۱ جلسه‌ی بیست و سوم

حالات مبهم در حدگیری

گاهی با استفاده از محاسبات ساده‌ی حدگیری، حاصلی به دست می‌آید که اطلاعات زیادی درباره‌ی حد واقعی تابع به دست نمی‌دهد. در این حالات می‌گوئیم حد تابع مبهم شده است. حالات مبهم را «موانیو» از شاگردان کُشی در قرن ۱۹ معرفی کرده است، و به صورت زیرند:

$$\frac{۰}{۰}, \frac{\infty}{\infty}, ۰ \times \infty, \infty - \infty, ۰^۰, \infty^۰, ۱^\infty$$

توجه ۱. ۰^∞ مبهم نیست.

برای پیدا کردن حد واقعی توابع، باید رفع ابهام صورت پذیرد. در حالاتِ $\frac{۰}{۰}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ عموماً قاعده‌ی لُپیتال برای رفع ابهام کارگر می‌افتد.

قاعده‌ی لُپیتال

اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۰}{۰}$ یا $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ آنگاه در صورت وجود یا بی‌نهایت بودنِ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ داریم

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

حدهای فوق برای زمانی که x به بی‌نهایت میل می‌کند نیز درستند.

توجه ۲. قاعده‌ی لُپیتال را برای حالتِ $\frac{۰}{۰}$ در جلسه‌ی پیش، با به‌کارگیریِ قضیه‌ی مقدار میانگین کُشی ثابت کردیم. حالتِ $\frac{\infty}{\infty}$ نیز به اثبات دیگری دارد و از حالت $\frac{۰}{۰}$ به طور مستقیم نتیجه نمی‌شود. [۱]

[۱] زیرا برای تبدیل حالتِ $\frac{\infty}{\infty}$ به $\frac{۰}{۰}$ باید به صورت زیر عمل کرد:

$$\frac{f}{g} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{\frac{۱}{g}}{\frac{۱}{f}}$$

اما در این صورت مشتقهای صورت و مخرج نیز به صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{\frac{-g'}{g^۲}}{\frac{-f'}{f^۲}}$$

رفع ابهام از ۱^∞

توجه ۳. قبلاً ثابت کرده‌ایم که مشتق تابع $\ln(x)$ در نقطه‌ی $x = ۱$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{x \to ۱} \frac{\ln x}{x - ۱} = ۱$$

توجه ۴. فرض کنید f یک تابع دلخواه باشد، آنگاه

$$\lim_{x \to ۱} f(x) \ln(x) = \lim_{x \to ۱} f(x) \frac{\ln x}{x - ۱}(x - ۱) = \lim_{x \to ۱} f(x)(x - ۱)$$

توجه ۵. فرض کنید $\lim_{x \to a} f(x) = ۱$ و $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$. برای محاسبه‌ی $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ می‌توان به یکی از دو روش زیر عمل کرد:

.۱

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) \ln f(x)}$$

.۲

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} (g(x))(f(x) - ۱)}$$

علت: از آنجا که $f(x) \to ۱$ و بنا به توجه قبل، داریم

$$\lim_{x \to a} g(x) \ln f(x) = \lim_{x \to a} g(x)(f(x) - ۱)$$

مثال ۶. حدهای زیر را حساب کنید.

.۱

$$\lim_{x \to \infty} (۱ + \frac{۱}{x})^x$$

پاسخ. به راحتی می‌توان دریافت که این حد ۱^∞ است پس مبهم است و به صورت زیر می‌توان رفع ابهام کرد:

$$\lim_{x \to \infty} (۱ + \frac{۱}{x})^x = e^{\lim_{x \to \infty} x(۱ + \frac{۱}{x} - ۱)} = e^۱ = e$$

□

و این، صورت قاعده‌ی لُپیتال نیست.

.۲

$$\lim_{x\to\infty}(۱-\frac{۱}{x})^x$$

پاسخ.

$$\lim_{x\to\infty}(۱-\frac{۱}{x})^x = e^{\lim_{x\to\infty} x(۱-\frac{۱}{x}-۱)} = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

□

.۳

$$\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{ax+b})^{cx+d} \quad a,c\neq ۰$$

پاسخ.

$$\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{ax+b})^{cx+d} = e^{\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{ax+b}-۱)(cx+d)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{cx+d}{ax+b}} = e^{\frac{c}{a}}$$

□

.۴

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^۳}$$

پاسخ. راه حل اول: بنا به بسط تیلورِ تابع $\sin$ می‌دانیم که در اطراف نقطه‌ی ۰ داریم

$$x-\sin x \equiv -\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}-\frac{x^۷}{۷!}$$

با جایگذاری مقدار بالا، می‌توان حد را به راحتی محاسبه کرد.

