۱ جلسه‌ی بیست و دوم

تابع وارون و مشتق‌پذیری

فرض کنید تابع g و f هر دو توابعی مشتق‌پذیر باشند و بدانیم که

$$\forall x \quad g(f(x)) = x$$

آنگاه با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$f'(x) \times g'(f(x)) = 1$$

پس

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

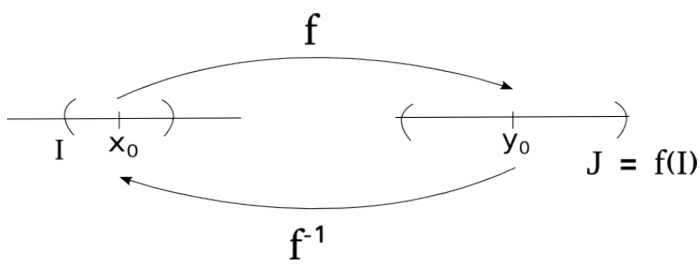
پس اگر بدانیم که f^{-1} (وارون تابع f) مشتق‌پذیر است، آنگاه در نقطه‌ی $y_0 = f(x_0)$ داریم:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

در زیر محکی ارایه کرده ایم که طبق آن، می‌توان مشتق‌پذیری f^{-1} را در برخی نقاط بررسی کرد.

قضیه ۱. فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی باشد (پس f^{-1} موجود، صعودی و پیوسته است). فرض کنید $f^{-1} : J \to I$ تابع وارون f باشد. اگر f در نقطه‌ی $x_0 \in I$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(x_0) \neq 0$ آنگاه f^{-1} در نقطه‌ی $y_0 = f(x_0)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$



اثبات. می‌دانیم که f در x_0 مشتق‌پذیر است. تابع H را به صورت زیر تعریف کنید.

$$H(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

تابع H در نقطه‌ی x_0 پیوسته است. همچنین داریم:

$$x \neq x_0 \Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0) \quad (*)$$

توجه ۲. برای آنکه f^{-1} در y_0 مشتق‌پذیر باشد، باید حدّ زیر موجود باشد:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

در رابطه‌ی $(*)$ قرار دهید $x = f^{-1}(y)$ و $x_0 = f^{-1}(y_0)$. داریم:

$$f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0)) = H(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$$

در نتیجه داریم:

$$y - y_0 = H(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$$

پس:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{H(f^{-1}(y))}$$

از آنجا که H تابعی پیوسته است و $H(x_0) = f'(x_0) \neq 0$، تابع H در یک همسایگی نقطه‌ی x_0 مخالف صفر است، یعنی قرار دادن H در مخرج عبارت بالا (حداقل برای y هایی که در یک همسایگیِ به اندازه‌ی کافی کوچک از y_0 هستند) بلااشکال است. داریم:

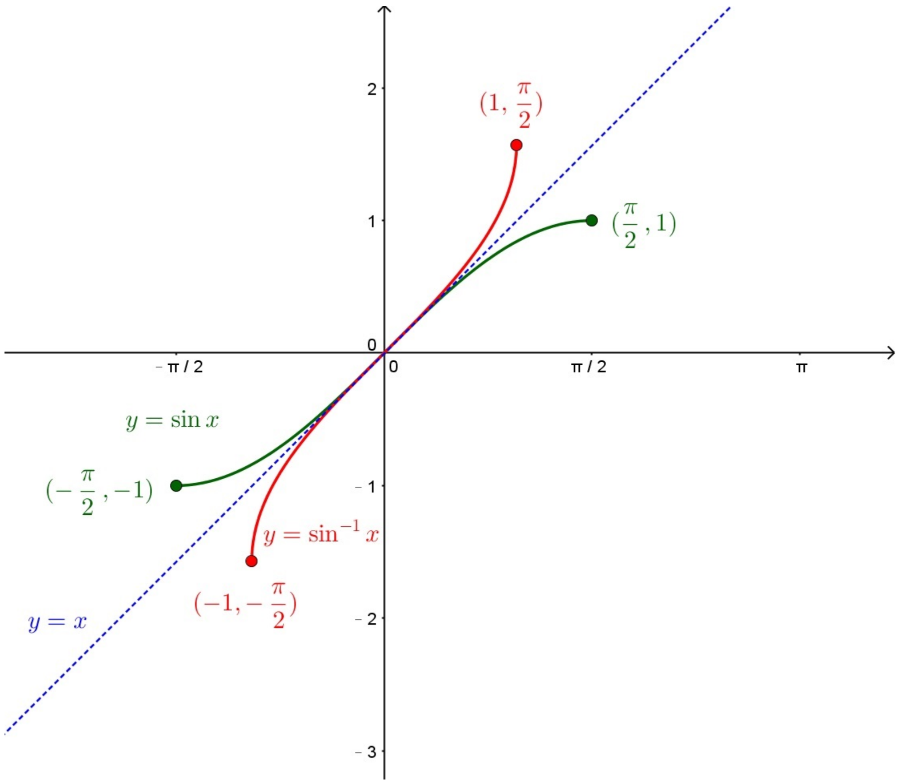
$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim_{y \to y_0} H(f^{-1}(y))}$$

