ریاضی عمومی ۱

محسن خانی

۲۱ آبان ۱۳۹۶

چکیده

جزوه‌ی پیش رو، حاصل تدریس ریاضی عمومی ۱ در دانشگاه صنعتی اصفهان در نیمسال تحصیلیِ ۹۷-۹۶ است. علاوه بر کتاب «حساب دیفرانسیل و انتگرال» نوشته‌ی آقاسی، بهرامی، طاهریان و مشکوری نجفی، این جزوه بسیار وامدار یادداشتهای جناب آقای دکتر بهرامی است که سخاوتمندانه در اختیار اینجانب قرار داده شده‌اند. از همسرم درسا پیری که زحمت تایپ آن را کشیده‌اند بسیار سپاسگزارم.

۱ مقدمه

نخستین اعداد شناخته‌شده توسط بشر اعداد طبیعی بوده‌اند، یعنی اعدادی چون $\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$. این اعداد برای شمارش استفاده می‌شده‌اند؛ مثلاً شمارش گوسفندان، اموال و دارائیها. برای هر کاربردی در هندسه نیز، رسم پاره‌خطی به طول یک طبیعی با استفاده از یک خطکش کار آسانی است. ولی احتمالاً از همان ابتدا معلوم شده است که به اعداد دیگری غیر از اعداد طبیعی هم نیاز است. مثلاً شاید لزوم استفاده از قطعاتی از اجسام، مثلاً نصف یک قرص نان، موجب کشف اعداد گویا (کسری) شده باشد. هر عدد گویا خارج قسمتی از دو عدد طبیعی است، و از این رو با استفاده از الگوریتم اقلیدسی، برای هر عدد گویا می‌توان یک نمایش اعشاری متناهی یا نامتناهیِ متناوب در نظر گرفت (البته این گفته نیاز به اثبات دارد). مثلاً برای نمایش $\frac{۷}{۳}$، نخست عدد ۷ را بر ۳ تقسیم می‌کنیم، خارج قسمتش را نگه می‌داریم و باقیمانده تقسیم را دوباره بر ۳ تقسیم می‌کنیم. با کمک الگوریتم اقلیدسی با ادامه‌ی این روش به نمایشِ $۲/۳۳\ldots$ برای عدد یادشده می‌رسیم. به طولهای گویا هم به راحتی می‌توان با استفاده از خطکش و پرگار پاره‌خط رسم کرد (سعی کنید روشی برای این کار ارائه کنید). اما آیا همه‌ی طولها، گویا (یعنی به صورت خارج قسمت دو عدد طبیعی) هستند؟ پاسخ این سوالِ به ظاهر ساده و بواقع گیج‌کننده، شروع مناسبی برای معرفی درس حساب دیفرانسیل است.

مثلثی قائم‌الزاویه را در نظر بگیرید که طول دو ضلع زاویه‌ی قائمه‌اش ۱ باشد. با استفاده از فرمول فیثاغورث نیک می‌دانیم که طول وتر این مثلث برابر است با $\sqrt{۲}$. با روشهای دبیرستانی می‌توان تحقیق کرد که این عدد را نمی‌توان به صورت خارج‌قسمتی از دو عدد طبیعی نوشت. بنابراین نمایش اعشاری این عدد، نامتناهی و نامتناوب است. با این حال، رسم پاره‌خطی به طول $\sqrt{۲}$ چندان دشوار نیست. کافی است مثلث یادشده را بکشیم. اما به عنوان مثال دیگر، دایره‌ای به شعاع r در نظر بگیرید. می‌دانیم که نسبت محیط این دایره به قطر آن، برابر با عددِ π است. عدد π هم ماهیتی شبیه به همان $\sqrt{۲}$ دارد. وضعیت این عدد بغرنجتر هم هست: امروزه (با استفاده از تکنیکهای جبری) می‌دانیم که خطی به طول π را نمی‌توان با استفاده از روشهای خطکش و پرگاری رسم کرد. وارد جزئیات پیچیده نمی‌شویم، مهم این است که هر دوی اینها اعداد اعشاری‌ای هستند که به صورت بدون پایان ادامه دارند ولی از هیچ الگوی تکرار شونده‌ای پیروی نمی‌کنند. سختی کار بااین اعداد، **نامتناهی** بودن نمایش آنهاست.

نامتناهی بودن، از مفاهیم اسرارآمیز ریاضیات است. در ریاضیاتِ اصول موضوعه‌ای، وجود بی‌نهایت یک «اصل موضوعه» است. به محض پذیرش این اصل، بی‌نهایت برای ریاضیدانان مفهومی

قابل درک و حتی دارای اندازه‌های مختلف می‌شود. وارد شدن دقیق به مبحث بی‌نهایتها جزو اهداف این درس نیست، ولی درک بی‌نهایت به وسیله‌ی در نظر گرفتن بخشهای متناهی بزرگ آن، دقیقاً موضوعِ مورد نظر ماست. برای مثال، یک راه‌پله دارای بی‌نهایت پله را نمی‌توان تصور کرد. نمی‌توان فهمید که انتهای آن چیست و در قسمتهای بالای آن چه اتفاقی می‌افتد، ولی می‌توان ۱۰۰۰ پله‌ی اول را بالا رفت و به درکی رسید. اگر این درک کافی نبود می‌توان ۱ میلیون پله از آن را بالا رفت و به درک بهتری رسید. بدین ترتیب می‌توان به هر تعدادِ (متناهیِ) دلخواه پله از آن را بالا رفت، ولی نمی‌شود تا نهایتِ آن پیش رفت. در مورد اعداد گنگ هم وضع همینگونه است. هر عدد گنگ را می‌توان به هر اندازه ی دلخواه با بسطهای اعشاری متناهی تقریب زد ولی هیچگاه نمی‌توان به کُلّ آن رسید. به بیان دیگر، به هر عدد گنگ می‌توان به هر اندازه‌ی دلخواه با «دنباله‌ای» از اعداد گویا نزدیک شد. باز به بیان دیگر، می‌شود فاصله‌ی خود را از یک عدد گنگ، «بی‌نهایت‌کوچک» کرد. بی‌نهایت نزدیک شدن به یک پارامتر، از موضوعات مهم در حساب است.

برای محاسبه‌ی سرعت یک جسم در لحظه‌ی t باید بدانیم مقدار تغییر مکان آن جسم در زمان بی‌نهایت کوچکِ نزدیک به t چقدر است. پس سرعت لحظه‌ای، یک نوع سرعت متوسط است. به بیان بهتر، برای یافتن سرعت متوسط یک جسم باید $\Delta(x)/\Delta(t)$ را حساب کرد، ولی برای یافتن سرعت لحظه‌ای باید سرعت متوسط را در زمان بی‌نهایت نزدیک به t حساب کرد. همان گونه که شرح داده شد، بینهایت نزدیک شدن به زمان t ممکن نیست، ولی می‌شود در مراحل متناهی، فاصله‌ی خود را از از زمان t به هر اندازه‌ی دلخواه کم کرد. موضوع حساب، دقیقاً تغییرهای پیوسته‌ی یک متغیر بر حسب تغییرهای بی‌نهایت کوچک متغیری دیگر است. در مثال سرعت، و با نمادگذاری لایبنیتز در واقع هدف محاسبه‌ی $\frac{dx}{dt}$ است که در آن dx و dt به ترتیب نشانگر تغییرات بینهایت کوچکِ x و t هستند. به بخشی از حساب که به مطالعه‌ی تغییرات یک متغیر بر حسبِ تغییرات بی‌نهایت کوچکِ یک متغیر دیگر می‌پردازد، «حساب دیفرانسیل» گفته می‌شود. اما حساب بخش دیگری نیز دارد.

نحوه‌ی محاسبه‌ی مساحت یک مستطیل را از دبستان می‌دانیم. برای محاسبه‌ی مساحت یک شکل پیچیده‌ترِ دارای انحنا، می‌توان مجموع مساحتهای همه‌ی مستطیلهای درون آن را در نظر گرفت. برای این که شکل منحنی حاصل شود، باید مستطیلها را کوچکتر و کوچکتر کرد و نهایتاً یک «مجموع نامتناهی» را در نظر گرفت. لایبنیتز برای این مجموع از علامت $\int$ استفاده کرد که یادآورِ حرفِ S

است در کلمه‌ی Summme که در آلمانی به معنی «مجموع» است. [1] از آنجا که بنا به گفته‌های بالا، جمعِ نامتناهی مقدار دست نایافتنی است، باید برای این کار با تقریبهای متناهی مناسب به هر اندازه‌ی دلخواه به حاصل جمع مورد نظر (یعنی مساحت) نزدیک شد و به بیان دیگر باید «حد» گرفت. به بخشی از حساب دیفرانسیل که بدین موضوع می‌پردازد، «حساب انتگرال» می‌گویند.

تا اینجا گفتیم که حساب، دو بخش دارد: حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال. ایندو را گاهی با هم «حسابان» می‌خوانند. اما حساب خواندن هر دوی آنها هم درست است. در واقع قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، بیانگر این است که این دو بخش با هم مربوطند (به بیان دقیقتر، هر یک برعکس دیگری است). این قضیه (تحت شرایطی روی تابعِ f) دارای صورت فشرده‌ی زیر است:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

یعنی، اگر از یک تابع مشتق بگیریم، مساحت زیر منحنی مشتق، برابر با میزان تغییر تابع است از نقطه‌ی شروع تا نقطه‌ی پایان. به بیان غیردقیق، انتگرالِ مشتق یک تابع می‌شود خودِ تابع.

به همه‌ی آنچه که در بالا گفته شد، در طول ترم به طور دقیق خواهیم پرداخت. بگذارید مقدمه را با ذکر دو نکته‌ی عمومی به پایان بریم. نخست این که واژه‌ی calculus که آن را حساب ترجمه کرده‌اند، در اصل لاتین و به معنی سنگهای کوچکی است که از آنها در چرتکه استفاده می‌شود. دوم این که حساب را، در معنی مُدرنِ آن و به گونه‌ای که در بالا شرح داده شد، نیوتون در انگلستان و لایبنیز در آلمان به طور همزمان و مستقل و بی‌خبر از یکدیگر بسط داده‌اند. نیوتون سپس لایبنیتز را متهم به کپی‌برداری آثار خود کرده است و این ادعا را به ناحق و با استفاده از نفوذ و قدرت علمی و اجتماعی خود در دادگاهی در انگلستان به اثبات رسانده است. امروز اعتبار یافتن حساب را به هر دوی آنها می‌دهند ولی، بسیاری از نمادگذاریهای معروف حساب مانند $\int$, dx نمادهای ابتکاری لایبنیتز هستند.

[1] و به انگلیسی می‌شود summation

۲ جلسه‌ی اول

پیش از آنکه درس را رسماً شروع کنیم درباره‌ی حساب توضیح کوتاهی می‌دهم. واژه‌ی Calculus در لاتین به معنی سنگ کوچکی است که در چرتکه‌های دستی از آن استفاده می‌شود. این واژه را، در لغت اصطلاحی آن، حسابان (یا حساب) ترجمه کرده‌اند.

حسابان اشاره به دو حساب دارد، حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال. آنجا که صحبت از تغییرات یک کمیت بر حسب تغییرات بی‌نهایت کوچک کمیت دیگری است، با **حساب دیفرانسیل** سر و کار داریم. مثلاً سرعت متوسط یک جسم در بین زمانهای t و $t+\Delta t$ برابر است با $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ که در آن Δx میزان جابجایی جسم است. حال برای محاسبه‌ی سرعت لحظه‌ای یک جسم در لحظه‌ی t باید میزان تغییر مکان آن را در زمانی بی‌نهایت کوچک پس از t بدانیم. این کمیت را با $\frac{dx}{dt}$ نشان می‌دهیم. مفهوم بی‌نهایت کوچک از مفاهیم مشکل‌ساز است.

در حساب بی‌نهایت کوچک را با نزدیک شدن به اندازه‌ی کافی تعبیر می‌کنند. مثلا منظور از این که سرعت جسم در لحظه‌ی t برابر است با v این است که

$$\lim_{\Delta t\to ۰} \Delta x/\Delta t = v.$$

یعنی می‌شود زمانها را «به اندازه‌ی کافی» کوچکتر و کوچکتر کرد و بدینسان به «اندازه‌ی دلخواه» به سرعتِ لحظه‌ایِ v نزدیک شد.

گفتم که درک بی‌نهایت نزدیک شدن به چیزی دشوار است. مؤید این گفته، تناقض خرگوش و لاک‌پشت است. فرض کنید خرگوشی با لاک‌پشتی وارد مسابقه سرعت شده است. سرعت خرگوش چندین برابر از سرعت لاک پشت بیشتر است، اما خرگوش ده قدم عقبتر از لاک‌پشت ایستاده است. آنها همزمان شروع به دویدن می‌کنند. با استدلال زیر، خرگوش هیچگاه به لاک‌پشت نمی‌رسد: برای این که خرگوش به لاک‌پشت برسد، باید نخست به نقطه‌ای برسد که لاک‌پشت در آن است. تا زمانی که خرگوش بدان نقطه برسد لاک‌پشت از آن نقطه رفته است!

بخش دیگر حساب، **حساب انتگرال** است: برای محاسبه‌ی مساحت زیر یک منحنی، به «تعدادی کافی» مستطیل زیر آن نیازمندیم که مجموع مساحت آنها «به هر اندازه‌ی دلخواه» به مساحت زیر منحنی نزدیک شود. ارتفاع این مستطیلها برابر با $f(x)$ و قاعده‌ی آنها برابر با dx است. جمع این مقادیر، یعنی عبارت $\sum f(x).dx$ را با $\int f(x)dx$ نشان می‌دهیم.

حساب دیفرانسیل و انتگرال در واقع یک حسابند! بنا به قضیه‌ی اساسی حساب:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

یعنی انتگرالِ مشتق می‌شود خودِتابع.

چند رابطه‌ی مهم

برای ورود به بحث نیازمند یادآوری روابط زیر هستیم:

- نامساوی برنولی:

$$\forall a \geqslant -1 \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

- $$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $$a^0 + a^1 + a^2 + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

- $$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

  که در آن $\binom{n}{i} = \sum \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

دنباله‌ها

دنباله برای ما یعنی لیستی نامتناهی از اعداد حقیقی به صورت زیر:

$$a_1, a_2, \dots$$

هر لیست نامتناهی توسط اعداد طبیعی شمرده می‌شود. پس بیایید دنباله‌ها را دقیقتر تعریف کنیم.

تعریف ۱. دنباله یعنی تابعی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{R}$ به صورت زیر

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$
$$n \mapsto a_n$$

هرگاه ضابطه‌ی f معلوم باشد، a_n را جمله‌ی عمومی دنباله می‌خوانیم.

توجه ۲. دنباله را با نمادهای $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$، $(a_n)_{n=۱}^{\infty}$، $\{a_n\}$و (a_n) نشان می‌دهیم.

مثال ۳. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی زیر را بیابید.

$$\frac{۳}{۵}, \frac{-۴}{۵}, \frac{۵}{۱۲۵}, \frac{-۶}{۶۲۵}, \frac{۷}{۳۱۲۵}, \dots$$

پاسخ. $a_n = \frac{(-۱)^{n+۱}n+۲}{۵^n}$ □

مثال ۴. چند جمله‌ی اول دنباله‌ی زیر را بنویسید.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(n) = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k!}$$

پاسخ. حل:

- $a_۱ = \frac{۱}{۱!}$
- $a_۲ = \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!}$
- $a_۳ = \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + + \frac{۱}{۳!}$

□

لزوما دنباله‌ها دارای جمله‌ی عمومی مشخص نیستند: فرض کنید a_n جمعیت جهان باشد در اول مهرماهِ n سال پس از امسال. یا فرض کنید b_n برابر باشد با n امین رقم بعد از اعشار در بسط اعشاری عددِ π.

گاهی ضابطه‌ی یک دنباله به صورت **بازگشتی** تعریف می‌شود. فیبوناچی (در قرن ۱۳ میلادی) سوال زیر را پرسیده است: فرض کنیم یک جفت خرگوش داریم و بدانیم که هر جفت خرگوش بعد از دو ماه، ماهی یک جفت دیگر تولید می‌کنند. تعداد خرگوش‌ها را در ماه nام بیابید.

پاسخ.

- $a_۱ = ۱$ یعنی در ماه اول یک جفت خرگوش ۰ ماهه داریم.
- $a_۲ = ۱$ در ماه دوم یک جفت خرگوش یک ماهه داریم.
- در ماه سوم، یک جفت خرگوش دو ماهه داریم که یک جفت خرگوش ۰ ماهه تولید می‌کند، پس $a_۳ = ۱ + ۱ = ۲ = a_۱ + a_۲$.
- بدین‌ترتیب در ماه چهارم یک جفت خرگوش ۳ ماهه داریم که یک جفت تازه تولید می‌کند و یک جفت خرگوش ۱ ماهه؛ پس $a_۴ = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ = a_۳ + a_۲$.
- و بدین صورت می‌توان بررسی کرد که $a_{n+۲} = a_n + a_{n+۱}$.

دنباله‌ی فیبوناچی به خاطر خرگوشها فقط اهمیت ندارد! پیشنهاد می‌کنم در صفحه‌ی ویکی‌پدیا درباره‌ی این دنباله بیشتر مطالعه کنید: `https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number`

□

مثال ۵. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی زیر را به صورت بازگشتی بنویسید:

$$a_۱ = ۱, a_۲ = \sqrt{۲}, a_۳ = \sqrt{۱ + \sqrt{۲}}, a_۴ = \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \sqrt{۲}}}, \dots$$

پاسخ. $a_۱ = ۱, a_{n+۱} = \sqrt{۱ + a_n}$ □

حد دنباله‌ها

دنباله‌ی $\frac{۱}{n}$ را در نظر بگیرید. هر چند انتهای این دنباله معلوم نیست ولی به نظر می‌آید هر چه n بزرگتر می‌شود، جملات دنباله بیشتر در نزدیکی صفر تجمع می‌کنند. چگونه می‌توانیم بگوییم که جملات این دنباله بی‌نهایت به صفر نزدیک می‌شوند؟

تعریف غیر رسمی: می‌گوییم دنباله‌ی a_n به L همگراست هرگاه a_nها به هر اندازه‌ی دلخواه از یک n به اندازه‌ی کافی بزرگ (وابسته به اندازه‌ی دلخواه ما) به بعد به L نزدیک شوند.

در تعریف بالا دو عبارت «اندازه‌ی دلخواه» و «اندازه‌ی کافی» نقش کلیدی بازی می‌کنند. از آنجا

که «بی‌نهایت نزدیک شدن» را مستقیماً نمی‌توان نوشت، برای بیان این که فاصله‌ی که جملات این دنباله از حدشان بی‌نهایت کوچک است، به این دو تعبیر نیازمندیم.

تعریف ۶ (ریاضی).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall\epsilon > ۰ \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > \mathbb{N} \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

پس وقتی ادعا می‌کنید که حد دنباله‌ی a_n برابر با L است، باید برای هر ϵ که من به شما بدهم، شما یک N_ϵ به من بازگردانید به طوری که مطمئن شوم که همه‌ی جملاتِ

$$a_N, a_{N+۱}, a_{N+۲}, \ldots$$

در بازه‌ی $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ واقع می‌شوند (یعنی به اندازه‌ی ϵ به L نزدیکند).

تعریف ۷. دنباله‌ی a_n را **همگرا** می‌خوانیم هرگاه

$$\exists L \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

در غیر این صورت، این دنباله را **واگرا** می‌خوانیم.

مثال ۸. ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n} = ۰$.

پاسخ: فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد و بخواهیم N_ϵ را طوری بیابیم که برای $n > N_\epsilon$ داشته باشیم $|\frac{۱}{n}| < \epsilon$. برای اینکه $|\frac{۱}{n}| < \epsilon$ باید داشته باشیم $n > \frac{۱}{\epsilon}$. واضح است که برای هر برای هر عدد طبیعیِ $n\frac{۱}{\epsilon}$ داریم $|\frac{۱}{n}| < \epsilon$. پس قرار می‌دهیم $N_\epsilon = [\frac{۱}{\epsilon}] + ۱$. داریم

$$\forall\epsilon > ۰ \quad \forall n > N_\epsilon = [۱/\epsilon] + ۱ \quad |۱/n| < \epsilon.$$

مثال ۹. فرض کنید که r یک عدد گویای مثبت باشد. ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^r} = ۰$

پاسخ: فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد و بخواهیم $|\frac{۱}{n^r}| < \epsilon$. پس می‌خواهیم $n^r > \frac{۱}{\epsilon}$ یعنی $n > \sqrt[r]{\frac{۱}{\epsilon}}$. اگر N یک عدد طبیعی بزرگتر از $\sqrt[r]{\frac{۱}{\epsilon}}$ باشد آنگاه

$$\forall n > N \quad |\frac{۱}{n^r}| < \epsilon.$$

در مثال بالا r را $\frac{۲}{۳}$ بگیرید و حاصل را تحقیق کنید.

مثال ۱۰. ثابت کنید که ۴ $= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2n}{n^2+2}$

پاسخ: باید نشان داد که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |\frac{4n^2+2n}{n^2+2} - 4| < \epsilon.$$

فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد و بخواهیم که برای n های بزرگتر از یک N_ϵ داشته باشیم $|\frac{4n^2+2n}{n^2+2} - 4| < \epsilon$.

محاسبات:

$$|\frac{4n^2+2n}{n^2+2} - 4| < \epsilon \Rightarrow |\frac{4n^2+2n-4n^2-8}{n^2+2}| < \epsilon \Rightarrow |\frac{2n-8}{n^2+2}| < \epsilon \Rightarrow$$
$$|\frac{n^2+2}{2n-8}| < \frac{1}{\epsilon}.$$

پس می‌خواهیم از جایی به بعد داشته باشیم

$$\frac{n^2+2}{2n-8} > \frac{1}{\epsilon}.$$

توجه کنید که $\frac{n^2+2}{2n-8} \geq \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$. پس هر جا که $\frac{n}{2} > \frac{1}{\epsilon}$ واضح است که $\frac{n^2+2}{2n-8} > \frac{1}{\epsilon}$. اگر $N > \frac{2}{\epsilon}$ یک عدد طبیعی باشد، آنگاه

$$\forall n > N \quad \frac{n}{2} > \frac{1}{\epsilon}$$

پس

$$\forall n > N \quad \frac{n^2+2}{2n-8} > \frac{1}{\epsilon}$$

پس

$$\forall n > N \quad \frac{2n-8}{n^2+2} < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N \quad |a_n - 4| < \epsilon.$$

جلسه‌ی دوم

ادامه‌ی مثالها:

مثال ۱۱. دنباله‌ی $a_n = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید که در آن r یک عدد گویای ثابت است و $۰ < r < ۱$. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

اگر فرض کنیم $r = \frac{۱}{۲}$ چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲^۲}, \frac{۱}{۲^۳}, \dots$$

بنابراین این ادعا که دنباله‌ی یادشده به صفر می‌گراید درست به نظر می‌رسد.

پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad r^n < \epsilon$$

علت این که ننوشته‌ایم $|r^n| < \epsilon$ این است که می‌دانیم جملات این دنباله همه مثبتند. فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. توجه کنید که $r^n < \epsilon$ معادل است با $\frac{۱}{r^n} > \frac{۱}{\epsilon}$. طبق فرض سوال می‌دانیم که $۰ < r < ۱$ پس $\frac{۱}{r} > ۱$. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که یک عددِ $a > ۰$ موجود است به طوری که $\frac{۱}{r} = ۱ + a$. پس می‌خواهیم که

$$\frac{۱}{r^n} = (\frac{۱}{r})^n = (۱+a)^n > \frac{۱}{\epsilon}$$

بنا به نامساوی برنولی $(۱+a)^n \geqslant ۱ + na$. پس کافی است داشته باشیم:

$$۱ + na > \frac{۱}{\epsilon}$$

و برای آن کافی است که

$$n > \frac{\frac{۱}{\epsilon} - ۱}{a}.$$

پس اگر

$$N_\epsilon = \lfloor \frac{\frac{۱}{\epsilon} - ۱}{a} \rfloor + ۱$$

آنگاه

$$\forall n > N_\epsilon \quad r^n < \epsilon$$

از جمله‌ی a_{N_ϵ} به بعدِ دنباله مد نظر مااست. یعنی اگر a_n یکی از اعضای مجموعه‌ی زیر باشد

$$a_{N_\epsilon}, a_{N_\epsilon+1}, a_{N_\epsilon+2}, \dots$$

آنگاه $|a_n| < \epsilon$. □

قضیه ۱۲.

آ. فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنباله‌ی همگرا باشند، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

اثبات. فرض کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

برای این که نشان دهیم که $\lim a_n + b_b = A + B$ باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |(a_n+b_n) - (A+B)| < \epsilon$$

فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. از آنجا که a_n همگرا به A است می‌دانیم که یک $N^1_{\epsilon/2}$ موجود است، به طوری که

$$\forall n > N^1_{\epsilon/2} \quad |a_n - A| < \epsilon/2$$

همچنین از آنجا که b_n همگرا به B است می‌دانیم که یک $N^1_{\epsilon/2}$ موجود است، به طوری که

$$\forall n > N^1_{\epsilon/2} \quad |b_n - B| < \epsilon/2$$

پس اگر $N > \max\{N^1_{\epsilon/1}, N^1_{\epsilon/2}\}$ آنگاه

$$\forall n > N \quad |(a_n+b_n)-(A+B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

ب.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$

اثبات. فرض کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |\lambda a_n - \lambda A| = |\lambda||(a_n - A)| < \epsilon.$$

کافی است بگیریم $\epsilon_۱ = \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ و از همگرائیِ دنباله‌ی a_n استفاده کنیم. $\square$

ج. اگر $\lim_{n\to\infty} b_n \neq ۰$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

اثبات. فرض کنیم که $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq ۰$. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| < \epsilon$$

پس می‌خواهیم که داشته باشیم

$$|\frac{a_n B - A b_n}{B b_n}| < \epsilon$$

عبارتِ $-AB + AB$ را به درون صورت اضافه می‌کنیم:

$$|\frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{B b_n}| < \epsilon$$

داریم

$$|\frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{B b_n}| \leq \frac{|B||a_n - A| + |A||b_n - B|}{|B b_n|}$$

کافی است عبارت سمت راستِ بالا از ϵ کمتر باشد. توجه کنید که از آنجا که b_n همگراست، یک $N_۱$ موجود است به طوری که

$$\forall n > N_۱ \quad |b_n - B| < \epsilon \quad (*)$$

پس

$$\forall n > N_۱ \quad B - \epsilon < b_n < B + \epsilon \quad (**)$$

بنا به $(**)$ می‌توان اعداد مثبتِ $M_۱, M_۲$ را چنان یافت که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M_۱ < |b_n| < M_۲ \quad (***).$$

حال توجه کنید که دنباله‌ی a_n به A همگراست. پس عددِطبیعی $N_۲$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_۲ \quad |a_n - A| < \epsilon.$$

حال اگر $n > \max\{N_۱, N_۲\}$ آنگاه

$$|a_n - A| < \epsilon, \quad |b_n - B| < \epsilon$$

پس

$$\frac{|B||a_n - A| + |A||b_n - B|}{|Bb_n|} \leq \frac{|B|\epsilon + |A|\epsilon}{|B|M_۱} = \frac{(|A| + |B|)\epsilon}{|B|M_۱}$$

بحث تقریباًتمام شده است؛ تا اینجا ثابت کرده‌ایم که:

برای هر $\epsilon > ۰$ عددِ $N \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N \quad |\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| < \frac{(|A| + |B|)\epsilon}{|B|M_۱}$$

در بند بالا، به جای ϵ مقدارِ $\frac{|B|M_۱}{|A|+|B|}\epsilon$ را بگذارید. [۲] □

مثال ۱۳. حد دنباله‌های زیر را بیابید.

- $$a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۴^{n+۳} + ۷}{۵^n}$$

پاسخ.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۴^{n+۳}}{۵^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{۷}{۵^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{۴}{۵})^n \times ۴^۳ + \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۵^n} \times ۷ = ۰ + ۰ = ۰$$

□

[۲] نه! در امتحان نمی‌آید!

•

$$a_n = \frac{3^n}{2^n + 4^n}$$

راهنمایی: صورت و مخرج را بر 4^n تقسیم کنید.

در قضیه‌ی زیر می‌بینیم که اگر دنباله‌ای میان دو دنباله‌ی همگرا فشرده شود، همگراست. فرض کنیم $\lim a_n = L, \lim b_n = L$ و $a_n \le c_n \le b_n$. برای n های به‌اندازه‌ی کافی بزرگ جملات دنباله‌های a_n, b_n به L نزدیکند. جملات دنباله‌ی c_n که میان این دو دنباله هستند نیز به ناچار در نزدیکی L قرار می‌گیرند. در زیر این گفته را دقیق بیان و اثبات کرده‌ایم. [3]

قضیه ۱۴ (فشردگی)**.** اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ و

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n,$$

آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

اثبات. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |c_n - L| < \epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$$

فرض کنیم که $\epsilon > 0$ داده شده باشد. از آنجا که $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ می‌دانیم که $N_1 \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_1 \quad a_n < L + \epsilon$$

نیز از آنجا که $\lim b_n = L$ می‌دانیم که $N_2 \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_2 \quad L - \epsilon < b_n$$

[3] Squeeze Lemma

پس اگر $n > \max\{\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2\}$ آنگاه

$$L_\epsilon < b_n \leq c_n \leq a_n < L + \epsilon.$$

$\square$

مثال ۱۵. با استفاده از قضیه‌ی فشردگی ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

پاسخ. داریم

$$0 \leqslant \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}^{\text{بار } n}}{1 \times 2 \times \underbrace{\times \ldots \times n}_{\geq 3\times\ldots\times 3}} \leqslant 2 \times \frac{2^{n-2}}{3^{n-2}} = 2 \times (\frac{2}{3})^{n-2}$$

دنباله‌ی ثابتِ 0 و دنباله‌ی $2 \times (\frac{2}{3})^{n-2}$ هر دو به صفر میل می‌کنند، پس بنا به فشردگی

$$\lim \frac{2^n}{n!} = 0.$$

$\square$

توجه ۱۶. همان اثبات بالا نشان می‌دهد که برای هر $a > 0$ داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

توجه ۱۷. از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ برای هر $\epsilon > 0$ دلخواه، یک $N \in \mathbb{N}$ چنان یافت می‌شود که

$$\forall n > N \quad \frac{2^n}{n!} < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N \quad 2^n < \epsilon n!$$

و این تقریباً همان «نرخ رشد» است که درباره‌اش صحبت کرده‌ایم.

مثال ۱۸. قرار دهید $a_n = \sqrt[n]{n}$ و نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

پاسخ. چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند:

$$۱ \quad \sqrt{۲} \quad \sqrt[۳]{۳} \quad \sqrt[۴]{۴} \quad \dots$$

داریم

$$a_n = \sqrt[n]{n} \geqslant \sqrt[n]{۱} = ۱$$

پس می‌توان نوشت

$$a_n = ۱ + b_n \quad b_n \geqslant ۰$$

نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty} b_n = ۰$

$$a_n = \sqrt[n]{n} = ۱ + b_n \quad \Rightarrow \quad n = (۱ + b_n)^n = ۱ + nb_n + \binom{n}{۲} b_n^۲ + \dots$$
$$\Rightarrow \quad n \geqslant \binom{n}{۲} b_n^۲ = \frac{n(n-۱)}{۲} b_n^۲$$
$$\Rightarrow \quad b_n^۲ \leqslant \frac{۲}{n-۱} \Rightarrow ۰ \leqslant b_n \leqslant \sqrt{\frac{۲}{n-۱}}$$

بنا به فشردگی

$$\lim_{n\to\infty} b_n = ۰$$

□

مثال ۱۹. اگر $a_n = \sqrt[n]{۱ + ۲^n}$ نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۲$$

پاسخ.

$$a_n = \sqrt[n]{۱ + ۲^n} \geqslant \sqrt[n]{۲^n} = ۲ \quad \Rightarrow \quad a_n \geqslant ۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{۲} \geqslant ۱$$
$$(a_n)^n = ۱ + ۲^n \quad \Rightarrow \quad (\frac{a_n}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲^n} + ۱$$
$$۱ \leqslant \frac{a_n}{۲} \leqslant \underbrace{(\frac{a_n}{۲})^n}_{\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{۲})^n = ۱}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{۲} = ۱ \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = ۲$$

□

تعریف ۲۰ (دنباله‌ی کراندار). دنباله‌ی (a_n) را کراندار می‌خوانیم هرگاه

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < M$$

یعنی

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -M < a_n < M.$$

مشاهده. هر دنباله‌ی همگرا کراندار است.

$$a_n \mapsto L$$

$$\epsilon = \frac{۱}{۲} \quad \exists N_\epsilon \quad \forall n > N_\epsilon \quad |a_n - L| < \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow \quad \forall n > N_\epsilon \quad L - \frac{۱}{۲} < a_n < L + \frac{۱}{۲}$$

□

توجه ۲۱. $(-۱)^n$ کراندار نیست ولی همگراست.