راه حل دوم. (لُپیتال) می‌دانیم که $\lim_{x\to ۰} x-\sin x = ۰$ و $\lim_{x\to ۰} x^۳ = ۰$ و توابع صورت و مخرج هر دو مشتق‌پذیرند، پس می‌توان از قاعده‌ی لُپیتال بهره‌جست:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^۳} \overset{\text{لُپیتال}}{=} \lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{۳x^۲} \overset{\text{لُپیتال}}{=} \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{۶x} \overset{\text{لُپیتال}}{=} \lim_{x\to ۰}\frac{\cos x}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

□

.۵

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\ln x}{x^۲-۱}$$

پاسخ.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\ln x}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\underbrace{\frac{\ln x}{x-۱}}_{\lim_{x\to ۱}\frac{\ln x}{x-۱}=۱}\frac{۱}{x+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{۱+x}=\frac{۱}{۲}$$

راه حل با استفاده از لُپیتال:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\ln x}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{x}}{۲x}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{۲x^۲}=\frac{۱}{۲}$$

□

.۶

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^۲}$$

پاسخ. به عهده‌ی شما. □

.۷

$$\lim_{x\to ۰}\frac{e^{\sin x}-۱}{x}$$

پاسخ. به راحتی می‌توان دریافت که حد بالا مبهم از نوع صفر صفرم است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{e^{\sin x}-۱}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(\cos x)e^{\sin x}}{۱}=۱$$

□

.۸

$$\lim_{x\to ۰}\frac{|x|^x-۱}{x}$$

پاسخ.

توجه ۷. $\lim_{x\to ۰} |x|^x = ۱$ قبلا اثبات شده است.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{|x|^x - ۱}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{e^{x\ln|x|} - ۱}{x}$$

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > ۰ \\ \ln(-x) & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ -۱ \times \frac{۱}{x} = \frac{۱}{x} & x < ۰ \end{cases}$$

پس اگر $x \neq ۰$ آنگاه

$$(\ln|x|)' = \frac{۱}{x}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{e^{x\ln|x|} - ۱}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{(\ln|x| + \frac{۱}{x}x)e^{x\ln|x|}}{۱}$$

$$A = \lim_{x\to ۰} (\ln|x| + ۱)e^{x\ln|x|}$$

$$\lim_{x\to ۰} x\ln|x| = \lim_{x\to ۰} x\ln x = \lim_{t\to -\infty} e^t \times t = \lim_{u\to\infty} \frac{-u}{e^u} = ۰$$

$$\lim_{x\to ۰} e^{x\ln|x|} = ۱$$

$$\lim_{x\to ۰} (\ln|x| + ۱) = \infty$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to ۰} A = \infty$$

□

ادامه‌ی بحث تابع اولیه

یادآوری ۸. می‌گوییم تابع F یک تابع اولیه برای تابع f است در بازه‌ی I هرگاه

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

اگر F یک تابع اولیه برای f باشد، آنگاه برای هر ثابت c، تابعِ $F+c$ هم یک تابع اولیه برای f است. [۲] در این حالت می‌نویسیم:

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + c$$

به بیان دیگر، فرض کنید $u = f(x)$ آنگاه داریم

$$du = f'(x)dx$$

و

$$\int du = u + c$$

مثال ۹. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱.

$$\forall n > ۰ \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + c$$

۲.

$$\forall n > ۰ \quad \sqrt[n]{x}dx = \int x^{\frac{۱}{n}}dx = \frac{x^{n+۱}}{\frac{۱}{n}+۱} = \frac{x^{\frac{n+۱}{n}}}{\frac{n+۱}{n}} = \frac{n}{n+۱}\sqrt[n]{x^{n+۱}}$$

توجه ۱۰.

