۱ جلسه‌ی شانزدهم

مثال ۱. مشتق تابع $f(x) = x^x$ را برای $x > 0$ حساب کنید.

پاسخ.

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

از آنجا که توابع $x, \ln x$ در $x > 0$ مشتق‌پذیرند، تابع $x \ln(x)$ نیز در این نقاط مشتق‌پذیر است. از آنجا که e^x در سرتاسر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، تابع به دست آمده از ترکیب آن با $x \ln(x)$ یعنی تابع $e^{x \ln x}$ در $x > 0$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x) = (\ln x + \frac{1}{x}x)e^{x \ln x} = (\ln x + 1)x^x$$

$$f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = (\ln x + 1)x^x$$

$\square$

می‌دانیم که مشتق تابعِ $x^{\frac{m}{n}}$ برابر است با $\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$. در زیر نشان داده‌ایم که مشتق تابعِ x^a برای عدد حقیقیِ دلخواهِ a برابر است با ax^{a-1}؛ و این با آنچه از مشتق انتظار داریم سازگار است.

مثال ۲. مشتق تابع $f(x) = x^a$ را حساب کنید.

پاسخ. داریم $f(x) = x^a = e^{a \ln x}$ پس

$$f'(x) = \frac{a}{x}e^{a \ln x} = \frac{a}{x}x^a = ax^{a-1}$$

$\square$

مثال ۳. مشتق تابع $f(x) = \ln |x|$ را در $x \neq 0$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

تابع فوق در تمامی $x \neq ۰$ مشتق‌پذیر است. برای $x > ۰$ مشتق تابع برابر است با

$$f'(x) = \frac{۱}{x}$$

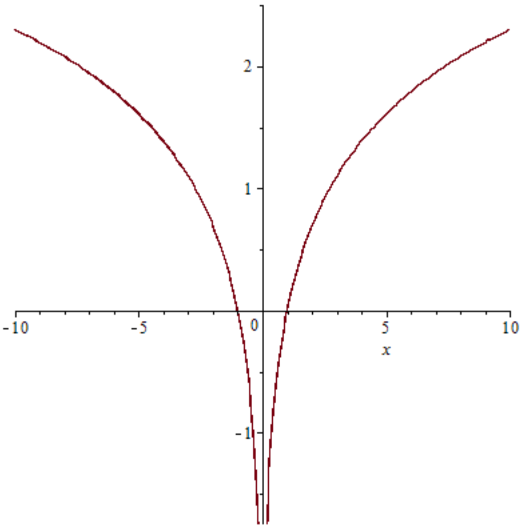
و برای $x < ۰$ مشتق تابع برابر است با

$$-۱ \times \frac{۱}{-x} = \frac{۱}{x}$$

پس اگر $f(x) = \ln|x|$ آنگاه در تمامی $x \neq ۰$ داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{x}$$

نمودار تابع $f(x) = \ln|x|$ به شکل زیر است (و این تابع در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست).



$\square$

مثال ۴. مشتق تابع $\begin{cases} x^۲ \sin\frac{۱}{x} & x > ۰ \\ \sinh x & x \leqslant ۰ \end{cases}$ را بیابید.

پاسخ. در $x > ۰$ تابع $\frac{۱}{x}$ مشتق‌پذیر است. تابع $\sin$ در تمام $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. پس تابع $\sin\frac{۱}{x}$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیر است.

تابع $x^۲$ در تمام $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و بنابراین $f(x) = x^۲ \sin\frac{۱}{x}$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیر است. پس اگر $x > ۰$ داریم:

$$f'(x) = ۲x\sin\frac{۱}{x} + (-\frac{۱}{x^۲})\cos\frac{۱}{x}(x^۲) = ۲x\sin\frac{۱}{x} - \cos\frac{۱}{x}$$

و در $x < ۰$ تابع $\sinh x$ مشتق‌پذیر است، زیرا به صورت حاصلجمعی از تابعهای مشتق‌پذیرِ e^x, e^{-x} قابل نوشتن است.

