۱ جلسه‌ی چهارم، سریها

مقدمه

قبلاً به این نکته توجه کرده‌ایم که عددِ

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲\ldots$$

در واقع جمعی نامتناهی از اعدادِ گویاست:

$$\pi = ۳ + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۴}{۱۰۰} + \frac{۱}{۱۰۰۰} + \ldots$$

به چنین جمعهائی، سری عددی می‌گوئیم. می‌دانیم که حاصلجمع هر تعداد متناهی از اعداد گویا، عددی گویا می‌شود؛ اما همانگونه که در نمایش بالا برای عددِ π به نظر می‌رسد، حاصلجمع نامتناهی عدد گویا، شاید گویا نباشد. از طرفی در این باره صحبت کرده‌ایم که در حساب وقتی صحبت از نامتناهی می‌شود، منظور متناهی‌های بزرگ است (یا نزدیک شدن به نامتناهی بوسیله‌ی متناهی‌های بزرگ). اگر قرار باشد برای حاصلجمع نامتناهی عدد نیز معنی‌ای پیدا کنیم، باید از چنین ایده‌ای استفاده کنیم. مثلاً برای این که بگوئیم مجموع بالا، دقیقاً برابر با عددِ π است، باید ثابت کنیم که با استفاده از جمع بالا می‌توانیم به هر اندازه‌ی دلخواه به π نزدیک شویم و برای رسیدن به تقریبهای بهتر برای π باید اعداد بیشتر و بیشتری را با هم جمع کنیم.

سریها اهمیت ویژه‌ی دیگری نیز دارند. در ریاضیات مقدماتی با چند جمله‌ای ها آشنا شده‌اید:

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۰$$

چندجمله‌ایها توابعی پیوسته و خوشرفتارند و در نمودار آنها، بر خلاف نمودار توابعی مانند $\sin$، تنها تعداد متناهی صعود و نزول دیده می‌شود. در ادامه‌ی این درس خواهیم دید که برخی توابع را، که آنها را **تحلیلی** می‌خوانیم، می‌توان با استفاده از چندجمله‌ای‌ها تقریب زد. یعنی می‌توان یک چندجمله‌ای از درجه‌ی بی‌نهایت تصور کرد که به هر اندازه‌ی دلخواه شبیه تابع مورد نظر شود، به شرط این که تا توانِ n اُمِ مناسبی از آن در نظر گرفته شود. در این باره بعداً در همین درس مفصلاً صحبت خواهیم کرد. در زیر چند نمونه از این سریها (ی تیلور) را آورده‌ایم:

$$\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \ldots = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n \quad |x| < ۱$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

شروع درس

تعریف ۱. فرض کنید $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد. حاصلجمعِ (صوری) به صورت

$$a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

را یک **سری (عددی)** می‌نامیم و آن را با

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

نمایش می‌دهیم.

مثال ۲. اگر $a_n = \frac{1}{n}$ آنگاه جمع زیر یک سری عددی است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

مثال ۳. برای $a_n = n$ یک سری به صورت زیر داریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n + \dots$$

از آنجا که جمع بستن نامتناهی عدد ممکن نیست، حاصلجمع سریها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری باشد، دنباله‌ی حاصلجمع‌های جزئی آن، یعنی دنباله‌ی S_n، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_1 = a_0 + a_1 \\ S_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \end{cases}$$

تعریف ۴. اگر دنباله‌ی S_n به a همگرا باشد، سری a_n $\sum_{n=۰}^{\infty}$ را **همگرا** به a می‌خوانیم و می‌نویسیم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} S_n$$

اگر حدِّ فوق موجود نباشد سری مورد نظر را **واگرا** می‌خوانیم.

مثال ۵. اگر $a_n = n$ آنگاه

$$S_n = ۱ + ۲ + ۳ + ... + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+۱)}{۲} = \infty$$

سری فوق واگراست.

