۱ جلسه‌ی پانزدهم

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی سریهای توان و دامنه‌ی همگرائی آنها صحبت کردیم. گفتیم که یک سری توانِ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، در بازه‌ی همگرائی خود، در واقع یک تابع است که مشتق آن، در همان بازه‌ی همگرائی (احیاناً غیر از نقاط انتهائی) برابر است با $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. در زیر با استفاده از این نکته، مشتق تابعِ e^x را محاسبه کرده‌ایم:

مثال ۱. فرض کنید $f(x) = e^x$ آنگاه

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

پس

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

فعلاً بحث سریهای توانی را رها می‌کنیم تا در جلسات بعدی دوباره بدانها بازگردیم.

ادامه‌ی درس مشتق

مثال ۲. مشتق تابع $f(x) = \sin x$ را در $x = 0$ بیابید.

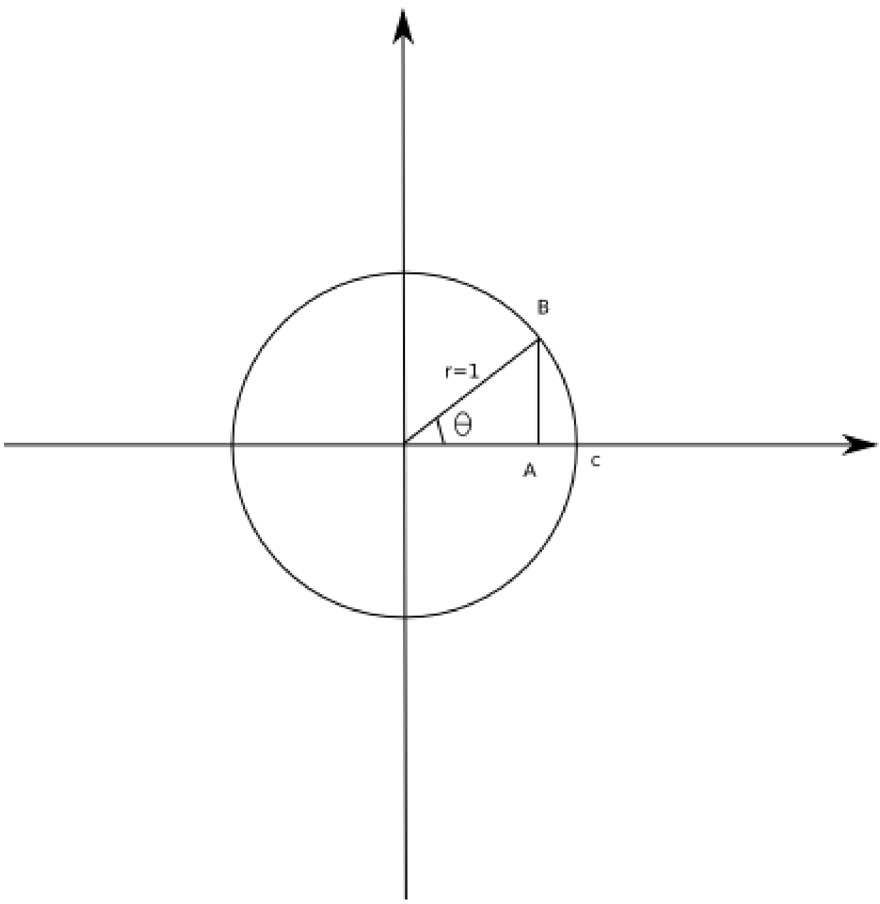
پاسخ. کافی است حاصل حدّ زیر را بیابیم.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(0 + h) - \sin 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

در زیر با روشی هندسی ثابت می‌کنیم که

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

فرض کنید $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. دایره‌ی زیر را به شعاعِ $r = 1$ در نظر بگیرید.