قضیه ۲۲. هر دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار همگراست (و هر دنباله‌ی نزولی و از پائین‌کراندار همگراست).

یک دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار به کوچکترین کرانِ بالای خود همگراست. وجودِ کوچکترین کرانِ بالا را اصل تمامیت در اعدادِ حقیقی تضمین می‌کند:

توجه ۲۳. هر زیرمجموعه‌ی کراندار از اعدادِ حقیقی، دارای کوچکترین کران بالا است.

آیا آنچه در بالا گفته‌ایم درباره‌ی اعدادِ گویا هم درست است؟

مثال ۲۴. نشان دهید که دنباله‌ی $a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k!}$ همگراست.

پاسخ. چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند:

$$a_۱ = ۱ \quad a_۲ = ۱ + \frac{۱}{۲!} \quad a_۳ = ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!}$$

دقت کنید که

$$a_n - a_{n-۱} = \frac{۱}{n!} \geqslant ۰$$

یعنی دنباله‌ی (a_n) صعودی است. کافی است نشان دهیم که دنباله‌ی یادشده از بالا کراندار است.

$$a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k!} = ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + ... + \frac{۱}{n!} \leqslant ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۲ \times ۲} + ... + \frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

$$a_n \leqslant \underbrace{(\frac{۱}{۲})^{۰} + (\frac{۱}{۲})^{۱} + (\frac{۱}{۲})^{۲} + ... + (\frac{۱}{۲})^{n-۱}}_{=\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{\frac{۱}{۲}}=۲(۱-(\frac{۱}{۲})^n)\leqslant ۳}$$

□

در جلسات بعد این را که

$$(\frac{۱}{۲})^{۰} + (\frac{۱}{۲})^{۱} + (\frac{۱}{۲})^{۲} + ... + (\frac{۱}{۲})^{n-۱} = \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^n}{۱ - \frac{۱}{۲}}$$

ثابت خواهیم کرد.

در این جلسه نشان دادیم که

- برای هر عددِ حقیقیِ $۰ < r < ۱$ داریم $\lim_{n\to\infty} r^n = ۰$.
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$.
- دنباله‌ی $a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k!}$ همگراست.
- برای هر $a > ۰$ داریم
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = ۰.$$

۳ نیم‌جلسه‌ی سوم

مثال ۲۵. نشان دهید دنباله‌ی $(۱+\frac{۱}{n})^n$ همگراست.

پاسخ. نشان می‌دهیم که دنباله‌ی یاد شده‌ی صعودی و از بالا کراندار است. صعودی بودن دنباله یعنی:

$$\forall n \quad a_n \leqslant a_{n+۱}$$

پس از آنجا که جملات دنباله مثبتند، کافی است برای اثبات صعودی بودن دنباله، نشان دهیم:

$$\forall n \quad \frac{a_{n+۱}}{a_n} \geqslant ۱$$

داریم

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{(۱+\frac{۱}{n+۱})^{n+۱}}{(۱+\frac{۱}{n})^n} = \frac{(\frac{n+۲}{n+۱})^{n+۱}}{(\frac{n+۱}{n})^n} \times \frac{\frac{n+۱}{n}}{\frac{n+۱}{n}} = (\frac{n+۱}{n})(\frac{n(n+۲)}{(n+۱)^۲})^{n+۱} = (\frac{n+۱}{n})(\frac{n^۲+۲n}{(n+۱)^۲})^{n+۱}$$

$$= (\frac{n+۱}{n})(\frac{(n+۱)^۲-۱}{(n+۱)^۲})^{n+۱} = (\frac{n+۱}{n})(۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲})^{n+۱}$$

با توجه به نامساوی برنولی، داریم $(۱+a)^{n+۱} \geqslant ۱+(n+۱)a$ پس

$$(\frac{n+۱}{n})(۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲})^{n+۱} \geqslant \frac{n+۱}{n} \times (۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲}) = \frac{n+۱}{n} - \frac{\cancel{n+۱}}{n\cancel{(n+۱)}} = ۱+\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n} = ۱$$

پایان اثبات صعودی بودن. □

اثبات کراندار بودن دنباله:

$$a_n = (۱+\frac{۱}{n})^n = \sum_{k=۰}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}(\frac{۱}{n})^k}_{\text{ادعا:}\leqslant \frac{۱}{k!}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k}(\frac{۱}{n}) = \frac{۱}{k!} \times \frac{n \times (n-۱) \times ... \times (n-k+۱)}{n^k}$$

$$\frac{n \times (n-۱) \times ... \times (n-k+۱)}{n^k} \leqslant ۱$$

$$\Rightarrow \quad a_n \leqslant \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!}$$

جلسه‌ی قبل نشان دادیم که $\sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!}$ کراندار است. □

توجه ۲۶. بعداً در همین درس خواهیم دید که حد دنباله‌ی $a_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$ برابر است با e، عددِ نپر. عددِ نپر همچنین برابر است با حاصلجمعِ سری زیر:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}.$$

مثال ۲۷. حد دنباله‌ی زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$a_n = \sqrt{۲n^۵ - ۵n} - \sqrt{۲n^۵ - n^۲}$$

پاسخ.

$$a_n = \underbrace{\sqrt{۲n^۵ - ۵n}}_{a} - \underbrace{\sqrt{۲n^۵ - n^۲}}_{b}$$

با توجه به رابطه‌ی $(a-b)(a+b) = a^۲ - b^۲$ داریم:

$$a_n = a_n \times \frac{a+b}{a+b} = \frac{\overbrace{۵n}^{\leqslant ۵n^۲} + n^۲}{\sqrt{۲n^۵ - ۵n} + \sqrt{۲n^۵ - n^۲}} \geqslant ۰$$

مخرج کسر را کوچک و صورت آن را بزرگ می‌کنیم

$$۰ \leqslant a_n \leqslant \frac{۶n^۲}{\sqrt{۲n^۵} + \sqrt{n^۵}} = \frac{۶n^۲}{(\sqrt{۲}+۱)n^{\frac{۵}{۲}}} = \frac{۶}{(\sqrt{۲}+۱)} n^{۲-\frac{۵}{۲}}$$

$۶n^{۲-\frac{۵}{۲}}$ به صفر میل می‌کند. در نتیجه حد a_n نیز بنا به فشردگی صفر است. □

مثال ۲۸. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲} = ۱$.

پاسخ.

$$۱ = \sqrt[n]{۱} \leqslant \sqrt[n]{۲} = ۱ + b_n \quad b_n \geqslant ۰$$

نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty} b_n = ۰$ می‌دانیم $b_n \geqslant ۰$ همچنین $(۱ + b_n)^n = ۲$ پس

$$۲ = ۱ + \binom{n}{۱} b_n + \binom{n}{۲} b_n^۲ + \ldots + \binom{n}{n} b_n^n$$

پس

$$۲ \geq \binom{n}{۱} b_n \Rightarrow ۱ \geqslant n b_n$$

$$b_n \leqslant \frac{۱}{n}$$

بنابراین

$$۰ \leqslant b_n \leqslant \frac{۱}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$$

در نتیجه بنا به فشردگی حد دنباله‌ی b_n نیز صفر است. □

توجه ۲۹. به طور کاملاً مشابه می‌توان نشان داد که اگر $a > ۱$ آنگاه

$$\sqrt[n]{a} \mapsto ۱$$

مثال ۳۰. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲^n + ۳^n} = ۳$

پاسخ.

$$\sqrt[n]{۳^n} \leqslant \sqrt[n]{۲^n + ۳^n} \leqslant \sqrt[n]{۳^n + ۳^n}$$

$$\Rightarrow \quad ۳ \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{۲ \times ۳^n}$$

$$\Rightarrow \quad ۳ \leqslant a_n \leqslant ۳\sqrt[n]{۲}$$

در مثال قبل دیدیم که $\sqrt[n]{۲}$ به یک میل می‌کند، پس بنا به فشردگی $a_n \mapsto ۳$. □

توجه ۳۱. به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $۰ < a < b$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b.$$

مثال ۳۲. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = ۳$ ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$$

پاسخ. از آنجا که $a_n \mapsto ۳$ برای $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ یک N_ϵ موجود است، به طوری که

$$\forall n > N_\epsilon \quad |a_n - ۳| < \frac{۱}{۲}$$

یعنی

$$\forall n > N_\epsilon \quad ۲/۵ < a_n < ۳/۵$$

پس

$$\forall n > N_\epsilon \quad \sqrt[n]{۲/۵} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{۳/۵}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲/۵} = ۱, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲/۵} = ۱$$

بنا به قضیه‌ی فشردگی $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$ □

توجه ۳۳.

۱. به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = a > ۰$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$$

توجه کنید که شاید $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ در این جا کار نکند ولی می‌توان با انتخاب مناسبتری از آن به نتیجه‌ی مطلوب رسید.

۲. در طی پاسخ مثال قبل همچنین ثابت کردیم که هر دنباله‌ی همگرا، کراندار است.

مثال ۳۴. حد دنباله‌ی زیر را بیابید:

$$\sqrt[n]{۲^n - ۱}$$

راهنمائی. داریم

$$\sqrt[n]{۲^n - ۱} = \sqrt[n]{۱ + ۲ + ۲^۲ + \ldots + ۲^{n-۱}}$$

حال با استفاده از لم فشردگی نشان دهید که حد این دنباله برابر با ۲ است. □

در این جلسه ثابت کردیم:

۱. $(۱ + \frac{۱}{n})^n$ همگراست.

۲. اگر $a > ۰$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = ۱$.

۳. اگر $۰ < a < b$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b.$$

۴. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = a > ۰$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۱$$

۴ جلسه‌ی چهارم، سریها

مقدمه

قبلاً به این نکته توجه کرده‌ایم که عددِ

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲\ldots$$

در واقع جمعی نامتناهی از اعدادِ گویاست:

$$\pi = ۳ + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۴}{۱۰۰} + \frac{۱}{۱۰۰۰} + \ldots$$

به چنین جمعهائی، سری عددی می‌گوئیم. می‌دانیم که حاصلجمع هر تعداد متناهی از اعداد گویا، عددی گویا می‌شود؛ اما همانگونه که در نمایش بالا برای عددِ π به نظر می‌رسد، حاصلجمع نامتناهی عدد گویا، شاید گویا نباشد. از طرفی در این باره صحبت کرده‌ایم که در حساب وقتی صحبت از نامتناهی می‌شود، منظور متناهی‌های بزرگ است (یا نزدیک شدن به نامتناهی بوسیله‌ی متناهی‌های بزرگ). اگر قرار باشد برای حاصلجمع نامتناهی عدد نیز معنی‌ای پیدا کنیم، باید از چنین ایده‌ای استفاده کنیم. مثلاً برای این که بگوئیم مجموع بالا، دقیقاً برابر با عددِ π است، باید ثابت کنیم که با استفاده از جمع بالا می‌توانیم به هر اندازه‌ی دلخواه به π نزدیک شویم و برای رسیدن به تقریبهای بهتر برای π باید اعداد بیشتر و بیشتری را با هم جمع کنیم.

سریها اهمیت ویژه‌ی دیگری نیز دارند. در ریاضیات مقدماتی با چند جمله‌ای ها آشنا شده‌اید:

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۰$$

چندجمله‌ایها توابعی پیوسته و خوشرفتارند و در نمودار آنها، بر خلاف نمودار توابعی مانند $\sin$، تنها تعداد متناهی صعود و نزول دیده می‌شود. در ادامه‌ی این درس خواهیم دید که برخی توابع را، که آنها را **تحلیلی** می‌خوانیم، می‌توان با استفاده از چندجمله‌ای‌ها تقریب زد. یعنی می‌توان یک چندجمله‌ای از درجه‌ی بی‌نهایت تصور کرد که به هر اندازه‌ی دلخواه شبیه تابع مورد نظر شود، به شرط این که تا توانِ n اُمِ مناسبی از آن در نظر گرفته شود. در این باره بعداً در همین درس مفصلاً صحبت خواهیم کرد. در زیر چند نمونه از این سریها (ی تیلور) را آورده‌ایم:

$$\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \ldots = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n \quad |x| < ۱$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

شروع درس

تعریف ۳۵. فرض کنید $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد. حاصلجمعِ (صوری) به صورت

$$a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

را یک **سری (عددی)** می‌نامیم و آن را با

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

نمایش می‌دهیم.

مثال ۳۶. اگر $a_n = \frac{1}{n}$ آنگاه جمع زیر یک سری عددی است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

مثال ۳۷. برای $a_n = n$ یک سری به صورت زیر داریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n + \ldots$$

از آنجا که جمع بستن نامتناهی عدد ممکن نیست، حاصلجمع سریها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری باشد، دنباله‌ی حاصلجمع‌های جزئی آن، یعنی دنباله‌ی S_n، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_1 = a_0 + a_1 \\ S_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \end{cases}$$

تعریف ۳۸. اگر دنباله‌ی S_n به a همگرا باشد، سری a_n . $\sum_{n=0}^{\infty}$ را **همگرا** به a می‌خوانیم و می‌نویسیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} S_n$$

اگر حدِّ فوق موجود نباشد سری مورد نظر را **واگرا** می‌خوانیم.

مثال ۳۹. اگر $a_n = n$ آنگاه

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

سری فوق واگراست.

مثال ۴۰. حاصلجمع سری زیر را حساب کنید.

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (\frac{1}{2})^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

پاسخ.

$$S_n = (\frac{1}{2})^0 + (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^{n-1} + (\frac{1}{2})^n$$

$$\frac{1}{2} \times S_n = (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + ... + (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^{n+1}$$

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = 1 - (\frac{1}{2})^{n+1}$$

$$(1 - \frac{1}{2})S_n = 1 - (\frac{1}{2})^{n+1} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

می‌دانیم که

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$$

پس

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (\frac{1}{2})^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

□

سریهای هندسی

همان طور که دقت کرده‌اید، در محاسبات بالا، می‌توان به جای $\frac{۱}{۲}$ هر عدد دیگری را نیز در نظر گرفت. مثال بالا، در واقع در رده‌ی مهمی از سریهای عددی به نام **سریهای هندسی** قرار دارد.

تعریف ۴۱. سری $\sum_{n=۰}^{\infty} r^n$ ، یعنی $r^۰ + r^۱ + r^۲ + ...$، را یک **سری هندسی** با **قدر نسبت** r می‌خوانیم.

فرض کنیم $\sum_{i=۰}^{\infty} r^n$ یک سری هندسی باشد. داریم

$$S_n = r^۰ + r^۱ + ... + r^n$$

$$rS_n = r^۱ + r^۲ + ... + r^{n+۱}$$

$$(۱ - r)S_n = ۱ - r^{n+۱} \overset{r\neq ۱ \text{ با فرض}}{\Rightarrow} S_n = \frac{۱ - r^{n+۱}}{۱ - r} \qquad (۱)$$

توجه ۴۲. ۱. اگر $۱ > r > -۱$ با توجه به فرمولِ ۱ آنگاه

$$\sum_{i=۰}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{۱}{۱ - r}$$

۲. اگر $r = ۱$ آنگاه

$$S_n = ۱^۰ + ۱^۱ + ۱^۲ + ۱^۳ + ... + ۱^n = (n + ۱)r$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

۳. اگر $|r| > ۱$ با توجه به فرمولِ ۱ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۱ - r^{n+۱}}{۱ - r} = \infty$$

مثال ۴۳.

$$۱ + \frac{۱}{۳} + (\frac{۱}{۳})^۲ + ... + (\frac{۱}{۳})^n = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۳}}$$

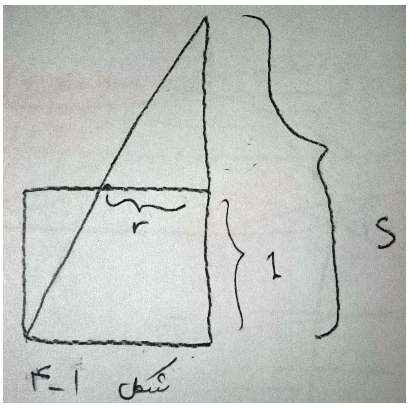
آنچه را که در توجه بالا آمد در قضیه‌ی زیر خلاصه کرده‌ایم:

قضیه ۴۴. سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ همگراست اگر و تنها اگر $|r| < 1$.

یادآوری:

$$\begin{cases} p \to q \\ \neg q \to \neg p \\ q \to p \\ \neg p \to \neg q \end{cases} \Leftrightarrow p \overset{\text{اگر و تنها اگر}}{\longleftrightarrow} q$$

یک تعبیر هندسی برای سری‌های هندسی : مربعی به طول ۱ در نظر بگیرید و روی یک ضلع آن به اندازه‌ی $r < 1$ جدا کنید و مثلث زیر را بسازید:



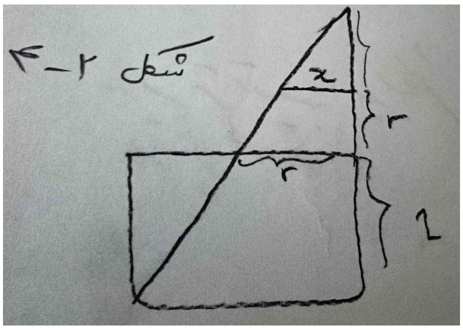
در شکل بنا به تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{r}{1} = \frac{S-1}{S} \quad \Rightarrow \quad rS = S - 1 \quad \Rightarrow \quad (r-1)S = -1$$

در نتیجه

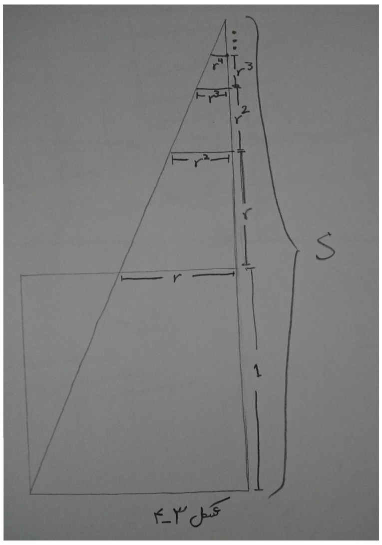
$$S = \frac{1}{1-r}$$

حال به اندازه‌ی r روی مثلث بالایی جدا کنید و سپس خطی موازی ضلع مربع بکشید. دوباره بنا به تشابه مثلث‌ها داریم:



$$\frac{x}{r} = \frac{S-(۱+r)}{S-۱} \Rightarrow \frac{x}{r} = r \quad \Rightarrow \quad x = r^{۲}$$

بدین ترتیب به شکل زیر برسید:



و مشاهده کنید که

$$S = ۱ + r + r^{۲} + \ldots = \frac{۱}{۱-r}.$$

مثال ۴۵. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{۲n} ۳^{۱-n}$$

پاسخ.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{۲n}۳^{۱-n} = \sum_{n=۱}^{\infty} ۴^n ۳^{۱-n} = \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۴}{۳})^n \times ۳$$

مثال بالا یک سری هندسی با قدر نسبت برابر با $\frac{۴}{۳}$ است. از آنجا که $\frac{۴}{۳}$ بزرگتر از ۱ است این سری واگراست. □

مثال ۴۶. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n + ۳^n}{۴^n}$$

پاسخ.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n + ۳^n}{۴^n} = \sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۴})^n + (\frac{۳}{۴})^n = \underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^n}_{\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}} + \underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۳}{۴})^n}_{\frac{۱}{۱-\frac{۳}{۴}}} = ۲ + ۴ = ۶$$

این سری همگراست (البته، هنوز درباره‌ی این که چه موقع مجوز داریم جمعها را از زیر سری دربیاوریم، صحبت نکرده‌ایم). □

ادامه‌ی بحث سریها

مثال ۴۷. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ...$$

پاسخ. در نگاه اول به نظر می‌آید که رفتار سری فوق، شبیه به رفتار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^n$ است. یعنی به نظر می‌آید همگرا باشد: فرض کنیم سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ همگرا به a باشد.

$$S_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a$$

توجه کنید که از آنجا که دنباله‌ی S_n به a میل می‌کند، پس دنباله‌ی $S'_n := S_{2n}$ نیز به a میل می‌کند؛ یعنی

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = a.$$

پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = a - a = 0$$

از طرفی داریم:

$$S_{2n} : a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$S_n : a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

پس نمی‌توانیم داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$. بنابراین با فرض همگرا بودن سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ به تناقض می‌رسیم پس این سری واگراست. $\square$

چند نکته را باید یادآور شویم.

توجه ۴۸.

- همان طور که مشاهده کرده‌اید، در بحثهای بالا گاهی در مورد S_n نادقیق بوده‌ایم. وقتی که اندیس دنباله از صفر شروع می‌شده است نوشته‌ایم

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

و وقتی که اندیس دنباله از یک شروع می‌شده است نوشته‌ایم

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n$$

در هر صورت، همواره منظورمان جمعی از عناصر اول دنباله بوده است.

- در مورد S_{2n} برخی دانشجویان دچار این کژفهمی شدند که

$$S_{2n} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

توجه کنید که منظورمان عبارت بالا نیست، بلکه بنا به تعریف:

$$S_{2n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}$$

یعنی حاصلجمعِ $2n$ جمله‌ی اول دنباله.

- در خلال اثبات بالا، ادعا کردیم که از همگرا بودنِ S_n همگرا بودنِ S_{2n} نتیجه می‌شود. در زیر این را به طور دقیقتر اثبات کرده‌ایم.

لم ۴۹. فرض کنید که a_n یک دنباله باشد و داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

فرض کنید b_n دنباله‌ی دیگری باشد به طوری که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = a_{2n}.$$

در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

توجه ۵۰. توجه کنید که اگر a_n دنباله‌ی زیر باشد

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

آنگاه b_n دنباله‌ی زیر است:

$$a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots$$

یعنی b_n زیردنباله‌ای از a_n است.

اثباتِ لم. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |b_n - a| < \epsilon$$

فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. بنا به همگرایی a_n می‌دانیم که

$$\exists N'_\epsilon \quad \forall n > N'_\epsilon \quad |a_n - a| < \epsilon$$

اگر $n > N_\epsilon$ آنگاه $2n > N_\epsilon$ پس

$$\forall n > N'_\epsilon \quad |a_{2n} - a| < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N'_\epsilon \quad |b_n - a| < \epsilon$$

و حکم مورد نظر ثابت شد. $\square$

تمرین ۵۱ (برای دانشجوی علاقه‌مند)**.** نشان دهید که هر زیردنباله‌ی نامتناهیِ دلخواه از یک دنباله‌ی همگرا، همگراست.

توجه ۵۲. فرض کنید a_n یک دنباله باشد. داریم

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k+1}) = (a_0 - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_1} - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

یعنی در حاصل‌جمع بالا کوچکترین اندیسِ ممکن و بزرگترین اندیس ممکن باقی می‌مانند.

مثال ۵۳. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

پاسخ.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

دنباله‌ی $\{S_n\}$ را در نظر بگیرید. این دنباله صعودی است، زیرا

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

همچنین داریم

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k}$$

در اینجا مخرج کسرها را کوچک کرده‌ایم تا کسرها بزرگتر شوند.

چرک‌نویس

$$\frac{۱}{k-۱}-\frac{۱}{k}=\frac{k-k+۱}{k(k-۱)}=\frac{۱}{k(k-۱)}$$

$$۱+\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k^{۲}-k}=۱+\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k(k-۱)}=$$
$$۱+\sum_{k=۲}^{n}(\frac{۱}{k-۱}-\frac{۱}{k})\overset{\text{بنا به توجهِ ۵۲}}{=}۱+(۱-\frac{۱}{n})\Longrightarrow\quad S_n\leqslant ۱+(۱-\frac{۱}{n})\Rightarrow S_n\leqslant ۲$$

پس دنباله‌ی S_n صعودی و کراندار است و از این رو S_n همگراست.

توجه ۵۴. فعلاً ابزار لازم را برای محاسبه‌ی حد سری بالا در دست نداریم. این جمع را اویلر محاسبه کرده است:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}}=\frac{\pi^{۲}}{۶}$$

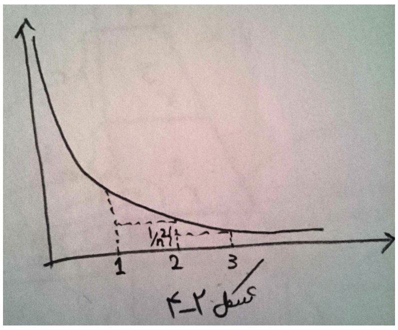
توجه کنید که دوباره، حاصلجمعی نامتناهی از اعداد گویا برابر با یک عدد اصم شده است. برای دانستن روش محاسبه‌ی این جمع، پیوندهای زیر را مطالعه بفرمائید:

https://www.math.purdue.edu/~eremenko/dvi/euler.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem

□

توجه ۵۵. تابع $\frac{1}{x^2}$ را در نظر بگیرید.



$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \text{مجموع مساحت مستطیلها در شکل} \leqslant \text{مساحت زیر منحنی} = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}$$

در فصلهای بعدی درباره‌ی رابطه‌ی بین انتگرالگیری و سریها بیشتر خواهیم گفت.

توجه ۵۶. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

را در نظر بگیرید. دنباله‌ی حاصلجمعهای جزئی این سری نیز صعودی است و داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

پس سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ همگراست. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که اگر $p \geq 2$ و $p \in \mathbb{Q}$ آنگاه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

همگراست. حال اگر $p \in \mathbb{Q}^+, p < 1$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

پس در این صورت سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ واگراست. اگر $p = 1$ نیز دیدیم که سری یادشده واگراست. **همچنین اگر $1 < p < 2$ نیز این سری همگراست؛ این را فعلاً می‌پذیریم ولی در ادامه‌ی درس با ابزارهای پیشرفته‌تر ثابت خواهیم کرد.**

در این جلسه فهمیدیم که

- سری هندسی $\sum_{n=۰}^{\infty} r^n$ همگراست اگر و تنها اگر $|r| < ۱$. در این صورت (یعنی در صورت همگرائی) داریم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} r^n = \frac{۱}{۱-r}$$

- سریِ $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ که در آن $p \in \mathbb{Q}^+$ است برای $p \leq ۱$ واگرا و برای $p > ۱$ همگراست. اگر $p = ۱$ به سری حاصل، سری هارمونیک، یا همساز می‌گویند. در حالت کلی، این سریها، pسری نامیده می‌شوند.

- اگر یک دنباله همگرا باشد، هر زیردنباله‌ی نامتناهی از آن نیز همگراست.

- اگر a_n یک دنباله باشد، داریم

$$\sum_{k=۰}^{n} (a_k - a_{k+۱}) = a_۰ - a_{n+۱}$$

۵ نیم‌جلسه‌ی پنجم

لم ۵۷. اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

از لم بالا می‌توان برای اثبات واگرائی برخی سریها استفاده کرد؛ زیرا بنا به لم بالا اگر $\lim a_n \neq 0$ آنگاه سریِ $\sum a_n$ واگراست.

مثال ۵۸. سریِ $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{2})^n$ واگراست، زیرا $\lim_{n\to\infty} (\frac{3}{2})^n \neq 0$.

اثبات لِم. فرض کنید سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. داریم

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

و

$$S_{n-1} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

از آنجا که دنباله‌ی $\{S_n\}$ همگراست داریم:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

با توجه به اینکه تفاضل دو سری برابر است با a_n داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

□

در خلال اثبات بالا از لم کوچک زیر نیز استفاده کردیم.

لم ۵۹. فرض کنیم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ به L همگرا باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ نیز به L همگراست.

اثبات.

$$\begin{array}{lcccccc} n = & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ a_n = & a_۰ & a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & a_۵ \\ b_n = & & a_۰ & a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ \end{array}$$

از شکل بالا مشخص است که دنباله‌های a_n و b_n هر دو به یک حد همگرا هستند. با این حال، برای اثبات دقیق این که $\lim b_n = L$ فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. بنا به همگرائی a_n عدد N_ϵ چنان موجود است که

$$\forall n > N_\epsilon \quad |a_n - L| < \epsilon$$

پس

$$\forall n > N_\epsilon + ۱ \quad |a_{n-۱} - L| < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N_\epsilon + ۱ \quad |b_n - L| < \epsilon.$$

□

نتیجه ۶۰. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq ۰$ آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا نیست.

مثال ۶۱. عکس لِم ۵۷ برقرار نیست. دنباله‌ی $\frac{۱}{n}$ مثال نقض است:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$$

و جلسه‌ی قبل دیدیم که $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست.

مثال ۶۲. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید. فرض کرده‌ایم که $a > ۱$.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt[n]{۱ + a^n}}$$

پاسخ. در جلسه‌های قبل ثابت کرده‌ایم که

$$\lim \sqrt[n]{۱ + a^n} = a$$

پس

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt[n]{۱ + a^n}} = \frac{۱}{a} \neq ۰$$

در نتیجه سری مورد نظر واگرا است. □

لم ۶۳. اگر سریهای $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ به ترتیب به A و B همگرا باشند، آنگاه

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n + \sum_{n=۰}^{\infty} b_n$$

و

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

مثال ۶۴. آیا سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^{n+۱}+۳^{n+۱}}{۴^n}$ همگراست؟

پاسخ.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^{n+۱} + ۳^{n+۱}}{۴^n} = \sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۴})^n \times ۲ + \sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۳}{۴})^n \times ۳ =$$

$$۲\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۴})^n + ۳\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۳}{۴})^n = ۲ \times \frac{۱}{۱-\frac{۲}{۴}} + ۳ \times \frac{۱}{۱-\frac{۳}{۴}} = ۴ + ۱۲ = ۱۶$$

توجه کنید که از آنجا که حدهای $\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۴})^n \times ۲$ و $\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۳}{۴})^n \times ۳$ موجودند مجازیم که از لم بالا استفاده کنیم. □

مثال ۶۵. واگرایی یا همگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n+۳^n}{۲^{n+۱}+۳^{n+۱}}$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲^n + ۳^n}{۲^{n+۱} + ۳^{n+۱}} = \lim \frac{(\frac{۲}{۳})^n + ۱}{(\frac{۲}{۳})^n \times ۲ + ۳} \neq ۰$$

بنابراین سری مورد نظر واگراست. توجه کنید که در بالا صورت و مخرج را بر ۳^n تقسیم کرده‌ایم.

□

۱.۵ آزمون مقایسه

قضیه ۶۶. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به طوری که

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{۰\} \quad ۰ \leqslant a_n \leqslant b_n$$

آنگاه اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

اثبات. فرض می‌کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ هم همگراست. فرض کنیم $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ باید نشان دهیم که دنباله‌ی S_n همگراست. اولاً $\{S_n\}$ صعودی است زیرا در هر مرحله بدان جملات مثبت اضافه می‌شوند.

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$$

برای اثبات همگرائی S_n کافی است نشان دهیم که S_n از بالا کراندار است. قرار دهید:

$$S'_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

از آنجا که $\sum b_n$ همگراست می‌دانیم که S'_n همگراست. بنابراین S'_n کراندار است. داریم: $S_n \leqslant S'_n$ پس S_n نیز کراندار است. □

لم ۶۷. اگر a_n همگرا باشد، آنگاه a_n کراندار است.