مثال ۶. حاصلجمع سری زیر را حساب کنید.

$$\sum_{n=۰}^{n=\infty} (\frac{۱}{۲})^n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \dots$$

پاسخ.

$$S_n = (\frac{۱}{۲})^۰ + (\frac{۱}{۲})^۱ + (\frac{۱}{۲})^۲ + ... + (\frac{۱}{۲})^{n-۱} + (\frac{۱}{۲})^n$$

$$\frac{۱}{۲} \times S_n = (\frac{۱}{۲})^۱ + (\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۱}{۲})^۳ + ... + (\frac{۱}{۲})^n + (\frac{۱}{۲})^{n+۱}$$

$$S_n - \frac{۱}{۲}S_n = ۱ - (\frac{۱}{۲})^{n+۱}$$

$$(۱ - \frac{۱}{۲})S_n = ۱ - (\frac{۱}{۲})^{n+۱} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^{n+۱}}{۱ - \frac{۱}{۲}}$$

می‌دانیم که

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{۱}{۲})^n = ۰$$

پس

$$\sum_{n=۰}^{n=\infty} (\frac{۱}{۲})^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۲$$

□

سریهای هندسی

همان طور که دقت کرده‌اید، در محاسبات بالا، می‌توان به جای $\frac{۱}{۲}$ هر عدد دیگری را نیز در نظر گرفت. مثال بالا، در واقع در رده‌ی مهمی از سریهای عددی به نام **سریهای هندسی** قرار دارد.

تعریف ۷. سری $\sum_{n=۰}^{\infty} r^n$ ، یعنی $r^۰ + r^۱ + r^۲ + ...$، را یک **سری هندسی** با **قدر نسبت** r می‌خوانیم.

فرض کنیم $\sum_{i=۰}^{\infty} r^n$ یک سری هندسی باشد. داریم

$$S_n = r^۰ + r^۱ + ... + r^n$$

$$rS_n = r^۱ + r^۲ + ... + r^{n+۱}$$

$$(۱ - r)S_n = ۱ - r^{n+۱} \overset{r\neq ۱ \text{ با فرض}}{\Rightarrow} S_n = \frac{۱ - r^{n+۱}}{۱ - r} \qquad (۱)$$

توجه ۸. ۱. اگر $-۱ < r < ۱$ با توجه به فرمولِ ۱ آنگاه

$$\sum_{i=۰}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{۱}{۱ - r}$$

۲. اگر $r = ۱$ آنگاه

$$S_n = ۱^۰ + ۱^۱ + ۱^۲ + ۱^۳ + ... + ۱^n = (n + ۱)r$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

۳. اگر $|r| > ۱$ با توجه به فرمولِ ۱ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۱ - r^{n+۱}}{۱ - r} = \infty$$

مثال ۹.

$$۱ + \frac{۱}{۳} + (\frac{۱}{۳})^۲ + ... + (\frac{۱}{۳})^n = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۳}}$$

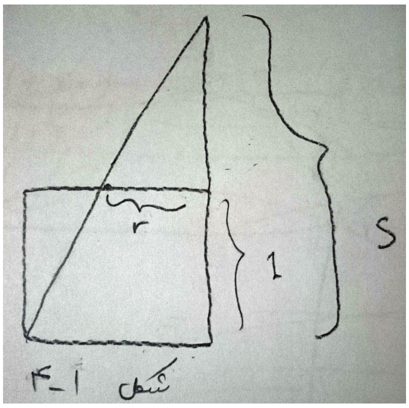
آنچه را که در توجه بالا آمد در قضیه‌ی زیر خلاصه کرده‌ایم:

قضیه ۱۰. سری هندسی $\sum_{n=۰}^{\infty} r^n$ همگراست اگر و تنها اگر $|r| < ۱$.