در این دایره، طول کمان رو به روی زاویه‌ی θ برابر است با:

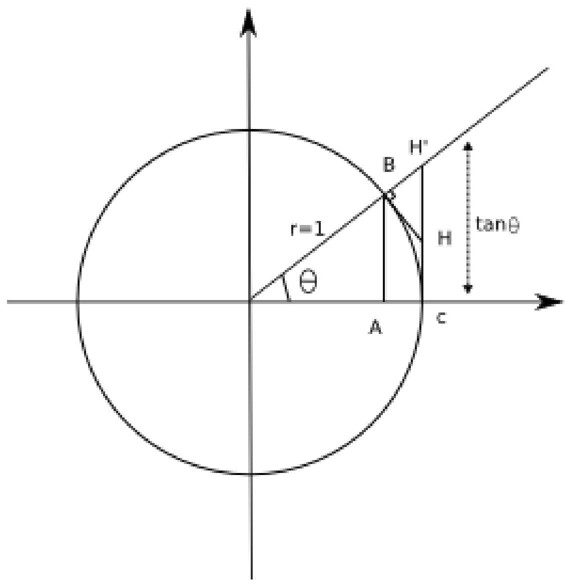
$$\theta = |\ \widehat{BC}\ |$$

به طور کلی، اگر شعاع یک دایره برابر با r باشد، محیط آن برابر است با $۲\pi r$. پس طول کمان رو به روی زاویه‌ی θ با نسبت‌گیری زیر به دست می‌آید و برابر است با $r\theta$:

$$\frac{\theta}{۲\pi} = \frac{x}{۲\pi r}.$$

دقت کنید که در شکل زیر، $|AB|$ برابر است با $\sin(\theta)$. پس داریم:

$$|AB| \leqslant |\ \widehat{BC}\ | \Rightarrow \sin\theta \leqslant \theta \quad (*)$$



$$|\ \widehat{BC}\ | \leqslant |CH| + |HB| \leqslant |CH| + |HH'| = \tan\theta$$

پس

$$\theta \leqslant \tan\theta$$

در نتیجه

$$\theta \leqslant \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود

$$\sin\theta \leqslant \theta \leqslant \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

در نتیجه

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin\theta} \geqslant \frac{۱}{\theta} \geqslant \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

طرفین را در $\sin\theta$ ضرب می‌کنیم (توجه کنید که در ناحیه‌ی مورد نظر ما $\sin\theta$ مثبت است):

$$\Rightarrow ۱ \geqslant \frac{\sin\theta}{\theta} \geqslant \cos\theta$$

بنا به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{\theta\to ۰^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = ۱$$

تابع $\sin$ یک تابع فرد است، پس همچنین داریم

$$\lim_{\theta\to ۰^-} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{-\theta\to ۰^+} \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta\to ۰^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = ۱$$

پس ثابت کردیم که

$$\lim_{h\to ۰} \frac{\sin h}{h} = ۱.$$

□

مثال ۳. مشتق تابع $f(x) = \cos x$ را در نقطه‌ی $x = ۰$ بیابید.

پاسخ.

$$\lim_{h\to ۰} \frac{\cos(۰ + h) - \cos ۰}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{\cos h - ۱}{h}$$

داریم:

$$\cos h = \cos(\frac{h}{۲} + \frac{h}{۲}) = \cos^۲ \frac{h}{۲} - \sin^۲ \frac{h}{۲} = ۱ - ۲\sin^۲ \frac{h}{۲}$$

پس

$$\lim_{h\to ۰} \frac{\cos h - ۱}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{۱ - ۲\sin^۲ \frac{h}{۲} - ۱}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{-۲\sin\frac{h}{۲}}{h} \sin\frac{h}{۲} = ۰$$

□

مثال ۴. مشتق تابع $\sin x$ را در نقطه‌ی دلخواه $x_۰ \in \mathbb{R}$ بیابید.