$$(\sinh x)' = \cosh(x)$$

بررسی مشتق‌پذیری تابع در نقطه‌ی $x = ۰$:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰}$$

حد بالا را از دو جهت ۰^+ و ۰^- بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{f(x) - f(۰)}{x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲ \sin\frac{۱}{x} - ۰}{x} = \lim_{x\to ۰^+} x\sin\frac{۱}{x} = ۰$$

پس

$$f'_+(۰) = ۰$$

توجه ۵.

$$-۱ \leqslant \sin\frac{۱}{x} \leqslant ۱$$

برای $x > ۰$ داریم:

$$-x \leqslant x\sin\frac{۱}{x} \leqslant x$$

برای $x < ۰$ داریم:

$$+x \leqslant x\sin\frac{۱}{x} \leqslant -x$$

بنا به فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x} = ۰$$

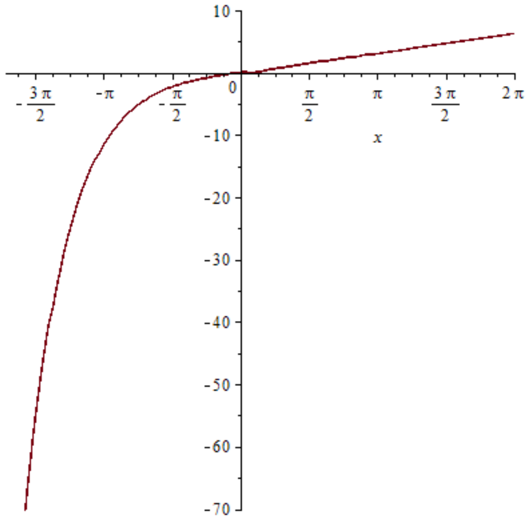
$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sinh x - \sinh ۰}{x} = (\sinh)'(۰) = \cosh(۰) = ۱$$

پس داریم:

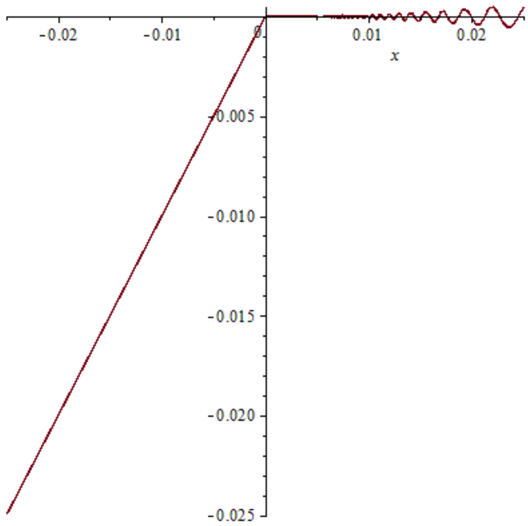
$$f'_-(۰) = ۱$$

پس تابع مورد نظر در نقطه‌ی $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ \sin \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ \sinh x & x \leqslant ۰ \end{cases}$ به شکل زیر است:



نمودار بالا را از نزدیک‌تر نگاه می‌کنیم.

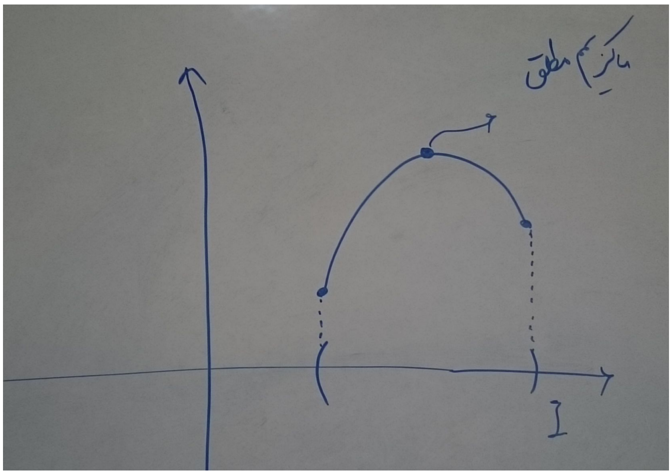


□

اِکسترِمُمهای مطلق و نسبی

تعریف ۶. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ (I بازه است) را در نظر بگیرید. می‌گوییم f در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **ماکزیمم مطلق** است، یا به ماکزیمم مطلق خود می‌رسد، هرگاه

