۱ جلسه‌ی بیست و چهارم

مثال ۱. توابع اولیه زیر را بیابید.

.۱

$$\int \tanh x dx$$

پاسخ.

$$\int \tanh x dx = \int \frac{\sinh x}{\cos x} dx$$

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$u = \cosh x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sinh x \Rightarrow du = \sinh x dx$$

در انتگرال بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\cosh x| + c = \ln\cosh x + c$$

$\cosh x$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر است. $\square$

.۲

$$\int \frac{e^x}{e^x + ۱} dx$$

پاسخ. از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = e^x + ۱ \Rightarrow du = e^x dx$$

در انتگرال جایگذاری می‌کنیم:

$$\int \frac{e^x}{e^x + ۱} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|e^x + ۱| + c = \ln(e^x + ۱) + c$$

$\square$

.۳

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{۲x} + ۱}}$$

پاسخ. از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = \sqrt{e^{۲x} + ۱} \Rightarrow du = \frac{۲e^{۲x}}{۲\sqrt{e^{۲x} + ۱}}dx \Rightarrow dx = \frac{۲\sqrt{e^{۲x} + ۱}}{۲e^{۲x}}du$$

و

$$u^۲ = e^{۲x} + ۱ \Rightarrow e^{۲x} = u^۲ - ۱$$

پس

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{۲x} + ۱}} = \int \frac{\frac{u}{u^۲ - ۱}}{u}du = \int \frac{۱}{u^۲ - ۱}du = -\tanh^{-۱}(u) + c = -\tanh^{-۱}(\sqrt{e^{۲x} + ۱}) + c$$

□

توجه ۲.

$$\int f(x)g(x) \neq \int f(x)dx \times \int g(x)dx$$

دلیل:

$$\int f(x)dx = F \Rightarrow F' = f(x)$$

$$\int g(x)dx = G \Rightarrow G' = g(x)$$

$$(F \cdot G)' \neq f(x) \times g(x)$$

$$(F \cdot G)' = F'G + G'F = f(x)G + g(x)F$$

$$\int (f(x)G + g(x)F)dx = FG + c$$

یادآوری ۳.

$$d(uv) = udv + vdu$$

از دو طرف این رابطه انتگرال‌گیری کنید.

$$uv = \int udv + \int vdu + c$$

$$\int udv = uv - \int vdu + c$$

$$\int vdu = uv - \int udv + c$$

روش بالا را **روش انتگرال‌گیریِ جزءبه‌جزء** می‌خوانیم.

۴.

$$\int xe^{۲x}dx$$

پاسخ. می‌دانیم که :

$$(e^{۲x})' = ۲e^{۲x}$$

حال اگر

$$v = \frac{x}{۲}$$

و

$$du = ۲e^{۲x}dx \Rightarrow u = e^{۲x}$$

آنگاه

$$\int xe^{۲x}dx = \int (\frac{x}{۲})(۲e^{۲x}dx) = \int vdu$$

$$\int vdu = uv - \int udv = (e^{۲x})(\frac{x}{۲}) - \int e^{۲x}(\frac{۱}{۲})dx = \frac{x}{۲}e^{۲x} - \frac{۱}{۴}e^{۲x} + c$$

توجه کنید که در روش جزءبه‌جزء گاهی باید u, dv را زیرکانه انتخاب کرد. در همان مثال بالا اگر به صورت زیر عمل می‌کردیم، محاسبه‌ی انتگرال دشوارتر می‌شد:

$$u = e^{۲x}$$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^{۲}}{۲}$$

$$\int e^{۲x}xdx = \int udv$$

$$\int udv = uv - \int vdu = e^{۲x}(\frac{x^{۲}}{۲}) - \int \frac{x^{۲}}{۲} \times ۲ \times e^{۲x}dx$$

این راه سخت تر است! □

۵.

$$\int x \sin x dx$$

پاسخ.

$$\int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\sin x dx}_{du}$$

$$\int vdu = uv - \int udv = (-\cos x)(x) - \int (-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + c$$

اگر به صورت زیر عمل می‌کردیم، رسیدن به جواب دشوارتر می‌شد:

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{u} \underbrace{xdx}_{dv}$$

$$\int udv = uv - \int vdu = \sin x \frac{x^۲}{۲} - \int \frac{x^۲}{۲}(\cos x)dx = ?$$

□

تمرین ۴. انتگرال $\int x^۲ \sin x dx$ را محاسبه کنید.

.۶

$$\int \ln x dx$$

توجه:

$$\int \ln x dx \neq \frac{۱}{x} + c(!!)$$

در واقع:

$$\int \frac{۱}{x} dx = \ln |x| + c$$

پاسخ.

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv}$$

$$\int udv = uv - \int vdu = \ln x \times x - \int x \times \frac{۱}{x} dx = x\ln x - x + c$$

□

$$\boxed{\int \ln x dx = x\ln x - x + c}$$

۷.

$$\int x^{۲} \ln x dx$$

پاسخ.