اثبات. برای $\epsilon = 1$ می‌دانیم که N_1 چنان موجود است که

$$\forall n > N_1 \quad L - 1 < a_n < L + 1$$

پس می‌توان یک عدد مثبت M چنان پیدا کرد که

$$\forall n > N_1 \quad |a_n| < M.$$

حال می‌دانیم که مجموعه‌ی $A = \{a_0, \ldots, a_{N_1}\}$ نیز کراندار است، زیرا متناهی است. پس فرض کنیم که

$$\forall x \in A \quad |x| < M_1$$

بنابراین $\max\{M, M_1\}$ کرانِ دنباله‌ی مورد نظر ماست. □

مثال ۶۸. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۳}\leq\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$$

گفتیم که $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ همگراست. در نتیجه سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۳}$ نیز همگراست. $\square$

عکس نقیضِ قضیه‌ی ۶۶ به صورت زیر است:

قضیه ۶۹. $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به طوری که

$$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{۰\}\quad ۰\leqslant a_n\leqslant b_n$$

آنگاه اگر $\sum_{n=۰}^{\infty}a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty}b_n$ نیز واگراست.

$$a_n\leqslant b_n\Rightarrow(\sum_{n=۰}^{\infty}a_n\mapsto\infty\Rightarrow\sum_{n=۰}^{\infty}b_n\mapsto\infty)$$

مثال ۷۰. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. اولاً $\frac{۱}{n}\geq\frac{۱}{\sqrt{n}}$ ثانیاً $\sum\frac{۱}{n}$ واگراست پس $\sum\frac{۱}{\sqrt{n}}$ نیز واگراست. $\square$

مثال ۷۱. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt[۳]{n^۲+۲n}}$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt[۳]{n^۲+۲n}}\overset{\text{مخرج را بزرگ کرده ایم تا کسر کوچک شود.}}{\geqslant}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt[۳]{n^۲+n^۲}}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}\times n^{\frac{۲}{۳}}}\geqslant\frac{۱}{n}$$

از آنجا که $\frac{۱}{n}$ واگراست، سری مورد نظر نیز واگراست. $\square$

۶ جلسه‌ی ششم

در جلسه‌ی قبل دیدیم که

۱. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ آنگاه

۲. اگر $\forall n \quad 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$

- اگر $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست.
- اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ واگراست.

هم‌چنین در جلسه‌ی قبل درباره‌ی سریهای هندسی صحبت کردیم و گفتیم که اگر $|x| < 1$ داریم

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

حال تابعی را در نظر بگیرید که هر $x \in (-1, 1)$ را به حاصلجمع زیر ببرد:

$$1 + x + x^2 \ldots$$

این تابع دقیقاً برابر با تابعِ $\frac{1}{1-x}$ است. به بسط زیر برای تابع یادشده، بسط تیلور این تابع می‌گوئیم:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

در این باره در جلسات آینده مفصلاً صحبت خواهیم کرد.

مثال ۷۲. تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^{n+1}}$ به ازای چه مقادیری از x همگراست.

پاسخ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2x-5}{3})^n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2x-5}{3})^n$$

از آنجا که سری فوق یک سری هندسی است، برای این که همگرا باشد، باید داشته باشیم:

$$|\frac{2x-5}{3}| < 1$$

یعنی

$$-1 < \frac{2x-5}{3} < 1 \Rightarrow -3 < 2x-5 < 3 \Rightarrow 1 < x < 4$$

$\square$

مثال ۷۳. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد نامنفی($\forall n \quad a_n, b_n \geqslant 0$) و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ هر دو همگرا باشند. نشان دهید در اینصورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ نیز همگراست.

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots$$

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$$

توجه کنید که ادعا نکرده‌ایم که

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

همچنین توجه کنید که با فرض درست بودن مثال بالا، به ویژه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ همگراست.

پاسخ. $\forall n \quad a_n, b_n \geqslant 0$ بنابراین $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ صعودی است:

$$S_{n+1} - S_n = a_n b_n \geqslant 0$$

کافی است نشان دهیم که دنباله‌ی S_n کراندار است.

می‌دانیم که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست. پس داریم: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ بنابراین برای $\epsilon = 1$ عدد $N_1 \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_1 \quad \underbrace{a_n < 1}_{|a_n - 1| < 0}$$

پس داریم:

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n b_n \leqslant \sum_{n=N_1+1}^{\infty} 1 \times b_n$$

از طرفی b_n ،$\sum_{n=0}^{\infty}$ همگراست. پس عبارت b_n $\sum_{n=N_1+1}^{\infty}$ کراندار است. حال توجه کنید که

$$S_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = \underbrace{\sum_{n=0}^{N_1} a_n b_n}_{\text{کراندار، زیرا جمعی متناهی است}} + \underbrace{\sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n b_n}_{\text{کراندار}} \leqslant M$$

پس S_n کراندار است. □

مثال ۷۴. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n+1}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. از آنجا که در صورت و مخرج، توان می‌بینیم منطقی به نظر می‌رسد که این سری را با یک pسری به صورت $\sum \frac{1}{n^p}$ مقایسه کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n+1}} \xrightarrow{\text{مخرج را بزرگ می‌کنیم تا کسر کوچک شود}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n^3+n^3}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3} \times n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3} \times n^{\frac{1}{2}}}$$

می‌دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ واگراست. زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

پس سری مورد نظر ما نیز واگراست. □

در زیر آزمون مقایسه‌ی حدی را ارائه کرده‌ایم. این آزمون در واقع همان آزمون مقایسه است که به زبان دیگری نوشته شده است. به بیان بهتر، در آزمون مقایسه‌ی حدی، سریها را از جمله‌های به‌اندازه‌ی کافی بزرگ به بعد، با هم مقایسه می‌کنیم. وقتی سخن از به اندازه‌ی کافی بزرگ به میان آید، در واقع سخن از مفهوم حد است.

لم ۷۵ (آزمون مقایسه‌ی حدی)**.** فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به گونه‌ای که

$$\forall n \begin{cases} a_n \geqslant 0 \\ b_n > 0 \end{cases}$$

۱. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۰$ آنگاه اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگرا باشد $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

$$a_۰ \quad a_۱ \quad a_۲ \quad \dots$$

$$b_۰ \quad b_۱ \quad b_۲ \quad \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۰$$

توجه کنید که در این آزمون بحثِ همگرائی یا واگرائی سریِ $\sum \frac{a_n}{b_n}$ نیست. بلکه می‌خواهیم بدانیم که چگونه می‌شود از همگرائی یا واگرائي $\sum a_n$ همگرائي یا واگرائیِ $\sum b_n$ را نتیجه گرفت.

اثبات. فرض: $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست.

حکم: $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست.

سری $\sum a_n$ صعودی است (زیرا جمله‌های آن نامنفیند) پس کافی است کرانداری آن را ثابت کنیم.

داریم: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۰$ پس برای $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ عددِ $N_{\frac{۱}{۲}} \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$\forall n > N_{\frac{۱}{۲}} \quad \frac{a_n}{b_n} < \frac{۱}{۲}$$

یعنی

$$\forall n > N_{\frac{۱}{۲}} \quad a_n < \frac{b_n}{۲}$$

پس

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n \leqslant \frac{۱}{۲} \sum_{n=۰}^{\infty} b_n.$$

حال از آن جا که $\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست، بنا به آزمون مقایسه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

$\square$

همان گونه که مشاهده کردید، در اثبات بالا همان آزمون مقایسه را از جمله‌ای به بعد به کار گرفتیم.

۲. (قسمت دوم لم) اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L>۰$ آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty}b_n$ همگرا است اگروتنهااگر $\sum_{n=۰}^{\infty}a_n$ همگرا باشد (یا از همگرائی هر یک از این دو سری، همگرائی دیگری نتیجه می‌شود و از واگرائي هر یک از این دو سری، واگرائی دیگری نتیجه می‌شود)

اثبات. از آنجا که $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$، داریم:

$$\forall\epsilon>۰\quad\exists N_\epsilon\in\mathbb{N}\quad\forall n>N_\epsilon\quad|\frac{a_n}{b_n}-L|<\epsilon$$

$$\forall n>N_\epsilon\quad L-\epsilon<\frac{a_n}{b_n}<L+\epsilon$$

می‌دانیم که $L>۰$ پس یک عددِ $\epsilon>۰$ را چنان در نظر بگیرید که $L>\epsilon>۰$ در نتیجه داریم:

$$\forall n>N_\epsilon\quad b_n(L-\epsilon)<a_n<b_n(L+\epsilon)$$

نشان می‌دهیم که اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست. داریم

$$\sum_{n=N_\epsilon+۱}^{\infty}a_n\leqslant\sum_{n=N_\epsilon+۱}^{\infty}b_n$$

عبارت سمت راست همگراست، پس $\sum_{n=N_\epsilon+۱}^{\infty}a_n$ نیز همگراست. همچنین

$$\sum_{n=۰}^{\infty}a_n=\sum_{n=۰}^{N_\epsilon}a_n+\sum_{n=N_\epsilon+۱}^{\infty}a_n$$

پس $\sum_{n=۰}^{\infty}a_n$ همگراست.

به طور مشابه با استفاده از نامساویِ

$$\forall n>N_\epsilon\quad b_n(L-\epsilon)<a_n$$

نشان دهید که اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum b_n$ همگراست. □

۳. (قسمت سوم لم) اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ آنگاه اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ واگرا باشد $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

اثبات. از آنجا که $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=۰$$

حال بنا به قسمت اول لم اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ نیز همگراست. پس اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز واگراست. □

مثال ۷۶. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[۴]{۳n+۲n^۵}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. با نگاهی به توانهای n در صورت و مخرج عبارت داخل سری متوجه می‌شویم که اگر صورت را در n ضرب کنیم (یعنی اگر عبارت داخل سری را بر $\frac{۱}{n}$ تقسیم کنیم) حاصل به بی‌نهایت میل خواهد کرد. به بیان دیگر، این سری را با $\sum\frac{۱}{n}$ مقایسه می‌کنیم. فرض کنید $b_n=\frac{۱}{n}$. می‌دانیم که $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ واگراست. اگر $a_n=\frac{n}{\sqrt[۴]{۳n+۲n^۵}}$ و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{\sqrt[۴]{۳n+۲n^۵}}=\infty$$

پس $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ واگراست (با توجه به آزمون مقایسه‌ی حدی). در زیر علت این را که حد فوق بی‌نهایت شده است بیان کرده‌ایم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{\sqrt[۴]{۳n+۲n^۵}}\overset{\text{مخرج را بزرگ می‌کنیم}}{\geqslant}\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{\sqrt[۴]{۵n^۵}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{\sqrt[۴]{۵}\times n^{\frac{۵}{۴}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{۲-\frac{۵}{۴}}}{\sqrt[۴]{۵}}=\infty$$

□

بهتر است پیش از ادامه‌ی درس، مختصری درباره‌ی بی‌نهایت شدن حد دنباله‌ها بگوئیم.

توجه ۷۷. عبارتِ $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ یعنی:
جملات دنباله **به اندازه‌ی دلخواه** بزرگ می‌شوند، به شرط اینکه اندیسهای آنها **به اندازه‌ی کافی** بزرگ شوند.

$$\overbrace{\forall M\in\mathbb{N}}^{\text{اندازه‌ی دلخواه}}\quad\overbrace{\exists N_M\in\mathbb{N}}^{\text{اندازه‌ی کافی}}\quad\forall n>N_M\quad |a_n|>M$$

بحث را با حل مثالی از دنباله‌ها پی می‌گیریم.

مثال ۷۸ (از دنباله‌ها)**.** فرض کنید که $a > ۱$ نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = ۰$.

معنی عبارت بالا این است که «نرخ رشدِ» دنباله‌ی a^n از نرخ رشدِ دنباله‌ی n بیشتر است. اگر بخواهید با استناد به «نرخ رشد» این سوال را حل کنید، نوشتن چند جمله‌ی اول دو دنباله و مقایسه‌ی آنها کافی نیست.

پاسخ. می‌دانیم که $a > ۱$ پس $b \geqslant ۰$ موجود است به طوری که $a = b + ۱$.

$$\frac{n}{a^n} = \frac{n}{(b+۱)^n} = \frac{n}{۱ + nb + \underbrace{\binom{n}{۲}}_{\frac{n(n-۱)}{۲}} b^۲ + \ldots + \binom{n}{n} b^n}$$

داریم $\binom{n}{۲} b^۲ \geqslant (b+۱)^n$ پس

$$۰ \leqslant \frac{n}{(b+۱)^n} \leqslant \frac{n}{\frac{n(n-۱)}{۲} b^۲}$$

دنباله‌ی $\frac{n}{\frac{n(n-۱)}{۲} b^۲}$ به صفر میل می‌کند، پس بنا به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = ۰$$

علت این که جمله‌ی $\binom{n}{۲} b^۲$ را استفاده کردیم این بود که می‌خواستیم توانِ ۲ برای n ظاهر شود. □

از مثال بالا نتیجه می‌شود که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N \quad \forall n > N \quad n < (a^n)\epsilon.$$

در این جلسه ثابت کردیم که • اگر a_n و b_n دو دنباله با جملات نامنفی باشند و b_n ها مخالف صفر باشند، آنگاه اگر $\lim \frac{a_n}{b_n} = ۰$ آنگاه از همگرائی $\sum b_n$ همگرائیِ $\sum a_n$ نتیجه می‌شود و از واگرائیِ $\sum a_n$ واگرائی $\sum b_n$ نتیجه می‌شود.

- با فرضهای بالا اگر $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > ۰$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست اگروتنهااگر $\sum b_n$ همگرا باشد.

- $\lim \frac{n}{a^n} = ۰$ برای هر $a > ۱$.

۷ جلسه‌ی هفتم

مرور درس ۷۹. گفتیم که در صورتی که برای دو دنباله‌ی با جملاتِ نامنفیِ a_n, b_n داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > ۰$$

آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست اگروتنهااگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. در صورتی که داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

آن گاه اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

همچنین ثابت کردیم که اگر $a_n = \frac{n}{\sqrt[۴]{۳n+n^۵}}$ آنگاه سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ واگراست؛ زیرا اگر فرض کنیم $b_n = \frac{۱}{n}$ که سری $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ واگراست، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[۴]{۳n+n^۵}} \times \frac{۱}{n} = \infty$$

مثال ۸۰. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n - n}{۳^n + n}$$

پاسخ. بگیرید $a_n = \frac{۲^n - n}{۳^n + n}$ و $b_n = \frac{۲^n}{۳^n}$. داریم

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{۲^n - n}{۳^n + n} \times \frac{۳^n}{۲^n} = \frac{۱ - \frac{n}{۲^n}}{۱ + \frac{n}{۳^n}}$$

از آنجا که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱ - \frac{n}{۲^n}}{۱ + \frac{n}{۳^n}} = ۱$$

و سری $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست، بنا به آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست.

راه حل دوم:

قرار دهید $b_n = \frac{۲^n}{۳^n + n}$. از آنجا که

$$b_n = \frac{۲^n}{۳^n + n} \leqslant \frac{۲^n}{۳^n}$$

و سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ همگراست، سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ نیز همگراست. نیز

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n}{3^n + n} \times \frac{3^n + n}{2^n} = 1$$

در نتیجه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

راه حل سوم:

$$\frac{2^n - n}{3^n + n} \leqslant \frac{2^n}{3^n}$$

چون $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ همگراست، پس بنا به آزمون مقایسه $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-n}{3^n+n}$ نیز همگراست. $\square$

مثال ۸۱. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ نشان دهید که سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n+1}$ همگراست.

پاسخ. اگر $b_n = \frac{1}{3^n+1}$، اولاً $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ همگراست، زیرا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

و $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ همگراست. همچنین داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{\cancel{3^n+1}}}{\frac{1}{\cancel{3^n+1}}} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

پس کل سری مورد نظر (بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی) همگراست. $\square$

مثال ۸۲. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. قرار دهید $b_n = \frac{1}{n}$ و توجه کنید که $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ واگراست.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \times n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

در نتیجه بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ نیز واگراست. $\square$

مثال ۸۳. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{c^n - b^n} \quad , \quad 0 < a < b < c$$

پاسخ. قرار دهید $d_n = (\frac{b}{c})^n$. سری $\sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{b}{c})^n$ همگراست زیرا $۰ < \frac{b}{c} < ۱$
اگر $e_n = \frac{a^n+b^n}{c^n-b^n}$ داریم:

$$\frac{e_n}{d_n} = \frac{a^n+b^n}{c^n-b^n} \times \frac{c^n}{b^n} = \frac{(ac)^n+(bc)^n}{(bc)^n-(b^۲)^n}$$

صورت و مخرج کسر را بر $(bc)^n$ تقسیم می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{ac}{bc})^n+۱}{۱-(\frac{b^۲}{bc})^n} = ۱$$

و بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n+b^n}{c^n-b^n}$ نیز همگراست. توجه کنید که در این مثال اگر $۰ < b < a < c$، با راه مشابه به همین نتیجه می‌رسیدیم. پس شرط $a < b$ اضافه است. □

مثال ۸۴. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n+n^{\frac{۴}{۳}}}{۲+n^{\frac{۵}{۳}}}$$

پاسخ. می‌دانیم که سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست. پس اگر $a_n = \frac{n+n^{\frac{۴}{۳}}}{۲+n^{\frac{۵}{۳}}}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{۱}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \times a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲+n^{\frac{۷}{۳}}}{۲+n^{\frac{۵}{۳}}} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{n^{\frac{۵}{۳}}} = \infty$$

پس $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ واگراست. □

مثال ۸۵. فرض کنید $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. نشان دهید که $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a_n}{۱+a_n}$ نیز همگراست.

پاسخ. از آنجا که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$$

با توجه به آزمون مقایسه‌ی حدی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{۱+a_n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{۱+a_n} \times \frac{۱}{a_n} = ۱$$

از آنجا که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a_n}{۱+a_n}$ نیز همگراست. □

۱.۷ آزمون نسبت

لم ۸۶. فرض کنید $\{a_n\}_{n=۰}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقیِ مثبت (و مخالف صفر) باشد. قرار دهید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = L$ آنگاه

۱. اگر $L > ۱$ آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ واگراست.

۲. اگر $۰ \leqslant L < ۱$ آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست.

اثبات.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = L$$

پس

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N_\epsilon \quad \forall n > N_\epsilon \quad |\frac{a_{n+۱}}{a_n} - L| < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N_\epsilon \quad L - \epsilon < \frac{a_{n+۱}}{a_n} < L + \epsilon$$

در نتیجه داریم:

$$a_{n+۱} < a_n \underbrace{(L+\epsilon)}_{r}$$

دقت کنید که $L < ۱$ پس می‌توانیم ϵ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که داشته باشیم $r < ۱$. دنباله‌ی مورد نظر را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$a_۰ \quad a_۱ \quad \dots \quad a_{N_\epsilon} \quad a_{N_{\epsilon+۱}} \quad a_{N_{\epsilon+۲}} \quad a_{N_{\epsilon+۳}} \quad \dots$$

داریم

$$a_{N_{\epsilon+۱}} \leqslant a_{N_\epsilon} \times r$$

$$a_{N_{\epsilon+۲}} \leqslant a_{N_\epsilon} \times r^۲$$

$$a_{N_{\epsilon+۳}} \leqslant a_{N_\epsilon} \times r^۳$$

$$\vdots$$

پس

$$\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n \leqslant a_{N_\epsilon}+a_{N_\epsilon}\times r+a_{N_\epsilon}\times r^{۲}+\ldots = a_{N_\epsilon}(۱+r+r^{۲}+\ldots) = a_{N_\epsilon}(\frac{۱}{۱-r})$$

پس داریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=۰}^{N_\epsilon - ۱} a_n}_{\text{متناهی}} + \underbrace{\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n}_{\text{همگرا}}$$

در نتیجه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست. $\square$

۳. اگر $L = ۱$ آنگاه این آزمون برای اثبات همگرایی یا واگرایی به کار نمی‌آید: بررسی کنید که هر دو سریهای زیر (که یکی همگرا و دیگری واگراست) در آزمون بالا در حالت $L = ۱$ قرار می‌گیرند.

$$\underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}}}_{\text{همگرا}} \quad , \quad \underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n}}_{\text{واگرا}}$$

مثال ۸۷. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$$

پاسخ.

$$a_n = \frac{۱}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+۱)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+۱)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n+۱} = ۰$$

پس سری بالا همگراست.

بعداً خواهیم دید که

$$۱+۱+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۲!}+\ldots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!} = e$$

و

$$e^a = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

حل همان سوال با آزمون مقایسه‌ی حدی:

با مقایسه $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{n!}}{\frac{۱}{n^۲}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{n!} = ۰$$

از آنجا که $\sum \frac{۱}{n^۲}$ همگراست، سری مورد نظر نیز همگراست. $\square$

مثال ۸۸. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^n}{n!}$$

پاسخ. توجه کنید که بنا به آنچه در کادر بالا گفتیم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^n}{n!} = e^۳$$

راه حل با آزمون نسبت:

$$a_n = \frac{۳^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{\frac{۳^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{۳^n}{n!}} = \frac{۳}{n+۱}$$

پس از آنجا که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۳}{n+۱} = ۰$$

سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^n}{n!}$ همگراست.

حل با آزمون مقایسه‌ی حدی:

$$b_n = \frac{۱}{۳^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{۳^n}{n!}}{\frac{۱}{۳^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۹^n}{n!} = ۰$$

بنا به همگرائیِ سری $\sum \frac{۱}{۳^n}$ سری مورد نظر ما نیز همگراست. $\square$

مثال ۸۹. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

پاسخ. آزمون مقایسه:

با $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ مقایسه کنید:

$$\frac{n^3}{2^n} \times n^3 = \frac{n^6}{2^n} \to 0$$

پس سری مورد نظر همگراست. برای اثبات این که $\lim n^6/2^n = 0$ از این که $2 > 1$ و از نامساوی برنولی استفاده کنید. در واقع می‌توان نشان داد که $\lim n^6/a^n = 0$ برای هر $a > 1$.

آزمون نسبت:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}(n+1)^3}{n^3 \underbrace{\cancel{2^{n+1}}}_{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \times \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3} = \frac{1}{2}$$

□

۲.۷ آزمون ریشه

فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی باشد و

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

۱. اگر $0 \leqslant L < 1$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست.

اثبات.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

پس

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |\sqrt[n]{a_n} - L| < \epsilon$$

در نتیجه

$$\forall n > N_\epsilon \quad L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < \epsilon + L$$

پس

$$\forall n > N_\epsilon \quad a_n < (L+\epsilon)^n$$

ϵ را طوری انتخاب کنید که $0 < \underbrace{L+\epsilon}_{r} < 1$ پس

$$\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n = a_{N_\epsilon} + a_{N_\epsilon+1} + \ldots \leqslant a_{N_\epsilon} + r^{N_\epsilon+1} + r^{N_\epsilon+2} + \ldots$$

توجه ۹۰.

$$r^{N_\epsilon+1} + r^{N_\epsilon+2} + \ldots = r^{N_\epsilon}(1 + r + r^2 + \ldots) = \frac{r^{N_\epsilon}}{1-r}$$

پس

$$\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n \leqslant a_{N_\epsilon} + r^{N_\epsilon} \sum r^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{N_\epsilon-1} a_n + \sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n$$

در نتیجه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست. □

مثال ۹۱. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n \quad a > 0$$

پاسخ.

$$a_n = na^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \times a$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1} \times a = a$$

پس اگر $0 < a < 1$ آنگاه سری مورد نظر همگراست و اگر $a \geqslant 1$ سری فوق واگراست.

حل با آزمون مقایسه:

مقایسه با $\frac{1}{n^2}$: سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست.

$$na^n \times n^2 = n^3 \times a^n$$

اگر $۰ < a < ۱$ آنگاه $b = \frac{۱}{a} > ۱$ در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^۳}{b^n} = ۰$$

پس سری مورد نظر همگراست. $\square$

(ادامه‌ی آزمونِ ریشه)

۲. اگر $L > ۱$ آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ واگراست.

۳. اگر $L = ۱$ آنگاه این آزمون کارگر نیست.

مرور: اگر a_n, b_n دنباله‌های نامنفی باشند، آنگاه

- اگر $\lim a_{n+۱}/a_n = l$ و $۰ \leq l < ۱$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست. اگر $l > ۱$ سری یادشده واگراست.
- اگر $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$ و $۰ \leq l < ۱$ آنگاه سری $\sum a_n$ همگراست. اگر $l > ۱$ سری یادشده واگراست.
- در هر دو آزمون بالا، حالت $l = ۱$ کمکی به تشخیص همگرائی یا واگرائی نمی‌کند.

۸ نیم‌جلسه‌ی هشتم

مرور درس ۹۲. در آزمون ریشه دیدیم که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} L < ۱ \Rightarrow \text{همگراست } \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \\ L = ۱ \Rightarrow \text{این آزمون کار نمی‌کند.} \\ L > ۱ \Rightarrow \text{واگراست } \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \end{cases}$$

مثال ۹۳. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(n^۳)}{n^۲}$$

پاسخ. می‌دانیم که

$$-۱ \leqslant \sin(n^۳) \leqslant ۱$$

پس

$$-\frac{۱}{n^۲} \leqslant \frac{\sin(n^۳)}{n^۲} \leqslant \frac{۱}{n^۲}$$

نکته ۹۴. آزمون مقایسه تنها برای جملات مثبت کار می‌کند. بنابراین نمی‌توانیم با استفاده از آزمون مقایسه، در این جا نتیجه بگیریم که سری مورد نظر همگراست.

بیائید راه حل بالا را به صورت زیر ترمیم کنیم.

$$-|\sin(n^۳)| \leqslant \sin(n^۳) \leqslant |\sin(n^۳)|$$

$$۰ \leqslant \sin(n^۳) + |\sin(n^۳)| \leqslant ۲|\sin(n^۳)|$$

بنابراین

$$۰ \leqslant \frac{\sin(n^۳) + |\sin(n^۳)|}{n^۲} \leqslant \frac{۲|\sin(n^۳)|}{n^۲}$$

می‌دانیم $\frac{|\sin(n^۳)|}{n^۲}$ $\sum_{n=۰}^{\infty}$ ۲ همگراست(مقایسه با $\frac{۱}{n^۲}$ $\sum_{n=۰}^{\infty}$).

پس بنا به آزمون مقایسه $\underbrace{\frac{|\sin(n^۳)|}{n^۲}}_{\text{همگرا}} + \frac{\sin(n^۳)}{n^۲}$ نیز همگراست. در نتیجه $\frac{\sin(n^۳)}{n^۲}$ $\sum_{n=۱}^{\infty}$ نیز همگراست.

□

راه حل بالا را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

توجه ۹۵. اگر $\sum_{n=\cdot}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=\cdot}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

اثبات.

$$-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|$$

$$\cdot \leqslant a_n + |a_n| \leqslant ۲|a_n|$$

$\sum_{n=\cdot}^{\infty} ۲|a_n|$ همگراست پس

$$\sum_{n=\cdot}^{\infty} a_n + |a_n|$$

نیز بنا به آزمون مقایسه همگراست. در نتیجه $\sum_{n=\cdot}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|)$ همگراست. □

مثال ۹۶. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=\cdot}^{\infty} (-۱)^n$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$S_\cdot = (-۱)^\cdot = ۱$$

$$S_۱ = (-۱)^\cdot + (-۱)^۱ = \cdot$$

$$S_۲ = (-۱)^\cdot + (-۱)^۱ + (-۱)^۲ = ۱$$

$$S_۳ = (-۱)^\cdot + (-۱)^۱ + (-۱)^۲ + (-۱)^۳ = \cdot$$

$$S_{۲n} = ۱$$

$$S_{۲n+۱} = \cdot$$

یعنی جملات دنباله‌ی $\{S_n\}$ یک در میان صفر و یکند. پس این دنباله، و به تبع آن سری مورد نظر ما همگرا نیست. □

در قضیه‌ی زیر از لایبنیتز، شرطی برای همگرائی سریهای دارای جملات مثبت و منفی ارائه کرده‌ایم.

قضیه ۹۷. فرض کنیم $\{a_n\}_{n=\cdot}^{\infty}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد نامنفی باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n = \cdot$ آنگاه سری $\sum_{n=\cdot}^{\infty} (-۱)^n a_n$ همگراست.

اثبات.

$$S_0 = (-1)^0 a_0 = a_0$$

$$S_1 = (-1)^0 a_0 + (-1)^1 a_1 = a_0 - a_1 \Rightarrow S_1 < S_0$$

$$S_2 = a_0 - a_1 + a_2 = a_0 + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{\text{چون نزولی است منفی می‌شود}} \Rightarrow \begin{cases} S_2 > S_1 \\ S_2 < S_0 \end{cases} \Rightarrow S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$S_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) \Rightarrow \begin{cases} S_3 > S_1 \\ S_3 < S_2 \end{cases} \Rightarrow S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$\vdots$$

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_4 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \leqslant S_4 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

دنباله‌ی (S_{2n+1}) صعودی و از بالا کراندار است. پس همگراست. دنباله‌ی (S_{2n}) نزولی و از پایین کراندار است. پس S_{2n} نیز همگراست. همچنین توجه کنید که

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$$

زیرا:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} -a_{2n+1} = 0$$

پس تا کنون مشاهدات زیر را داریم:

مشاهدات ۹۸.

۱. دنباله‌های S_{2n+1} و S_{2n} هر دو همگرا هستند.

۲. $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$.

مشاهدات بالا با کمک لم زیر نشان می‌دهند که S_n همگراست. $\square$

لم ۹۹. فرض کنید که $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد باشد.

$$a_۰ \quad a_۱ \quad a_۲ \quad a_۳ \quad \ldots$$

فرض کنید هر دو دنباله‌ی $a_{۲n}$ و $a_{۲n+۱}$ همگرا هستند و $\lim_{n\to\infty} a_{۲n+۱} = \lim_{n\to\infty} a_{۲n} = L$ آنگاه a_n نیز همگرا به L است.

اثبات. فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} a_{۲n+۱} = L$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{۲n} = L$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. باید نشان دهیم که

$$\forall\epsilon \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_n - L| < \epsilon$$

فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. قرار دهید

$$(b_n) = (a_{۲n}) \quad c_n = (a_{۲n+۱})$$

بنا بر همگرائیِ دنباله‌ی b_n عدد $N \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که برای هر $n > N$ داریم

$$|b_n - L| < \epsilon$$

یعنی برای هر $n > N$ داریم

$$|a_{۲n} - L| < \epsilon.$$

به طور مشابه از همگرائیِ دنباله‌ی c_n نتیجه می‌گیریم که عددِ $N_۱$ موجود است به طوری که

$$\forall n > N_۱ \quad |a_{۲n+۱} - L| < \epsilon.$$

قرار دهید

$$N_۲ = \max\{N, N_۱\}$$

بنا بر آنچه در بالا گفته‌ایم، اگر $n > N_۲$ آنگاه

$$|a_{۲n+۱} - L| < \epsilon, \quad |a_{۲n} - L| < \epsilon$$

یعنی برای هر $n > ۲N_۲$ داریم

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

□

مثال ۱۰۰. نشان دهید که سری $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{۱}{n}$ همگراست.

پاسخ. می‌دانیم که سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n}$ واگراست. از طرفی $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n} = ۰$ و دنباله‌ی $\frac{۱}{n}$ نزولی است. پس بنا به قضیه‌ی لایبنیتز، این سری همگراست. □

تمرین ۱۰۱. فرض کنید a_n دنباله‌ای باشد به طوری که

$$\forall n \quad a_n < p$$

آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant p$$

مثال ۱۰۲. ثابت کنید که $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{\sqrt{n+۱}}$ همگراست. (راهنمایی: از آزمون لایبنیتز استفاده کنید)

مثال ۱۰۳. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(\sqrt[n]{۲} - ۱)^n$$

پاسخ. آزمون ریشه:

$$a_n = (\sqrt[n]{۲} - ۱)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\sqrt[n]{۲}}_{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{۲}=۱} -۱$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = ۰$$

بنا به این آزمون ریشه، سری فوق همگراست. □

در این جلسه ثابت کردیم که اگر a_n دنباله‌ای با جملات نامنفی باشد و نزولی باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$ آنگاه سری $\sum(-۱)^n a_n$ همگراست.