$$\forall x \in I \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$



به طور مشابه می‌گوییم f در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **مینی‌مومِ مطلق** است، یا به مینی‌مومِ مطلق خود می‌رسد، هرگاه

$$\forall x \in I \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$

تعریف ۷. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **ماکزیمم نسبی** است، هرگاه

$$\exists \delta \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$$

و در بازه‌ی $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ نقطه‌ی x_0 یک ماکزیمم مطلق باشد. مشابهاً تابع $f : I \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x_0 \in I$ دارای **مینی‌موم نسبی** است، هرگاه

$$\exists \delta \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$$

و در بازه‌ی $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ نقطه‌ی x_0 یک مینی‌مومِ مطلق باشد.

در ادامه‌ی درس خواهیم دید که چگونه مطالعه‌ی مشتق تابع به ما کمک می‌کند که بدون رسم نمودار آن، نقاط ماکزیمم و مینی‌موم مطلق (و حتی نسبی) آن را بشناسیم. مطالعه‌ی مشتق تابع در

واقع تحلیلی از تابع به دست می‌دهد که با استفاده از آن می‌توانیم به درک مناسبی از شکل هندسی آن تابع برسیم.

قضیه ۸. فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی $x_{\circ}$ تعریف شده و در $x_{\circ}$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، آنگاه اگر تابع f در $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر باشد، خواهیم داشت:

$$f'(x_{\circ}) = \circ$$

اثبات. فرض کنید که

$$\forall x \in (x_{\circ} - \delta, x_{\circ} + \delta) \quad f(x) \leqslant f(x_{\circ})$$

آنگاه

$$\forall x \in (x_{\circ} - \delta, x_{\circ} + \delta) \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}} \leqslant \circ & x > x_{\circ} \\ \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}} \geqslant \circ & x < x_{\circ} \end{cases}$$

یادآوری ۹. اگر $\lim_{x\to x_{\circ}} f(x) = L > \circ$ آنگاه تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی $x_{\circ}$ مثبت است. بنابراین اگر تابع f در یک همسایگی از نقطه‌ی $x_{\circ}$ کمتر یا مساوی صفر باشد، حد آن در $x_{\circ}$ نیز کمتراز یا مساوی با ۰ است و این حد نمی‌تواند مثبت باشد.

$$\forall x \in (x_{\circ} - \delta, x_{\circ} + \delta) \quad f(x) \leqslant \circ \Rightarrow \lim_{x \to x_{\circ}} f(x) \leqslant \circ$$

$$\forall x \in (x_{\circ} - \delta, x_{\circ} + \delta) \quad f(x) \geqslant \circ \Rightarrow \lim_{x \to x_{\circ}} f(x) \geqslant \circ$$

بنا بر آنچه در بالا گفته‌ایم $\lim_{x\to x_{\circ}^+} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}$ در صورت وجود کمتراز یا مساوی با صفر است. به طور مشابه $\lim_{x\to x_{\circ}^-} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}$ در صورت وجود بزرگتر از یا مساوی با صفر است. پس اگر $f(x)$ در نقطه‌ی $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر باشد $f'(x) \geqslant \circ$ و $f'(x) \leqslant \circ$. بنابراین

