۱ جلسه‌ی یازدهم

وقتی می‌گوئیم حدِّ تابعی در مثبتِ بی‌نهایت، مثبتِ بینهایت شده است یعنی مقادیر آن تابع، **به هر اندازه‌ی دلخواه** بزرگ می‌شوند به شرط این که ورودی تابع، **به اندازه‌ی کافی** بزرگ باشد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \iff \forall M\in\mathbb{N}\quad \exists N\in\mathbb{N}\quad \forall x\quad (x>N\to f(x)>M).$$

مثال ۱.

$$\lim_{x\to\infty} e^x=+\infty$$

پاسخ. داریم

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

پس

$$x>0\to e^x>1+x\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty.$$

$\square$

مثال ۲. نشان دهید که

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

پاسخ.

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=\lim_{t\to\infty}e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0$$

توجه کنید که در بالا از تغییر متغیرِ $t=-x$ استفاده کرده‌ایم؛ بدین صورت که $x\to-\infty$ اگروتنهااگر $-t\to\infty$. $\square$

مثال ۳. نشان دهید که برای هر $n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

پاسخ. داریم

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dots$$

پس

$$\cdot \leqslant \frac{x^n}{e^x} \overset{\text{مخرج را کوچک کرده‌ایم}}{\leqslant} \frac{x^n}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!x^n}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x} \mapsto \cdot$$

بنا به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \cdot$$

□

مثال ۴. نشان دهید که

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \cdot$$

با تغییر متغیر $x = -t$ داریم

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{t\to\infty} \frac{(-t)^n}{e^t} = \cdot.$$

توجه ۵. اگر توابع f و g در $x.$ پیوسته باشند، آنگاه $f \pm g$ و λf در $x.$ پیوسته‌اند. همچنین اگر $g(x) \neq \cdot$ آنگاه $\frac{f}{g}$ هم پیوسته است.

مثال ۶. تابع $\frac{e^x}{x^{۴}+۱}$ در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

نتیجه ۷. تابع $f(x) = x$ پیوسته است. پس $f(x) \times f(x) = x^{۲}$ پیوسته است. پس $ax^{۲}$ پیوسته است پس $bx^{۳}$ هم پیوسته است. بدین‌ترتیب چندجمله‌ایها، یعنی توابعِ به صورت زیر،

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + \cdot$$

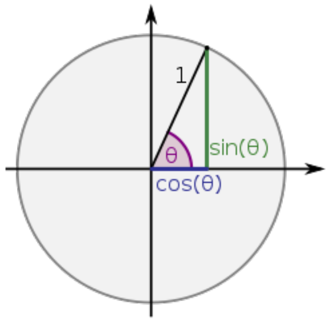
پیوسته هستند.

توابع هُذلولوی

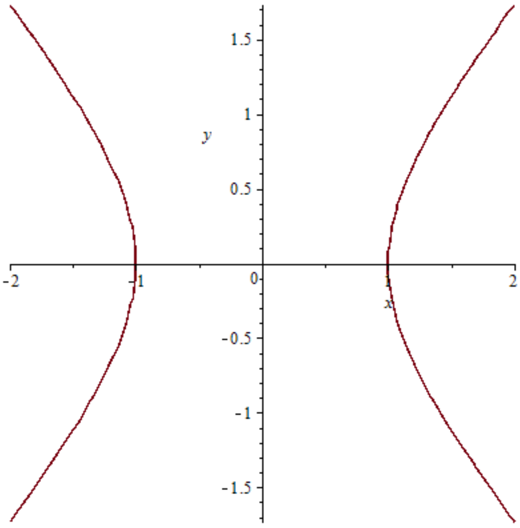
معادله‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ معادله‌ی یک دایره به شعاع ۱ است. می‌دانید که معادله‌ی پارامتری این دایره، به صورت زیر است:

$$x = \cos(\theta) \quad y = \sin(\theta)$$

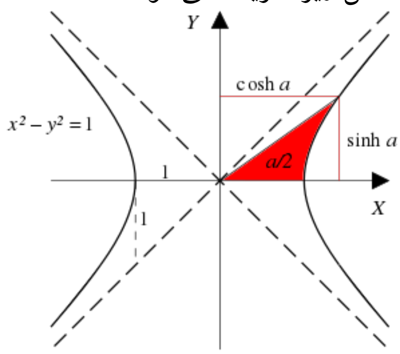
در واقع، نسبتهای مثلثاتیِ $\cos, \sin$ بر حسب زاویه‌ی θ روی این دایره قرار دارند:



در این قسمت قرار است با توابع هذلولوی [1] آشنا شویم که مقادیر آنها روی یک هذلولی واقع هستند.
معادله‌ی $x^۲ - y^۲ = ۱$ را در نظر بگیرید:



توابع هذلولوی بر حسب مساحت احاطه شده بین خطی که مبدأ را به هذلولی وصل می‌کند، به صورت شکل زیر تعریف می‌شوند:



[1] Hyperbolic functions

در شکل بالا $x = \cosh(a)$ و $y = \sinh(a)$. پس

$$\cosh^{۲} - \sinh^{۲} = ۱$$

توجه کنید که مساحتهای زیر محورِ x را منفی در نظر می‌گیریم.