۹ جلسه‌ی نهم

مثال ۱۰۴. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

پاسخ.

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \times n^{\frac{1}{n}}}{(\frac{n^2+1}{n})^n}$$

داریم:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

و

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n^2}{n^2+1})^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{n^2+1}{n^2})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}}$$

همچنین قبلاً ثابت کرده‌ایم که

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$$

موجود است و از صفر بزرگتر است. پس و

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$$

موجود است.

از طرفی نشان داده‌ایم که اگر $a_n \mapsto a \neq 0$ آنگاه $\sqrt[n]{a_n} \mapsto 1$ پس $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}} = 1$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

پس سری بالا نمی‌تواند همگرا باشد. $\square$

توجه ۱۰۵. در ادامه‌ی این درس ثابت خواهیم کرد که

$$\lim(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$$

که حاصل حد بالا را با e نشان می‌دهیم.

سری زیر را در نظر بگیرید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

در جلسات گذشته ثابت کردیم که سری فوق به ازاء هر مقدارِ a همگراست.

$$۱ + a + \frac{a^۲}{۲!} + \frac{a^۳}{۳!} + \frac{a^۴}{۴!} + \dots$$

یعنی برای هر مقدارِ a عبارت فوق یک مقدار متناهی می‌شود. پس می‌توان تابع زیر را در نظر گرفت:

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

داریم

$$\exp(۰) = ۱$$

$$\exp(۱) = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \dots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$$

حاصل $\exp(۱)$ را با e نشان می‌دهیم. این عدد تا چند رقم اول اعشار به صورت زیر است:

$$e \cong ۲/۷۱۸۲.$$

عدد e یک عدد غیر جبری است. یعنی هیچ چند جمله‌ای‌ای با ضرایبِ در اعداد گویا موجود نیست که ریشه‌ی آن e شود. اثبات این گفته با اطلاعاتی که در این درس می‌گیریم هنوز ممکن نیست. تابع exp نیز یک تابع غیر جبری است. یعنی با متناهی بار استفاده از اعمال اصلی، هیچگاه به این تابع نمی‌رسیم.

توجه ۱۰۶. برای راحتی، تابع $\exp(x)$ را با e^x نشان می‌دهیم.

توجه ۱۰۷. در ریاضیات مقدماتی با «توان» آشنا شده‌ایم و معنی عبارتی چون $۲^۳$ را می‌دانیم. همچنین عبارتی چون $۲^{\frac{۲}{۳}}$ نیز برای ما قابل فهم است. اما چگونه می‌توان توان را به اعداد دیگرِ حقیقی تعمیم داد. مثلا چگونه می‌توان ۲^π یا $۲^{\sqrt{۲}}$ را تعریف کرد. در ادامه‌ی درس خواهیم دید که با استفاده از تابعِ e^x می‌توان از پس این کار برآمد.

توجه ۱۰۸. کلمه‌ی exp از exponential به معنای توان گرفته شده است.

قضیه ۱۰۹.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

به بیان دیگر

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

بیائید عبارات بالا را محاسبه کنیم:

$$e^a = ۱ + a + \frac{a^۲}{۲!} + \frac{a^۳}{۳!} + \frac{a^۴}{۴!} + \dots$$

$$e^b = ۱ + b + \frac{b^۲}{۲!} + \frac{b^۳}{۳!} + \frac{b^۴}{۴!} + \dots$$

$$e^{(a+b)} = ۱ + (a+b) + \frac{(a+b)^۲}{۲!} + \frac{(a+b)^۳}{۳!} + \frac{(a+b)^۴}{۴!} + \dots$$

همان طور که مشاهده می‌کنید برای محاسبه‌ی e^{a+b} باید دو سریِ نامتناهی را در هم ضرب کنیم. برای ضربی به صورت زیر:

$$(a_۱ + a_۲ + a_۳ + \dots)(b_۱ + b_۲ + \dots)$$

نیاز است که نخست $a_۱$ را در تمام b_i ها ضرب کنیم و هر وقت این کار تمام شد (!) $a_۲$ را در تمام آنها ضرب کنیم. یعنی باید یک الگوریتم بی‌پایان ادامه یابد تا ما به ضرب دومی برسیم. اگر ذهن خود را یک رایانه تجسم کنیم، این کار غیر ممکن است. خوشبختانه روش درست این کار هم موجود است:

۱.۹ حاصلضرب کُشیِ دو سری

فرض کنید $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ دو سریِ عددی باشند. عبارت زیر را حاصلضرب کُشیِ این دو سری می‌نامیم.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} c_n$$

که در آن

$$c_n = \sum_{n=i+j}^{\infty} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

پس داریم

$$c_0 = a_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) + \ldots$$

همان طور که در بالا مشاهده می‌کنید برای محاسبه‌ی هر c_n تنها به تعدادی متناهی عملیات نیازمندیم. به سری بالا، حاصلضرب کُشیِ [4] دو سری مورد نظر می‌گوئیم. آیا سری بالا برابر با حاصلضرب دو سری مورد نظر ماست؟

قضیه ۱۱۰ (مِرْتِنِ). فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mapsto A$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \mapsto B$ و حداقل یکی از ایندو همگرای مطلق باشد، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (به گونه‌ای که در بالا تعریف کردیم) نیز همگراست و

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \mapsto AB$$

به عبارت دیگر

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} b_n).$$

توجه ۱۱۱. شرط همگرایی مطلقِ یکی از دو سری لازم است. برای مثال

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

[4] Cauchy

$$c_n = \sum_{k=۰}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{\overbrace{(-۱)^k}^{a_k}}{\underbrace{\sqrt{k+۱}}_{\leqslant\sqrt{n+۱}\sqrt{n+۱}}} \times \frac{\overbrace{(-۱)^{n-k}}^{b_{n-k}}}{\underbrace{\sqrt{n-k+۱}}_{\leqslant\sqrt{n+۱}\sqrt{n+۱}}}$$

$$\geqslant (-۱)^n \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{(n+۱)}$$

$$= (-۱)^n \underbrace{(\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۱} + \ldots + \frac{۱}{n+۱})}_{\text{بار } n+۱} = (-۱)^n \times \frac{n+۱}{n+۱} = (-۱)^n \times ۱$$

می‌بینیم که سری $\sum c_n$ همگرا نیست.

حال سریهای زیر را در نظر بگیرید.

$$e^a = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

$$e^b = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$$

هر دوی این سری‌ها همگرای مطلق هستند. پس حاصلضرب کُشی آنها را در نظر می‌گیریم.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} c_n$$

$$c_n = \sum_{k=۰}^{n} \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{(n-k)}}{(n-k)!} = \sum_{k=۰}^{n} \frac{a^k b^{(n-k)}}{k!(n-k)!}$$

با توجه به اینکه داریم:

$$\frac{۱}{k!(n-k)!} = \frac{\binom{n}{k}}{n!}$$

پس

$$c_n = \frac{۱}{n!} \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{۱}{n!}(a+b)^n$$

پس

$$e^a \times e^b = \sum \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b}.$$

۲.۹ چند ویژگی تابع نمایی

۱.

$$e^{۰} = ۱$$

۲.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

۳.

$$e^x \times e^{-x} = e^{۰} = ۱ \Rightarrow e^{-x} = \frac{۱}{e^x}$$

۴.

$$\forall x > ۰ \quad e^x > ۱$$

اثبات.

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

$$\forall x > ۰ \quad e^x > ۱ + x$$

□

۵.

$$\forall x < ۰ \quad ۰ < e^x < ۱$$

اثبات.

$$x < ۰ \Rightarrow -x > ۰ \Rightarrow e^{-x} > ۱ \Rightarrow e^x < ۱$$

$$e^x \times e^{-x} = ۱ \Rightarrow e^x > ۰$$

□

۶. تابع e^x اکیداً صعودی است:

$$x < y \rightarrow e^x < e^y$$

اثبات.

$$x < y \to y - x > ۰ \Rightarrow e^{y-x} > ۱ \Rightarrow \frac{e^y}{e^x} > ۱ \Rightarrow e^y > e^x$$

□

۷.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{nx} = (e^x)^n$$

اثبات.

$$(e^x)^n = \underbrace{e^x \times e^x \times e^x \times \ldots \times e^x}_{n\text{بار}} = e^{nx}$$

□

۸.

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (e^{\frac{۱}{m}x})^m = e^x$$

پس

$$(e^{\frac{۱}{m}x}) = (e^x)^{\frac{۱}{m}}$$

۹.

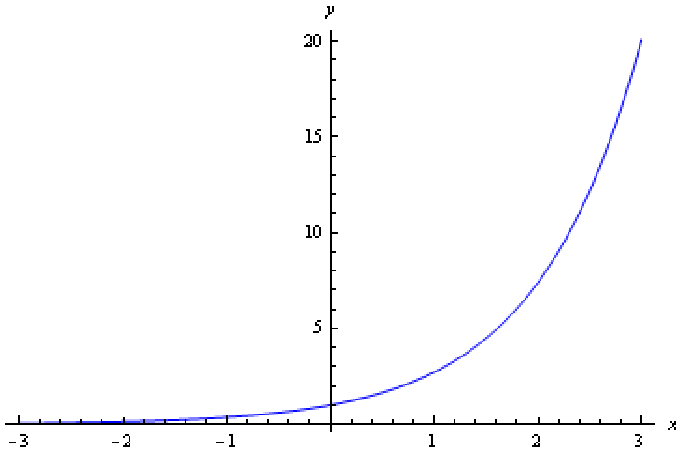
$$\forall r \in \mathbb{Q}^+ \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

$$e^{\frac{m}{n}x} = (e^{\frac{۱}{n}x})^m$$

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

در زیر نمودار تابع exp را کشیده‌ایم. برای تحلیلِ بیشتر این نمودار، نیازمند مفاهیم حد و پیوستگی

هستیم.



توجه ۱۱۲. برای رسم نمودار می‌توان از نرم‌افزارهای زیر بهره جست: maple,matlab. آشنائی با دو نرم‌افزار یادشده را به طور جدی به شما توصیه می‌کنم. در پیوند زیر می‌توانید توابع دو بعدی را رسم کنید:

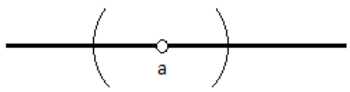
`http://fooplot.com`

در پیوند زیر توابع سه بعدی را رسم کنید:

`http://web.monroecc.edu/manila/webfiles/pseeburger/CalcPlot3D/`

۳.۹ یادآوری (حد و پیوستگی توابع)

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی a تعریف شده باشد.



همسایگی محذوف . مجموعه‌ی U را یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی a می خوانیم هرگاه

$$\exists\delta \quad U=\{x : ۰<|x-a|<\delta\}$$

توجه کنید که

$$\begin{cases} |x-a|<\delta \Rightarrow -\delta<x-a<\delta \Rightarrow a-\delta<x<a+\delta \\ |x-a|>۰ \Rightarrow x\neq a \end{cases}$$

می‌گوییم حدِّ تابع f وقتی x به سمتِ a میل می‌کند برابر است با L و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

هرگاه مقادیر f به **اندازه‌ی دلخواه** به L نزدیک شوند به شرط اینکه x به **اندازه‌ی کافی** به a نزدیک شده باشد. این گفته را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff$$

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta_\epsilon > ۰ \quad \forall x \quad (۰ < |x-a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon).$$

۱۰ جلسه‌ی دهم

مثال ۱۱۳.

$$\lim_{x\to ۴} ۲x + ۱ = ۹$$

پاسخ. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\forall\epsilon > ۰ \quad \exists\delta_\epsilon > ۰ \quad \forall x \quad (|x - ۴| < \delta \to |۲x + ۱ - ۹| < \epsilon)$$

می‌خواهیم

$$|۲x + ۱ - ۹| < \epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$|۲x - ۸| < \epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$۲|x - ۴| < \epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$|x - ۴| < \frac{\epsilon}{۲}$$

کافی است $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{۲}$ در نظر گرفته شود. در این صورت داریم:

$$|x - ۴| < \frac{\epsilon}{۲} \Rightarrow |۲x - ۸| < \epsilon \Rightarrow |۲x + ۱ - ۹| < \epsilon$$

□

مثال ۱۱۴. ثابت کنید

$$\lim_{x\to ۰} x^۳ \sin\frac{۱}{x} = ۰$$

پاسخ. باید ثابت کنیم

$$\forall\epsilon > ۰ \quad \exists\delta_\epsilon > ۰ \quad \forall x \quad (|x| < \delta_\epsilon \to |x^۳ \sin\frac{۱}{x}| < \epsilon)$$

$$|x^۳|\underbrace{|\sin\frac{۱}{x}|}_{|\sin\frac{۱}{x}|\leqslant ۱} < \epsilon$$

کافی است داشته باشیم:

$$|x^۳| < \epsilon$$

یعنی

$$|x|^۳ < \epsilon$$

یعنی

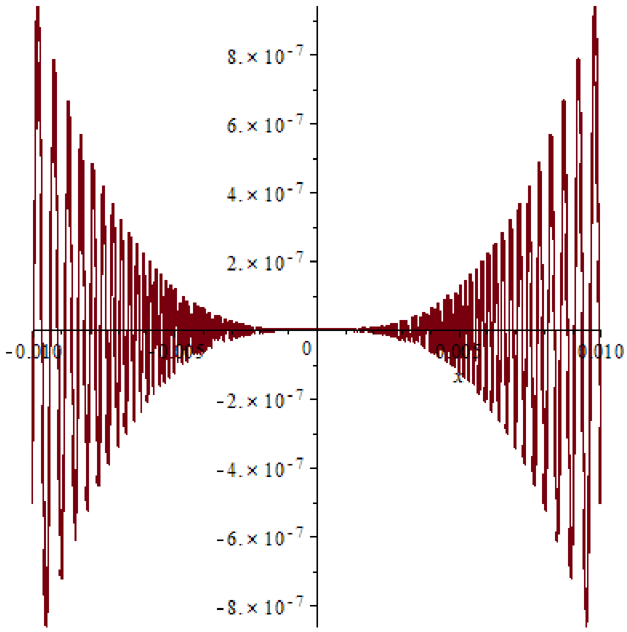
$$|x| < \sqrt[۳]{\epsilon}$$

کافی است قرار دهیم:

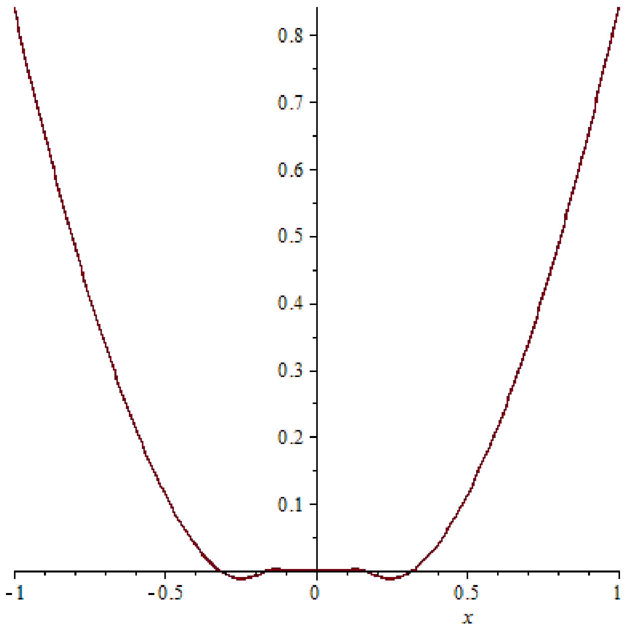
$$\delta_\epsilon = \sqrt[۳]{\epsilon}$$

در این صورت اگر $|x| < \delta_\epsilon = \sqrt[۳]{\epsilon}$ آنگاه $|x^۳ \sin(۱/x)| \leq |x^۳| < \epsilon$. $\square$

نمودار تابع $x^۳ \sin(\frac{۱}{x})$ در نزدیکی صفر به صورت زیر است:



اما وقتی از دورتر بدان نگاه کنیم به صورت زیر است:



به عددهای روی محورهای مختصات در هر دو شکل بالا دقت کنید.

مثال ۱۱۵. نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۰} e^x = ۱ = e^۰$$

(یعنی تابع e^x در نقطه‌ی ۰ پیوسته است.)

پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \delta_\epsilon > ۰ \quad \forall x \quad (|x| < \delta_\epsilon \to |e^x - ۱| < \epsilon)$$

$$e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

$$e^x - ۱ = x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

$$e^x - ۱ = x(۱ + \frac{x}{۲!} + \frac{x^۲}{۳!} + \dots)$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$|e^x - 1| \leqslant \underbrace{|x|(1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \dots)}_{A}$$

می‌خواهیم δ را به گونه‌ای پیدا کنیم که اگر

$$|x| < \delta \Rightarrow A < \epsilon$$

فرض کنید

$$|x| < 1$$

آنگاه

$$|e^x - 1| < |x|\underbrace{(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots)}_{e-1}$$

پس اگر $|x| < 1$ آنگاه برای این که $|e^x - 1| < \epsilon$ کافی است داشته باشیم

$$|x|(e-1) < \epsilon$$

یعنی

$$|x| < \frac{\epsilon}{e-1}$$

پس اگر

$$\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{e-1}\}$$

آنگاه اگر $|x| < \delta$ آنگاه $|e^x - 1| < \epsilon$. $\square$

قضیه ۱۱۶. فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff$$

$$\forall \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \quad (\{a_n\} \mapsto a, a_n \neq a \Rightarrow \{f(a_n)\} \mapsto L)$$

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad \to a$$

$$f(a_0) \quad f(a_1) \quad f(a_2) \quad \dots \quad \to L$$

در قضیه‌ی بالا گفته‌ایم که حد تابع در $x = a$ برابر با L است هرگاه هنگامی که با مقادیر گسسته‌ی x به a نزدیک شویم، مقادیرِ f به L نزدیک شوند. به بیان دیگر، حد تابع، وقتی $x \to a$ برابر با L است هرگاه برای **هر** دنباله‌ی a_n اگر این دنباله به a میل کند، دنباله‌ی $f(a_n)$ به L میل کند. پس برای این که حد تابع L باشد، گفته‌ی بالا باید برای همه‌ی دنباله‌ها درست باشد. یعنی برای این که ثابت کنیم حد تابع در $x = x_\circ$ برابر با L نیست، کافی است یک دنباله ناثابتِ a_n پیدا کنیم که به a میل کند ولی $f(a_n)$ به L میل نکند. یا برای این که نشان دهیم که تابع در یک نقطه حد ندارد کافی است دو دنباله پیدا کنیم که هر دو به آن نقطه میل کنند، ولی دنباله‌ی f هایشان به اعداد مختلفی همگرا باشد.

مثال ۱۱۷. نشان دهید تابع $\sin \frac{1}{x}$ در $x = 0$ حد ندارد.

پاسخ.

$$\begin{cases} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1 \\ \sin(4n+3)\frac{\pi}{2} = -1 \end{cases}$$

اگر حد تابع برابر L باشد، با هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که به صفر نزدیک شویم، باید دنباله‌ی $\{\sin(1/a_n)\}$ به L میل کند. دنباله‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$a_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$b_n = \frac{1}{(4n+3)\frac{\pi}{2}}$$

داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad a_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad b_n \neq 0$$

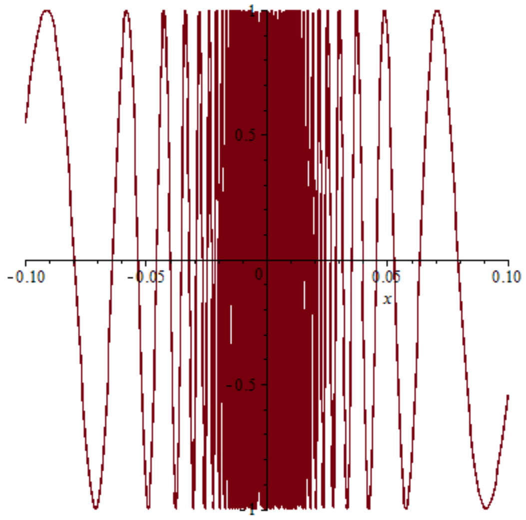
حال دنباله‌های c_n و d_n را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$c_n = \{\sin(a_n)\} = \{1\}$$

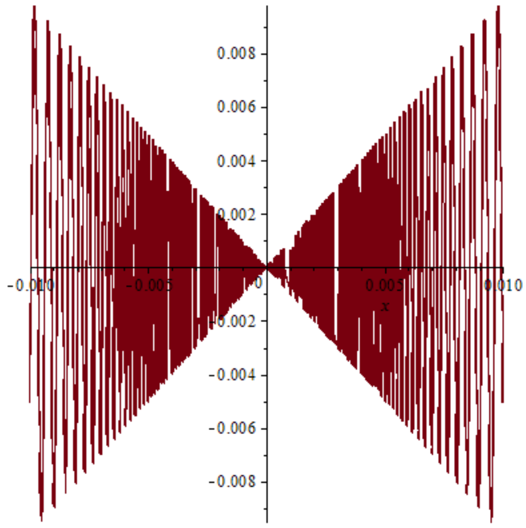
$$d_n = \{\sin(b_n)\} = \{-1\}$$

از آنجا که حد دنباله‌های c_n و d_n متفاوت است، تابع در نقطه‌ی $x = 0$ حد ندارد. □

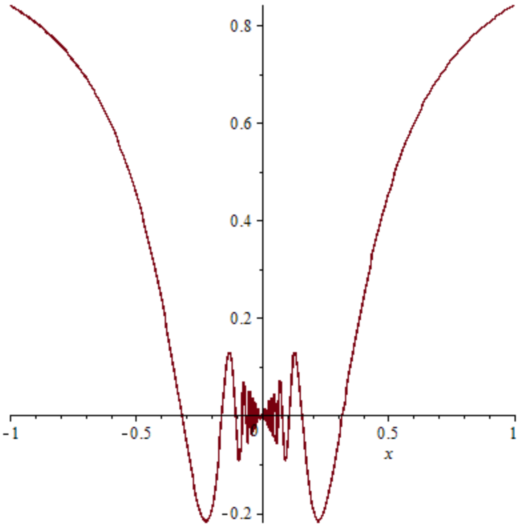
نمودار تابع $\sin(\frac{۱}{x})$ به صورت زیر است:



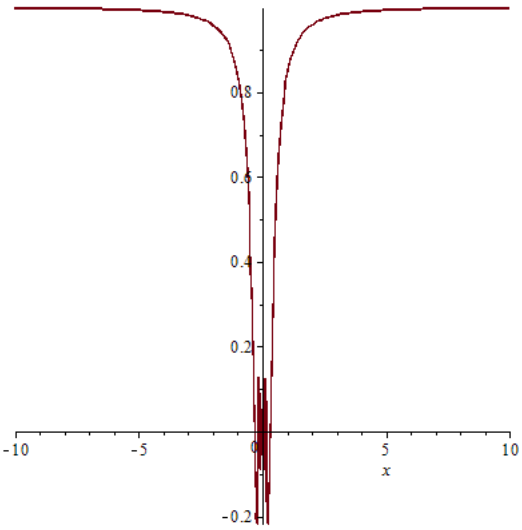
نمودار تابعِ $x\sin(۱/x)$ در نزدیکی صفر به صورت زیر است:



اما اگر از فاصله‌ی دورتر به آن نگاه کنیم به شکل زیر است:



در دو شکل بالا به اندازه‌های نوشته شده روی محورها دقت کنید. اگر از این هم دورتر شویم به شکل زیر می‌رسیم:



مثال ۱۱۸. ثابت کنید تابع زیر تنها در $x = ۱$ حد دارد.

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

پاسخ. فرض کنید دنباله‌ی $\{a_n\}$ به صورتی باشد که

$$a_n \mapsto a \neq ۱$$

و همه‌ی a_nها گویا باشند

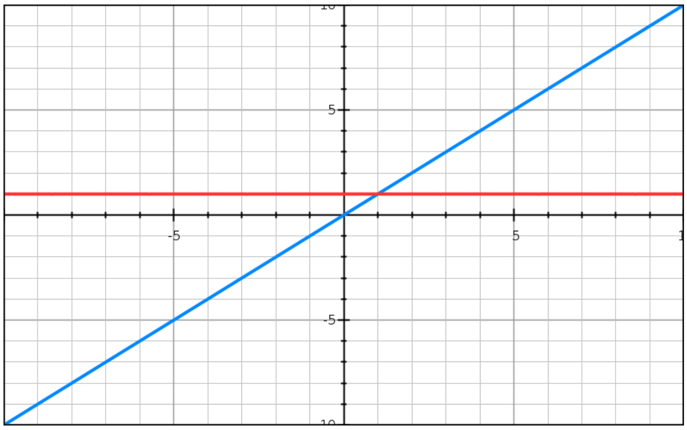
$$\{f(a_n)\} = \{۱\}$$

حال فرض کنید دنباله‌ی b_n همه‌ی جملاتش غیر گویا باشند و

$$b_n \mapsto a \neq ۱$$

$$\{f(b_n)\} = \{b_n\} \mapsto a \neq ۱$$

پس تابع در هیچ $a \neq ۱$ حد ندارد.



فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۱$$

برخی جملات این دنباله گویایند و برخی گنگ. ادّعا:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = ۱$$

برای این منظور باید نشان دهیم که

$$\forall\epsilon \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n>N \quad |f(a_n)-۱|<\epsilon$$

داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۱$$

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_n - ۱| < \epsilon$$

توجه

$$f(a_n) = \begin{cases} ۱ & a_n \in \mathbb{Q} \\ a_n & a_n \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

گفتیم که

$$\forall n > N_۱ \quad |a_n - ۱| < \epsilon$$

پس

$$\forall n > N_۱ \begin{cases} f(a_n) = a_n \Rightarrow |f(a_n) - ۱| < \epsilon \\ f(a_n) = ۱ \Rightarrow |f(a_n) - ۱| < \epsilon \end{cases}$$

پس در هر صورت اگر $n > N$ آنگاه $|f(a_n) - ۱| < \epsilon$. □

مثال ۱۱۹. فرض کنید تابع $f : D \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x_۰$ تعریف شده باشد و

$$\lim_{x \to x_۰} f(x) = L$$

و $L > ۰$ آنگاه تابع f در یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی $x_۰$ مثبت است. یعنی

$$\exists \delta > ۰ \quad \forall x \quad [x \in (x_۰ - \delta, x_۰ + \delta) \to f(x) > ۰]$$

به بیان دیگر اگر تابع f در یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی $x_۰$ منفی باشد، حد آن در $x_۰$ نمی تواند مثبت شود.

اثبات.

$$\lim_{x \to x_۰} f(x) = L > ۰ \Rightarrow$$

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta_\epsilon > ۰ \quad \forall x \quad (۰ < |x - x_۰| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$$

$$\forall x \quad (۰ < |x - x_۰| < \delta \to L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon)$$

گفتیم $L > ۰$. اگر ϵ را به صورتی در نظر بگیریم که $۰ < \epsilon < L$ آنگاه

$$\exists\delta_\epsilon \quad \forall x \quad (۰ < |x - x_۰| < \delta \to f(x) > L - \epsilon > ۰)$$

$\square$

لم ۱۲۰ (یادآوری)**.** فرض کنید f و g در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x_۰$ تعریف شده باشند و $\lim_{x\to x_۰} f(x)$ و $\lim_{x\to x_۰} g(x)$ موجود باشند.

.۱

$$\lim_{x\to x_۰} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_۰} f(x) \pm \lim_{x\to x_۰} g(x)$$

.۲

$$\lim_{x\to x_۰} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_۰} f(x) \lim_{x\to x_۰} g(x)$$

.۳

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_۰} f(x)}{\lim_{x\to x_۰} g(x)}$$

در صورتیکه $g(x)$ در همسایگی مورد نظر صفر نشود.

تعریف ۱۲۱. فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی $x_۰$ تعریف شده باشد، تابع f را در $x = x_۰$ پیوسته می‌خوانیم هرگاه

$$\lim_{x\to x_۰} f(x) = f(x_۰)$$

به بیان دیگر هرگاه

$$\lim_{h\to ۰} f(x_۰ + h) = f(x_۰)$$

برای رسیدن به تعریف دوم، کافی است در تعریف اول تغییر متغیرِ $h = x - x_۰$ را در نظر بگیرید.

به بیان دیگر تابع f در نقطه‌ی $x_۰$ پیوسته است هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ اگر $\{a_n\} \to x_۰$ آنگاه

$$\{f(a_n)\} \to f(x_۰)$$

مثال ۱۲۲. تابع e^x در نقطه‌ی $x = ۰$ پیوسته است. ثابت کردیم که $\lim_{x\to ۰} e^x = e^۰ = ۱$ یادآوری می‌کنیم که دامنه‌ی تابع e^x تمام $\mathbb{R}$ است.

مثال ۱۲۳. نشان دهید که e^x در تمام نقاط $x_۰ \in \mathbb{R}$ پیوسته است.

پاسخ.

$$\lim_{h\to ۰} e^{x_۰+h} = \lim_{h\to ۰} e^{x_۰} \times e^h = e^{x_۰}$$

□

مثال ۱۲۴. نشان دهید که

$$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$$

پاسخ. داریم

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

پس

$$\forall x > ۰ \quad e^x > ۱ + x$$

پس

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

□

۱۱ جلسه‌ی یازدهم

وقتی می‌گوئیم حدِّ تابعی در مثبتِ بی‌نهایت، مثبتِ بینهایت شده است یعنی مقادیر آن تابع، **به هر اندازه‌ی دلخواه** بزرگ می‌شوند به شرط این که ورودی تابع، **به اندازه‌ی کافی** بزرگ باشد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \iff \forall M\in\mathbb{N} \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall x \quad (x>N\to f(x)>M).$$

مثال ۱۲۵.

$$\lim_{x\to\infty} e^x=+\infty$$

پاسخ. داریم

$$e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\dots$$

پس

$$x>۰\to e^x>۱+x\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty.$$

□

مثال ۱۲۶. نشان دهید که

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=۰$$

پاسخ.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=\lim_{t\to\infty} e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{۱}{e^t}=۰$$

توجه کنید که در بالا از تغییر متغیرِ $t=-x$ استفاده کرده‌ایم؛ بدین صورت که $x\to-\infty$ اگروتنهااگر $-t\to\infty$. □

مثال ۱۲۷. نشان دهید که برای هر $n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=۰$$

پاسخ. داریم

$$e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}+\dots$$

پس

$$0 \leqslant \frac{x^n}{e^x} \overset{\text{مخرج را کوچک کرده‌ایم}}{\leqslant} \frac{x^n}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!x^n}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x} \mapsto 0$$

بنا به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

□

مثال ۱۲۸. نشان دهید که

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

با تغییر متغیر $x = -t$ داریم

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{t\to\infty} \frac{(-t)^n}{e^t} = 0.$$

توجه ۱۲۹. اگر توابع f و g در x_0 پیوسته باشند، آنگاه $f \pm g$ و λf در x_0 پیوسته‌اند. همچنین اگر $g(x) \neq 0$ آنگاه $\frac{f}{g}$ هم پیوسته است.

مثال ۱۳۰. تابع $\frac{e^x}{x^2+1}$ در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

نتیجه ۱۳۱. تابع $f(x) = x$ پیوسته است. پس $f(x) \times f(x) = x^2$ پیوسته است. پس ax^2 پیوسته است پس bx^3 هم پیوسته است. بدین‌ترتیب چندجمله‌ایها، یعنی توابعِ به صورت زیر،

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + 0$$

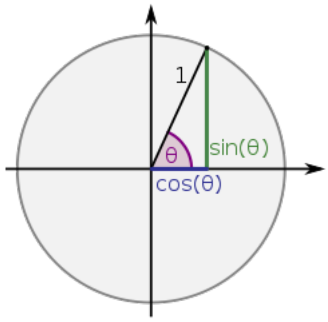
پیوسته هستند.