$$f'(x) = \circ$$

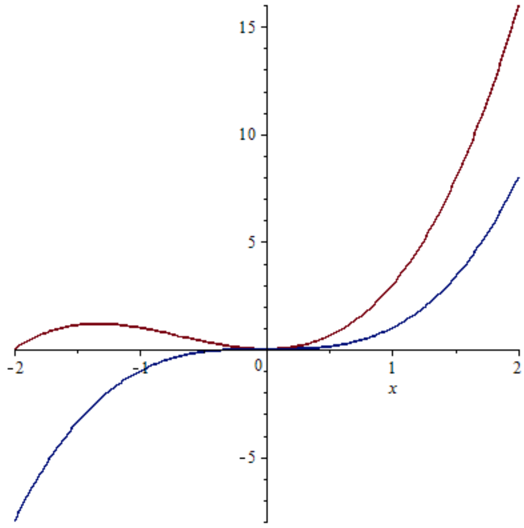
توجه ۱۰. لزوماً در هر نقطه که مشتق صفر شود اکسترمم نسبی نداریم. مشتق تابع

$$f(x) = x^{\text{۳}}$$

در نقطه‌ی ۰ برابر با صفر است ولی این تابع در این نقطه هیچ نوع اکسترممی ندارد.

□

مثال ۱۱. فرض کنید که توابع $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشند و برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) \leqslant g(x)$. نشان دهید که اگر در نقطه‌ی $x_{\circ}$ داشته باشیم $f(x_{\circ}) = g(x_{\circ})$ آنگاه $f'(x_{\circ}) = g'(x_{\circ})$.



پاسخ. تابع $h(x) = g(x) - f(x)$ را در نظر بگیرید که در تمام $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \geqslant \circ$$

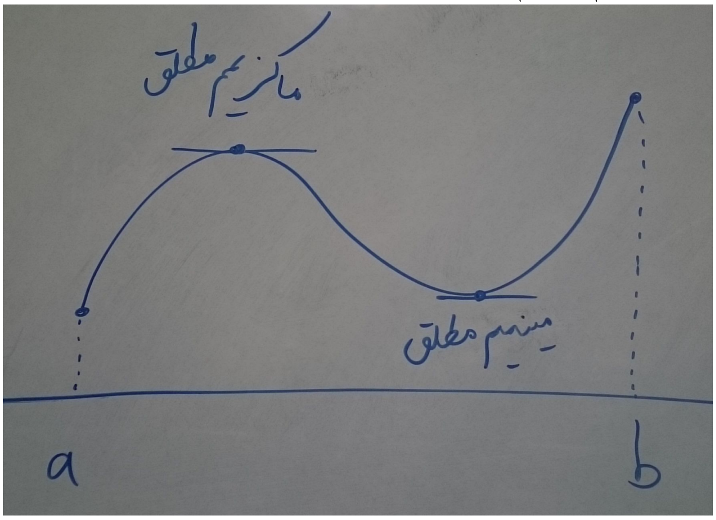
حال اگر $f(x_{\circ}) = g(x_{\circ})$ آنگاه $h(x_{\circ}) = \circ$ پس $x_{\circ}$ یک مینیمم نسبی برای تابع h است. پس

$$h'(x_{\circ}) = \circ \Rightarrow f'(x_{\circ}) = g'(x_{\circ})$$

□

هرچند قضیه‌ی زیر ساده و طبیعی به نظر می‌رسد، ولی تلاش من برای نوشتن اثباتی مناسب برای آن، بی‌نتیجه ماند. منظورم از اثباتی مناسب اثباتی است که در آن تنها از اطلاعات درس ریاضی عمومی ۱ استفاده شده باشد و آن اثبات قابل ارائه در کلاس باشد.

قضیه ۱۲. اگر تابع f در **بازه‌ی بسته‌ی کراندارِ** $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.



توجه ۱۳. شرط بسته بودن بازه لازم است.

مثال ۱۴. تابع $\frac{1}{x}$ در بازه‌ی (۰, ۱) دارای ماکزیمم مطلق نیست.

به بیان دیگر اگر f یک تابع پیوسته باشد و $[a,b]$ یک بازه‌ی بسته باشد آنگاه $\exists c,d$ که

$$f([a,b]) = [c,d]$$

توجه ۱۵. اثبات اینکه $f([a,b])$ به صورت بازه است با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانی صورت می‌گیرد ولی اثبات اینکه $f([a,b])$ لزوماً یک **بازه‌ی بسته** است، کار آسانی نیست.