حال توابع یادشده را به صورت رسمی معرفی می‌کنیم: گفتیم که توابع e^x و e^{-x} هر دو در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند پس توابع زیر هم در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{۲}$$
$$\frac{e^x - e^{-x}}{۲}$$

تعریف می‌کنیم

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$$
$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$$

پس داریم

$$\cosh(x) = \frac{\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}}{۲}$$
$$= \frac{\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲x^{۲n}}{۲n!}}{۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{۲n!}$$
$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{۲n!} = ۱ + \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۴}}{۴!} + \dots$$

و به طور مشابه،

$$\sinh(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

توجه ۸.

.۱

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

.۲

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

.۳

$$\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = (\cosh x - \sinh x)(\cosh x + \sinh x)$$

بنابراین

$$\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = e^{x} e^{-x} = ۱$$

.۴

$$\cosh^{۲} x = ۱ + \sinh^{۲} x \to \cosh^{۲} x \geqslant ۱$$

از طرفی

$$\cosh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{۲} \geqslant ۰$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$\cosh x \geqslant ۱$$

.۵

$$\cosh(۰) = ۱$$

.۶

$$\lim_{x \to +\infty} \cosh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} + e^{-x}}{۲} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty$$

.۷

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{۲} = \frac{e^{۲x} - ۱}{۲e^{x}}$$

$$x < ۰ \Rightarrow \sinh x \leqslant ۰$$

$$x > ۰ \Rightarrow \sinh x \geqslant ۰$$

.۸

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty$$

.۹

$$\lim_{x\to-\infty}\sinh x=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{۲}\overset{x=-t}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-t}-e^t}{۲}=-\infty$$

.۱۰

$$\sinh(-x)=-\sinh x$$

یعنی sinh تابعی فرد است.

.۱۱

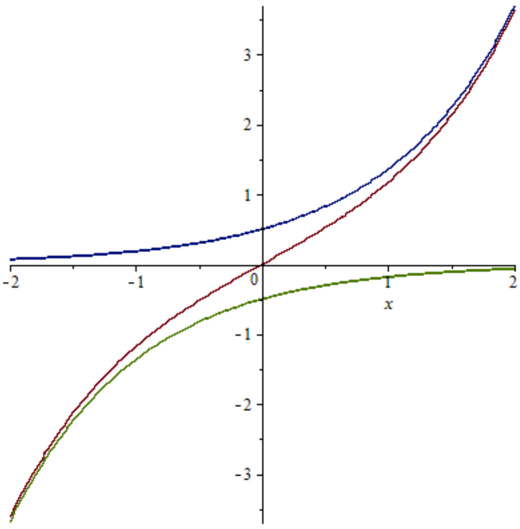
$$\cosh(-x)=\cos x$$

یعنی cosh تابعی زوج است.

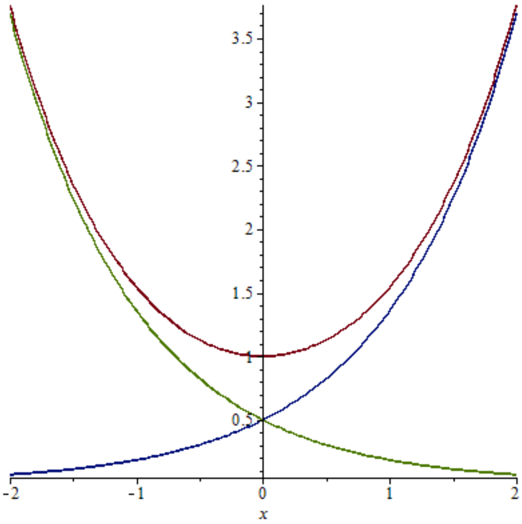
.۱۲

$$\lim_{x\to ۰}\sinh x=۰$$

طبق آنچه در بالا گفته‌ایم نمودار تابع sinh به صورت زیر است:



در شکل بالا نمودارهای آبی و سبز به ترتیب $\frac{۱}{۲}e^x$ و $-\frac{۱}{۲}e^{-x}$ را نشان می‌دهند و نمودار قرمز، sinh را. همچنین نمودار تابع cosh به صورت زیر است:



در شکل بالا نمودار cosh با رنگ قرمز مشخص شده است و نمودارهای آبی و سبز به ترتیب $\frac{e^x}{۲}$ و $\frac{e^{-x}}{۲}$ را نشان می‌دهند.

