۱ جلسه‌ی هجدهم

یادآوری ۱. در جلسه‌ی قبل دیدیم که اگر تابع f در بازه‌ی I بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد و $a \in I$ آنگاه برای هر $x > a$ در بازه‌ی I داریم:

$$\exists c \in (a,x) \quad f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

$$\exists c \in (a,x) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{۲}(x-a)^{۲}$$

$$\exists c \in (a,x) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{۲!}(x-a)^n + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+۱)}(a)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}}_{\text{خطا}}$$

گفتیم که به چندجمله‌ای T_n از درجه‌ی n در زیر، چندجمله‌ی تیلور از درجه‌ی n حول نقطه‌ی a برای تابع f گفته می‌شود:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^n + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad (*)$$

اگر برای تمام $x \in I$ حدهای دنباله‌های سمت راست موجود باشند، داریم:

$$\forall x \in I \quad \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x) \quad (**)$$

فرض کنید برای تمام $x \in I$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = ۰$$

آنگاه بنا به $**$ داریم:

$$\forall x \in I \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

می‌دانیم که:

$$\forall x \in I \quad \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

یعنی در این صورت

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

به بیان دیگر، تابع f با یک سری توان برابر می‌شود. به توابعی که در یک بازه‌ی خاص با سری تیلور خود برابرند، **توابع تحلیلی** [۱] گفته می‌شود.

توجه ۲. برای هر تابعی که بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، می‌توان سری تیلور نوشت ولی لزوماً سری تیلور با خود تابع برابر نیست. مثال نقض را در جلسه‌ی قبل دیده‌ایم.

مثال ۳. سری تیلور تابع $f(x)=e^x$ را حول $a=۰$ بنویسید.

پاسخ.

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

می‌دانیم که e^x بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است. پس داریم:

$$\begin{aligned}
&f(x)=e^x \Rightarrow f(۰)=۱\\
&f'(x)=e^x \Rightarrow f'(۰)=۱\\
&f''(x)=e^x \Rightarrow f''(۰)=۱\\
&\vdots\\
&f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(۰)=۱
\end{aligned}$$

پس داریم:

$$e^x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}x^n=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

□

مثال ۴. سری تیلور تابع $f(x)=\sin x$ حول نقطه‌ی $a=۰$ را بنویسید.

همان گونه که مثال بالا نشان می‌دهد، اگر تابع f دارای نمایشی به صورت یک سری توان باشد، آن سری توان همان سری تیلور تابع مورد نظر خواهد بود.

[۱] analytic

پاسخ.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۰)}{n!} x^n$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(۰) = ۰$$
$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(۰) = ۱$$
$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(۰) = ۰$$
$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(۰) = -۱$$
$$f^{(۴)}(x) = \sin x \Rightarrow f(۰) = ۰$$

پس دنباله‌ی $\{f^{(n)}(۰)\}$ برابر است با:

$$\{f^{(n)}\} = \overset{a_۰}{۰} + \overset{a_۱}{۱} + \overset{a_۲}{۰} + \overset{a_۳}{-۱} + \overset{a_۴}{۰} + \overset{a_۵}{۱} + \overset{a_۶}{۰} + \overset{a_۷}{-۱} + \dots$$

توجه کنید اگر n زوج باشد آنگاه

$$f^{(n)}(۰) = ۰$$

پس سری تابع ما به صورت زیر است:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \square \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} = \overset{۱}{\square}\, x + \overset{-۱}{\square}\, x^۳ + \overset{۱}{\square}\, x^۵$$

پس داریم:

$$\sin(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \dots$$

بنا به بسط بالا بود که در دبیرستان گاهی هنگام محاسبه‌ی حدها، از هم‌ارزی زیر استفاده می‌کردید:

$$\sin x \simeq x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!}$$

$\square$

مثال ۵. نشان دهید که

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad |\tanh a - \tanh b| \leqslant |a-b| \leqslant |\sinh a - \cosh b|$$

.

پاسخ. بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\forall a < b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in (a,b) \quad |\frac{\tanh a - \tanh b}{a-b}| = |(\tanh)'(c)|$$

توجه ۶. اگر f در بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و $a,b \in I$ آنگاه

$$\exists c \in I \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

می‌دانیم که

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$$

در سرتاسر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. بنابراین قضیه‌ی مقدار میانگین قابل اعمال است.

$$|\tanh a - \tanh b| = |a-b||(\tanh)'(c)|$$

واضح است که اگر $|(\tanh)'(c)| < ۱$ آنگاه

$$|\tanh a - \tanh b| \leqslant |a-b|$$

داریم

$$(\tanh)'(x) = (\frac{\sinh}{\cosh})'(x) = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^۲(x)} = \frac{۱}{\cosh^۲(x)}$$

اثبات اینکه $۱ \leqslant \frac{۱}{\cosh^۲(x)}$: توجه کنید که $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{۲}$ بنابراین $\cosh x \geqslant ۰$. از طرفی $۱ \geqslant \cosh^۲(x) = ۱ + \sinh^۲(x)$ پس داریم:

$$\begin{cases} \cosh x \geqslant ۰ \\ \cosh^۲(x) \geqslant ۱ \end{cases}$$

که از آن نتیجه می‌شود که: $\cosh x \geqslant ۱$. پس

$$\frac{۱}{\cosh^{۲}(c)} \leqslant ۱$$

در نتیجه

$$|\tanh'(c)| \leqslant ۱$$

پس داریم:

$$|\tanh a - \tanh b| \leqslant |a-b|$$

قسمت دوم سوال. باید نشان دهیم که

$$|\frac{\sinh a - \sinh b}{a-b}| \geqslant ۱$$

از آنجا که $\sinh$ تابعی مشتق‌پذیر است بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\exists c \in (a,b) \quad |\frac{\sinh a - \sinh b}{a-b}| = |\cosh(c)| \geqslant ۱$$