از آنجا که f تابعی اکیداً صعودی و پیوسته است و H پیوسته است:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{1}{H(f^{-1}(y))} = \frac{1}{H(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

مثال ۳. تابع $f(x) = \sin x$ را در نظر بگیرید. تابع f در کُلِّ دامنه یک به یک نیست اما در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ تابع $\sin x$ پیوسته، مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی است. پس بنا به قضیه ی بالا $\sin^{-۱} y$ در بازه‌ی $(-۱, ۱)$ مشتق‌پذیر است. (به باز بودن بازه دقت کنید).



توجه ۴. از آنجا که $f'(\frac{\pi}{۲}) = ۰$ و $f'(-\frac{\pi}{۲}) = ۰$ بنا به قضیه ی بالا، نقاط ۱ و ۱− در **دامنه‌ی مشتق‌پذیری** تابع $\sin^{-۱} x$ قرار نمی گیرند.

$$\sin x : [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}] \to [-۱, ۱]$$

$$\sin^{-۱} y : [-۱, ۱] \to [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$$

بررسی بیشتر مثال بالا. علت مشتق‌پذیری $\sin^{-۱}$:

$\sin x$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ مخالف صفر است. پس بنا به قضیه‌ی قبل $\sin^{-۱} y$ در بازه ی $(-۱, ۱)$ مشتق‌پذیر است. بنا به قضیه بالا، اگر $y_۰ = \sin(x_۰)$ آنگاه

$$\forall y_۰ \in (-۱, ۱) \quad (\sin^{-۱})'(y_۰) = \frac{۱}{\sin'(x_۰)} = \frac{۱}{\cos(x_۰)} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \sin^۲(x_۰)}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - y_۰^۲}}$$

توجه کنید که از آن جا که در $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ تابع $\cos x$ مثبت است، در این بازه داریم $\cos(x) = \sqrt{۱ - \sin^۲(x)}$ (در غیر این صورت باید می نوشتیم $\cos(x) = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲(x)}$)

□

خلاصه ۵.

$$\forall x \in (-۱, ۱) \quad (\sin^{-۱})'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

تابع اولیه

توجه ۶. در حساب، به دلایلی که در درسهای آینده آنها را خواهیم دید، به همان اندازه که به دست آوردن مشتق یک تابع مهم است دانستن اینکه مشتق چه تابعی برابر با f است، مهم است.

تعریف ۷. می‌گوییم F تابع اولیّه‌ی تابع f است (در بازه‌ی I) هرگاه

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

توجه ۸. اگر F تابع اولیّه‌ای برای f باشد، $F + c$ نیز تابع اولیّه‌ای برای f خواهد بود. منظور از c یک ثابت است.

نمادگذاری ۹. اگر F تابع اولیه‌ی f باشد، می‌نویسیم:

$$F + c = \int f(x)dx$$

پس داریم

$$(F + c)' = f(x)$$

علت استفاده از نماد $\int$ برای نشان دادن تابع اولیه را در درسهای بعدی خواهیم گفت.