توابع هُذلولوی

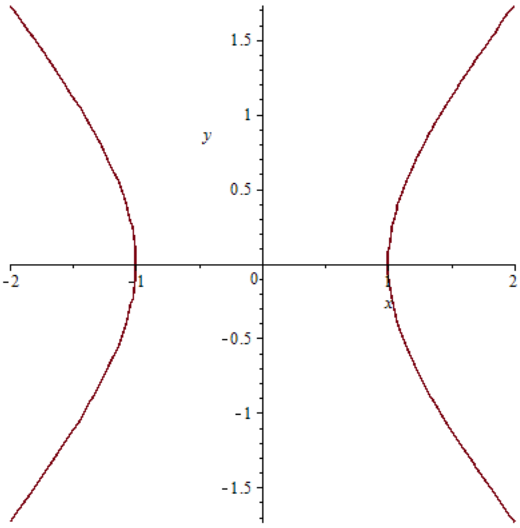
معادله‌ی $x^2 + y^2 = 1$ معادله‌ی یک دایره به شعاع ۱ است. می‌دانید که معادله‌ی پارامتری این دایره، به صورت زیر است:

$$x = \cos(\theta) \quad y = \sin(\theta)$$

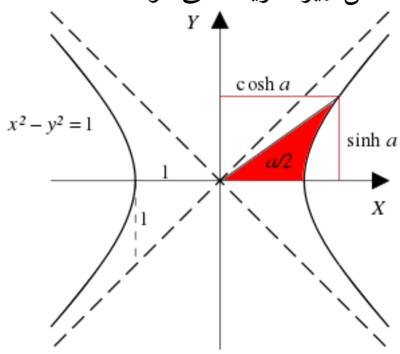
در واقع، نسبتهای مثلثاتیِ $\cos, \sin$ بر حسب زاویه‌ی θ روی این دایره قرار دارند:



در این قسمت قرار است با توابع هذلولوی [5] آشنا شویم که مقادیر آنها روی یک هذلولی واقع هستند. معادله‌ی $x^{۲} - y^{۲} = ۱$ را در نظر بگیرید:



توابع هذلولوی بر حسب مساحت احاطه شده بین خطی که مبدأ را به هذلولی وصل می‌کند، به صورت شکل زیر تعریف می‌شوند:



[5]Hyperbolic functions

در شکل بالا $x=\cosh(a)$ و $y=\sinh(a)$. پس

$$\forall x \quad \cosh^{۲}(x)-\sinh^{۲}(x)=۱$$

توجه کنید که مساحتهای زیر محورِ x را منفی در نظر می‌گیریم.

حال توابع یادشده را به صورت رسمی معرفی می‌کنیم: گفتیم که توابع e^x و e^{-x} هر دو در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند پس توابع زیر هم در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{۲}$$
$$\frac{e^x-e^{-x}}{۲}$$

تعریف می‌کنیم

$$\cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{۲}$$
$$\sinh x := \frac{e^x-e^{-x}}{۲}$$

پس داریم

$$\cosh(x)=\frac{\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}}{۲}$$
$$=\frac{\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲x^{۲n}}{۲n!}}{۲}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n}}{۲n!}$$
$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n}}{۲n!}=۱+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}+\dots$$

و به طور مشابه،

$$\sinh(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

توجه ۱۳۲.

.۱

$$e^x=\cosh x+\sinh x$$

.۲

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

.۳

$$\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = (\cosh x - \sinh x)(\cosh x + \sinh x)$$

بنابراین

$$\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = e^x e^{-x} = ۱$$

.۴

$$\cosh^{۲} x = ۱ + \sinh^{۲} x \to \cosh^{۲} x \geqslant ۱$$

از طرفی

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \geqslant ۰$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$\cosh x \geqslant ۱$$

.۵

$$\cosh(۰) = ۱$$

.۶

$$\lim_{x \to +\infty} \cosh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{۲} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty$$

.۷

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = \frac{e^{۲x} - ۱}{۲e^x}$$

$$x < ۰ \Rightarrow \sinh x \leqslant ۰$$

$$x > ۰ \Rightarrow \sinh x \geqslant ۰$$

.۸

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty$$

.۹

$$\lim_{x\to-\infty}\sinh x=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{۲}\overset{x=-t}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-t}-e^{t}}{۲}=-\infty$$

.۱۰

$$\sinh(-x)=-\sinh x$$

یعنی sinh تابعی فرد است.

.۱۱

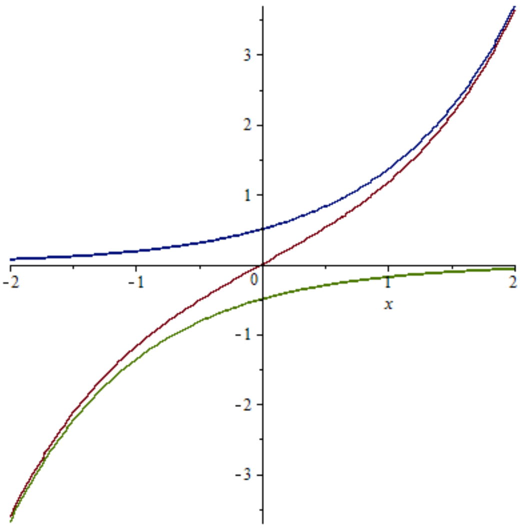
$$\cosh(-x)=\cosh x$$

یعنی cosh تابعی زوج است.

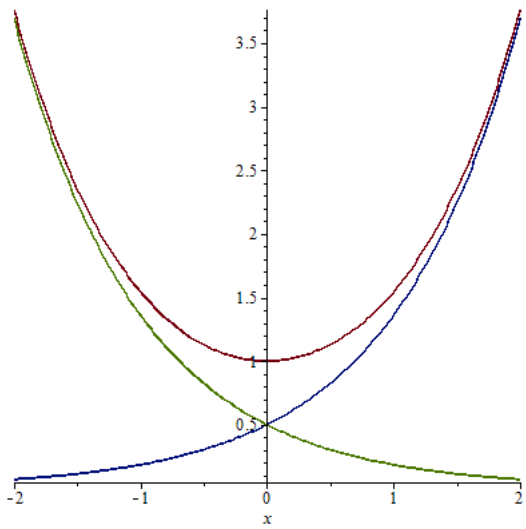
.۱۲

$$\lim_{x\to ۰}\sinh x=۰$$

طبق آنچه در بالا گفته‌ایم نمودار تابع sinh به صورت زیر است:



در شکل بالا نمودارهای آبی و سبز به ترتیب $\frac{۱}{۲}e^{x}$ و $-\frac{۱}{۲}e^{-x}$ را نشان می‌دهند و نمودار قرمز، sinh را. همچنین نمودار تابع cosh به صورت زیر است:



در شکل بالا نمودار $\cosh$ با رنگ قرمز مشخص شده است و نمودارهای آبی و سبز به ترتیب $\frac{e^x}{2}$ و $\frac{e^{-x}}{2}$ را نشان می‌دهند.

از آنجا که $\sinh x$ و $\cosh x$ در $\mathbb{R}$ پیوسته هستند و $\cosh x \neq 0$ تابع $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ هم در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\tanh 0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$

تابع $\coth$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

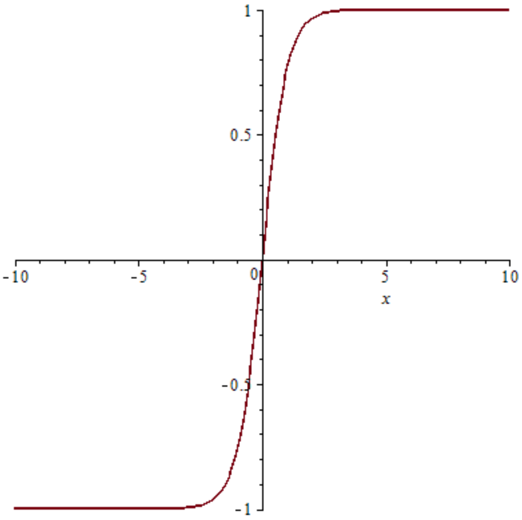
$$\lim_{x\to+\infty} \coth x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\tanh x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \coth x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\tanh x} = -1$$

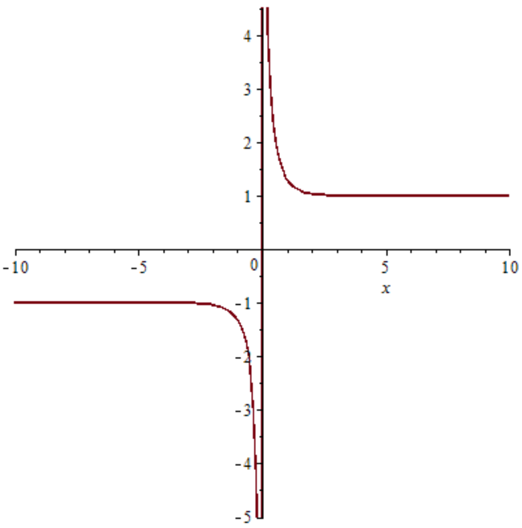
$$\lim_{x\to 0^+} \coth x = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \coth x = -\infty$$

در زیر نمودار $\tanh$ را کشیده‌ایم:



در زیر نمودار $\coth$ را کشیده‌ایم:



توجه ۱۳۳.

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2 \qquad (2)$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2 \qquad (3)$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \qquad (4)$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \qquad (5)$$

قضیه ۱۳۴. اگر تابع $f : I(\text{بازه}) \to \mathbb{R}$ در $x_0 \in I$ پیوسته باشد و تابع g در یک همسایگی از $f(x_0)$ تعریف شده و در $f(x_0)$ پیوسته باشد، آنگاه $g \circ f(x)$ در x_0 پیوسته است.

مثال ۱۳۵. تابع زیر در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \sinh(\frac{1}{1+x^2})$$

مثال ۱۳۶. نشان دهید تابع زیر در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x \tanh \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

پاسخ. تابع مورد نظر در $x_0 \neq 0$ همواره پیوسته است. (زیرا ترکیب دو تابع پیوسته است).

در $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \overbrace{\tanh \frac{1}{x}}^{\lim_{x\to 0} \tanh \frac{1}{x} = 1} = 0$$

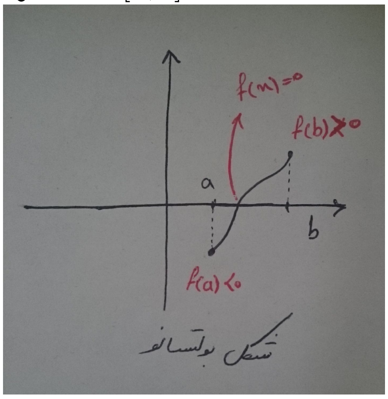
پس این تابع در $x_0 = 0$ نیز پیوسته است. □

قضیه‌ی بولتسانو

قضیه‌ی بولتسانو [6] مشخصه‌ی مهمی از توابع پیوسته را بیان می‌کند. از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر تابع f در یک بازه‌ی I پیوسته باشد آنگاه $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ نیز یک بازه است. یعنی اگر مقدار تابع در یک نقطه $f(a)$، شده باشد و در یک نقطه‌ی دیگر $f(b)$ و داشته باشیم $f(a) < f(b)$ آنگاه تابعِ f همه‌ی مقادیر بینِ $f(a)$ و $f(b)$ را نیز می‌پذیرد.

[6] Bolzano

قضیه ۱۳۷ (بولتسانو)**.** فرض کنید تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(a) < ۰$ و $f(b) > ۰$. آنگاه نقطه‌ای مانند $x. \in [a,b]$ موجود است به طوری که $f(x.) = ۰$.



اثبات. قرار دهید:

$$A = \{x \in [a,b] | f(x) < ۰\}.$$

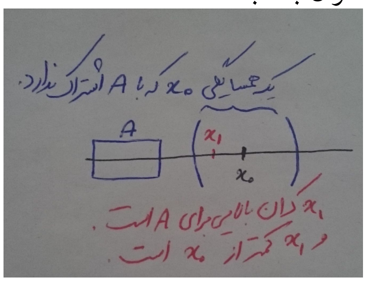
دقت کنید که اولاً مجموعه‌ی A ناتهی است، زیرا $a \in A$. ثانیاً مجموعه‌ی A از بالا کراندار است، زیرا b یک کران بالا برای آن است.

اصل تمامیت. هر مجموعه‌ی ناتهی و از بالا کراندار از $\mathbb{R}$ دارای کوچکترین کران بالاست.

فرض کنید $x.$ کوچکترین کران بالای A باشد.

مشاهده. هر همسایگی از $x.$ با A اشتراک دارد.

اگر همسایگی‌ای از $x.$ داشته باشیم که با A اشتراک ندارد، آنگاه $x.$ مطابق شکل نمی‌تواند کوچکترین کران بالا باشد.



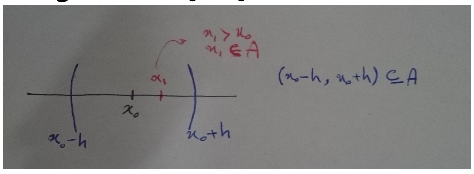
ادعّا: $f(x.) = ۰$.

اگر $f(x.) > ۰$ آنگاه بنا به پیوستگی، f در یک همسایگیِ $(x. - h, x. + h)$ از $x.$ مثبت است.

بنا بر آنچه در بالا گفتیم این همسایگی با A اشتراک دارد، که این تناقض است.

اگر $f(x_{۰}) < ۰$:

در این حالت اولاً $x_{۰} \neq b$. ثانیاً $x_{۰} \in A$. ثالثاً در یک همسایگیِ $(x_{۰} - h, x_{۰} + h)$ تابع f منفی است. توجه کنید که h را می‌توان به گونه‌ای گرفت که $x_{۰} + h < b$. یعنی هر $x_{۱} \in (x_{۰}, x_{۰} + h)$ در A است و از $x_{۰}$ بزرگتر است. و این متناقض است با اینکه $x_{۰}$ کوچکترین کران بالاست.



بنابراین:

$$f(x_{۰}) = ۰$$

□

مثال ۱۳۸. نشان دهید که معادله‌ی $e^x = \frac{۱}{x}$ در $\mathbb{R}$ دارای جواب است.

پاسخ. می‌خواهیم که

$$f(x) = e^x x - ۱ = ۰$$

$f(x)$ یک تابع پیوسته است.

$$f(۰) = -۱$$

$$f(۱) = e - ۱ > ۰$$

پس تابع f در بازه‌ی $[۰, ۱]$ تعریف شده است و پیوسته است و $f(۰) < ۰$ ، $f(۱) > ۰$. پس

$$\exists x \in [۰, ۱] \quad f(x) = ۰.$$

$$\exists x \in [۰, ۱] \quad e^x x - ۱ = ۰ \Rightarrow e^x x = ۱$$

□

مثال ۱۳۹. نشان دهید معادله‌ی $e^x = \frac{۱}{x^{۲}}$ در $\mathbb{R}$ دارای جواب است

قضیه ۱۴۰ (مقدار میانی)**.** اگر $f(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) < f(b)$، آنگاه برای هر $k \in [f(a), f(b)]$ عنصر $x_{۰} \in [a, b]$ موجود است به به طوری که $f(x_{۰}) = k$.

اثبات. قرار دهید:

$$g(x) = f(x) - k.$$

داریم

$$g(a) < ۰$$

و

$$g(b) > ۰.$$

پس بنا به قضیه‌ی بولتسانو داریم

$$\exists x \in [a,b]$$

$$g(x) = ۰$$

یعنی

$$\exists x \in [a,b] \quad f(x) = k.$$

$\square$

۱۲ جلسه‌ی دوازدهم

در ریاضیات مقدماتی با تابع توان آشنا شده‌ایم. وقتی n یک عدد طبیعی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ بار}}$$

هدف ما در ادامه‌ی این درس، تعریف تعریف x^r است برای هر $x > ۰$ و هر عدد **دلخواهِ** $r \in \mathbb{R}$.
تعمیم توان به اعدادِ گویا کار ساده‌ای است:

مثال ۱۴۱. فرض کنید که $a > ۰$؛ ، نشان دهید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ عدد $b > ۰$ چنان موجود است که

$$b^n = a$$

(پس می‌توانیم $a^{\frac{۱}{n}}$ را برابر با عدد b در این مثال تعریف کنیم).

پاسخ. تابع $f(x) = x^n - a$ را در نظر بگیرید. نخست فرض کنید $a > ۱$.

$$f(۱) = ۱ - a < ۰$$

$$f(a) = a^n - a > ۰$$

بنا به قضیه‌ی بولتسانو

$$\exists x \in [۰, a] \quad f(x) = ۰ \Rightarrow x^n = a$$

حال اگر $a < ۱$، داریم

$$f(۱) = ۱ - a > ۰$$

$$f(a) = a^n - a < ۰$$

پس دوباره بنا به قضیه‌ی بولتسانو

$$\exists x \in [۰, a] \quad f(x) = ۰ \Rightarrow x^n = a$$

□

توجه ۱۴۲. حال که $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف کرده‌ایم، $a^{\frac{m}{n}}$ نیز به آسانی قابل تعریف است:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$$

برای رسیدن به هدف مورد نظر، یعنی تعریفِ a^r برای تمامِ r های حقیقی نیازمند طی کردن مسیر زیر هستیم.

مثال ۱۴۳. نشان دهید که تابع

$$e : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

بازه‌ی $(0, \infty)$ را می‌پوشاند. یعنی

$$\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$$

به بیان دیگر

$$\forall y \in (0, \infty) \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad e^x = y.$$

پاسخ. عدد دلخواه $b \in (0, \infty)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم معادله‌ی $e^x - b = 0$ دارای جواب باشد.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

پس برای $x > 0$ داریم:

$$e^x > x$$

بنابراین $e^b > b$ یعنی

$$e^b - b > 0$$

از طرفی از آنجا که $b > 0$ داریم $\frac{1}{b} > 0$ پس

$$e^{\frac{1}{b}} > \frac{1}{b}$$

پس

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{b}}} < b$$

یعنی

$$e^{-\frac{1}{b}} < b$$

یعنی

$$e^{-\frac{1}{b}} - b < ۰$$

قرار دهید : $f(x) = e^x - b$ بنا بر آنچه گفته شد داریم

$$f(b) > ۰$$

$$f(-\frac{۱}{b}) < ۰$$

و f تابعی پیوسته است بنابراین

$$\exists x \in (-\frac{۱}{b}, b) \quad f(x) = ۰ \Rightarrow e^x = b$$

پس ثابت کردیم که e^x پوشاست. $\square$

توجه ۱۴۴. در مثال بالا گفتیم که بازه‌ی $(۰, \infty)$ دقیقاً برابر است با

$$\{e^x | x \in \mathbb{R}\}.$$

توجه کنید که عدد x به دست آمده در مثال بالا یکتاست. زیرا تابع e^x اکیداً صعودی و از این رو یک به یک است. پس اگر $y = e^{x_۱}$ آنگاه اگر $x_۱ \neq x_۲$ دو حالت داریم. اگر $x_۱ > x_۲$ آنگاه $y = e^{x_۱} > e^{x_۲}$ و اگر $x_۱ < x_۲$ آنگاه $y = e^{x_۱} < e^{x_۲}$.

نتیجه ۱۴۵ (یک نتیجه از قضیه‌ی مقدار میانی)**.** فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و I یک بازه باشد؛ یعنی به یکی از صورتهای زیر باشد:

$$I = [a, b], \quad I = (-\infty, a], \quad I = [a, +\infty), \quad I = (-\infty, \infty)$$

در اینصورت $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ نیز یک بازه است.

برای اثبات این گفته، دقت کنید که هرگاه $f(d)$ و $f(c)$ دو نقطه در $f(I)$ باشند و $f(c) < f(d)$ آنگاه بنا به قضیه‌ی مقدار میانی تمام بازه‌ی $(f(c), f(d))$ در $f(I)$ واقع می‌شود.

توجه ۱۴۶. ادعّا نکرده‌ایم که هر تابع پیوسته یک به یک است.

لم ۱۴۷. فرض کنید تابع $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و یک به یک باشد و I یک بازه باشد و $J = f(I)$، و به علاوه تابعِ f در I یا اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد،[7] آنگاه

(آ) $f^{-1} : J \to I$ در تمام J پیوسته است.

اثبات. فرض کنید $c \in J$. داریم

$$\exists x_0 \in I \quad c = f(x_0)$$

فرض کنید (c_n) دنباله‌ای از اعضای J باشد به طوری که $\{c_n\} \to c$. باید نشان دهیم که دنباله‌ی $\{f^{-1}(c_i)\} \to x_0$. فرض کنیم $c_i = f(t_i)$. باید نشان دهیم که دنباله‌ی t_i به x_0 میل می‌کند.

اگر t_i به x_0 میل نکند، یک $\epsilon > 0$ موجود است به طوری که

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad |t_n - x_0| > \epsilon$$

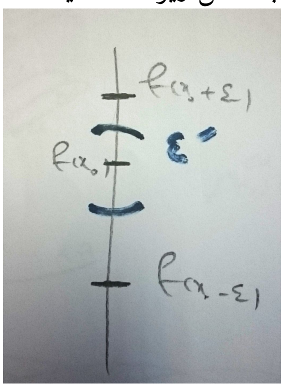
یعنی

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad [t_n > x_0 + \epsilon \quad \text{یا} \quad t_n < x_0 - \epsilon]$$

حال اگر تابعِ f صعودی باشد داریم

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad [f(t_n) > f(x_0 + \epsilon) \quad \text{یا} \quad f(t_n) < f(x_0 - \epsilon)]$$

به شکل زیر نگاه کنید:



[7] توجه: شرط اکیداً صعودی با اکیداً نزولی بودن تابع، در صورتی که I یک بازه‌ی محدودِ بسته به صورت $[a, b]$ باشد لازم نیست. در اینجا چون بازه‌های نامحدود هم در نظر گرفته شده است، به این شرط نیاز داریم.

همان طور که در شکل بالا مشخص است، از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که دنباله‌ی $f(t_n)$ هیچگاه نمی‌تواند به اندازه‌ی ϵ' به $f(x_\circ)$ نزدیک شود، و این تناقض است. بحث در حالتی که تابع مورد نظر نزولی باشد نیز، مشابه است. $\square$

(ب) اگر f اکیداً صعودی باشد آنگاه f^{-1} اکیداً صعودی است.

اثبات. اگر f صعودی باشد داریم

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

حال اگر

$$f(x) < f(y)$$

دو مقدار در J باشند، حتما باید داشته باشیم $x < y$. زیرا در غیر این صورت یا $x > y$ یا $x = y$. اگر $x > y$ از آنجا که تابع صعودی است خواهیم داشت $f(x) > f(y)$. اگر $x = y$ از آنجا که تابع یک به یک است خواهیم داشت $f(x) = f(y)$. $\square$

توجه ۱۴۸. گفتیم که تابع $\exp : \mathbb{R} \to (\circ, \infty)$ اکیداً صعودی است. (از این رو یک به یک است.) همچنین گفتیم که

$$\exp(\mathbb{R}) = \{e^x | x \in \mathbb{R}\} = (\circ, \infty)$$

پس تابع وارون exp نیز پیوسته و اکیداً صعودی است. آن را با ln نمایش می‌دهیم.

$$\ln : (\circ, \infty) \to \mathbb{R}$$

پیوسته، اکیداً صعودی، یک به یک

ویژگی‌های تابع ln

.۱

$$\forall x \in (\circ, \infty) \quad e^{\ln x} = x$$

توجه کنید که دامنه‌ی این تابع، بازه‌ی $(\circ, +\infty)$ است.

.۲

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$$

.۳

$$\forall a, b \in (۰, \infty) \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\exists x \quad a = e^x$$

$$\exists y \quad b = e^y$$

$$ab = e^x e^y$$

$$\ln(ab) = \ln(e^{x+y}) = x + y = \ln(a) + \ln(b)$$

.۴

$$\forall a \in (۰, \infty) \quad \ln(\frac{۱}{a}) = -\ln(a)$$

.۵

$$\forall a \in (۰, \infty) \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \ln(a^r) = r \ln a$$

.۶

$$\forall x \in (۰, ۱) \quad \ln(x) < \ln(۱) = ۰$$

(زیرا ln اکیداً صعودی است.)

.۷

$$\forall x > ۱ \quad \ln x > ۰$$

.۸

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = \lim_{e^t \to +\infty} \ln(e^t) = \lim_{t \to +\infty} \ln(e^t) = \lim_{t \to +\infty} t = +\infty$$

.۹

$$\lim_{x \to ۰^+} \ln x = \lim_{t \to -\infty} \ln(e^t) = \lim_{t \to -\infty} t = -\infty$$

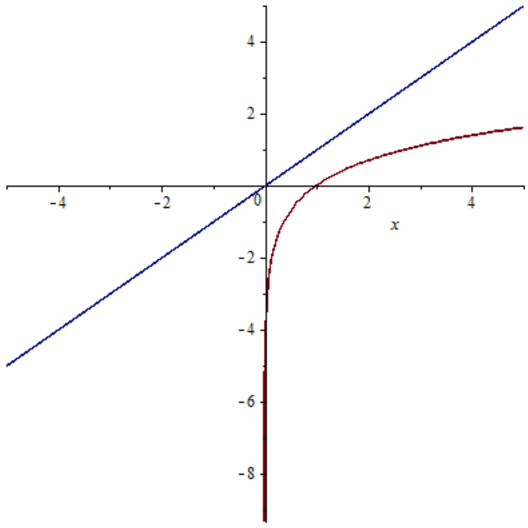
.۱۰

$$\forall x \in (۰, \infty) \quad x > \ln x$$

زیرا:

$$x < \ln x \Rightarrow e^x < x$$ ⚠

نمودار تابع $\ln(x)$ به صورت زیر است:



در بالا با رنگ آبی نمودارِ $y = x$ را مشخص کرده‌ایم.

مثال ۱۴۹. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ نشان دهید که

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$$

پاسخ.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(e^t)}{e^{nt}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{nt}} = ۰$$

□

مثال ۱۵۰. ثابت کنید

$$\lim_{x \to ۰^+} x^n \ln x = ۰$$

پاسخ.

$$\lim_{x \to ۰^+} x^n \ln x = \lim_{t \to -\infty} e^{tn} \ln e^t \overset{u=-t}{=} \lim_{u \to \infty} e^{-nu} \ln e^{-u} = \lim_{u \to \infty} \ln \frac{-u}{e^{nu}} = ۰$$

$\square$

بالاخره به جائی رسیدیم که تابع توان را برای تمام توانهای حقیقی تعریف کنیم. فرض کنید $a > ۰$ و $r \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم.

$$a^r = e^{r \ln a}$$

مثلاً

$$۲^{\sqrt{۲}} = e^{\sqrt{۲} \ln ۲}$$

در مورد این تابع در جلسه‌ی بعد مفصلاً صحبت خواهیم کرد.

مثال ۱۵۱. نشان دهید که

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad ۲^x + ۳^x = x^۲ + x^۳$$

پاسخ. دقت کنید که

$$x = ۲ \to ۲^۲ + ۳^۲ > ۲^۲ + ۲^۳$$

$$x = ۳ \to ۲^۳ + ۳^۳ < ۳^۲ + ۳^۳$$

قرار دهید

$$f(x) = ۲^x + ۳^x - x^۲ - x^۳$$

داریم

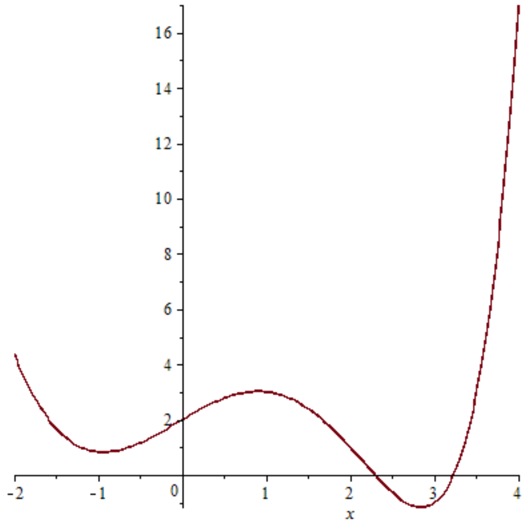
$$f(۲) > ۰$$

$$f(۳) < ۰$$

حال از آنجا که تابع f پیوسته است بنا به قضیه‌ی بولتسانو داریم:

$$\Rightarrow \exists x \in [۲, ۳] \quad f(x) = ۰$$

نمودار تابع f به صورت زیر است:



$$f(x) = ۲^x + ۳^x - x^۲ - x^۳$$ □

۱۳ جلسه‌ی سیزدهم

در انتهای جلسه‌ی قبل، تابع x^r را برای r های حقیقی به صورت زیر تعریف کردیم:

تعریف ۱۵۲. اگر $a > ۰$ آنگاه برای $r \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$a^r := e^{r \ln a}$$

توجه کنید که در تعریف بالا شرط $a > ۰$ را دامنه‌ی تابعِ ln ایجاب کرده است.

ویژگی‌های تابع توان

۱. اگر $r \in \mathbb{N}$ آن‌گاه

$$a^r = e^{r \ln a} = e^{\ln(\overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{r \text{ بار}})} = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{r \text{ بار}}$$

یعنی تابع توان، تعمیم همان تابع توانی است که در ریاضیات مقدماتی فراگرفته‌ایم.

۲. به طور مشابه

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

توجه کنید که $\sqrt[n]{a}$ را در جلسات قبل، با استفاده از قضیه‌ی بولتسانو تعریف کرده‌ایم.

۳.

$$\forall r_۱, r_۲ \in \mathbb{R} \quad a^{r_۱ + r_۲} = a^{r_۱} a^{r_۲}$$

اثبات:

$$e^{(r_۱ + r_۲) \ln a} = e^{r_۱ \ln a + r_۲ \ln a} = e^{r_۱ \ln a} e^{r_۲ \ln a} = a^{r_۱} a^{r_۲}$$

۴.

$$\forall r_۱, r_۲ \in \mathbb{R} \quad (a^{r_۱})^{r_۲} = a^{r_۱ r_۲}$$

۵.

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad a^{-r} = e^{-r \ln a} = e^{\frac{۱}{r \ln a}} = \frac{۱}{a^r}$$

۶. تابع $a^x = e^{x \ln a}$ که در آن $a > ۰$، در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته است (زیرا ترکیب دو تابعِ پیوسته‌ی $x \ln a$ و e^x است).

۷. اگر $a > ۱$ آنگاه

$$\ln a > ۰$$

پس اگر $x_۱ > x_۲$ آنگاه

$$x_۱ \ln a > x_۲ \ln a$$

از آنجا که e تابعی صعودی است داریم:

$$e^{x_۱ \ln a} > e^{x_۲ \ln a}$$

یعنی

$$a^{x_۱} > a^{x_۲}$$

پس ثابت کردیم که اگر $a > ۱$ آنگاه a^x صعودی است.

۸. اگر $a < ۱$ آنگاه

$$\ln a < ۰$$

اگر $x_۱ < x_۲$ آنگاه

$$x_۱ \ln a > x_۲ \ln a$$

پس

$$e^{x_۱ \ln a} > e^{x_۲ \ln a}$$

پس

$$a^{x_۱} > a^{x_۲}$$

یعنی در این صورت تابع a^x نزولی است.