توجه ۱۶. فرض کنید که تابع f در یک بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد. از آنجا که تابع مورد نظر در این بازه پیوسته است، پس قطعاً در این بازه دارای اکسترممهای مطلق است. برای تعیین اکسترمم‌های مطلق یک تابع ابتدا نقاطی را تعیین می‌کنیم که در آنها مشتق تابع وجود ندارد یا برابر صفر است (به این نقاط، نقاط بحرانی می‌گوئیم). سپس $f(x)$ را در این نقاط و در نقاط انتهایی بازه حساب می‌کنیم و در میان آنها اکسترمم‌های مطلق را شناسایی می‌کنیم.

مثال ۱۷. اکسترمم‌های مطلق تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}|x|^x & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}\qquad x\in[-۱,۳]$$

پاسخ. نخست باید بررسی کنیم که تابع داده شده در آن بازه پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}x^x & x>۰\\ (-x)^x & x<۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$$

در $x>۰$ تابع مورد نظر پیوسته است، چون برابر است با $e^{x\ln x}$؛ یعنی ترکیبی از توابع پیوسته است. در $x<۰$ نیز به همین ترتیب. بررسی این که تابع f در $x=۰$ پیوسته است:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} e^{x\ln x}$$

با استفاده از تغییر متغیر $x=e^t$ داریم:

$$\lim_{t\to -\infty} e^{e^t\times t}$$

و با تغییر متغیر $t=-u$ داریم:

$$\lim_{u\to +\infty} e^{e^{-u}\times(-u)}=\lim_{u\to +\infty}\frac{-u}{e^u}=۱$$

به طور مشابه نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۱$$

یعنی تابع مورد نظر ما در بازه‌ی $[-۱,۳]$ پیوسته است. مشتق تابع به صورت زیر است:

$$f'(x)=\begin{cases}(\ln x+۱)x^x & x>۰\\ (\ln(-x)+۱)(-x)^x & x<۰\\ \text{بررسی نمی‌کنیم} & x=۰\end{cases}$$

نقاطی که در آن مشتق تابع صفر است (یا وجود ندارد)

۱. احیاناً نقطه‌ی $x=۰$

۲. در $x>۰$ برای اینکه مشتق صفر شود باید داشته باشیم:

$$\ln x=-۱\Rightarrow x=e^{-۱}$$

۳. در $x<۰$ برای اینکه مشتق صفر شود باید داشته باشیم:

$$\ln(-x)=-۱\Rightarrow -x=e^{-۱}\Rightarrow x=-e^{-۱}$$

مقادیر تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی و نقاط بحرانی:

$$x=-۱\Rightarrow ۱^{-۱}=۱$$

$$x=۳\Rightarrow ۳^{۳}=۲۷$$

$$x=۰\Rightarrow f(x)=۱$$

$$x=e^{-۱}\Rightarrow e^{x\ln x}=e^{-e^{-۱}}=e^{-\frac{۱}{e}}=\frac{۱}{e^{\frac{۱}{e}}}$$

$$x=-e^{-۱}\Rightarrow e^{x\ln(-x)}=e^{+e^{-۱}}=\frac{۱}{e^{e}}$$

می دانیم که

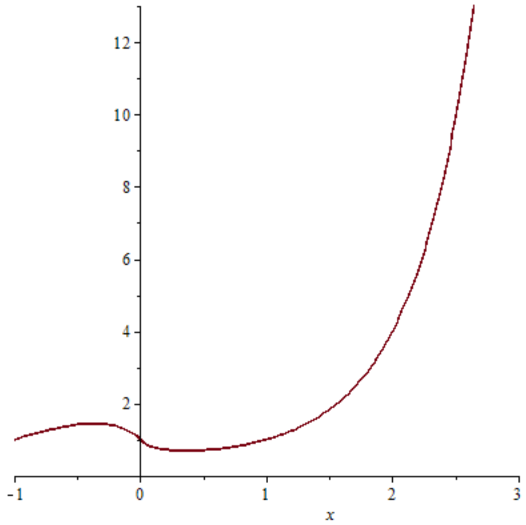
$$e>۱^{e}\Rightarrow \sqrt[e]{e}>۱\Rightarrow \frac{۱}{e^{\frac{۱}{e}}}<۱$$

پس نقطه‌ی $-e^{-۱}$ نقطه‌ی مینی‌موم مطلق است. همچنین داریم

$$\sqrt[e]{e}\leqslant ۳^{۳}$$

پس نقطه‌ی $x=۳$ نقطه‌ای است که در آن ماکزیمم مطلق داریم.