پاسخ.

$$\lim_{h\to ۰} \frac{\sin(x_۰ + h) - \sin x_۰}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{\sin x_۰ \cos h + \cos x_۰ \sin h - \sin x_۰}{h} =$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{\sin x_۰ .(\cos h - ۱)}{h} + \lim_{h\to ۰} \frac{\cos x_۰ .(\sin h)}{h} =$$

$$\lim_{h\to ۰} \sin x_۰ \cos'(۰) + \lim_{h\to ۰} \cos x_۰ \times ۱ = \cos x_۰.$$

□

پس ثابت کردیم که تابعِ $\sin$ در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x$$

مثال ۵. مشتق تابع $f(x) = \cos x$ را در نقطه‌ی دلخواه $x_{\text{۰}} \in \mathbb{R}$ محاسبه کنید.

اثبات.

$$\lim_{h\to \text{۰}} \frac{\cos(x_{\text{۰}}+h)-\cos x_{\text{۰}}}{h} = \lim_{h\to \text{۰}} \frac{\cos x_{\text{۰}}.\cos h - \sin x_{\text{۰}}.\sin h - \cos x_{\text{۰}}}{h} =$$

$$\lim_{h\to \text{۰}} \frac{\cos x_{\text{۰}}.(\cos h - \text{۱})}{h} - \lim_{h\to \text{۰}} \frac{\sin x_{\text{۰}}.\sin h}{h} =$$

$$\cos x_{\text{۰}} \times \text{۰} - \sin x_{\text{۰}} \times \text{۱} = -\sin x_{\text{۰}}$$

□

پس ثابت کردیم که تابعِ $\cos x$ در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\lim_{x\to \text{۰}} \frac{\sin x}{x} = \text{۱}$$

$$\lim_{x\to \text{۰}} \frac{\cos x - \text{۱}}{x} = \text{۰}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$$

هر تابع پیوسته لزوماً مشتق‌پذیر نیست ولی هر تابع مشتق‌پذیر، لزوماً پیوسته است:

مشاهده ۶. اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی $x_{\circ}$ تعریف شده باشد و در $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع f در $x_{\circ}$ پیوسته است.

اثبات. از آنجا که تابع در $x_{\circ}$ مشتق پذیر است، داریم:

$$\exists L \quad \lim_{h \to \circ} \frac{f(x_{\circ} + h) - f(x_{\circ})}{h} = L \quad (*)$$

برای این که نشان دهیم که تابع مورد نظر ما در $x_{\circ}$ پیوسته است، باید نشان دهیم که $\lim_{h\to\circ} f(x_{\circ} + h) = f(x_{\circ})$.
بنا به رابطه‌ی $(*)$ برای هر $\epsilon > \circ$ عنصر $\delta > \circ$ موجود است به طوری که

$$|h| < \delta \to L - \epsilon \leqslant \frac{f(x_{\circ} + h) - f(x_{\circ})}{h} \leqslant L - \epsilon$$

بنابراین اگر $|h| < \delta$ آنگاه

$$h(L - \epsilon) \leqslant f(x_{\circ} + h) - f(x_{\circ}) \leqslant h(L - \epsilon)$$