یادآوری:

$$\begin{cases} p \to q \\ \neg q \to \neg p \\ q \to p \\ \neg p \to \neg q \end{cases} \Leftrightarrow p \overset{\text{اگر و تنها اگر}}{\longleftrightarrow} q$$

یک تعبیر هندسی برای سری‌های هندسی : مربعی به طول ۱ در نظر بگیرید و روی یک ضلع آن به اندازه‌ی $r < ۱$ جدا کنید و مثلث زیر را بسازید:



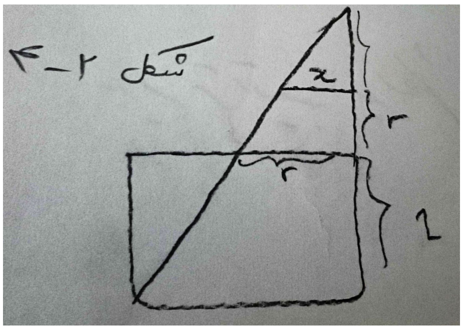
در شکل بنا به تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{r}{۱} = \frac{S - ۱}{S} \quad \Rightarrow \quad rS = S - ۱ \quad \Rightarrow \quad (r - ۱)S = -۱$$

در نتیجه

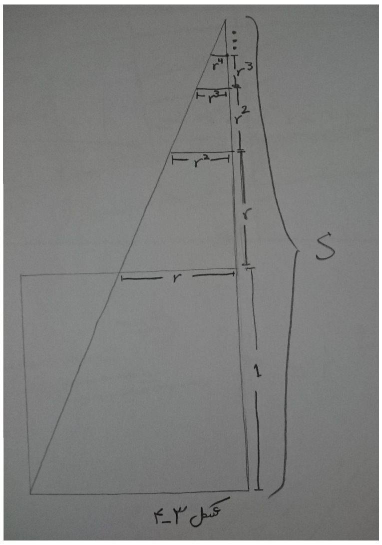
$$S = \frac{۱}{۱ - r}$$

حال به اندازه‌ی r روی مثلث بالایی جدا کنید و سپس خطی موازی ضلع مربع بکشید. دوباره بنا به تشابه مثلث‌ها داریم:



$$\frac{x}{r}=\frac{S-(۱+r)}{S-۱}\Rightarrow\frac{x}{r}=r\quad\Rightarrow\quad x=r^{۲}$$

بدین ترتیب به شکل زیر برسید:



و مشاهده کنید که

$$S=۱+r+r^{۲}+\ldots=\frac{۱}{۱-r}.$$

مثال ۱۱. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}۲^{۲n}۳^{۱-n}$$

پاسخ.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{۲n}۳^{۱-n} = \sum_{n=۱}^{\infty} ۴^{n}۳^{۱-n} = \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۴}{۳})^{n} \times ۳$$

مثال بالا یک سری هندسی با قدر نسبت برابر با $\frac{۴}{۳}$ است. از آنجا که $\frac{۴}{۳}$ بزرگتر از ۱ است این سری واگراست. □

مثال ۱۲. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^{n}+۳^{n}}{۴^{n}}$$

پاسخ.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^{n}+۳^{n}}{۴^{n}} = \sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۴})^{n} + (\frac{۳}{۴})^{n} = \underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^{n}}_{\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}} + \underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۳}{۴})^{n}}_{\frac{۱}{۱-\frac{۳}{۴}}} = ۲+۴ = ۶$$

این سری همگراست (البته، هنوز درباره‌ی این که چه موقع مجوز داریم جمعها را از زیر سری دربیاوریم، صحبت نکرده‌ایم). □

ادامه‌ی بحث سریها

مثال ۱۳. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ...$$

پاسخ. در نگاه اول به نظر می‌آید که رفتار سری فوق، شبیه به رفتار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^{n}$ است. یعنی به نظر می‌آید همگرا باشد: فرض کنیم سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ همگرا به a باشد.

$$S_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a$$

توجه کنید که از آنجا که دنباله‌ی S_n به a میل می‌کند، پس دنباله‌ی $S'_n := S_{2n}$ نیز به a میل می‌کند؛ یعنی

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = a.$$

پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = a - a = 0$$

از طرفی داریم:

$$S_{2n} : a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$S_n : a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

پس نمی‌توانیم داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$. بنابراین با فرض همگرا بودن سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ به تناقض می‌رسیم پس این سری واگراست. $\square$

چند نکته را باید یادآور شویم.