در نتیجه داریم:

$$|\frac{\sinh a - \sinh b}{a-b}| \geqslant ۱$$

□

مثال ۷. فرض کنید $f : (۰,\infty) \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و برای هر x داشته باشیم $f'(x) = \frac{۱}{x}$ و بدانیم که $f(۱) = ۰$. نشان دهید که

$$\forall x > ۱ \quad ۱ - \frac{۱}{x} \leqslant f(x) \leqslant x - ۱$$

(توجه: پس به ویژه عبارت بالا برای $f(x) = \ln x$ برقرار است. یعنی

$$\forall x > ۱ \quad ۱ - \frac{۱}{x} \leqslant \ln(x) \leqslant x - ۱$$

)

پاسخ. از آنجا که f مشتق‌پذیر است بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\exists c \in (۱, x) \quad \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = f'(c) = \frac{۱}{c}$$

$$c > ۱ \Rightarrow \frac{۱}{c} < ۱ \Rightarrow f(x) - f(۱) \leqslant x - ۱ \Rightarrow f(x) \leqslant x - ۱$$

ثابت کردیم که

$$f(x) = \underbrace{f(۱)}_{=۰} + f'(c)(x - ۱) \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{c}(x - ۱), c \geqslant ۱$$

پس داریم

$$۱ - \frac{۱}{x} = \frac{x - ۱}{x} \leqslant \frac{x - ۱}{c} \quad c \in (۱, x)$$

در نتیجه داریم:

$$f(x) = \frac{x - ۱}{c} \geqslant \frac{x - ۱}{x} = ۱ - \frac{۱}{x} \Rightarrow f(x) \geqslant ۱ - \frac{۱}{x}$$

□

مثال ۸. برای هر $x \geqslant ۰$ نشان دهید که

$$\ln(۱ + x) \geqslant \frac{x}{x + ۱}$$

پاسخ.

$$\ln(۱ + x) = \ln(۱) + (\ln)'(c)(x)$$

برای یک $c \in (۱, ۱ + x)$. پس

$$\ln(۱ + x) = \frac{۱}{c}x$$

از آن جا که $c \in (۱, ۱ + x)$، داریم

$$\frac{۱}{c}x \geqslant \frac{x}{۱ + x} \Rightarrow \ln(۱ + x) \geqslant \frac{x}{x + ۱}$$

□

مثال ۹. اکسترمم‌های مطلق تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \tanh(x^۳ - ۳x^۲) \quad x \in [-۲, ۱]$$

پاسخ.

توجه ۱۰. اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f در این بازه هم مینیمم مطلق دارد و هم ماکزیمم مطلق.

توجه ۱۱. اگر f در (a, b) مشتق‌پذیر باشد و $c \in (a, b)$ یک اکسترمم نسبی باشد آنگاه

$$f'(c) = ۰$$

برای تعیین اکسترمم‌های مطلق نقاطی را که در آن مشتق وجود ندارد و یا صفر می‌شود و نقاط انتهایی بازه را با هم مقایسه می‌کنیم. تابع $x^۳ - ۲x^۲$ در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. تابع $\tanh x$ نیز در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. پس $\tanh(x^۳ - ۳x^۲)$ نیز در سرتاسر $\mathbb{R}$ و به ویژه در بازه‌ی $[-۲, ۱]$ مشتق‌پذیر است.

$$f'(x) = (۳x^۲ - ۶x)\frac{۱}{\cosh(x^۳ - ۳x)}$$

از آنجا که $\cosh x \geqslant ۱$ ، مشتق تنها در نقاط صادق در معادله‌ی زیر صفر است:

$$۳x^۲ + ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = ۲$$

$$f(-۲) = \tanh(-۲۰)$$

$$f(۱) = \tanh(-۲)$$

$$f(۰) = ۰$$

$x = ۲$ در بازه نیست

نقطه‌ی $(۰, ۰)$ نقطه‌ی ماکزیمم مطلق و نقطه‌ی $(-۲, \tanh(-۲۰))$ مینیمم مطلق است. □

مثال ۱۲. یک مقدار تقریبی برای $\sin \frac{\pi}{۸}$ به همراه خطای این تقریب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\forall x > ۰ \quad \exists c \in (۰, x) \quad \sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \underbrace{\frac{x^۵}{۵!}\cos c}_{\text{خطا}}$$

پاسخ.

$$\sin\frac{\pi}{۸} \simeq \frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{۶}(\frac{\pi}{۸})^{۳}$$

خطای این تقریب نیز به صورت زیر است:

$$\frac{(\frac{\pi}{۸})^{۵}\cos c}{۵!} \leqslant \frac{۱}{۵!} \times (\frac{۴}{۸})^{۵} = \frac{۱}{۳۸۴۰}$$

$\square$