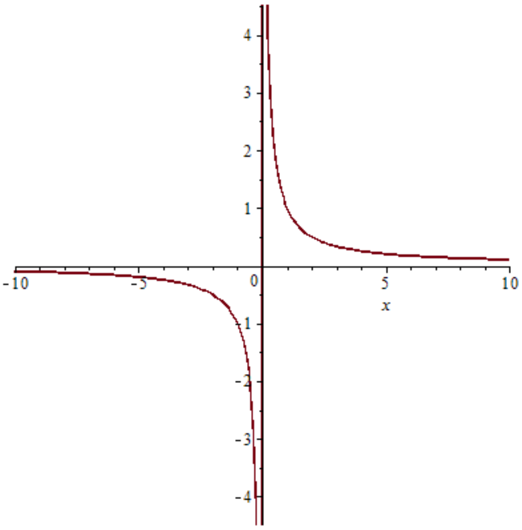
پس بنا به فشردگی،

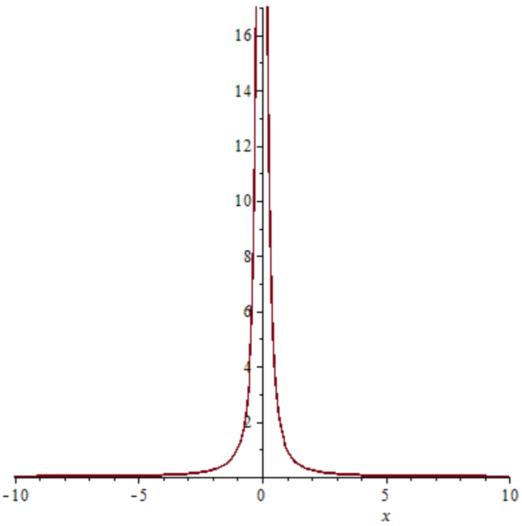
$$\lim_{h \to \circ} f(x_{\circ} + h) - f(x_{\circ}) = \circ$$
$$\lim_{h \to \circ} f(x_{\circ} + h) = f(x_{\circ}).$$

□

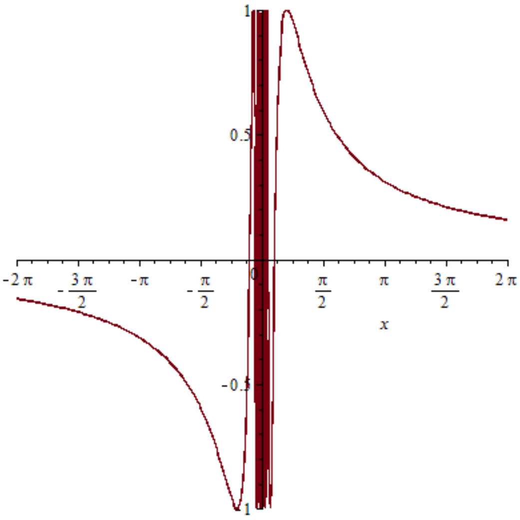
عدم مشتق‌پذیری

بنا به مشاهده‌ی بالا، یکی از عوامل عدم مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه، می‌تواند عدم پیوستگی آن باشد. در زیر به ترتیب نمودار توابعِ $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x^2}$ کشیده شده‌اند. این دو تابع در نقطه‌ی ۰ ناپیوسته هستند.

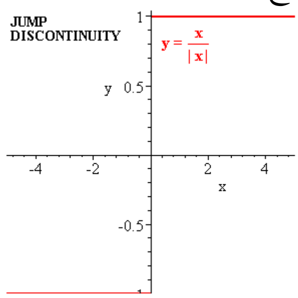




در زیر، نمودار تابعِ $\sin(\frac{۱}{x})$ کشیده شده است. این تابع نیز به علت عدم پیوستگی، در نقطه‌ی ۰ مشتق ندارد:

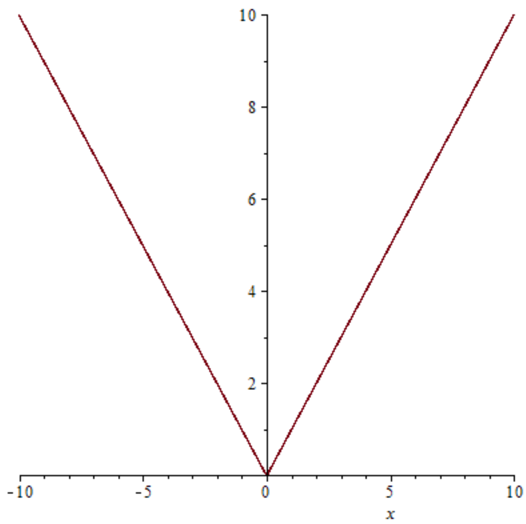


تابع کشیده شده در زیر نیز به علت عدم پیوستگی مشتق ندارد:

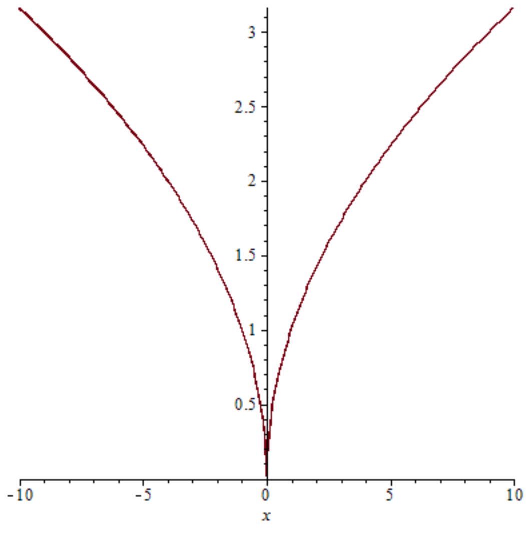


در صورتی که یک تابع پیوسته باشد، عدم مشتق‌پذیری به یکی از دلایل زیر است:

۱. برابر نبودن مشتق چپ و راست:



۲. موجود نبودن مشتق به علت بی‌نهایت شدن آن. در زیر نمودار تابع $\sqrt{|x|}$ کشیده شده است. مشتق این تابع در صفر موجود نیست. شیب خط مماس در این نقطه، از سمت راست به $+\infty$ و از سمت چپ به $-\infty$ میل می‌کند.



یک پرسش معروف در آنالیز یافتن تابعی است که در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، ولی در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نباشد. چنین توابعی را نخستین بار وایراشتراس معرفی کرده است. در زیر چند مثال از توابع وایراشتراس را آورده‌ایم.

۱.

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

که در آن $ab > ۱ + \frac{۳}{۲}$ و b فرد است و $۰ < a < ۱$.

۲. فرض کنید

$$g_۰(x) = \begin{cases} x & ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \\ ۲ - x & ۱ \leqslant x \leqslant ۲ \end{cases}$$

و

$$g(x) = g_۰(x - ۲k) \quad ۲k < x < ۲k + ۲$$

آنگاه تابع زیر نیز در شرط خواسته شده صدق می‌کند:

$$f_a(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a^n (۴x)$$

که در آن $۰ < a < ۱$ و $۴x > ۱$.

برای مطالعه‌ی بیشتر در این باره، و مشاهده‌ی نمودار این توابع، پیوند زیر را مطالعه بفرمائید:

https://www.google.com/url?hl=de&q=http://www.math.colostate.edu/~gerhard/MATH317/NondifferentialbleContinuousFcts.pdf&source=gmail&ust=1509878761879000&usg=AFQjCNE2LKCdNesmFnVMvZYjLyISxZiJFA

ادامه‌ی بحث مشتق

لم ۷. (آ) فرض کنید f در یک همسایگی نقطه‌ی $x_۰$ تعریف شده باشد و در $x_۰$ مشتق‌پذیر باشد و $f(x_۰) \neq ۰$. آنگاه تابع $g(x) = \frac{۱}{f(x)}$ نیز در $x_۰$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$g'(x_۰) = \frac{-f'(x_۰)}{(f(x_۰))^۲}.$$

اثبات.

$$\lim_{h \to ۰} \frac{\frac{۱}{f(x_۰+h)} - \frac{۱}{f(x_۰)}}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{\frac{f(x_۰) - f(x_۰+h)}{f(x_۰+h) f(x_۰)}}{h} =$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰)-f(x_۰+h)}{f(x_۰+h)f(x_۰)h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{f(x_۰+h)f(x_۰)}\times\underbrace{\frac{f(x_۰)-f(x_۰+h)}{h}}_{-f'(x_۰)}$$