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{۱}{n}})' = \frac{۱}{n}x^{\frac{۱}{n}-۱} = \frac{۱}{n}x^{\frac{۱-n}{n}} = \frac{۱}{n\sqrt[n]{x^{n-۱}}}$$

بنابراین:

$$\int \frac{۱}{n\sqrt[n]{x^{n-۱}}}dx = \sqrt[n]{x} + c$$

۳.

$$\int \frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + c$$

۴.

$$\int e^x dx = e^x + c$$

[۲] در ادامه‌ی همین جلسه، ثابت کرده‌ایم که هر تابع اولیه‌ای برای f لزوماً به شکلِ $F+c$ است.

شاید دانشجوی زیرک از خود بپرسد که آیا ممکن است که حاصلِ $\int f(x)dx$ هم تابعِ F بشود و هم یک تابع دیگرِ G ؟ به عبارت دیگر آیا ممکن است که توابعِ F و G هر دو مشتقی برابر با f داشته باشند؟ پاسخ این سوال این است که اگر

$$\forall x \in I \quad F'(x) = G'(x)$$

آنگاه ثابتی چون c موجود است، به طوری که $F(x) = G(x) + c$. پس حاصلِ $\int f(x)dx$ هر چه باشد، به صورت $F(x) + c$ است. گفته‌ی بالا را در زیر ثابت کرده‌ایم:

یادآوری ۱۱. فرض کنید $F'(x) = f(x)$ و $G'(x) = f(x)$ یعنی

$$\forall x \quad F'(x) = G'(x)$$

آنگاه

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

پس $F - G$ تابع ثابتی است یعنی

$$\exists c \quad F = G + c$$

۵.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

۶.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \sinh^{-1}(x) + c$$

ادعّا. $(\sinh^{-1}(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

تابع $\sinh x$ در $\mathbb{R}$ صعودی و مشتق‌پذیر است. بنا به قضیه‌ی مشتق تابع وارون.