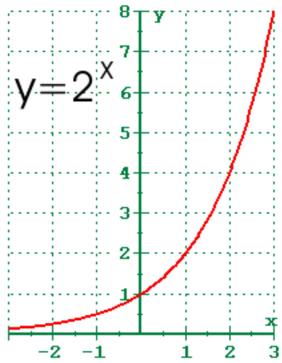
۹.

$$۱^x = e^{x \ln ۱} = e^۰ = ۱$$

۱۰. اگر $a > 1$ ، آنگاه

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = +\infty$$

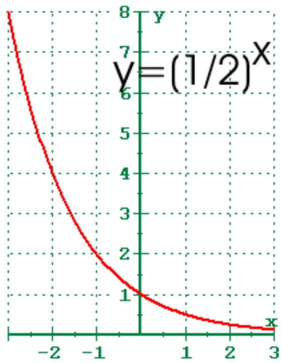
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = 0$$



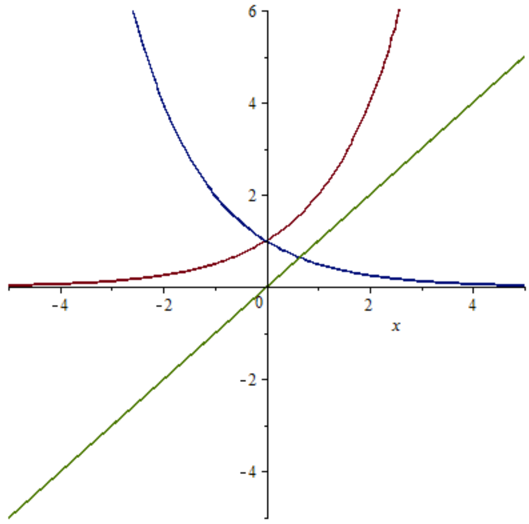
اگر $0 < a < 1$ آنگاه

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$



در زیر توابعِ x, $(\frac{1}{2})^x$, 2^x را کشیده‌ایم:



مثال ۱۵۳. نشان دهید که تابع زیر در سرتاسر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$$

پاسخ.

$$f(x) = \begin{cases} x^x & x > ۰ \\ (-x)^x & x < ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$$

تابعِ f در بازه‌ی $(۰, +\infty)$ تابع پیوسته است. زیرا $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$ و توابع $\ln x$ و $x \ln x$ پیوسته هستند. پس $e^{x \ln x}$ هم پیوسته است. به طور مشابه تابع f در $(-\infty, ۰)$ پیوسته است (تحقیق کنید). حال

$$\lim_{x \to ۰^+} x^x = \lim_{x \to ۰^+} e^{x \ln x}$$

با استفاده از تغییر متغیر $x = e^t$ داریم:

$$\lim_{x \to ۰^+} x \ln x = \lim_{t \to -\infty} e^t \ln(e^t) = \lim_{t \to -\infty} e^t t$$

بار دیگر از تغییر متغیر $t = -u$ استفاده می‌کنیم. پس

$$\lim_{t \to -\infty} e^t t = \lim_{u \to +\infty} e^{-u}(-u) = \lim_{u \to +\infty} \frac{۱}{e^u}(-u) = ۰$$

پس

$$\lim_{x\to ۰} x^x = e^۰ = ۱$$

به طور مشابه ثابت کنید که

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۱$$

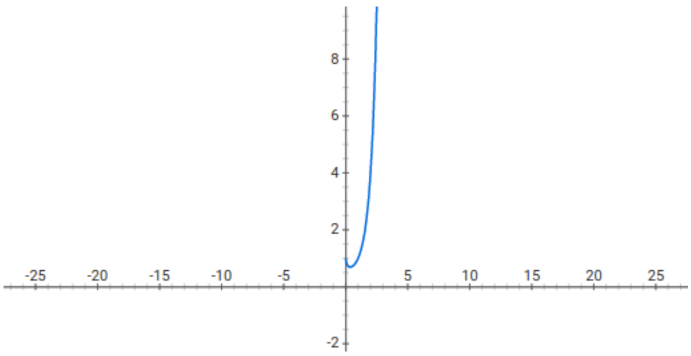
و از آن نتیجه بگیرید که تابعِ f در همه‌ی نقاط پیوسته است. □

بررسی تابعِ x^x

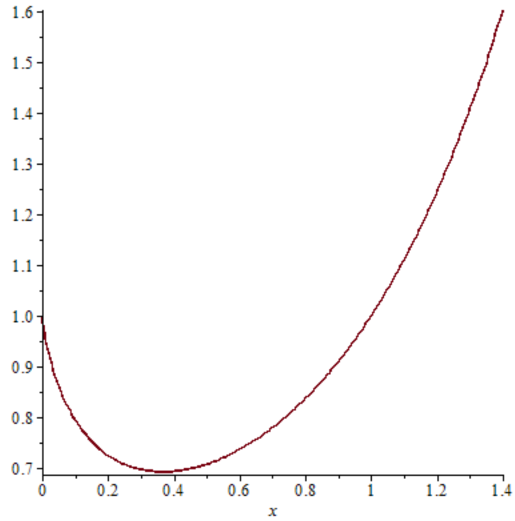
دامنه‌تابع برابر است با $\{x \in \mathbb{R} : x > ۰\}$.

$$\lim_{x\to +\infty} x^x = +\infty$$

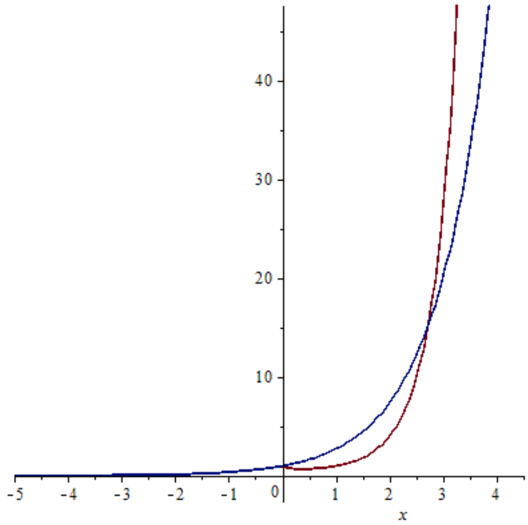
$$\lim_{x\to ۰^+} x^x = ۱$$



در زیر تابعِ x^x را از نزدیک نشان داده‌ایم:



در زیر تابعِ x^x و تابع e^x را در یک شکل نمایش داده‌ایم. توجه کنید که دو نمودار در نقطه‌ی $x = e$ با هم تقاطع دارند.



توجه ۱۵۴. گفتیم که تابع a^x اگر $۱ < a$ اکیداً صعودی است و اگر $a < ۱$ اکیداً نزولی است. تابع مورد نظر پیوسته است. بنابراین تابع معکوسِ نیز قابل تعریف و پیوسته است که آن را با $\log_a^x$ نمایش می‌دهیم.

$$a > ۱ \leftarrow \log_a^x \text{ صعودی}$$

$$a < ۱ \leftarrow \log_a^x \text{ نزولی}$$

از آنجا که $\log_a^x$ معکوس a^x است، پس

$$a^{\log_a^x} = x$$

زیرا همواره داریم:

$$f \circ f^{-۱} = x$$

همچنین

$$\log_a^{a^x} = x$$

زیرا همواره داریم:

$$f^{-۱} \circ f = x$$

همچنین توجه کنید که دامنه‌ی $\log_a^x$ (و نیز بُردِ a^x) تمامِ x های بزرگتر از صفر است.

توجه ۱۵۵.

$$\log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

اثبات. کافی است ثابت کنیم که

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = x$$

زیرا معکوس یک تابع در صورت وجود یکتاست. داریم:

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\frac{\ln x}{\ln a}\ln a} = e^{\ln x} = x.$$

□

تمرین ۱۵۶. نمودار $\log_a^x$ را در حالات مختلف رسم کنید.

مثال ۱۵۷. نشان دهید

$$\exists x \in (۰, +\infty) \quad \ln x = \frac{x}{۱ + x^۲}$$

پاسخ. قرار دهید:

$$f(x) = \ln x - \frac{x}{۱ + x^۲}$$

$$f(۱) = -\frac{۱}{۲} < ۰$$

$$f(e) = ۱ - \frac{e}{۱ + e^۲} > ۰$$

پس بنا به قضیه‌ی بولتسانو، تابع مورد نظر در بازه‌ی $[۱, e]$ حداقل یک بار صفر می‌شود. $\square$

توجه ۱۵۸. اگر

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

آنگاه

$$\forall N \quad \exists M \quad x > M \quad f(x) > N$$

یعنی از جایی به بعد تابع از هر N بزرگتر و به ویژه مثبت است. از این نکته در زیر به همراه قضیه‌ی بولتسانو استفاده شده است.

مثال ۱۵۹. هر چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد در $\mathbb{R}$ ریشه دارد.

پاسخ. فرض کنیم $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد باشد. ثابت کنید که

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

پس بنا بر آنچه در بالا گفته‌ایم $f(x)$ از جایی به بعد مثبت است. همچنین ثابت کنید که

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

یعنی f از جایی به قبل کمتر از صفر است. بنا به قضیه‌ی بولتسانو

$$\exists x \quad f(x) = ۰$$

$\square$

گفته‌ی بالا در مورد چندجمله‌های با درجه‌ی زوج درست نیست. مثلاً چندجمله‌ای زیر در $\mathbb{R}$ هیچ ریشه‌ای ندارد.

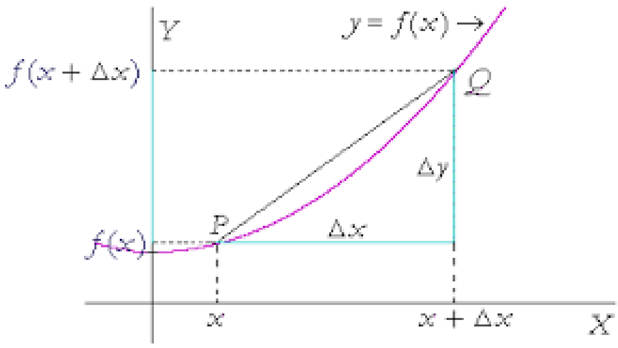
$$x^۲ + ۱ = ۰$$

تعمیم ۱۶۰. هر چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد پوشاست.

مشتق و کاربردهای آن

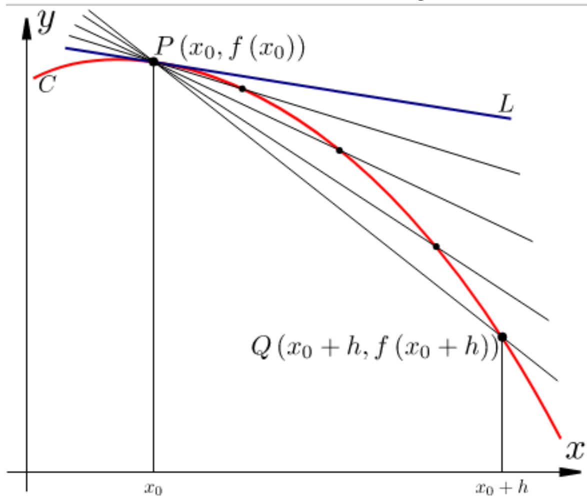
مطالعه‌ی مشتق، یعنی مطالعه‌ی تغییرات یک متغیر بر حسب تغییرات بی‌نهایت کوچک یک متغیر دیگر. همان گونه که تا کنون یاد گرفته‌ایم، در حساب هرگاه سخن از بی‌نهایت کوچک یا بی‌نهایت بزرگ شود، منظور حد گرفتن است. مفهوم مشتق، معادل مفهوم سرعت لحظه‌ای در فیزیک است.

در شکل زیر شیب خط PQ به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\text{شیب خط } PQ : \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

حال اگر Q روی منحنی حرکت کند و بی‌نهایت به P نزدیک شود، یعنی اگر Δx به صفر میل کند، شیب خط PQ میل می‌کند به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی x:



$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \overset{\text{لایبنیتز}}{=} \frac{dy}{dx}$$

تعریف ۱۶۱. فرض کنید تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی x_0 تعریف شده باشد. این تابع را در x_0 مشتق‌پذیر می‌خوانیم هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

اگر حد بالا موجود باشد آن را با $f'(x_0)$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

می‌گوییم تابع f در بازه‌ی I مشتق‌پذیر است، هرگاه در تمام نقاط این بازه مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، f' نیز روی بازه‌ی I، یک تابع است:

$$x\in I\to f'(x)$$

مثال ۱۶۲. مشتق تابع $f(x)=x^n$ را در هر x_0 بیابید.

پاسخ.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$$

یادآوری ۱۶۳.

$$a^n-b^n=(a-b)(\underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}}_{\sum_{i+j=n-1}a^ib^j})$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+x^{n-3}x_0^2+\ldots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1})}{x-x_0}=$$

$$\underbrace{x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\ldots+x_0^{n-1}}_{\text{بار } n}=nx_0^{n-1}$$

□

مثال ۱۶۴. مشتق $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ را در بازه‌ی $(0,\infty)$ محاسبه کنید.

اثبات.

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{x^{\frac{1}{n}}-x_\circ^{\frac{1}{n}}}{x-x_\circ}$$

$$x-x_\circ=(x^{\frac{1}{n}})^n-(x_\circ^{\frac{1}{n}})^n=(x^{\frac{1}{n}}-x_\circ^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}x_\circ^{\frac{1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}x_\circ^{\frac{n-2}{n}}+x_\circ^{\frac{n-1}{n}})$$

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{x^{\frac{1}{n}}-x_\circ^{\frac{1}{n}}}{x-x_\circ}=\lim_{x\to x_\circ}\frac{x^{\frac{1}{n}}-x_\circ^{\frac{1}{n}}}{(x^{\frac{1}{n}}-x_\circ^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}x_\circ^{\frac{1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}x_\circ^{\frac{n-2}{n}}+x_\circ^{\frac{n-1}{n}})}=$$

$$\frac{1}{nx_\circ^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{nx_\circ^{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n}x_\circ^{\frac{1}{n}-1}$$

□

مثال ۱۶۵. مشتق تابع e^x را در $x_\circ=0$ بیابید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

$$e^x-1=x(1+\underbrace{\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots}_{A})$$

$$A=x(\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\ldots)$$

توجه کنید که مقدار عبارتِ

$$(\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\ldots)$$

در $x=1$ برابر می‌شود با $e-2$. پس اگر $|x|\leq 1$ آن گاه داریم

$$0\leqslant |A|\leqslant |x|(e-2)$$

پس

$$\lim_{x\to 0}A=0$$

و

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1+\lim_{x\to 0}A=1$$

پس اگر $f(x)=e^x$ آنگاه

$$f'(0)=1=e^0$$

۱۴ جلسه‌ی چهاردهم

مثال ۱۶۶. نشان دهید که تابع e^x در نقطه‌ی ۰ مشتق‌پذیر است.

پاسخ.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{e^x - e^۰}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{e^x - ۱}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\cancel{x}(۱ + \frac{x}{۲!} + \frac{x^۲}{۳!} + \dots)}{\cancel{x}}$$

اگر

$$A = \frac{x}{۲!} + \frac{x^۲}{۳!} + \dots$$

آنگاه اگر $|x| < ۱$ داریم

$$۰ \leqslant |A| \leqslant |x| \overbrace{(e - ۲)}^{\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\dots} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} |A| = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} A = ۰$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to ۰} ۱ + \frac{x}{۲!} + \frac{x^۲}{۳!} + \dots = \lim_{x\to ۰} ۱ + A = ۱$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{e^x - ۱}{x} = ۱ = e^۰$$

□

مثال ۱۶۷. نشان دهید که $\exp$ در سرتاسر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

پاسخ. فرض کنید که $x_۰ \in \mathbb{R}$ نقطه‌ای دلخواه باشد. داریم:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{e^{x_۰+h} - e^{x_۰}}{h} = \lim_{h\to ۰} e^{x_۰} (\underbrace{\lim_{h\to ۰} \frac{e^h - ۱}{h}}_{\exp'(۰)=۱=e^۰}) = e^{x_۰}$$

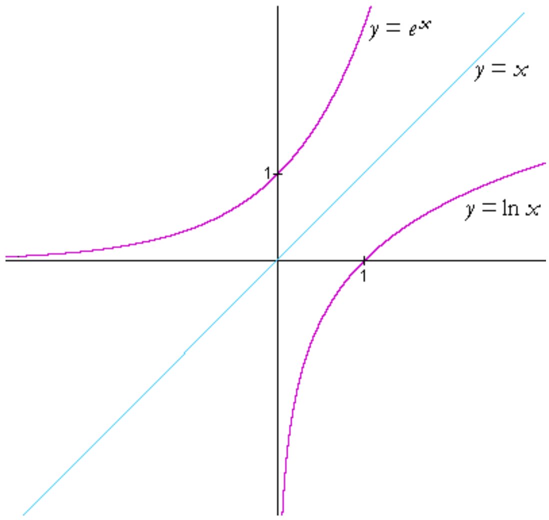
بنابراین اگر $f(x) = e^{x_۰}$ آنگاه

$$f'(x_۰) = e^{x_۰}$$

□

مثال ۱۶۸. نشان دهید که تابع $\ln x$ در نقطه‌ی $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.

پاسخ.



$$\lim_{x\to ۱} \frac{\ln x - \ln ۱}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{\ln x}{x - ۱}$$

از تغییر متغیر $x = e^t$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{t\to ۰} \frac{\ln e^t}{e^t - ۱} = \lim_{t\to ۰} \frac{t}{e^t - ۱} = \lim_{t\to ۰} \frac{۱}{\frac{e^t - ۱}{t}} = \frac{۱}{\exp'(۰)} = \frac{۱}{e^۰} = ۱$$

پس مشتق $\ln x$ در $x = ۱$ برابر است با ۱ . □

مثال ۱۶۹. نشان دهید که $\ln x$ در دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است.

پاسخ. فرض کنید $x_۰ \in (۰, \infty)$، داریم:

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{\ln x - \ln x_۰}{x - x_۰} = \lim_{x\to x_۰} \frac{\ln \frac{x}{x_۰}}{x - x_۰} = \lim_{x\to x_۰} \frac{\ln \frac{x}{x_۰}}{x_۰(\frac{x}{x_۰} - ۱)}$$

از تغییر متغیر $\frac{x}{x_۰} = t$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{t\to ۱} \frac{\ln t}{x_۰(t - ۱)} = \frac{۱}{x_۰}\underbrace{(\ln'(۱))}_{=۱} = \frac{۱}{x_۰}$$

توجه کنید که در بالا $\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{(t-1)}$ همان مشتق تابع $\ln$ در نقطه‌ی ۱ است. پس تابع $\ln x$ در تمام دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(\ln(x))'(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$(e^x)'(x_0) = e^{x_0}$$

□

مثال ۱۷۰. نشان دهید که $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

پاسخ. داریم:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}} = e^{\ln'(1)} = e^1$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.$$

□

توجه ۱۷۱. بنا به مثال قبل، حد دنباله‌ی $(1+\frac{1}{n})^n$ نیز برابر با e است.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

سری توان

گفتیم که اگر $|x| < 1$ آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

سمت راست عبارت بالا، یک تابعِ آشناست و سمت چپ آن یک سری همگراست. در واقع تابعِ $\frac{1}{1-x}$ در بازه‌ی $(-1, 1)$ دارای نمایش بالا به صورت یک سری است. به توابعی که در یک دامنه‌ی مشخص، دارای نمایشی به صورت یک سری توانی هستند، **توابع تحلیلی** گفته می‌شود. برای مشتقگیری و انتگرائي از این توابع، کافی است از تک‌تک جملات سری مربوط بدانها مشتق یا انتگرال بگیریم. در

زیر با سریهای توان آشنا می‌شویم که می‌توان هر یک از آنها را سریِ مربوط به تابعی تحلیلی در نظر گرفت.

فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله باشد. به عبارت زیر یک **سری توان** می‌گوییم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-x_۰)^n$$

به عبارت بالا یک سری توان با ضرایب a_n حول نقطه‌ی $x=x_۰$ می‌گوییم.

مثال ۱۷۲. عبارت زیر یک سری توان است:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} x^n$$

در سری بالا داریم $\{a_n\}=\{۱\}$.

مثال ۱۷۳. عبارت زیر یک سری توان است:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{۲n!}$$

در واقع سری بالا را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$$

که در آن

$$a_n=\begin{cases} ۱ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ ۰ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

اگر یک سری توان در یک نقطه‌ی $c>۰$ همگرا باشد، آنگاه در تمام نقاط متعلق به بازه‌ی بازِ $(-c,c)$ همگراست. این گفته را در قضیه‌ی زیر ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۱۷۴. اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ برای یک مقدارِ $x=c$ همگرا باشد، آنگاه برای هر x که $|x|<|c|$ مطلقاً همگراست.

اثبات. فرض کنید $|x| < |c|$ آنگاه

$$\frac{|x|}{|c|} < ۱$$

پس سری هندسیِ $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{|x|^n}{|c|^n}$ همگراست.

هدف. نشان دادن این که $\sum_{n=۰}^{\infty} |a_n||x|^n$ همگراست.

می‌دانیم که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n c^n$ همگراست. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} a_n c^n = ۰$$

یعنی برای عددِ دلخواه ϵ عددِ به اندازه‌ی کافی بزرگِ $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$\forall n > N \quad |a_n c^n| < \epsilon$$

به بیان دیگر

$$\forall n > N \quad |a_n| < \frac{\epsilon}{c^n}$$

پس داریم

$$\sum_{N}^{\infty} |a_n||x^n| \leqslant \sum_{N}^{\infty} \frac{\epsilon |x|^n}{|c|^n}$$

سری $\sum_{N}^{\infty} \frac{\epsilon|x|^n}{|c|^n}$ بنا بر آنچه در ابتدای اثبات گفتیم همگراست، درنتیجه $\sum_{N}^{\infty} |a_n||x^n|$ نیز همگراست.

بنابراین سری $\sum_{n=۰}^{\infty} |a_n||x^n|$ نیز همگراست. □

پس اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توان باشد، می‌توان آن را یک تابع دانست:

نتیجه ۱۷۵. اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توان باشد، آنگاه می‌توان تابع $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ را در نظر گرفت که دامنه‌ی آن، که آن را با D نشان می‌دهیم، به یکی از صورت‌های زیر است.

(آ) $D = \mathbb{R}$ یا

(ب) $D = \{۰\}$ یا

(ج) عدد $R \in \mathbb{R}$ موجود است به طوری که

$$\{x| \quad |x| < R\} \subseteq D \subseteq \{x| \quad |x| \leqslant R\}$$

به بیان دیگر

$$D=[-R,R] \quad \text{یا} \quad D=(-R,R] \quad \text{یا} \quad D=(-R,R) \quad \text{یا} \quad D=[-R,R)$$

راهنمائی برای اثبات. مشخص است که D همواره شامل صفر است. در قضیه‌ی قبل گفتیم که اگر $x \in D$ و $x > ۰$ آنگاه D شامل تمام نقاط بازه‌ی $(-x,x]$ است، اما این که D شاملِ $-x$ باشد یا نه مشخص نیست. به طور مشابه برای وقتی که x منفی باشد بحث کنید. $\square$

در زیر روشی برای تعیین دامنه‌ی D ارائه کرده‌ایم: فرض کنید سری توان $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ داده شده باشد. برای تعیین دامنه‌ی همگرایی این سری، D، به صورت زیر عمل می‌کنیم:
آزمون مقایسه را در نظر بگیرید:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \underbrace{|a_n||x|^n}_{b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+۱}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+۱}||x|^{n+۱}}{|a_n||x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+۱}||x|}{|a_n|}$$

(آ) فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = L > ۰$$

آنگاه اگر $|x| < \frac{۱}{L}$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+۱}}{b_n} < ۱$ و بنا به آزمون نسبت، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ همگرا(ی مطلق) است. همچنین اگر $|x| > \frac{۱}{L}$ سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ واگراست. در $|x| = \frac{۱}{L}$ باید به صورت دستی بررسی کنیم.

(ب) اگر $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = \infty$ سری مورد نظر تنها در $x = ۰$ همگراست.

(ج) اگر $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = ۰$ آنگاه سری مورد نظر در همه‌ی $x \in \mathbb{R}$ همگراست.

بنا به آنچه در بالا گفته شد برای تعیین دامنه‌ی همگرائیِ سری توانِ $\sum a_n x^n$ کافی است $\lim a_{n+۱}/a_n$ را محاسبه کنیم.

مثال ۱۷۶. دامنه‌ی همگرایی تابع (یا سری توانی) زیر را تعیین کنید.

(آ)

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} x^n$$

پاسخ. ضریب x^n برابر است با:

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

پس دامنه‌ی همگرایی، بنا به قضیه‌ی قبل شامل بازه‌ی $(-1, 1)$ است و نیز در $(1, \infty)$ و $(-\infty, -1)$ سری فوق واگراست. باید نقاط $x = -1$ و $x = 1$ را نیز بررسی کنیم.

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

این سری همگراست.

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

این سری نیز همگراست. پس دامنه‌ی همگرایی سری مورد نظر ما دقیقاً برابر است با $D = [-1, 1]$.
□

(ب)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

پاسخ. ضریب x^n برابر است با:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

بنا به آزمون مقایسه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

پس $D \supseteq (-1, 1)$. بررسی نقاط -1 و 1 :

$$x = -1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

سری فوق همگراست.

$$x = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

سری فوق واگراست. پس دامنه‌ی همگرایی تابع برابر است با $D = [-1, 1)$ □

(ج)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{(۲n)!}$$

پاسخ. با استفاده از تغییر متغیر $t = x^۲$ داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{t^n}{(۲n)!}$$

و می‌خواهیم این سری را بررسی می‌کنیم.

$$a_n = \frac{۱}{(۲n)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{(۲n+۲)!}}{\frac{۱}{(۲n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(۲n)!}{(۲n+۲)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(۲n)!}}{(۲n+۲)(۲n+۱)\cancel{۲n!}} = ۰$$

پس $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{t^n}{(۲n)!}$ برای تمام مقادیر t همگراست. پس $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(x^۲)^n}{(۲n)!}$ هم برای تمام مقادیر x همگراست. □

(د)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}(۲x-۱)^n$$

پاسخ. قرار دهید: $t = ۲x - ۱$.

حال سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}t^n$ را بررسی می‌کنیم. مطابق دو مثال قبل دامنه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}t^n$ برابر است با $D = [-۱, ۱)$ پس باید داشته باشیم:

$$-۱ \leqslant ۲x - ۱ < ۱ \Rightarrow ۰ \leqslant x < ۱$$

در نتیجه دامنه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}(۲x-۱)^n$ برابر است با $D = [۰, ۱)$ □

اگر f یک تابع تحلیلی باشد، مشتق آن نیز یک تابع تحلیلی است:

قضیه ۱۷۷. اگر $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ برای $|x| < R$ آنگاه

$$\forall x \in (-R, R) \quad f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n a_n x^{n-۱}$$

توجه ۱۷۸. در قضیه‌ی بالا در واقع دو حکم داریم. نخست این که در بازه‌ی $(-R,R)$ سریِ $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ همگراست، و دوم این که این سری، تابعی را مشخص می‌کند که مشتق تابعی است که سری اول مشخص می‌کرد.

خلاصه‌ی درس:

$$(\ln(x))'(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$(e^x)'(x_0) = e^{x_0}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ برای $|x| < R$ آنگاه

$$\forall x \in (-R,R) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

فرض کنید سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ داده شده باشد.

(آ) اگر

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L > 0$$

آنگاه اگر $\frac{1}{L} > |x|$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ همگرا(ی مطلق) است. همچنین اگر $|x| > \frac{1}{L}$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ واگراست. در $|x| = \frac{1}{L}$ باید به صورت دستی بررسی کنیم.

(ب) اگر $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$ سری مورد نظر تنها در $x = 0$ همگراست.

(ج) اگر $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$ آنگاه سری مورد نظر در همه‌ی $x \in \mathbb{R}$ همگراست.

۱۵ جلسه‌ی پانزدهم

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی سریهای توان و دامنه‌ی همگرائی آنها صحبت کردیم. گفتیم که یک سری توانِ $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$، در بازه‌ی همگرائی خود، در واقع یک تابع است که مشتق آن، در همان بازه‌ی همگرائی (احیاناً غیر از نقاط انتهائی) برابر است با $\sum_{n=۱}^{\infty} n a_n x^{n-۱}$. در زیر با استفاده از این نکته، مشتق تابعِ e^x را محاسبه کرده‌ایم:

مثال ۱۷۹. فرض کنید $f(x) = e^x$ آنگاه

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

پس

$$f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n x^{n-۱}}{n!} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^{n-۱}}{(n-۱)!} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

فعلاً بحث سریهای توانی را رها می‌کنیم تا در جلسات بعدی دوباره بدانها بازگردیم.

ادامه‌ی درس مشتق

مثال ۱۸۰. مشتق تابع $f(x) = \sin x$ را در $x = ۰$ بیابید.

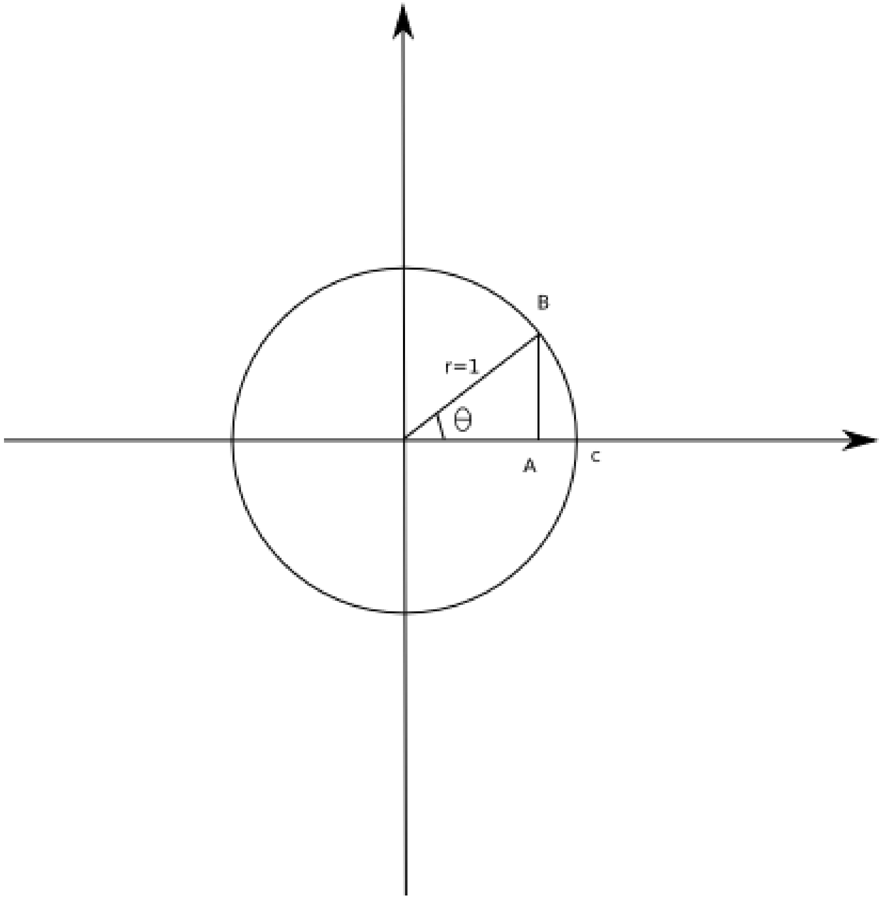
پاسخ. کافی است حاصل حدّ زیر را بیابیم.

$$\lim_{h \to ۰} \frac{\sin(۰ + h) - \sin ۰}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{\sin h}{h}$$

در زیر با روشی هندسی ثابت می‌کنیم که

$$\lim_{h \to ۰} \frac{\sin h}{h} = ۱.$$

فرض کنید $۰ \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{۲}$. دایره‌ی زیر را به شعاعِ $r = ۱$ در نظر بگیرید.