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{x^{۲} dx}_{dv}$$

$$\int u dv = uv - \int v du = \ln x \times (\frac{x^{۳}}{۳}) - \int \frac{x^{۳}}{۳} \times \frac{۱}{x} = \frac{x^{۳}}{۳} \ln x - \frac{۱}{۹} x^{۳} + c$$

$\square$

۸.

$$\int \sin^{-۱} x dx$$

پاسخ.

$$\int \underbrace{\sin^{-۱} x}_{u} \underbrace{dx}_{dv}$$

$$\int u dv = uv - \int v du = \sin^{-۱} x \times x - \underbrace{\int x \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} dx}_{A}$$

$$A = \int x \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} dx$$

$$u = ۱ - x^{۲} \Rightarrow du = -۲ x dx \Rightarrow \frac{du}{-۲} = x dx$$

$$A = \int \frac{\frac{du}{-۲}}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{۱ - x^{۲}}$$

پس داریم:

$$\int \sin^{-۱} x dx = x \sin^{-۱} x + \sqrt{۱ - x^{۲}} + c$$

$\square$

۹.

$$\int \tan^{-۱} x dx$$

پاسخ. به عهده‌ی شما (دقیقاً به همان روش بالا) □

۱۰.

$$\int e^{\sqrt{x}}dx$$

پاسخ. می‌دانیم که

$$(e^x)' = \frac{e^x}{۲\sqrt{x}}$$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = ۲\int \underbrace{\sqrt{x}}_{u}\underbrace{\frac{e^x}{۲\sqrt{x}}dx}_{dv}$$

$$\int udv = uv - \int vdu = ۲\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - ۲\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}}dx = ۲\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + c = ۲e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - ۱) + c$$

راه دوم.

$$u = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow du = \frac{e^{\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx = \frac{۲du \times \sqrt{x}}{u}$$

$$\ln u = \sqrt{x} \Rightarrow dx = \frac{۲du \times \ln u}{u}$$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int \frac{۲u \ln u du}{u} = \int ۲\ln u du = ۲(u\ln u - u + c) = ۲(e^{\sqrt{x}}\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}}) + c$$

□

۱۱.

$$\int \sec x dx$$

پاسخ.

$$\int \sec x dx = \int \frac{۱}{\cos x}dx$$

راه اول.

$$\int \frac{۱}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^۲ x}dx = \int \frac{\cos x}{۱ - \sin^۲ x}dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow dx = \cos x dx$$

$$\int \frac{\cos x}{۱ - \sin^۲ x} dx = \int \frac{du}{۱ - u^۲} = \tanh^{-۱} u + c = \tanh^{-۱}(\sin x) + c$$

راه دوم. با استفاده از تغییر متغیرِ استاندارد زیر نیز می‌توان این انتگرال را حل کرد.

توجه ۵. تغییر متغیر:

$$t = \tan \frac{x}{۲}$$

$$\sin x = \frac{۲t}{۱ + t^۲}$$

$$\cos x = \frac{۱ - t^۲}{۱ + t^۲}$$

□

تمرین ۶. انتگرال‌های $\int \frac{۱}{\cos x} dx$ و $\int \frac{۱}{\sin x} dx$ را با استفاده از تغییر متغیر فوق حساب کنید.

محاسبه‌ی انتگرال با تغییر متغیر مثلثاتی و هذلولوی

از آنجا که توابعِ $\tan$ و $\sinh$ توابعی یک به یک و پوشا هستند و بُردِ آنها تمامِ $\mathbb{R}$ است، اگر تابعِ زیر انتگرال شامل عباراتی به صورت $\sqrt{a^۲ + x^۲}$ باشد، از دو تغییر متغیر زیر می‌توان استفاده کرد.

$$x = a \tan \theta \quad -\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{\pi}{۲}$$

$$\sqrt{a^۲ + x^۲} = \sqrt{a^۲ + a^۲ \tan^۲ \theta} = \sqrt{a^۲(۱ + \tan^۲ \theta)} = \frac{a}{\cos \theta}$$

یا

$$x = a \sinh x$$

$$\sqrt{a^۲ + a^۲ \sinh^۲ x} = \sqrt{a^۲(۱ + \sinh^۲ x)} = a \cosh x$$

مثال ۷. انتگرال $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^۲+۴}}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$x = ۲\tan\theta \Rightarrow dx = ۲(۱+\tan^۲\theta)d\theta = \frac{۲}{\cos^۲\theta}d\theta$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^۲+۴}} = \int \frac{۲\cos\theta d\theta}{۲\tan\theta\cos^۲\theta \times ۲} = \int \frac{d\theta}{۲\sin\theta} = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{\sin\theta}d\theta$$

$$\int \frac{۱}{\sin\theta}d\theta = \int \frac{\sin\theta}{\sin^۲\theta}d\theta$$

$$t = \cos\theta$$

$$-\sin\theta d\theta = dt$$

$$\int \frac{\sin\theta}{\sin^۲\theta}d\theta = \int \frac{-dt}{۱-t^۲} = -\tanh^{-۱}(t)+c = -\tanh^{-۱}(\cos\theta)+c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^۲+۴}} = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{\sin\theta}d\theta = -\frac{۱}{۲}\tanh^{-۱}(\cos\theta)+c$$

$$\theta = \tanh^{-۱}(\frac{x}{۲})$$

$$-\frac{۱}{۲}\tanh^{-۱}(\cos\theta)+c = -\frac{۱}{۲}\tanh^{-۱}(\cos(\tan^{-۱}(\frac{x}{۲})))+c$$

□