اگر داشته باشیم $y = \sinh x$ آنگاه

$$(\sinh^{-1}(y))' = \frac{1}{(\sinh)'(x)} = \frac{1}{\cosh(x)}$$

یادآوری ۱۲.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

پس

$$\frac{۱}{\cosh(x)} = \frac{۱}{\sqrt{۱+\sinh^{۲} x}}$$

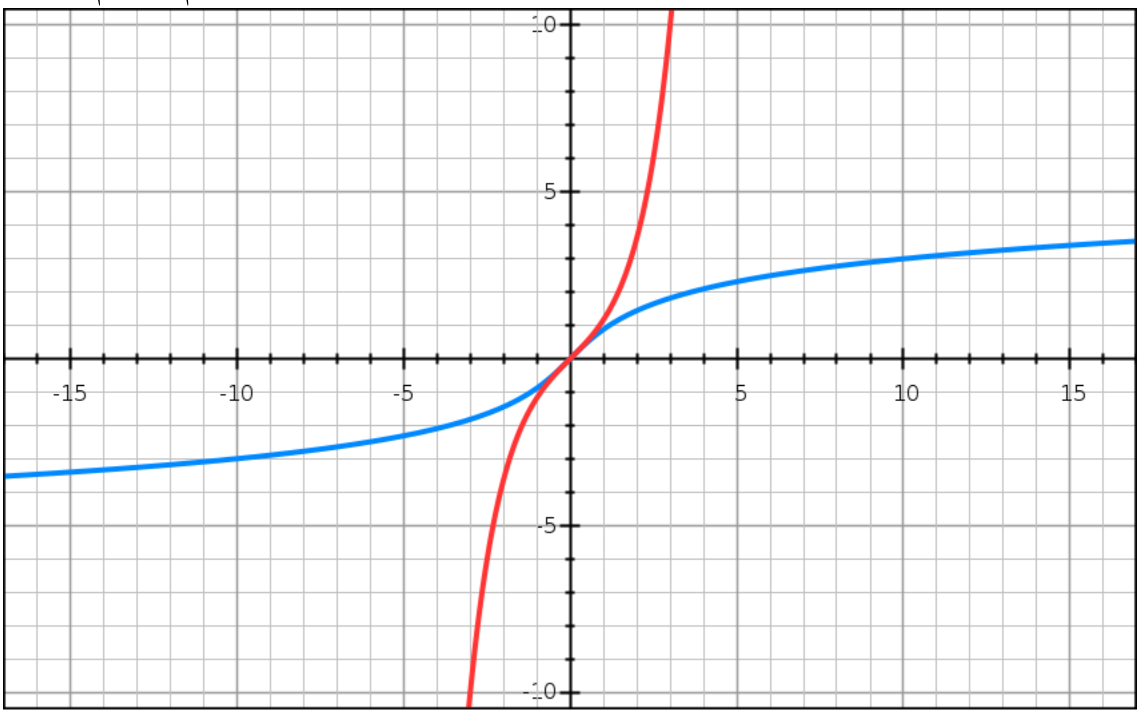
نتیجه

$$(\sinh^{-۱}(y))' = \frac{۱}{۱+y^{۲}}$$

پس

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}dx = \sinh^{-۱}(x) + c$$

در زیر نمودارهای $\sinh$ و $\sinh^{-۱}$ را به ترتیب با رنگهای قرمز و آبی رسم کرده‌ایم:



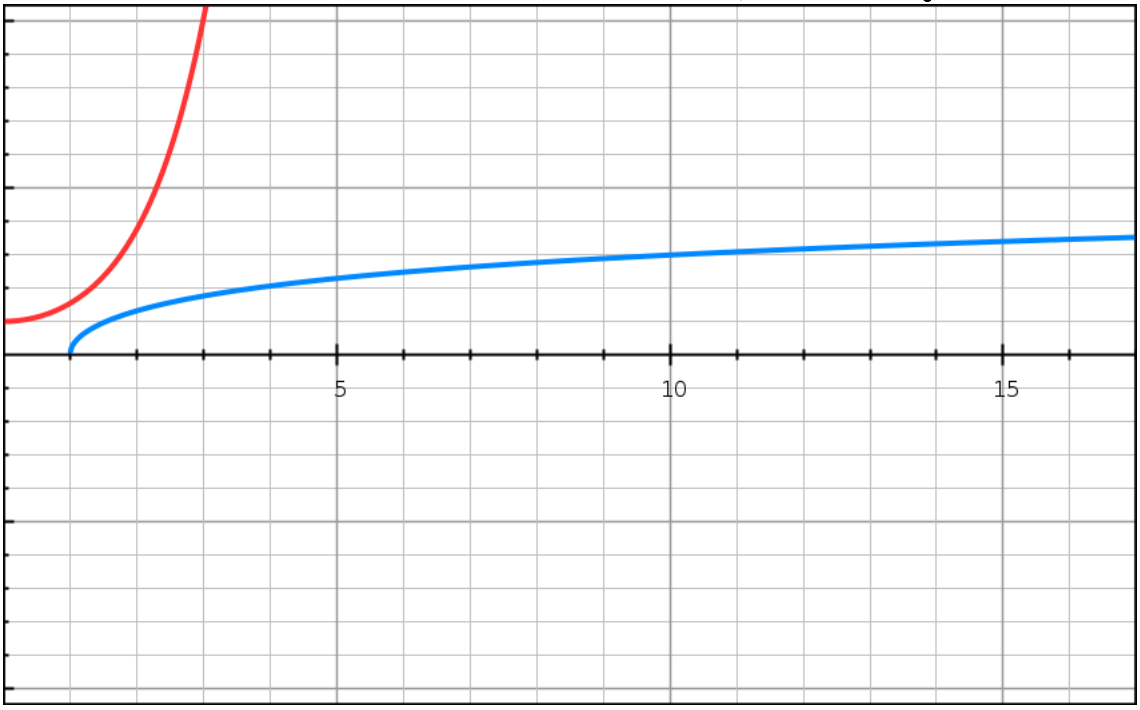
۷.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}dx = \cosh^{-۱}(x) + c$$

اثبات. تابع $\cosh x$ در $x > ۰$ صعودی است. از آنجا که $y = \cosh x$ پس داریم:

$$(\cosh^{-۱}(y))' = \frac{۱}{(\cosh)'(x)} = \frac{۱}{\sinh x} = \frac{۱}{\sqrt{۱-\cosh^{۲} x}} = \frac{۱}{\sqrt{y^{۲}-۱}}$$

نمودارهای $\cosh, \cosh^{-۱}$:



$\square$

.۸

$$\int \sin(ax)dx = -\frac{۱}{a}\cos(ax) + c$$

.۹

$$\int \cos(ax)dx = \frac{۱}{a}\sin(ax) + c$$

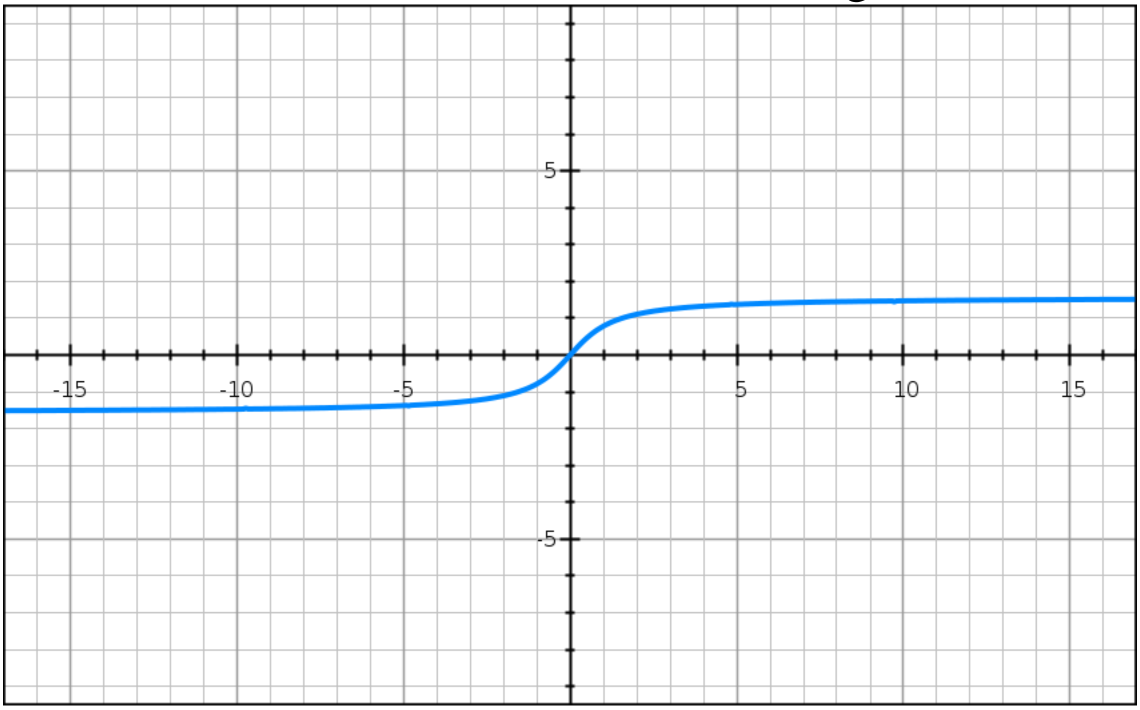
.۱۰

$$\int \frac{۱}{۱+x^{۲}}dx = \tan^{-۱}(x) + c$$

اثبات. از آنجا که داریم $y = \tan x$ پس

$$(\tan^{-۱}(y))' = \frac{۱}{(\tan)'(x)} = \frac{۱}{۱+\tan^{۲} x} = \frac{۱}{۱+y^{۲}}$$

نمودار تابع $\tan^{-۱}$:



$\square$

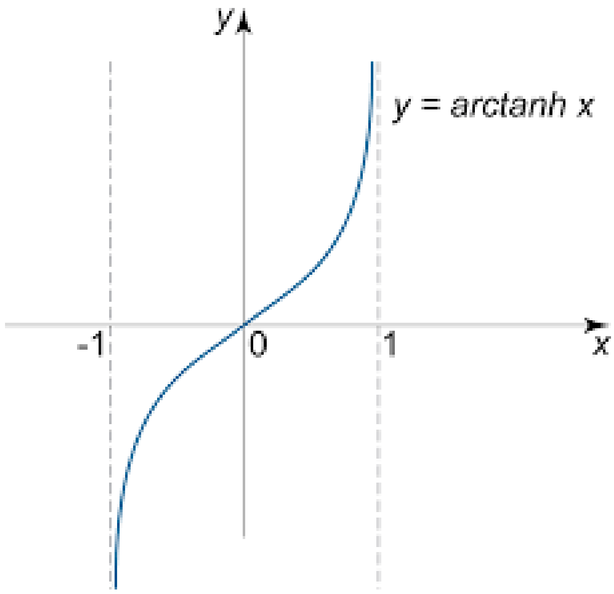
.۱۱

$$\int \frac{۱}{۱ - x^۲} dx = \tanh^{-۱}(x) + c$$

اثبات. بنا به قضیه‌ی مشتق تابع وارون، برای $x \in (-۱, ۱)$ داریم

$$(\tanh^{-۱})'(x) = \frac{۱}{۱ - x^۲}$$

نمودار تابع $\tanh^{-۱}$:



□

.۱۲

$$\int \frac{۱}{x}dx = \ln|x| + c$$

توجه ۱۳. در بالا گفتیم که

$$\int \frac{۱}{۱-x^۲}dx = \tanh^{-۱}(x) + c$$

در زیر می‌خواهیم انتگرال فوق را به روش دیگری محاسبه کنیم:

$$\int \frac{۱}{۱-x^۲}dx = \frac{۱}{۲}\int (\frac{۱}{۱-x} + \frac{۱}{۱+x})dx$$

زیرا

$$\frac{۱}{۱-x} + \frac{۱}{۱+x} = \frac{۱+x+۱-x}{۱-x^۲} = \frac{۲}{۱-x^۲}$$

پس

$$\int \frac{۱}{۱-x^۲}dx = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{۱-x}dx + \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{۱+x}dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $u = ۱ - x$ داریم:

$$du = -dx$$

پس

$$\int \frac{۱}{۱-x}dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u|$$

پس داریم:

$$\int \frac{۱}{۱-x}dx = -\ln|۱-x|$$

حال قرار دهید:

$$t = ۱+x \Rightarrow dt = dx$$

$$\frac{۱}{۱+x}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|۱+x|$$

پس

$$\int \frac{۱}{۱-x^۲}dx = \frac{۱}{۲}\ln|۱+x| - \frac{۱}{۲}\ln|۱-x| + c.$$

پس اینگونه شده است که از طرفی:

$$\int \frac{۱}{۱-x^۲}dx = \tanh^{-۱}(x) + c$$

و از طرفی دیگر

$$\int \frac{۱}{۱-x^۲}dx = \frac{۱}{۲}\ln|۱+x| - \frac{۱}{۲}\ln|۱-x| + c.$$

از آنجا که حاصل انتگرال، به پیمانه‌ی یک ثابت c یکتا است، داریم:

$$(\tanh^{-۱})(x) = \frac{۱}{۲}\ln|\frac{۱+x}{۱-x}| + c$$

با قرار دادن $x = ۰$ می‌بینیم که $c = ۰$. پس ثابت کرده‌ایم که

$$(\tanh^{-۱})(x) = \frac{۱}{۲}\ln|\frac{۱+x}{۱-x}|$$

توجه ۱۴.

$$\int du = u + c$$

$$u = f(g(x)) \Rightarrow du = g'(x)f'(g(x))dx$$

$$\int g'(x)f'(g(x))dx = f(g(x)) + c$$

مثال ۱۵. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^۲}{۱+x^۳}$$

پاسخ.

$$t = ۱ + x^۳ \Rightarrow dt = ۳x^۲dx \Rightarrow x^۲dx = \frac{dt}{۳}$$

$$\int \frac{x^۲}{۱+x^۳}dx = \int \frac{dt}{۳t} = \frac{۱}{۳}\int \frac{dt}{t} = \frac{۱}{۳}\ln|t| + c = \frac{۱}{۳}\ln|۱+x^۳| + c$$

$\square$

مثال ۱۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \tan x dx$$

پاسخ.

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $t = \cos x$ داریم:

$$dt = -\sin x dx$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$$

$\square$

چند انتگرال مهم که دراین جلسه آموخته‌ایم:

- $$\int \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}dx = \sin^{-۱} x + c$$

- $$\int \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}dx = \sinh^{-۱}(x) + c$$

- $$\int \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}dx = \cosh^{-۱}(x)+c$$

- $$\int \frac{۱}{۱+x^{۲}}dx = \tan^{-۱}(x)+c$$

- $$\int \frac{۱}{۱-x^{۲}}dx = \tanh^{-۱}(x)+c$$