از آنجا که $\sinh x$ و $\cosh x$ در $\mathbb{R}$ پیوسته هستند و $\cosh x \neq ۰$ تابع $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ هم در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱}$$

$$\tanh ۰ = ۰$$

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱} = \lim_{x \to ۰} \frac{۱ - \frac{۱}{e^{۲x}}}{۱ + \frac{۱}{e^{۲x}}} = ۱$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -۱$$

تابع coth نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{۲x} + ۱}{e^{۲x} - ۱}$$

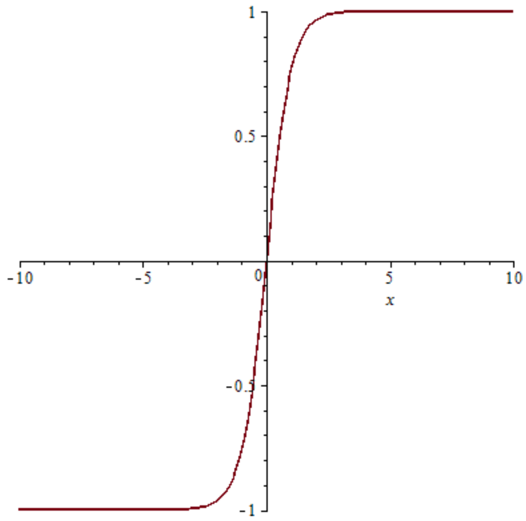
$$\lim_{x \to +\infty} \coth x = \lim_{x \to +\infty} \frac{۱}{\tanh x} = ۱$$

$$\lim_{x \to -\infty} \coth x = \lim_{x \to -\infty} \frac{۱}{\tanh x} = -۱$$

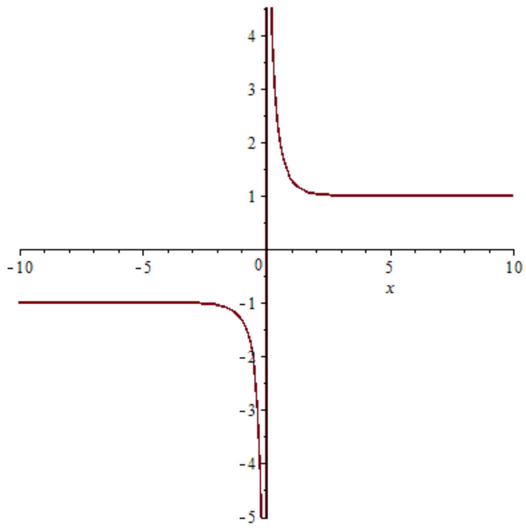
$$\lim_{x \to ۰^+} \coth x = \lim_{x \to ۰^+} \frac{e^{۲x} + ۱}{e^{۲x} - ۱} = +\infty$$

$$\lim_{x \to ۰^-} \coth x = -\infty$$

در زیر نمودار tanh را کشیده‌ایم:



در زیر نمودار coth را کشیده‌ایم:



توجه ۹.

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2 \quad (1)$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2 \quad (2)$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \quad (3)$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad (4)$$

قضیه ۱۰. اگر تابع $f : I(\text{بازه}) \to \mathbb{R}$ در $x_0 \in I$ پیوسته باشد و تابع g در یک همسایگی از $f(x_0)$ تعریف شده و در $f(x_0)$ پیوسته باشد، آنگاه $g \circ f(x)$ در x_0 پیوسته است.

مثال ۱۱. تابع زیر در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \sinh(\frac{1}{1+x^2})$$

مثال ۱۲. نشان دهید تابع زیر در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x\tanh\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

پاسخ. تابع مورد نظر در $x_0 \neq 0$ همواره پیوسته است. (زیرا ترکیب دو تابع پیوسته است).

در $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \overbrace{\tanh\frac{1}{x}}^{\lim_{x\to 0}\tanh\frac{1}{x}=1} = 0$$

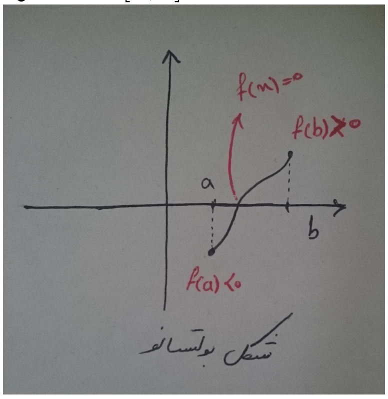
پس این تابع در $x_0 = 0$ نیز پیوسته است. □

قضیه‌ی بولتسانو

قضیه‌ی بولتسانو [2] مشخصه‌ی مهمی از توابع پیوسته را بیان می‌کند. از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر تابع f در یک بازه‌ی I پیوسته باشد آنگاه $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ نیز یک بازه است. یعنی اگر مقدار تابع در یک نقطه $f(a)$، شده باشد و در یک نقطه‌ی دیگر $f(b)$ و داشته باشیم $f(a) < f(b)$ آنگاه تابعِ f همه‌ی مقادیر بینِ $f(a)$ و $f(b)$ را نیز می‌پذیرد.