در این دایره، طول کمان رو به روی زاویه‌ی θ برابر است با:

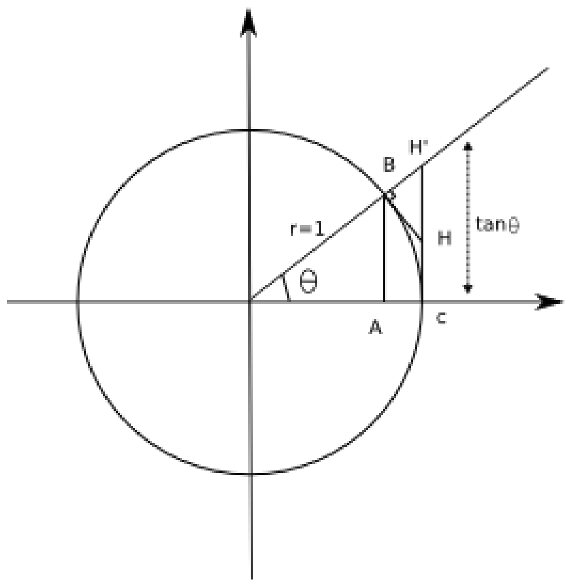
$$\theta = |\ \overset{\frown}{BC}\ |$$

به طور کلی، اگر شعاع یک دایره برابر با r باشد، محیط آن برابر است با $۲\pi r$. پس طول کمان رو به روی زاویه‌ی θ با نسبت‌گیری زیر به دست می‌آید و برابر است با $r\theta$:

$$\frac{\theta}{۲\pi} = \frac{x}{۲\pi r}.$$

دقت کنید که در شکل زیر، $|AB|$ برابر است با $\sin(\theta)$. پس داریم:

$$|AB| \leqslant |\ \overset{\frown}{BC}\ | \Rightarrow \sin\theta \leqslant \theta \quad (*)$$



$$|\widehat{BC}| \leqslant |CH| + |HB| \leqslant |CH| + |HH'| = \tan\theta$$

پس

$$\theta \leqslant \tan\theta$$

در نتیجه

$$\theta \leqslant \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود

$$\sin\theta \leqslant \theta \leqslant \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

در نتیجه

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin\theta} \geqslant \frac{۱}{\theta} \geqslant \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

طرفین را در $\sin\theta$ ضرب می‌کنیم (توجه کنید که در ناحیه‌ی مورد نظر ما $\sin\theta$ مثبت است):

$$\Rightarrow ۱ \geqslant \frac{\sin\theta}{\theta} \geqslant \cos\theta$$

بنا به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{\theta\to ۰^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = ۱$$

تابع sin یک تابع فرد است، پس همچنین داریم

$$\lim_{\theta\to ۰^-}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{-\theta\to ۰^+}\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\lim_{\theta\to ۰^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=۱$$

پس ثابت کردیم که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱.$$

□

مثال ۱۸۱. مشتق تابع $f(x)=\cos x$ را در نقطه‌ی $x=۰$ بیابید.

پاسخ.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\cos(۰+h)-\cos ۰}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos h-۱}{h}$$

داریم:

$$\cos h=\cos(\frac{h}{۲}+\frac{h}{۲})=\cos^۲\frac{h}{۲}-\sin^۲\frac{h}{۲}=۱-۲\sin^۲\frac{h}{۲}$$

پس

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\cos h-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱-۲\sin^۲\frac{h}{۲}-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲\sin\frac{h}{۲}}{h}\sin\frac{h}{۲}=۰$$

□

مثال ۱۸۲. مشتق تابع $\sin x$ را در نقطه‌ی دلخواه $x_۰\in\mathbb{R}$ بیابید.

پاسخ.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x_۰+h)-\sin x_۰}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x_۰\cos h+\cos x_۰\sin h-\sin x_۰}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x_۰.(\cos h-۱)}{h}+\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x_۰.(\sin h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\sin x_۰\cos'(۰)+\lim_{h\to ۰}\cos x_۰\times ۱=\cos x_۰$$

□

پس ثابت کردیم که تابعِ $\sin$ در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x$$

مثال ۱۸۳. مشتق تابع $f(x) = \cos x$ را در نقطه‌ی دلخواه $x_۰ \in \mathbb{R}$ محاسبه کنید.

اثبات.

$$\lim_{h\to ۰} \frac{\cos(x_۰ + h) - \cos x_۰}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{\cos x_۰ . \cos h - \sin x_۰ . \sin h - \cos x_۰}{h} =$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{\cos x_۰ . (\cos h - ۱)}{h} - \lim_{h\to ۰} \frac{\sin x_۰ . \sin h}{h} =$$

$$\cos x_۰ \times ۰ - \sin x_۰ \times ۱ = -\sin x_۰$$

□

پس ثابت کردیم که تابعِ $\cos x$ در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\cos x - ۱}{x} = ۰$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$$

هر تابع پیوسته لزوماً مشتق‌پذیر نیست ولی هر تابع مشتق‌پذیر، لزوماً پیوسته است:

مشاهده ۱۸۴. اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی $x_\circ$ تعریف شده باشد و در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع f در $x_\circ$ پیوسته است.

اثبات. از آنجا که تابع در $x_\circ$ مشتق پذیر است، داریم:

$$\exists L \quad \lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} = L \quad (*)$$

برای این که نشان دهیم که تابع مورد نظر ما در $x_\circ$ پیوسته است، باید نشان دهیم که $\lim_{h\to\circ} f(x_\circ+h)=f(x_\circ)$.
بنا به رابطه‌ی $(*)$ برای هر $\epsilon > \circ$ عنصر $\delta > \circ$ موجود است به طوری که

$$|h| < \delta \to L-\epsilon \leqslant \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} \leqslant L+\epsilon$$

بنابراین اگر $|h| < \delta$ آنگاه

$$h(L-\epsilon) \leqslant f(x_\circ+h)-f(x_\circ) \leqslant h(L+\epsilon)$$

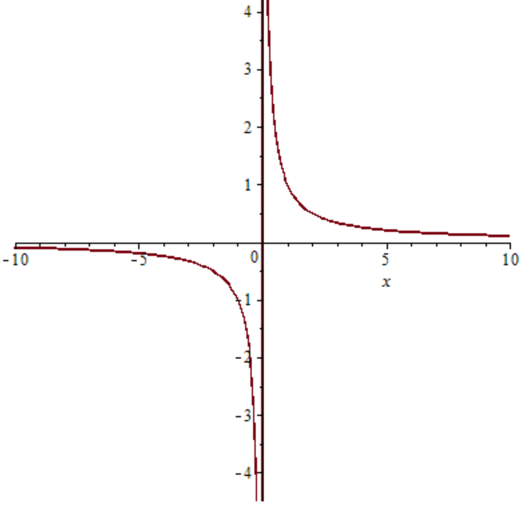
پس بنا به فشردگی،

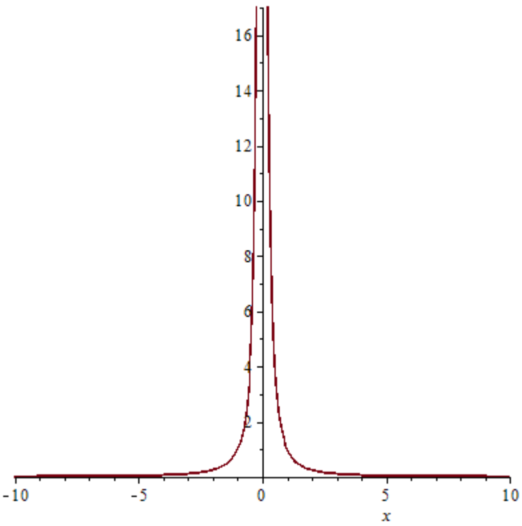
$$\lim_{h\to\circ} f(x_\circ+h)-f(x_\circ) = \circ$$
$$\lim_{h\to\circ} f(x_\circ+h) = f(x_\circ).$$

□

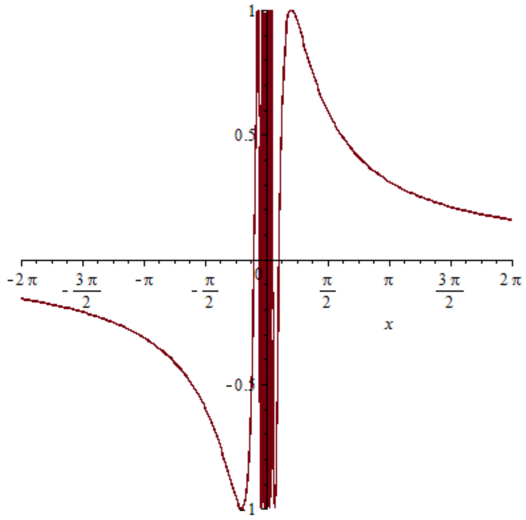
عدم مشتق‌پذیری

بنا به مشاهده‌ی بالا، یکی از عوامل عدم مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه، می‌تواند عدم پیوستگی آن باشد. در زیر به ترتیب نمودار توابعِ $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x^2}$ کشیده شده‌اند. این دو تابع در نقطه‌ی ۰ ناپیوسته هستند.

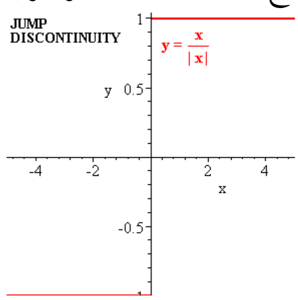




در زیر، نمودار تابعِ $\sin(\frac{۱}{x})$ کشیده شده است. این تابع نیز به علت عدم پیوستگی، در نقطه‌ی ۰ مشتق ندارد:

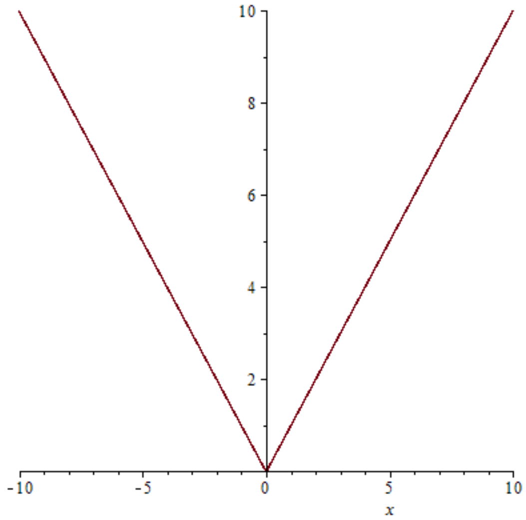


تابع کشیده شده در زیر نیز به علت عدم پیوستگی مشتق ندارد:

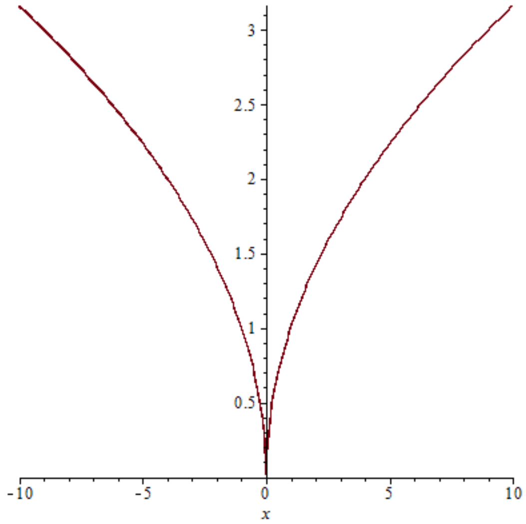


در صورتی که یک تابع پیوسته باشد، عدم مشتق‌پذیری به یکی از دلایل زیر است:

۱. برابر نبودن مشتق چپ و راست:



۲. موجود نبودن مشتق به علت بی‌نهایت شدن آن. در زیر نمودار تابع $\sqrt{|x|}$ کشیده شده است. مشتق این تابع در صفر موجود نیست. شیب خط مماس در این نقطه، از سمت راست به $+\infty$ و از سمت چپ به $-\infty$ میل می‌کند.



یک پرسش معروف در آنالیز یافتن تابعی است که در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، ولی در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نباشد. چنین توابعی را نخستین بار وایراشتراس معرفی کرده است. در زیر چند مثال از توابع وایراشتراس را آورده‌ایم.

۱.

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$$

که در آن $ab>۱+\frac{۳}{۲}$ و b فرد است و $۰<a<۱$.

۲. فرض کنید

$$g_{۰}(x)=\begin{cases}x & ۰\leqslant x\leqslant ۱\\ ۲-x & ۱\leqslant x\leqslant ۲\end{cases}$$

و

$$g(x)=g_{۰}(x-۲k)\quad ۲k<x<۲k+۲$$

آنگاه تابع زیر نیز در شرط خواسته شده صدق می‌کند:

$$f_a(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}a^n(۴x)$$

که در آن $۰<a<۱$ و $۴x>۱$.

برای مطالعه‌ی بیشتر در این باره، و مشاهده‌ی نمودار این توابع، پیوند زیر را مطالعه بفرمائید:

https://www.google.com/url?hl=de&q=http://www.math.colostate.edu/~gerhard/MATH317/NondifferentialbleContinuousFcts.pdf&source=gmail&ust=1509878761879000&usg=AFQjCNE2LKCdNesmFnVMvZYjLyISxZiJFA

ادامه‌ی بحث مشتق

لم ۱۸۵. (آ) فرض کنید f در یک همسایگی نقطه‌ی $x_{۰}$ تعریف شده باشد و در $x_{۰}$ مشتق‌پذیر باشد و $f(x_{۰})\neq ۰$. آنگاه تابع $g(x)=\frac{۱}{f(x)}$ نیز در $x_{۰}$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$g'(x_{۰})=\frac{-f'(x_{۰})}{(f(x_{۰}))^{۲}}.$$

اثبات.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{f(x_{۰}+h)}-\frac{۱}{f(x_{۰})}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{f(x_{۰})-f(x_{۰}+h)}{f(x_{۰}+h)f(x_{۰})}}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰)-f(x_۰+h)}{f(x_۰+h)f(x_۰)h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{f(x_۰+h)f(x_۰)}\times\underbrace{\frac{f(x_۰)-f(x_۰+h)}{h}}_{-f'(x_۰)}$$

گفتیم که اگر f در $x_۰$ مشتق‌پذیر باشد، در آن پیوسته است، پس داریم

$$\lim_{h\to ۰}f(x_۰+h)=f(x_۰)$$

بنابراین:

$$\text{عبارت بالا}=-\frac{f'(x_۰)}{(f(x_۰))^۲}$$

□

(ب) مشتق $f\pm g$ و λf:

$$(f\pm g)'(x_۰)=f'(x_۰)\pm g'(x_۰)$$

$$(\lambda f(x_۰))'=\lambda f'(x_۰)$$

(ج) مشتق $(f\cdot g)(x_۰)$

$$(f\cdot g)'(x_۰)=f'(x_۰)g(x_۰)+g'(x_۰)f(x_۰)$$

اثبات. داریم

$$(f\cdot g)'(x_۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)g(x_۰+h)-f(x_۰)g(x_۰)}{h}$$

عبارت $f(x_۰+h)g(x_۰)$ را اضافه و کم می‌کنیم.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)g(x_۰+h)-f(x_۰)g(x_۰)+f(x_۰+h)g(x_۰)-f(x_۰+h)g(x_۰)}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)(g(x_۰+h)-g(x_۰))+g(x_۰)(f(x_۰+h)-f(x_۰))}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)(g(x_۰+h)-g(x_۰))}{h}+\lim_{h\to ۰}\frac{g(x_۰)(f(x_۰+h)-f(x_۰))}{h}=$$

$$f(x_۰)g'(x_۰)+g(x_۰)f'(x_۰)$$

□

(د) به طور مشابه (با ترکیب آ و ج) می‌توان ثابت کرد که

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^{۲}(x)}$$

قضیه ۱۸۶. فرض کنید تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی $x.$ تعریف شده و در $x.$ مشتق‌پذیر باشد و تابع g در همسایگی $f(x.)$ تعریف شده و در $f(x.)$ مشتق‌پذیر باشد. آنگاه $g(f(x))$ در $x.$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$$

اثبات. قرار دهید $y. = f(x.)$. تابع $H(y)$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\begin{cases} \frac{g(y)-g(y.)}{y-y.} & y \neq y. \\ g'(y.) & y = y. \end{cases}$$

دقت کنید که این تابع در نقطه‌ی $y.$ پیوسته است و همواره داریم

$$H(y)(y - y.) = g(y) - g(y.)$$

با در نظر گرفتنِ $y = f(x)$ و $y. = f(x.)$ داریم

$$\lim_{x \to x.} \frac{g(f(x)) - g(f(x.))}{x - x.} = \lim_{x \to x.} \frac{H(f(x))(f(x) - f(x.))}{x - x.} =$$

$$\lim_{x \to x.} H(f(x))\frac{f(x) - f(x.)}{x - x.} = f'(x.)H(f(x.)) = f'(x.)g'(f(x.)).$$

□

مثال ۱۸۷.

۱.

$$(\sinh(x))' = (\frac{e^x - e^{-x}}{۲})' = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} = \cosh(x)$$

۲.

$$(\cosh(x))' = (\frac{e^x + e^{-x}}{۲})' = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = \sinh(x)$$

.۳

$$(\tanh(x))' = (\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)})' = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^{۲}(x)} =$$

$$\frac{\cosh^{۲}(x) - \sinh^{۲}(x)}{\cosh^{۲}(x)} = \frac{۱}{\cosh^{۲}(x)} = ۱ - \tanh^{۲}(x)$$

.۴ $a > ۰ \quad f(x) = a^x$:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \times e^{x \ln a} = a^x \ln a$$

.۵

$$(a_n x^n + \ldots + a_۰)' = n a_n x^{n-۱} + \ldots + ۰$$

۱۶ جلسه‌ی شانزدهم

مثال ۱۸۸. مشتق تابع $f(x) = x^x$ را برای $x > ۰$ حساب کنید.

پاسخ.

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

از آنجا که توابع $x, \ln x$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیرند، تابع $x\ln(x)$ نیز در این نقاط مشتق‌پذیر است. از آنجا که e^x در سرتاسر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، تابع به دست آمده از ترکیب آن با $x\ln(x)$ یعنی تابع $e^{x \ln x}$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x) = (\ln x + \frac{۱}{x}x)e^{x \ln x} = (\ln x + ۱)x^x$$

$$f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = (\ln x + ۱)x^x$$

□

می‌دانیم که مشتق تابعِ $x^{\frac{m}{n}}$ برابر است با $\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-۱}$. در زیر نشان داده‌ایم که مشتق تابعِ x^a برای عدد حقیقیِ دلخواهِ a برابر است با $ax^{a-۱}$؛ و این با آنچه از مشتق انتظار داریم سازگار است.

مثال ۱۸۹. مشتق تابع $f(x) = x^a$ را حساب کنید.

پاسخ. داریم $f(x) = x^a = e^{a \ln x}$ پس

$$f'(x) = \frac{a}{x}e^{a \ln x} = \frac{a}{x}x^a = ax^{a-۱}$$

□

مثال ۱۹۰. مشتق تابع $f(x) = \ln|x|$ را در $x \neq ۰$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & x > ۰ \\ \ln(-x) & x < ۰ \end{cases}$$

تابع فوق در تمامی $x \neq ۰$ مشتق‌پذیر است. برای $x > ۰$ مشتق تابع برابر است با

$$f'(x) = \frac{۱}{x}$$

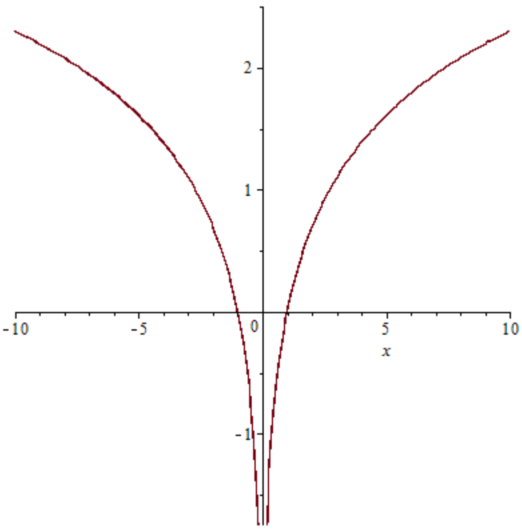
و برای $x < ۰$ مشتق تابع برابر است با

$$-۱ \times \frac{۱}{-x} = \frac{۱}{x}$$

پس اگر $f(x) = \ln|x|$ آنگاه در تمامی $x \neq ۰$ داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{x}$$

نمودار تابع $f(x) = \ln|x|$ به شکل زیر است (و این تابع در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست).



□

مثال ۱۹۱. مشتق تابع $\begin{cases} x^۲ \sin \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ \sinh x & x \leqslant ۰ \end{cases}$ را بیابید.

پاسخ. در $x > ۰$ تابع $\frac{۱}{x}$ مشتق‌پذیر است. تابع $\sin$ در تمام $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. پس تابع $\sin \frac{۱}{x}$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیر است.

تابع $x^۲$ در تمام $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و بنابراین $f(x) = x^۲ \sin \frac{۱}{x}$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیر است. پس اگر $x > ۰$ داریم:

$$f'(x) = ۲x \sin \frac{۱}{x} + (-\frac{۱}{x^۲}) \cos \frac{۱}{x}(x^۲) = ۲x \sin \frac{۱}{x} - \cos \frac{۱}{x}$$

و در $x > ۰$ تابع $\sinh x$ مشتق‌پذیر است، زیرا به صورت حاصلجمعی از تابعهای مشتق‌پذیرِ e^x, e^{-x} قابل نوشتن است.

$$(\sinh x)' = \cosh(x)$$

بررسی مشتق‌پذیری تابع در نقطه‌ی $x = ۰$:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰}$$

حد بالا را از دو جهت ۰^+ و ۰^- بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{f(x) - f(۰)}{x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲ \sin \frac{۱}{x} - ۰}{x} = \lim_{x\to ۰^+} x \sin \frac{۱}{x} = ۰$$

پس

$$f'_+(۰) = ۰$$

توجه ۱۹۲.

$$-۱ \leqslant \sin \frac{۱}{x} \leqslant ۱$$

برای $x > ۰$ داریم:

$$-x \leqslant x \sin \frac{۱}{x} \leqslant x$$

برای $x < ۰$ داریم:

$$+x \leqslant x \sin \frac{۱}{x} \leqslant -x$$

بنا به فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to ۰} x \sin \frac{۱}{x} = ۰$$

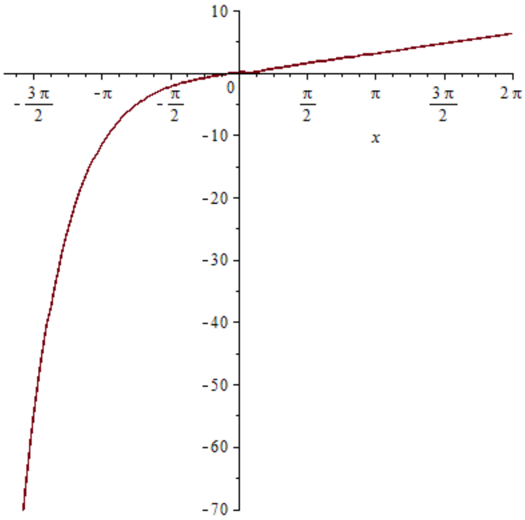
$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sinh x - \sinh ۰}{x} = (\sinh)'(۰) = \cosh(۰) = ۱$$

پس داریم:

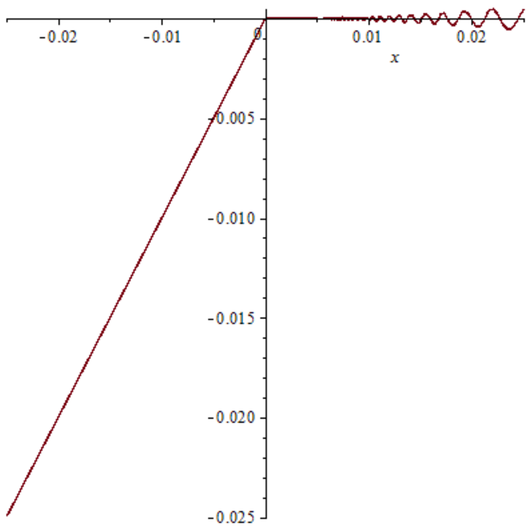
$$f'_-(۰) = ۱$$

پس تابع مورد نظر در نقطه‌ی $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ \sin \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ \sinh x & x \leqslant ۰ \end{cases}$ به شکل زیر است:



نمودار بالا را از نزدیک‌تر نگاه می‌کنیم.

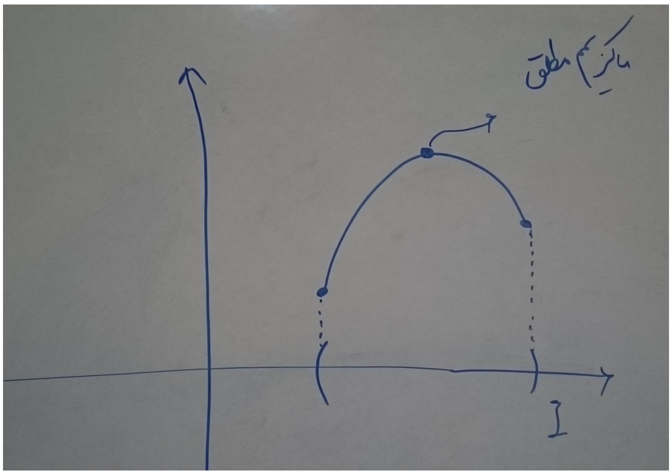


□

اِکسترِمُمهای مطلق و نسبی

تعریف ۱۹۳. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ (I بازه است) را در نظر بگیرید. می‌گوییم f در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **ماکزیمم مطلق** است، یا به ماکزیمم مطلق خود می‌رسد، هرگاه

$$\forall x \in I \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$



به طور مشابه می‌گوییم f در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **مینی‌مومِ مطلق** است، یا به مینی‌مومِ مطلق خود می‌رسد، هرگاه

$$\forall x \in I \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$

تعریف ۱۹۴. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **ماکزیمم نسبی** است، هرگاه

$$\exists \delta \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$$

و در بازه‌ی $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ نقطه‌ی x_0 یک ماکزیمم مطلق باشد. مشابهاً تابع $f : I \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **مینی‌موم نسبی** است، هرگاه

$$\exists \delta \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$$

و در بازه‌ی $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ نقطه‌ی x_0 یک مینی‌مومِ مطلق باشد.

در ادامه‌ی درس خواهیم دید که چگونه مطالعه‌ی مشتق تابع به ما کمک می‌کند که بدون رسم نمودار آن، نقاط ماکزیمم و مینی‌موم مطلق (و حتی نسبی) آن را بشناسیم. مطالعه‌ی مشتق تابع در

واقع تحلیلی از تابع به دست می‌دهد که با استفاده از آن می‌توانیم به درک مناسبی از شکل هندسی آن تابع برسیم.

قضیه ۱۹۵. فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی $x.$ تعریف شده و در $x.$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، آنگاه اگر تابع f در $x.$ مشتق‌پذیر باشد، خواهیم داشت:

$$f'(x.) = ۰$$

اثبات. فرض کنید که

$$\forall x \in (x. - \delta, x. + \delta) \quad f(x) \leqslant f(x.)$$

آنگاه

$$\forall x \in (x. - \delta, x. + \delta) \begin{cases} \frac{f(x)-f(x.)}{x-x.} \leqslant ۰ & x > x. \\ \frac{f(x)-f(x.)}{x-x.} \geqslant ۰ & x < x. \end{cases}$$

یادآوری ۱۹۶. اگر $\lim_{x\to x.} f(x) = L > ۰$ آنگاه تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی $x.$ مثبت است. بنابراین اگر تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی $x.$ کمتر یا مساوی صفر باشد، حد آن در $x.$ نیز کمتراز یا مساوی با ۰ است و این حد نمی‌تواند مثبت باشد.

$$\forall x \in (x. - \delta, x. + \delta) \quad f(x) \leqslant ۰ \Rightarrow \lim_{x\to x.} f(x) \leqslant ۰$$

$$\forall x \in (x. - \delta, x. + \delta) \quad f(x) \geqslant ۰ \Rightarrow \lim_{x\to x.} f(x) \geqslant ۰$$

بنا بر آنچه در بالا گفته‌ایم $\lim_{x\to x.^+} \frac{f(x)-f(x.)}{x-x.}$ در صورت وجود کمتراز یا مساوی با صفر است. به طور مشابه $\lim_{x\to x.^-} \frac{f(x)-f(x.)}{x-x.}$ در صورت وجود بزرگتر از یا مساوی با صفر است. پس اگر $f(x)$ در نقطه‌ی $x.$ مشتق‌پذیر باشد $f'(x) \geqslant ۰$ و $f'(x) \leqslant ۰$. بنابراین

$$f'(x) = ۰$$

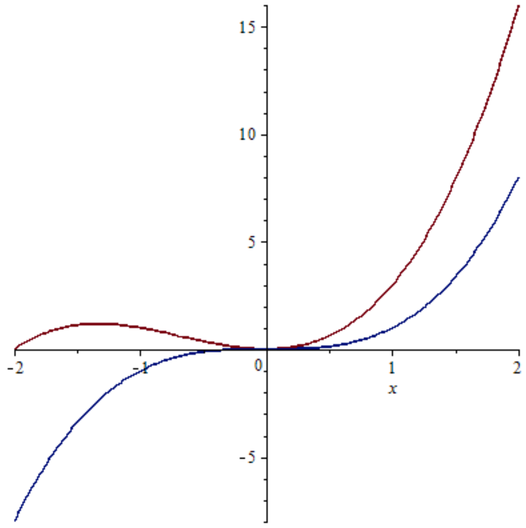
توجه ۱۹۷. لزوماً در هر نقطه که مشتق صفر شود اکسترمم نسبی نداریم. مشتق تابع

$$f(x) = x^۳$$

در نقطه‌ی ۰ برابر با صفر است ولی این تابع در این نقطه هیچ نوع اکسترممی ندارد.

□

مثال ۱۹۸. فرض کنید که توابع $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشند و برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) \leqslant g(x)$. نشان دهید که اگر در نقطه‌ی $x_.$ داشته باشیم $f(x_.) = g(x_.)$ آنگاه $f'(x_.) = g'(x_.)$.



پاسخ. تابع $h(x) = g(x) - f(x)$ را در نظر بگیرید که در تمام $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \geqslant ۰$$

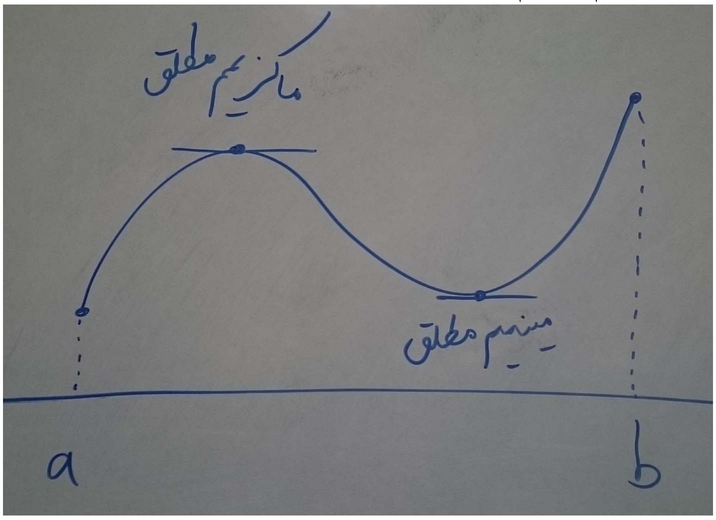
حال اگر $f(x_.) = g(x_.)$ آنگاه $h(x_.) = ۰$ پس $x_.$ یک مینیمم نسبی برای تابع h است. پس

$$h'(x_.) = ۰ \Rightarrow f'(x_.) = g'(x_.)$$

□

هرچند قضیه‌ی زیر ساده و طبیعی به نظر می‌رسد، ولی تلاش من برای نوشتن اثباتی مناسب برای آن، بی‌نتیجه ماند. منظورم از اثباتی مناسب اثباتی است که در آن تنها از اطلاعات درس ریاضی عمومی ۱ استفاده شده باشد و آن اثبات قابل ارائه در کلاس باشد.

قضیه ۱۹۹. اگر تابع f در **بازه‌ی بسته‌ی کراندارِ** $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.



توجه ۲۰۰. شرط بسته بودن بازه لازم است.

مثال ۲۰۱. تابع $\frac{1}{x}$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ دارای ماکزیمم مطلق نیست.

به بیان دیگر اگر f یک تابع پیوسته باشد و $[a,b]$ یک بازه‌ی بسته باشد آنگاه $\exists c,d$ که

$$f([a,b]) = [c,d]$$

توجه ۲۰۲. اثبات اینکه $f([a,b])$ به صورت بازه است با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانی صورت می‌گیرد ولی اثبات اینکه $f([a,b])$ لزوماً یک **بازه‌ی بسته** است، کار آسانی نیست.