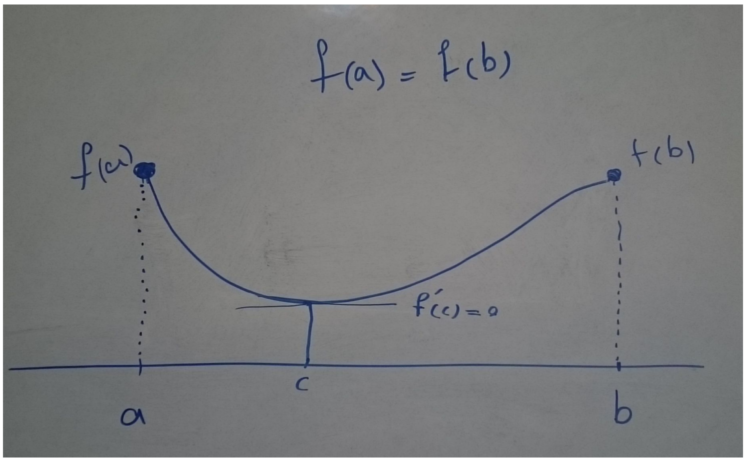
شکل تابع $x\in[-۱,۳]$ $\quad f(x)=\begin{cases}|x|^{x} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$ به صورت زیر است:



□

قضیه ۱۸ (رُل)**.** فرض کنید که تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(a)=f(b)$ آنگاه

$$\exists x \in (a,b) \quad f'(x) = ۰.$$



اثبات. تابع f بنا به پیوستگی در بازه‌ی $[a,b]$ دارای مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق است. اگر یکی از ایندو در نقاط انتهایی نباشد در آن نقطه مشتق صفر است. حالت دیگر این است که یکی از a و b ماکزیمم مطلق و دیگری منیمم مطلق باشد، در این صورت تابع مورد نظر ثابت است و در تمام نقاط بازه‌ی $[a,b]$ مشتق آن صفر است. □

مثال ۱۹. فرض کنید تابع f در بازه‌ی بازِ I پیوسته باشد و

$$\forall x \in I \quad f'(x) \neq ۰$$

آنگاه نشان دهید که معادله‌ی $f(x) = ۰$ در بازه‌ی I حداکثر یک ریشه دارد.

اثبات. اگر معادله‌ی $f(x) = ۰$ بیش از یک ریشه داشته باشد، بنا به قضیه‌ی رُل مشتقِ f باید در نقطه‌ای صفر شود. □

مثال ۲۰. هر چند جمله‌ای از درجه‌ی n حداکثر n ریشه در $\mathbb{R}$ دارد.

اثبات. با استقرا روی n . اگر $n = ۱$، معادله‌ی $ax+b$ دارای حداکثر یک جواب است. فرض کنیم که حکم مورد نظر برای $n = n_۰$ درست باشد. فرض کنیم چند جمله‌ای $p(x)$ از درجه‌ی $n_۰ + ۱$ باشد. فرض کنیم که $p(x)$ بیشتر یا مساوی $n_۰ + ۲$ ریشه داشته باشد. آنگاه $p'(x)$ بیشتر یا مساوی $n_۰ + ۱$ ریشه دارد. چندجمله‌ایِ $p'(x)$ از درجه‌ی $n_۰$ است و بنا به فرض استقرا نمی‌تواند بیش از $n_۰ + ۱$ ریشه داشته باشد؛ تناقض. □