۱ نیم‌جلسه‌ی پنجم

لم ۱. اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

از لم بالا می‌توان برای اثبات واگرائی برخی سریها استفاده کرد؛ زیرا بنا به لم بالا اگر $\lim a_n \neq 0$ آنگاه سریِ $\sum a_n$ واگراست.

مثال ۲. سریِ $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{2})^n$ واگراست، زیرا $\lim_{n\to\infty} (\frac{3}{2})^n \neq 0$.

اثبات لِم. فرض کنید سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. داریم

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

و

$$S_{n-1} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

از آنجا که دنباله‌ی $\{S_n\}$ همگراست داریم:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

با توجه به اینکه تفاضل دو سری برابر است با a_n داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

□

در خلال اثبات بالا از لم کوچک زیر نیز استفاده کردیم.

لم ۳. فرض کنیم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ به L همگرا باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ نیز به L همگراست.

اثبات.

$$\begin{array}{lcccccc} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_n = & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_n = & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}$$

از شکل بالا مشخص است که دنباله‌های a_n و b_n هر دو به یک حد همگرا هستند. با این حال، برای اثبات دقیق این که $\lim b_n = L$ فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. بنا به همگرائی a_n عدد N_ϵ چنان موجود است که

$$\forall n > N_\epsilon \quad |a_n - L| < \epsilon$$

پس

$$\forall n > N_\epsilon + 1 \quad |a_{n-1} - L| < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N_\epsilon + 1 \quad |b_n - L| < \epsilon.$$

$\square$

نتیجه ۴. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا نیست.

مثال ۵. عکس لِم ۱ برقرار نیست. دنباله‌ی $\frac{1}{n}$ مثال نقض است:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

و جلسه‌ی قبل دیدیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست.

مثال ۶. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید. فرض کرده‌ایم که $a > 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+a^n}}$$

پاسخ. در جلسه‌های قبل ثابت کرده‌ایم که

$$\lim \sqrt[n]{1+a^n} = a$$

پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+a^n}} = \frac{1}{a} \neq 0$$

در نتیجه سری مورد نظر واگرا است. $\square$

لم ۷. اگر سریهای $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ به ترتیب به A و B همگرا باشند، آنگاه

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_n+\sum_{n=۰}^{\infty}b_n$$

و

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\lambda a_n=\lambda\sum_{n=۰}^{\infty}a_n \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

مثال ۸. آیا سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^{n+۱}+۳^{n+۱}}{۴^n}$ همگراست؟

پاسخ.

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^{n+۱}+۳^{n+۱}}{۴^n}=\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۴})^n\times ۲+\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۳}{۴})^n\times ۳=$$

$$۲\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۴})^n+۳\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۳}{۴})^n=۲\times\frac{۱}{۱-\frac{۲}{۴}}+۳\times\frac{۱}{۱-\frac{۳}{۴}}=۴+۱۲=۱۶$$

توجه کنید که از آنجا که حدهای $\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۴})^n\times ۲$ و $\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۳}{۴})^n\times ۳$ موجودند مجازیم که از لم بالا استفاده کنیم. □

مثال ۹. واگرایی یا همگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^n+۳^n}{۲^{n+۱}+۳^{n+۱}}$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲^n+۳^n}{۲^{n+۱}+۳^{n+۱}}=\lim\frac{(\frac{۲}{۳})^n+۱}{(\frac{۲}{۳})^n\times ۲+۳}\neq ۰$$

بنابراین سری مورد نظر واگراست. توجه کنید که در بالا صورت و مخرج را بر ۳^n تقسیم کرده‌ایم.

□

۱.۱ آزمون مقایسه

قضیه ۱۰. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به طوری که

$$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{۰\}\quad ۰\leqslant a_n\leqslant b_n$$

آنگاه اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

اثبات. فرض می‌کنیم b_n ،$\sum_{n=0}^{\infty}$ همگرا باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که a_n ،$\sum_{n=0}^{\infty}$ هم همگراست. فرض کنیم $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ باید نشان دهیم که دنباله‌ی S_n همگراست. اولاً $\{S_n\}$ صعودی است زیرا در هر مرحله بدان جملات مثبت اضافه می‌شوند.

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$$

برای اثبات همگرائی S_n کافی است نشان دهیم که S_n از بالا کراندار است. قرار دهید:

$$S'_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

از آنجا که $\sum b_n$ همگراست می‌دانیم که S'_n همگراست. بنابراین S'_n کراندار است. داریم: $S_n \leqslant S'_n$ پس S_n نیز کراندار است. □

لم ۱۱. اگر a_n همگرا باشد، آنگاه a_n کراندار است.

اثبات. برای $\epsilon = 1$ می‌دانیم که N_1 چنان موجود است که

$$\forall n > N_1 \quad L - 1 < a_n < L + 1$$

پس می‌توان یک عدد مثبت M چنان پیدا کرد که

$$\forall n > N_1 \quad |a_n| < M.$$

حال می‌دانیم که مجموعه‌ی $A = \{a_0, \ldots, a_{N_1}\}$ نیز کراندار است، زیرا متناهی است. پس فرض کنیم که

$$\forall x \in A \quad |x| < M_1$$

بنابراین $\max\{M, M_1\}$ کرانِ دنباله‌ی مورد نظر ماست. □

مثال ۱۲. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

گفتیم که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست. در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ نیز همگراست. □

عکس نقیضِ قضیه‌ی ۱۰ به صورت زیر است:

قضیه ۱۳. $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به طوری که

$$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\quad 0\leqslant a_n\leqslant b_n$$

آنگاه اگر $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ نیز واگراست.

$$a_n\leqslant b_n\Rightarrow(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mapsto\infty\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}b_n\mapsto\infty)$$

مثال ۱۴. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. اولاً $\frac{1}{n}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}$ ثانیاً $\sum\frac{1}{n}$ واگراست پس $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ نیز واگراست. □

مثال ۱۵. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n}}$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n}}\overset{\text{مخرج را بزرگ کرده ایم تا کسر کوچک شود.}}{\geqslant}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2}\times n^{\frac{2}{3}}}\geqslant\frac{1}{n}$$

از آنجا که $\frac{1}{n}$ واگراست، سری مورد نظر نیز واگراست. □