مثال ۱۰. فرض کنید $f(x) = \frac{۱}{۱-x^۲}$ آنگاه بنا بر آنچه که در بالا ثابت کرده‌ایم:

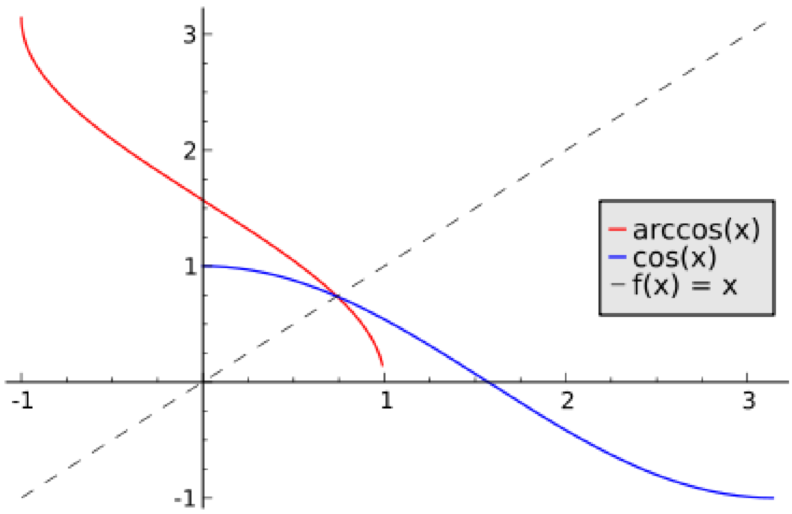
$$\int f(x)dx = \int \frac{۱}{۱ - x^۲}dx = \sin^{-۱}(x) + c \quad (\forall x \in (-۱, ۱))$$

مثال ۱۱. تابع $f(x) = \cos x$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ اکیداً نزولی، پیوسته و مشتق‌پذیر است و مشتق آن در $(0, \pi)$ مخالف صفر است. پس اگر $y_0 \in (-1, 1)$ و $y_0 = \cos x_0$ آنگاه

$$(\cos^{-1})'(y_0) = \frac{1}{(\cos)'(x_0)} = \frac{1}{-\sin x_0} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{-\sqrt{1-y_0^2}}$$

پس داریم:

$$\forall x \in (-1, 1) \qquad \int \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x + c$$



همان طور که در بالا مشاهده می‌کنید

$$\int \frac{1}{1-x^2} = \sin^{-1}(x) + c \qquad \int -\frac{1}{1-x^2} = \cos^{-1}(x) + c$$

یعنی

$$(\cos^{-1})'(x) + (\sin^{-1})'(x) = 0$$

در زیر نشان داده‌ایم که از این نتیجه می‌شود که ثابتی وجود دارد مانند c به طوری که

$$(\cos^{-1})(x) + (\sin^{-1})(x) = c.$$

توجه ۱۲. فرض کنید F و G در یک بازه‌ی I توابعی مشتق‌پذیرند و $\forall x \in I \quad F'(x) = -G'(x)$ (پس فرض کرده‌ایم که

$$\forall x \in I \quad (F+G)'(x) = ۰$$

یعنی

$$\forall x \in I \quad F'(x) + G'(x) = ۰)$$

آنگاه $F(x) + G(x)$ تابعی ثابت است یعنی

$$F(x) + G(x) = c$$

دقت کنید که همین اتفاق برای $\sin^{-۱} y$ و $\cos^{-۱} y$ افتاده است.

بیایید عبارت بالا را به صورت زیر بیان کنیم:

لم ۱۳. فرض کنید تابع f در بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in I \quad f'(x) = ۰.$$

آنگاه تابع f در بازه‌ی I ثابت است.

اثبات. فرض کنید $x_۰ \in I$ عدد دلخواهی باشد. بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین برای هر $x \in I$ داریم:

$$\exists c \in I \quad \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰} = f'(c) \quad (**)$$

فرض قضیه به ما می‌گوید:

$$f'(c) = ۰$$

پس

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(x_۰)$$

□

نتیجه ۱۴.