توجه ۲۰۳. فرض کنید که تابع f در یک بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد. از آنجا که تابع مورد نظر در این بازه پیوسته است، پس قطعاً در این بازه دارای اکسترممهای مطلق است. برای تعیین اکسترمم‌های مطلق یک تابع ابتدا نقاطی را تعیین می‌کنیم که در آنها مشتق تابع وجود ندارد یا برابر صفر است (به این نقاط، نقاط بحرانی می‌گوئیم). سپس $f(x)$ را در این نقاط و در نقاط انتهایی بازه حساب می‌کنیم و در میان آنها اکسترمم‌های مطلق را شناسایی می‌کنیم.

مثال ۲۰۴. اکسترمم‌های مطلق تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}|x|^x & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}\qquad x\in[-۱,۳]$$

پاسخ. نخست باید بررسی کنیم که تابع داده شده در آن بازه پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}x^x & x>۰\\ (-x)^x & x<۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$$

در $x>۰$ تابع مورد نظر پیوسته است، چون برابر است با $e^{x\ln x}$؛ یعنی ترکیبی از توابع پیوسته است.
در $x<۰$ نیز به همین ترتیب. بررسی این که تابع f در $x=۰$ پیوسته است:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} e^{x\ln x}$$

با استفاده از تغییر متغیر $e^t=x$ داریم:

$$\lim_{t\to -\infty} e^{e^t\times t}$$

و با تغییر متغیر $t=-u$ داریم:

$$\lim_{u\to +\infty} e^{e^{-u}\times(-u)}=\lim_{u\to +\infty}\frac{-u}{e^u}=۱$$

به طور مشابه نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۱$$

یعنی تابع مورد نظر ما در بازه‌ی $[-۱,۳]$ پیوسته است. مشتق تابع به صورت زیر است:

$$f'(x)=\begin{cases}(\ln x+۱)x^x & x>۰\\ (\ln(-x)+۱)(-x)^x & x<۰\\ \text{بررسی نمی‌کنیم} & x=۰\end{cases}$$

نقاطی که در آن مشتق تابع صفر است (یا وجود ندارد)

۱. احیاناً نقطه‌ی $x = 0$

۲. در $0 < x$ برای اینکه مشتق صفر شود باید داشته باشیم:

$$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

۳. در $x < 0$ برای اینکه مشتق صفر شود باید داشته باشیم:

$$\ln(-x) = -1 \Rightarrow -x = e^{-1} \Rightarrow x = -e^{-1}$$

مقادیر تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی و نقاط بحرانی:

$$x = -1 \Rightarrow 1^{-1} = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow 3^3 = 27$$

$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 1$$

$$x = e^{-1} \Rightarrow e^{x \ln x} = e^{-e^{-1}} = e^{-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$$

$$x = -e^{-1} \Rightarrow e^{x \ln(-x)} = e^{+e^{-1}} = \frac{1}{e^{e}}$$

می دانیم که

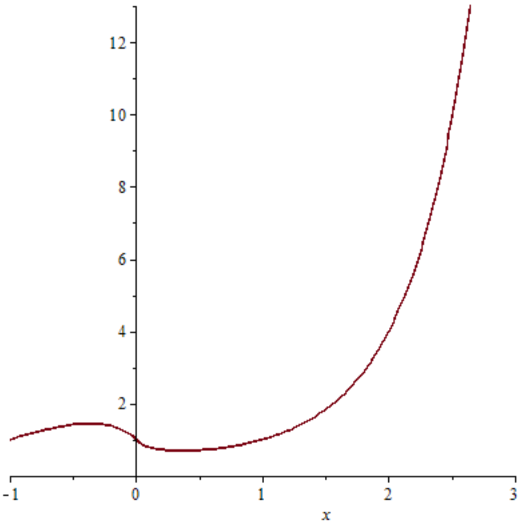
$$e > 1^e \Rightarrow \sqrt[e]{e} > 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} < 1$$

پس نقطه‌ی $-e^{-1}$ نقطه‌ی مینی‌موم مطلق است. همچنین داریم

$$\sqrt[e]{e} \leqslant 3^3$$

پس نقطه‌ی $x = 3$ نقطه‌ای است که در آن ماکزیمم مطلق داریم.

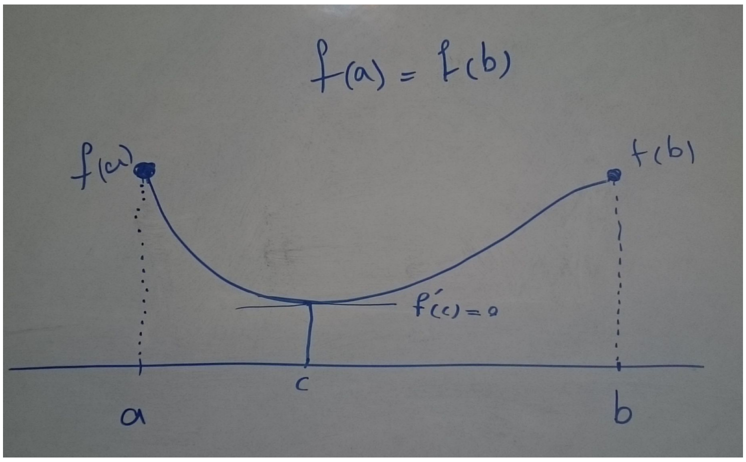
شکل تابع $x \in [-1, 3]$ $f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ به صورت زیر است:



□

قضیه ۲۰۵ (رُل). فرض کنید که تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه

$$\exists x \in (a,b) \quad f'(x) = ۰.$$



اثبات. تابع f بنا به پیوستگی در بازه‌ی $[a,b]$ دارای مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق است. اگر یکی از ایندو در نقاط انتهایی نباشد در آن نقطه مشتق صفر است. حالت دیگر این است که یکی از a و b ماکزیمم مطلق و دیگری منیمم مطلق باشد، در این صورت تابع مورد نظر ثابت است و در تمام نقاط بازه‌ی $[a,b]$ مشتق آن صفر است. □

مثال ۲۰۶. فرض کنید تابع f در بازه‌ی بازِ I پیوسته باشد و

$$\forall x \in I \quad f'(x) \neq 0$$

آنگاه نشان دهید که معادله‌ی $f(x) = 0$ در بازه‌ی I حداکثر یک ریشه دارد.

اثبات. اگر معادله‌ی $f(x) = 0$ بیش از یک ریشه داشته باشد، بنا به قضیه‌ی رُل مشتقِ f باید در نقطه‌ای صفر شود. □

مثال ۲۰۷. هر چند جمله‌ای از درجه‌ی n حداکثر n ریشه در $\mathbb{R}$ دارد.

اثبات. با استقرا روی n. اگر $n = 1$، معادله‌ی $ax+b$ دارای حداکثر یک جواب است. فرض کنیم که حکم مورد نظر برای $n = n_0$ درست باشد. فرض کنیم چند جمله‌ای $p(x)$ از درجه‌ی $n_0 + 1$ باشد. فرض کنیم که $p(x)$ بیشتر یا مساوی $n_0 + 2$ ریشه داشته باشد. آنگاه $p'(x)$ بیشتر یا مساوی $n_0 + 1$ ریشه دارد. چندجمله‌ایِ $p'(x)$ از درجه‌ی n_0 است و بنا به فرض استقرا نمی‌تواند بیش از $n_0 + 1$ ریشه داشته باشد؛ تناقض. □

۱۷ جلسه‌ی هفدهم

یادآوری ۲۰۸. قضیه‌ی رُل : اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و در بازه‌ی بازِ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$ آنگاه نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ چنان موجود است که $f'(c)=۰$.

مثال ۲۰۹. نشان دهید که یک و تنها یک عدد $c>۰$ موجود است به طوری که $۳^c=\frac{۱}{c^۳}$. به بیان دیگر معادله‌ی $۳^x-\frac{۱}{x^۳}=۰$ تنها دارای یک جواب است.

پاسخ. توجه کنید که اگر معادله‌ی $\frac{۱}{x^۳}=۳^x$ دارای جواب باشد، جواب آن مثبت خواهد بود، زیرا ۳^x همواره مثبت است و از این رو $\frac{۱}{x^۳}$ نیز باید مثبت باشد. معادله را به صورت زیر بنویسید:

$$f(x)=۳^x x^۳-۱=۰$$

$$x=۳\Rightarrow f(x)=۳^۳\times۳^۳-۱>۰$$
$$x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=۳^{\frac{۱}{۳}}\times\frac{۱}{۲۷}-۱=\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۲۷}-۱<۰$$

معادله‌ی بالا در بازه‌ی $[\frac{۱}{۳},۳]$ بنا به قضیه‌ی بولتسانو دارای حداقل یک ریشه است. اگر معادله‌ی فوق دارای دو ریشه باشد، f' باید در نقطه‌ای صفر شود.

$$f'(x)=\ln۳\times۳^x\times x^۳+۳x^۲\times۳^x$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow۳^x(\underbrace{\ln۳\times x^۳+۳x^۲}_{A})=۰$$
$$A=۰\Rightarrow x^۳\ln۳+۳x^۲=۰\Rightarrow x^۲(x\ln۳+۳)=۰$$
$$x=۰\quad\text{یا}\quad x=\frac{-۳}{\ln۳}<۰$$

از آنجا که مشتق در هیچ نقطه‌ی مثبتی صفر نمی‌شود، معادله نمی‌تواند دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد. □

مثال ۲۱۰. نشان دهید که معادله‌ی $x+\ln x=۲$ در بازه‌ی $(۰,\infty)$ دقیقاً دارای یک جواب است.

پاسخ.
$$f(x)=x+\ln x-۲$$

$$f(۱) < ۰$$

$$f(e) = e + ۱ - ۲ = e - ۱ > ۰$$

بنابراین معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[۱, e]$ حداقل دارای یک ریشه است. اگر معادله‌ی $f(x) = ۰$ در $(۰, \infty)$ دو ریشه‌ی a و b را داشته باشد، آنگاه نقطه‌ای مثبت مثل $x.$ پیدا می‌شود که در آن $f'(x.) = ۰$. اما این غیرممکن است زیرا

$$\forall x \quad f'(x) = ۱ + \frac{۱}{x} \geqslant ۱$$

بنابراین f تنها یک ریشه دارد. □

مثال ۲۱۱. معادله‌ی $xe^x - ۲e^x + ۱ = ۰$ در $\mathbb{R}$ دقیقاً دو جواب دارد.

پاسخ.

$$f(۲) = ۲e^۲ - ۲e^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow f(۲) = ۱ > ۰$$

$$f(۰) = ۰ \times e^۰ - ۲e^۰ + ۱ = ۰ \Rightarrow -۲ + ۱ = -۱ \Rightarrow f(x) = -۱ < ۰$$

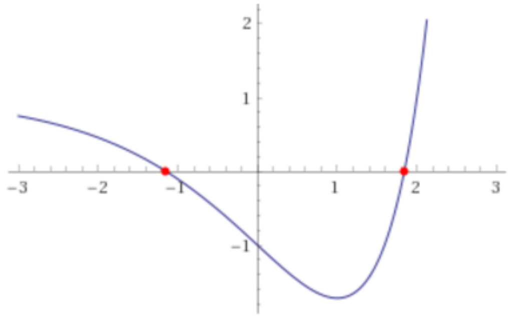
$$f(-۲) = -۲e^{-۲} - ۲e^{-۲} + ۱ = ۰ \Rightarrow -۴e^{-۲} + ۱ = ۰ \Rightarrow f(-۲) = -۴e^{-۲} + ۱ > ۰$$

بنا به قضیه‌ی بولتسانو معادله‌ی $f(x) = ۰$ حداقل یک ریشه در $[-۲, ۰]$ و حداقل یک ریشه در $[۰, ۲]$ دارد. اگر معادله‌ی یاد شده دارای بیش از دو ریشه مثلاً سه ریشه باشد، آنگاه معادله‌ی $f'(x) = ۰$ (بنا به قضیه‌ی رُل) دارای حداقل دو ریشه خواهد بود.

$$f'(x) = e^x + xe^x - ۲e^x$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow e^x + xe^e - ۲e^x = ۰ \Rightarrow e^x(۱ + x - ۲) = ۰ \Rightarrow e^x(x - ۱) = ۰$$

معادله‌ی فوق دارای تنها یک ریشه است. پس $f(x) = ۰$ نمی‌تواند بیش از دو ریشه داشته باشد.



□

توجه ۲۱۲. اگر $f^{(k+1)}(x)$ (مشتق $k+1$اُم تابع f) حداکثر دارای n ریشه باشد $f^{(k)}(x)$ حداکثر در $n+1$ نقطه صفر می‌شود. به بیان دیگر اگر $f^{(k)}$ در $n+1$ نقطه صفر شود، $f^{(k+1)}$ حداقل در n نقطه صفر می‌شود.

مثال ۲۱۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر باشد و $f(۰)=۰$ ، $f(۱)=۱$ و $f(۲)=۲$. نشان دهید که

$$\exists c\in\mathbb{R}\quad f''(c)=۰$$

پاسخ. بنا به قضیه‌ی رُل برای اثبات اینکه f'' در یک نقطه صفر شده است، کافی است نقطه‌های a و b را چنان بیابیم که $f'(a)=f'(b)$.
تابع $g(x)=f(x)-x$ در سه نقطه صفر شده است:

$$g(۰)=۰$$
$$g(۱)=۰$$
$$g(۲)=۰$$

بنا به قضیه‌ی رُل g' در حداقل دو نقطه صفر می‌شود.

$$\exists a,b\quad g'(a)=g'(b)=۰$$

$$g'(a)=f'(a)-۱\Rightarrow f'(a)=۱$$

$$g'(b)=۰\Rightarrow f'(b)=۱$$

پس

$$f'(a)=f'(b)=۱$$

بنابراین $\exists c\in(a,b)$ به طوری که $f''(c)=۰$ □

چند جمله‌های تیلور

توابع چند جمله‌ای توابع بسیار خوشرفتاری هستند. مشتق آنها به راحتی حساب می‌شود و تحلیل ریشه‌ها آنها ساده‌تر از بقیه‌ی توابع است. در ادامه‌ی درس خواهیم دید که برخی از توابع را می‌توان

با استفاده از چند جمله‌ای‌ها تقریب زد. یعنی می‌توان دنباله‌ای از توابعِ چندجمله‌ای پیدا کرد که به هر اندازه‌ی دلخواه به تابع مورد نظر نزدیک شوند. در زیر چگونگی این کار را توضیح داده‌ایم.

وقتی می‌گوئیم تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر است، یعنی در اطراف آن نقطه، تابع را می‌توان با خط مماس بر آن در آن نقطه تقریب زد. به بیان دیگر، Δy، یعنی تغییرات تابع را در اطراف آن نقطه، می‌توان با dy یعنی تغییرات خط مماس بر تابع تقریب زد. قضیه‌ی مقدار میانگین میزان این خطا را نیز مشخص می‌کند:

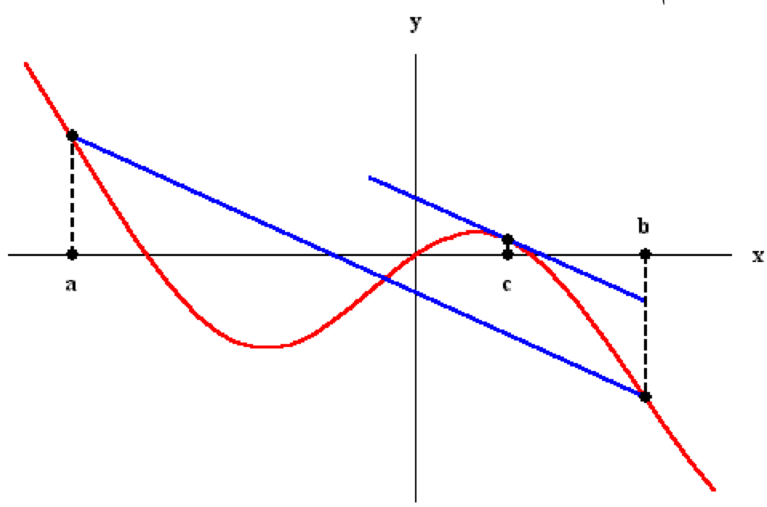
قضیه ۲۱۴. (آ) فرض کنید تابع $f : I \to \mathbb{R}$ در بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و $a < b$ و $a, b \in I$. آنگاه $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

به بیان دیگر $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

به این قضیه، قضیه‌ی **مقدار میانگین** گفته می‌شود. با توجه به شکل پائین، قضیه‌ی مقدار میانگین بیانگر این است که نقطه‌ای روی منحنی پیدا می‌شود که در آن خط مماس بر منحنی با خط مستقیم گذرنده از نقاطِ $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ برابر است.



اثبات. فرض کنید $g(x)$ خط گذرنده از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ باشد. داریم:

$$f(a) - g(a) = ۰$$

$$f(b) - g(b) = ۰$$

تابع $f - g$ تابعی مشتق‌پذیر است و

$$f(a) - g(a) = ۰$$

$$f(b) - g(b) = ۰$$

پس نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$f'(c) - g'(c) = ۰$$

یعنی $f'(c) = g'(c)$. از طرفی $g(x)$ معادله‌ی یک خط راست است با شیب $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$؛ یعنی $g'(x)$ در تمام نقاط برابر است با $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. پس

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

یعنی

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

□

قضیه بالا در واقع می‌گوید که $f(a)$ تقریبی برای $f(b)$ است و خطای این تقریب نسبت به فاصله‌ی a, b خطی است؛ یعنی برابر است با $f'(c)(b - a)$ برای یک $c \in (a, b)$. در زیر می‌بینیم که $f(b)$ را می‌توان تقریب بهتری زد.

(ب) فرض کنیم که f در I دو بار مشتق‌پذیر باشد و $a, b \in I$ و $a < b$ آنگاه عنصری مانند $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(c)}{۲}(b - a)^۲$$

اثبات. تعریف کنید:

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - T(x - a)^۲$$

مقدار T را به راحتی می‌توان عددی گرفت که برای آن، $g(b)$ برابر با صفر شود. در اینجا آن عدد را برای راحتی نمی‌نویسیم. داریم

$$g(a) = ۰$$

و گفتیم که T را عددی بگیرید که به ازای آن :

$$g(b) = ۰.$$

بنا به قضیه‌ی رُل نقطه‌ی $d \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$g'(d) = ۰ \quad (***)$$

همچنین دقت کنید که

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) - ۲T(x - a) \quad (*)$$

$$g'(a) = ۰ \quad (**)$$

دوباره بنا به قضیه‌ی رُل و با توجه به $(***), (**)$ نقطه‌ای مانند $c \in (a, d)$ موجود است به طوری که $g''(c) = ۰$. داریم

$$g''(x) = f''(x) - ۲T$$

$$g''(c) = ۰ \Rightarrow f''(c) = ۲T \Rightarrow T = \frac{f''(c)}{۲}$$

در نتیجه داریم:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(c)}{۲}(b - a)^۲$$

□

قضیه بالا می‌گوید که $f(a) + f'(a)(b - a)$ تقریبی برای $f(b)$ است و خطای این تقریب برابر است با $\frac{f''(c)}{۲}(b - a)^۲$ برای یک $c \in (a, b)$. دقت کنید که اگر $(b - a)$ عدد کوچکی باشد، وقتی به توان ۲ برسد کوچکتر می‌شود. پس به نظر می‌رسد که این تقریب، از تقریبِ مورد آ بهتر باشد. در زیر می‌بینیم که از این تقریب بهتر هم وجود دارد.

(ج) اگر تابع f ، $n+۱$ بار مشتق‌پذیر باشد:

$$\exists c \in (a,b) \quad f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(b-a)^۲ + \frac{f'''(a)}{۳!}(b-a)^۳ + \dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(b-a)^{n+۱}$$

به بیان دیگر فرض کنید $x > a$. داریم

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^۲ + \frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^۳ + \dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}$$

به

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^۲ + \frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^۳ + \dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

یک چند **جمله‌ای تیلور** از درجه‌ی n حول نقطه‌ی a گفته می‌شود. دقت کنید که می‌توان با افزایش دادن درجه‌ی چندجمله‌ای تیلور یک تابع به آن نزدیکتر و نزدیکتر شد.

(د) به عبارت زیر، سری تیلور تابع f حول نقطه‌ی a گفته می‌شود (اگر f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد):

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f^{(۱)}(a)}{۱!}(x-a) + \dots$$

به توابعی که در دامنه‌ای خاص دقیقا برابر با سری تیلور خود هستند، **توابع تحلیلی** گفته می‌شود.

توجه ۲۱۵. اگر تابع f در بازه‌ای بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، لزوماً سری تیلور f با خودِ آن برابر نیست.

مثال ۲۱۶.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{۱}{x^۲}} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

تمرین ۲۱۷. نشان دهید که

$$\forall n \quad f^{(n)}(۰) = ۰$$

بنابراین سری این تابع با خودِ آن برابر نیست.

۱۸ جلسه‌ی هجدهم

یادآوری ۲۱۸. در جلسه‌ی قبل دیدیم که اگر تابع f در بازه‌ی I بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد و $a \in I$ آنگاه برای هر $x > a$ در بازه‌ی I داریم:

$$\exists c \in (a,x) \quad f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

$$\exists c \in (a,x) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{۲}(x-a)^{۲}$$

$$\exists c \in (a,x) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{۲!}(x-a)^n + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+۱)}(a)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}}_{\text{خطا}}$$

گفتیم که به چندجمله‌ای T_n از درجه‌ی n در زیر، چندجمله‌ی تیلور از درجه‌ی n حول نقطه‌ی a برای تابع f گفته می‌شود:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^n + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad (*)$$

اگر برای تمام $x \in I$ حدهای دنباله‌های سمت راست موجود باشند، داریم:

$$\forall x \in I \quad \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x) \quad (**)$$

فرض کنید برای تمام $x \in I$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = ۰$$

آنگاه بنا به $**$ داریم:

$$\forall x \in I \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

می‌دانیم که:

$$\forall x \in I \quad \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

یعنی در این صورت

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

به بیان دیگر، تابع f با یک سری توان برابر می‌شود. به توابعی که در یک بازه‌ی خاص با سری تیلور خود برابرند، **توابع تحلیلی** [۸] گفته می‌شود.

توجه ۲۱۹. برای هر تابعی که بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، می‌توان سری تیلور نوشت ولی لزوماً سری تیلور با خود تابع برابر نیست. مثال نقض را در جلسه‌ی قبل دیده‌ایم.

مثال ۲۲۰. سری تیلور تابع $f(x)=e^x$ را حول $a=۰$ بنویسید.

پاسخ.

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

می‌دانیم که e^x بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است. پس داریم:

$$\begin{aligned}
&f(x)=e^x\Rightarrow f(۰)=۱\\
&f'(x)=e^x\Rightarrow f'(۰)=۱\\
&f''(x)=e^x\Rightarrow f''(۰)=۱\\
&\vdots\\
&f^{(n)}(x)=e^x\Rightarrow f^{(n)}(۰)=۱
\end{aligned}$$

پس داریم:

$$e^x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}x^n=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

□

مثال ۲۲۱. سری تیلور تابع $f(x)=\sin x$ حول نقطه‌ی $a=۰$ را بنویسید.

همان گونه که مثال بالا نشان می‌دهد، اگر تابع f دارای نمایشی به صورت یک سری توان باشد، آن سری توان همان سری تیلور تابع مورد نظر خواهد بود.

---
[۸] analytic

پاسخ.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۰)}{n!} x^n$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(۰) = ۰$$
$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(۰) = ۱$$
$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(۰) = ۰$$
$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(۰) = -۱$$
$$f^{(۴)}(x) = \sin x \Rightarrow f(۰) = ۰$$

پس دنباله‌ی $\{f^{(n)}(۰)\}$ برابر است با:

$$\{f^{(n)}\} = \overset{a_۰}{۰} + \overset{a_۱}{۱} + \overset{a_۲}{۰} + \overset{a_۳}{-۱} + \overset{a_۴}{۰} + \overset{a_۵}{۱} + \overset{a_۶}{۰} + \overset{a_۷}{-۱} + \dots$$

توجه کنید اگر n زوج باشد آنگاه

$$f^{(n)}(۰) = ۰$$

پس سری تابع ما به صورت زیر است:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \square \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} = \overset{۱}{\square}\, x + \overset{-۱}{\square}\, x^۳ + \overset{۱}{\square}\, x^۵$$

پس داریم:

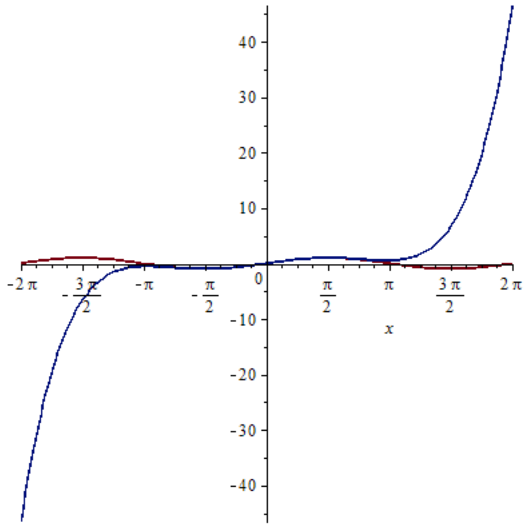
$$\sin(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \dots$$

بنا به بسط بالا بود که در دبیرستان گاهی هنگام محاسبه‌ی حدها، از هم‌ارزی زیر استفاده می‌کردید:

$$\sin x \simeq x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!}$$

در زیر نمودارهای توابع $\sin(x)$ و $x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!}$ کشیده شده‌اند:



□

مثال ۲۲۲. نشان دهید که

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |\tanh a - \tanh b| \leqslant |a - b| \leqslant |\sinh a - \cosh b|$$

.

پاسخ. بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\forall a < b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in (a, b) \quad |\frac{\tanh a - \tanh b}{a - b}| = |(\tanh)'(c)|$$

توجه ۲۲۳. اگر f در بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و $a, b \in I$ آنگاه

$$\exists c \in I \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

می‌دانیم که

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$$

در سرتاسر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. بنابراین قضیه‌ی مقدار میانگین قابل اعمال است.

$$|\tanh a - \tanh b| = |a - b||(\tanh)'(c)|$$

واضح است که اگر $|(\tanh)'(c)| < ۱$ آنگاه

$$|\tanh a - \tanh b| \leqslant |a-b|$$

داریم

$$(\tanh)'(x) = (\frac{\sinh}{\cosh})'(x) = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^۲(x)} = \frac{۱}{\cosh^۲(x)}$$

اثبات اینکه $\frac{۱}{\cosh^۲(x)} \leqslant ۱$: توجه کنید که $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{۲}$ بنابراین $\cosh x \geqslant ۰$. از طرفی $\cosh^۲(x) = ۱ + \sinh^۲(x) \geqslant ۱$ پس داریم:

$$\begin{cases} \cosh x \geqslant ۰ \\ \cosh^۲(x) \geqslant ۱ \end{cases}$$

که از آن نتیجه می‌شود که: $\cosh x \geqslant ۱$. پس

$$\frac{۱}{\cosh^۲(c)} \leqslant ۱$$

در نتیجه

$$|\tanh'(c)| \leqslant ۱$$

پس داریم:

$$|\tanh a - \tanh b| \leqslant |a-b|$$

قسمت دوم سوال. باید نشان دهیم که

$$|\frac{\sinh a - \sinh b}{a-b}| \geqslant ۱$$

از آنجا که $\sinh$ تابعی مشتق‌پذیر است بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\exists c \in (a,b) \quad |\frac{\sinh a - \sinh b}{a-b}| = |\cosh(c)| \geqslant ۱$$

در نتیجه داریم:

$$|\frac{\sinh a - \sinh b}{a-b}| \geqslant ۱$$

□

مثال ۲۲۴. فرض کنید $f : (\circ, \infty) \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و برای هر x داشته باشیم $f'(x) = \frac{1}{x}$ و بدانیم که $f(1) = \circ$. نشان دهید که

$$\forall x > 1 \quad 1 - \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant x - 1$$

(توجه: پس به ویژه عبارت بالا برای $f(x) = \ln x$ برقرار است. یعنی

$$\forall x > 1 \quad 1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln(x) \leqslant x - 1$$

)

پاسخ. از آنجا که f مشتق‌پذیر است بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\exists c \in (1, x) \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c) = \frac{1}{c}$$

$$c > 1 \Rightarrow \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow f(x) - f(1) \leqslant x - 1 \Rightarrow f(x) \leqslant x - 1$$

ثابت کردیم که

$$f(x) = \underbrace{f(1)}_{=\circ} + f'(c)(x - 1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{c}(x - 1), c \geqslant 1$$

پس داریم

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x} \leqslant \frac{x - 1}{c} \quad c \in (1, x)$$

در نتیجه داریم:

$$f(x) = \frac{x - 1}{c} \geqslant \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}$$

$\square$

مثال ۲۲۵. برای هر $x \geqslant \circ$ نشان دهید که

$$\ln(1 + x) \geqslant \frac{x}{x + 1}$$

پاسخ.

$$\ln(۱+x) = \ln(۱) + (\ln)'(c)(x)$$

برای یک $c \in (۱, ۱+x)$. پس

$$\ln(۱+x) = \frac{۱}{c}x$$

از آن جا که $c \in (۱, ۱+x)$، داریم

$$\frac{۱}{c}x \geqslant \frac{x}{۱+x} \Rightarrow \ln(۱+x) \geqslant \frac{x}{x+۱}$$

□

مثال ۲۲۶. اکسترمم‌های مطلق تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \tanh(x^{۳} - ۳x^{۲}) \quad x \in [-۲, ۱]$$

پاسخ.

توجه ۲۲۷. اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f در این بازه هم مینیمم مطلق دارد و هم ماکزیمم مطلق.

توجه ۲۲۸. اگر f در (a, b) مشتق‌پذیر باشد و $c \in (a, b)$ یک اکسترمم نسبی باشد آنگاه

$$f'(c) = ۰$$

برای تعیین اکسترمم‌های مطلق نقاطی را که در آن مشتق وجود ندارد و یا صفر می‌شود و نقاط انتهایی بازه را با هم مقایسه می‌کنیم. تابع $x^{۳} - ۲x^{۲}$ در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. تابع $\tanh x$ نیز در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. پس $\tanh(x^{۳} - ۳x^{۲})$ نیز در سرتاسر $\mathbb{R}$ و به ویژه در بازه‌ی $[-۲, ۱]$ مشتق‌پذیر است.

$$f'(x) = (۳x^{۲} - ۶x)\frac{۱}{\cosh(x^{۳} - ۳x)}$$

از آنجا که $\cosh x \geqslant ۱$ ، مشتق تنها در نقاط صادق در معادله‌ی زیر صفر است:

$$۳x^{۲} + ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = ۲$$

$$f(-۲) = \tanh(-۲۰)$$

$$f(۱) = \tanh(-۲)$$

$$f(۰) = ۰$$

$x = ۲$ در بازه نیست

نقطه‌ی $(۰, ۰)$ نقطه‌ی ماکزیمم مطلق و نقطه‌ی $(-۲, \tanh(-۲۰))$ مینیمم مطلق است. □

مثال ۲۲۹. یک مقدار تقریبی برای $\sin \frac{\pi}{۸}$ به همراه خطای این تقریب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\forall x > ۰ \quad \exists c \in (۰, x) \quad \sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \underbrace{\frac{x^۵}{۵!}\cos c}_{\text{خطا}}$$

پاسخ.

$$\sin \frac{\pi}{۸} \simeq \frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{۶}(\frac{\pi}{۸})^۳$$

خطای این تقریب نیز به صورت زیر است:

$$\frac{(\frac{\pi}{۸})^۵ \cos c}{۵!} \leqslant \frac{۱}{۵!} \times (\frac{۴}{۸})^۵ = \frac{۱}{۳۸۴۰}$$

□