گفتیم که اگر f در $x_۰$ مشتق‌پذیر باشد، در آن پیوسته است، پس داریم

$$\lim_{h\to ۰}f(x_۰+h)=f(x_۰)$$

بنابراین:

$$\text{عبارت بالا}=-\frac{f'(x_۰)}{(f(x_۰))^۲}$$

$\square$

(ب) مشتق $f\pm g$ و λf:

$$(f\pm g)'(x_۰)=f'(x_۰)\pm g'(x_۰)$$

$$(\lambda f(x_۰))'=\lambda f'(x_۰)$$

(ج) مشتق $(f\cdot g)(x_۰)$

$$(f\cdot g)'(x_۰)=f'(x_۰)g(x_۰)+g'(x_۰)f(x_۰)$$

اثبات. داریم

$$(f\cdot g)'(x_۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)g(x_۰+h)-f(x_۰)g(x_۰)}{h}$$

عبارت $f(x_۰+h)g(x_۰)$ را اضافه و کم می‌کنیم.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)g(x_۰+h)-f(x_۰)g(x_۰)+f(x_۰+h)g(x_۰)-f(x_۰+h)g(x_۰)}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)(g(x_۰+h)-g(x_۰))+g(x_۰)(f(x_۰+h)-f(x_۰))}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)(g(x_۰+h)-g(x_۰))}{h}+\lim_{h\to ۰}\frac{g(x_۰)(f(x_۰+h)-f(x_۰))}{h}=$$

$$f(x_۰)g'(x_۰)+g(x_۰)f'(x_۰)$$

$\square$

(د) به طور مشابه (با ترکیب آ و ج) می‌توان ثابت کرد که

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^{۲}(x)}$$

قضیه ۸. فرض کنید تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی $x_.$ تعریف شده و در $x_.$ مشتق‌پذیر باشد و تابع g در همسایگی $f(x_.)$ تعریف شده و در $f(x_.)$ مشتق‌پذیر باشد. آنگاه $g(f(x))$ در $x_.$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$$

اثبات. قرار دهید $y_. = f(x_.)$. تابع $H(y)$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\begin{cases} \frac{g(y)-g(y_.)}{y-y_.} & y \neq y_. \\ g'(y_.) & y = y_. \end{cases}$$

دقت کنید که این تابع در نقطه‌ی $y_.$ پیوسته است و همواره داریم

$$H(y)(y - y_.) = g(y) - g(y_.)$$

با در نظر گرفتنِ $y = f(x)$ و $y_. = f(x_.)$ داریم

$$\lim_{x \to x_.} \frac{g(f(x)) - g(f(x_.))}{x - x_.} = \lim_{x \to x_.} \frac{H(f(x))(f(x) - f(x_.))}{x - x_.} =$$

$$\lim_{x \to x_.} H(f(x)) \frac{f(x) - f(x_.)}{x - x_.} = f'(x_.)H(f(x_.)) = f'(x_.)g'(f(x_.)).$$

□

مثال ۹.

۱.

$$(\sinh(x))' = (\frac{e^x - e^{-x}}{۲})' = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} = \cosh(x)$$

۲.

$$(\cosh(x))' = (\frac{e^x + e^{-x}}{۲})' = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = \sinh(x)$$

۳.

$$(\tanh(x))' = (\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)})' = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^۲(x)} =$$

$$\frac{\cosh^۲(x) - \sinh^۲(x)}{\cosh^۲(x)} = \frac{۱}{\cosh^۲(x)} = ۱ - \tanh^۲(x)$$

۴. $a > ۰$ $f(x) = a^x$:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \times e^{x \ln a} = a^x \ln a$$

۵.

$$(a_n x^n + \ldots + a_۰)' = n a_n x^{n-۱} + \ldots + ۰$$