$$\forall x \in (-۱, ۱) \quad \sin^{-۱}(x) + \cos^{-۱}(x) = \frac{\pi}{۲}$$

نخست توجه کنید که

$$\forall x \in (-۱, ۱) \quad (\sin^{-۱})'(x) + (\cos^{-۱})'(x) = ۰$$

پس $\sin^{-۱} + \cos^{-۱}$ در بازه‌ی $(-۱, ۱)$ تابعی ثابت است. پس

$$\forall x \in (-۱, ۱) \quad \sin^{-۱}(x) + \cos^{-۱}(x) = c.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که در واقع، $c = \frac{\pi}{۲}$. برای اثبات این گفته، فرض کنید $x \in (-۱, ۱)$ و قرار دهید

$$t = \sin^{-۱}(x), u = \cos^{-۱}(x).$$

پس

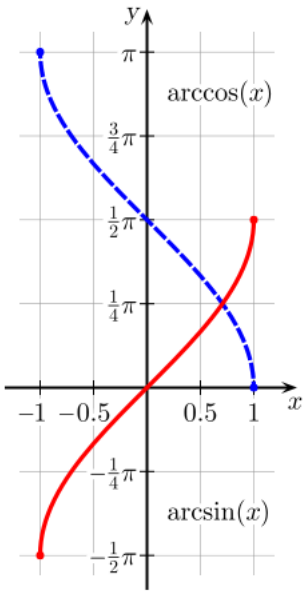
$$t \in [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}] \quad \sin(t) = x$$

$$u \in [۰, \pi] \quad \cos(u) = x$$

یعنی

$$\sin(t) = \cos(u)$$

پس $t + u = \frac{\pi}{۲}$.



چند کاربرد از قضیه‌ی مقدار میانگین

یادآوری ۱۵ (قضیه‌ی مقدار میانگین).

$$\exists c \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (***)$$

با کمک رابطه‌ی $(***)$ می‌توان رفتار یک تابع را بر حسب مشتق آن به صورت زیر تحلیل کرد:

آ. فرض کنید تابع f در بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in I \quad f'(x) > 0$$

آنگاه تابع f در بازه‌ی I اکیداً صعودی است.

علت: اگر $x_1 > x_0$:

$$\exists c \in (x_0, x_1) \quad \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(c) > 0$$

پس $f(x_1) > f(x_0)$. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که

ب. اگر $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$ تابع f اکیداً نزولی است.

ج. اگر $\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$ تابع f صعودی است.

د. اگر $\forall x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$ تابع f نزولی است.

ه. اگر $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$ آنگاه تابع f در بازه‌ی I یک تابع ثابت است.

در زیر صورت کلی‌تری از قضیه‌ی مقدار میانگین را بیان کرده‌ایم.

قضیه ۱۶ (مقدار میانگین کُشی). فرض کنید f و g بر $[a,b]$ پیوسته باشند و بر (a,b) مشتق‌پذیر. آنگاه $\exists c \in (a,b)$ به طوری که

$$(f(b)-f(a))g'(c) = f'(c)(g(b)-g(a))$$

به بیان دیگر اگر g' در (a,b) صفر نشود داریم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

اثبات.

$$h := (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$$

$$h(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b)$$

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a)$$

توجه کنید که

$$h(a) = h(b)$$

پس بنا به قضیه‌ی رُل

$$\exists c \in (a,b) \quad h'(c) = ۰$$

پس

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$$
$$\exists c \in (a,x) \quad \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

قسمت پایانی تساوی بالا، خواننده‌ی زیرک را باید به یاد قاعده‌ی لُپیتال بیندازد. بنا بر این قاعده، اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = ۰$ آنگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

البته در صورتی که حد سمت چپ موجود و یا ∞ باشد. به بیان دقیقتر:

قضیه ۱۷ (قاعده‌ی لُپیتال). فرض کنید f و g در I مشتق‌پذیر باشند و $\lim_{x\to a} f(x) = ۰$ و $\lim_{x\to a} g(x) = ۰$ و فرض کنید برای هر x در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی a داشته باشیم $g'(x) \neq ۰$. آنگاه

۱. اگر $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ آنگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

۲. اگر $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ آنگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

طرح اثبات. در زیر قضیه را برای $x \to a^+$ ثابت کرده‌ایم (حالتِ $x \to a^-$ نیز کاملاً مشابه است).
توابع F و G را به صورت زیر تعریف کنید:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$$

فرض قضیه به ما گفته است که $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ و از این نتیجه می‌شود که توابع F, G در بالا در یک بازه‌ی $[a, a+r]$ پیوسته‌اند و در $(a, a+r)$ مشتق‌پذیرند. برای $x > a$ داریم:

$$\exists c \in (a,x) \quad \frac{F(x) - \overbrace{\cancel{F(a)}}^{0}}{G(x) - \underbrace{\cancel{G(a)}}_{0}} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

پس

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+, c\in(a,x)} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□