به فشردگی حد دنباله‌ی b_n نیز صفر است. □

توجه ۵. به طور کاملاً مشابه می‌توان نشان داد که اگر $a > ۱$ آنگاه

$$\sqrt[n]{a} \mapsto ۱$$

مثال ۶. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲^n + ۳^n} = ۳$

پاسخ.

$$\sqrt[n]{۳^n} \leqslant \sqrt[n]{۲^n + ۳^n} \leqslant \sqrt[n]{۳^n + ۳^n}$$

$$\Rightarrow \quad ۳ \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{۲ \times ۳^n}$$

$$\Rightarrow \quad ۳ \leqslant a_n \leqslant ۳\sqrt[n]{۲}$$

در مثال قبل دیدیم که $\sqrt[n]{۲}$ به یک میل می‌کند، پس بنا به فشردگی $a_n \mapsto ۳$. □

توجه ۷. به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $۰ < a < b$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b.$$

مثال ۸. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = ۳$ ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$$

پاسخ. از آنجا که $a_n \mapsto ۳$ برای $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ یک N_ϵ موجود است، به طوری که

$$\forall n > N_\epsilon \quad |a_n - ۳| < \frac{۱}{۲}$$

یعنی

$$\forall n > N_\epsilon \quad ۲/۵ < a_n < ۳/۵$$

پس

$$\forall n > N_\epsilon \quad \sqrt[n]{۲/۵} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{۳/۵}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲/۵} = ۱, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲/۵} = ۱$$

بنا به قضیه‌ی فشردگی $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$ □

توجه ۹.

۱. به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = a > ۰$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$$

توجه کنید که شاید $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ در این جا کار نکند ولی می‌توان با انتخاب مناسبتری از آن به نتیجه‌ی مطلوب رسید.

۲. در طی پاسخ مثال قبل همچنین ثابت کردیم که هر دنباله‌ی همگرا، کراندار است.

مثال ۱۰. حد دنباله‌ی زیر را بیابید:

$$\sqrt[n]{۲^n - ۱}$$

راهنمائی. داریم

$$\sqrt[n]{۲^n - ۱} = \sqrt[n]{۱ + ۲ + ۲^۲ + \ldots + ۲^{n-۱}}$$

حال با استفاده از لم فشردگی نشان دهید که حد این دنباله برابر با ۲ است. □

در این جلسه ثابت کردیم:

۱. $(۱ + \frac{۱}{n})^n$ همگراست.

۲. اگر $a > ۱$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = ۱$.

۳. اگر $۰ < a < b$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b.$$

۴. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = a > ۰$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$$