[2] Bolzano

قضیه ۱۳ (بولتسانو)**.** فرض کنید تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(a) < ۰$ و $f(b) > ۰$. آنگاه نقطه‌ای مانند $x_. \in [a,b]$ موجود است به طوری که $f(x_.) = ۰$.



اثبات. قرار دهید:

$$A = \{x \in [a,b] | f(x) < ۰\}.$$

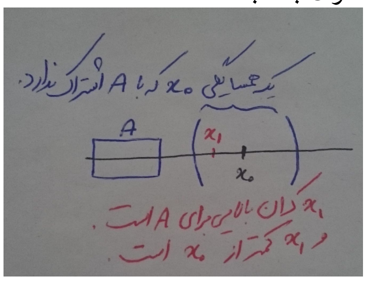
دقت کنید که اولاً مجموعه‌ی A ناتهی است، زیرا $a \in A$. ثانیاً مجموعه‌ی A از بالا کراندار است، زیرا b یک کران بالا برای آن است.

اصل تمامیت. هر مجموعه‌ی ناتهی و از بالا کراندار از $\mathbb{R}$ دارای کوچکترین کران بالاست.

فرض کنید $x_.$ کوچکترین کران بالای A باشد.

مشاهده. هر همسایگی از $x_.$ با A اشتراک دارد.

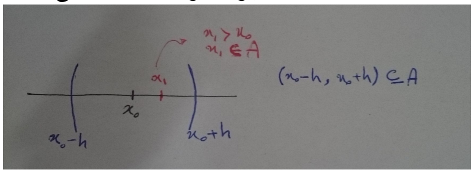
اگر همسایگی‌ای از $x_.$ داشته باشیم که با A اشتراک ندارد، آنگاه $x_.$ مطابق شکل نمی‌تواند کوچکترین کران بالا باشد.



ادعّا: $f(x_.) = ۰$.

اگر $f(x_.) > ۰$ آنگاه بنا به پیوستگی، f در یک همسایگیِ $(x_. - h, x_. + h)$ از $x_.$ مثبت است.

بنا بر آنچه در بالا گفتیم این همسایگی با A اشتراک دارد، که این تناقض است.
اگر $f(x_۰) < ۰$:
در این حالت اولاً $x_۰ \neq b$. ثانیاً $x_۰ \in A$. ثالثاً در یک همسایگیِ $(x_۰ - h, x_۰ + h)$ تابع f منفی است. توجه کنید که h را می‌توان به گونه‌ای گرفت که $x_۰ + h < b$. یعنی هر $x_۱ \in (x_۰, x_۰ + h)$ در A است و از $x_۰$ بزرگتر است. و این متناقض است با اینکه $x_۰$ کوچکترین کران بالاست.



بنابراین:

$$f(x_۰) = ۰$$

□

مثال ۱۴. نشان دهید که معادله‌ی $e^x = \frac{۱}{x}$ در $\mathbb{R}$ دارای جواب است.

پاسخ. می‌خواهیم که

$$f(x) = e^x x - ۱ = ۰$$

$f(x)$ یک تابع پیوسته است.

$$f(۰) = -۱$$

$$f(۱) = e - ۱ > ۰$$

پس تابع f در بازه‌ی $[۰, ۱]$ تعریف شده است و پیوسته است و $f(۰) < ۰$ ، $f(۱) > ۰$. پس

$$\exists x \in [۰, ۱] \quad f(x) = ۰.$$

$$\exists x \in [۰, ۱] \quad e^x x - ۱ = ۰ \Rightarrow e^x x = ۱$$

□

مثال ۱۵. نشان دهید معادله‌ی $e^x = \frac{۱}{x^۲}$ در $\mathbb{R}$ دارای جواب است

قضیه ۱۶ (مقدار میانی)**.** اگر $f(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) < f(b)$، آنگاه برای هر $k \in [f(a), f(b)]$ عنصر $x_۰ \in [a, b]$ موجود است به به طوری که $f(x_۰) = k$.

اثبات. قرار دهید:

$$g(x) = f(x) - k.$$

داریم

$$g(a) < ۰$$

و

$$g(b) > ۰.$$

پس بنا به قضیه‌ی بولتسانو داریم

$$\exists x \in [a, b]$$

$$g(x) = ۰$$

یعنی

$$\exists x \in [a, b] \quad f(x) = k.$$

$\square$