توجه ۱۴.

- همان طور که مشاهده کرده‌اید، در بحثهای بالا گاهی در مورد S_n نادقیق بوده‌ایم. وقتی که اندیس دنباله از صفر شروع می‌شده است نوشته‌ایم

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

و وقتی که اندیس دنباله از یک شروع می‌شده است نوشته‌ایم

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n$$

در هر صورت، همواره منظورمان جمعی از عناصر اول دنباله بوده است.

- در مورد S_{2n} برخی دانشجویان دچار این کژفهمی شدند که

$$S_{2n} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

توجه کنید که منظورمان عبارت بالا نیست، بلکه بنا به تعریف:

$$S_{2n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}$$

یعنی حاصلجمعِ $2n$ جمله‌ی اول دنباله.

- در خلال اثبات بالا، ادعا کردیم که از همگرا بودنِ S_n همگرا بودنِ S_{2n} نتیجه می‌شود. در زیر این را به طور دقیقتر اثبات کرده‌ایم.

لم ۱۵. فرض کنید که a_n یک دنباله باشد و داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

فرض کنید b_n دنباله‌ی دیگری باشد به طوری که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = a_{2n}.$$

در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

توجه ۱۶. توجه کنید که اگر a_n دنباله‌ی زیر باشد

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

آنگاه b_n دنباله‌ی زیر است:

$$a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots$$

یعنی b_n زیردنباله‌ای از a_n است.

اثباتِ لم. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |b_n - a| < \epsilon$$

فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. بنا به همگرایی a_n می‌دانیم که

$$\exists N'_\epsilon \quad \forall n > N'_\epsilon \quad |a_n - a| < \epsilon$$

اگر $n > N_\epsilon$ آنگاه $2n > N_\epsilon$ پس

$$\forall n > N'_\epsilon \quad |a_{2n} - a| < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N'_\epsilon \quad |b_n - a| < \epsilon$$

و حکم مورد نظر ثابت شد. $\square$

تمرین (برای دانشجوی علاقه‌مند). نشان دهید که هر زیردنباله‌ی نامتناهیِ دلخواه از یک دنباله‌ی همگرا، همگراست.

توجه ۱۷. فرض کنید a_n یک دنباله باشد. داریم

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k+1}) = (a_0 - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_1} - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

یعنی در حاصل‌جمع بالا کوچکترین اندیسِ ممکن و بزرگترین اندیس ممکن باقی می‌مانند.

مثال ۱۸. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

پاسخ.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

دنباله‌ی $\{S_n\}$ را در نظر بگیرید. این دنباله صعودی است، زیرا

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

همچنین داریم

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k}$$

در اینجا مخرج کسرها را کوچک کرده‌ایم تا کسرها بزرگتر شوند.

چرک‌نویس

$$\frac{۱}{k-۱}-\frac{۱}{k}=\frac{k-k+۱}{k(k-۱)}=\frac{۱}{k(k-۱)}$$

$$۱+\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k^۲-k}=۱+\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k(k-۱)}=$$
$$۱+\sum_{k=۲}^{n}(\frac{۱}{k-۱}-\frac{۱}{k})\overset{\text{بنا به توجهِ ۱۷}}{=}۱+(۱-\frac{۱}{n})\Longrightarrow\quad S_n\leqslant ۱+(۱-\frac{۱}{n})\Rightarrow S_n\leqslant ۲$$

پس دنباله‌ی S_n صعودی و کراندار است و از این رو S_n همگراست.

توجه ۱۹. فعلاً ابزار لازم را برای محاسبه‌ی حد سری بالا در دست نداریم. این جمع را اویلر محاسبه کرده است:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}=\frac{\pi^۲}{۶}$$

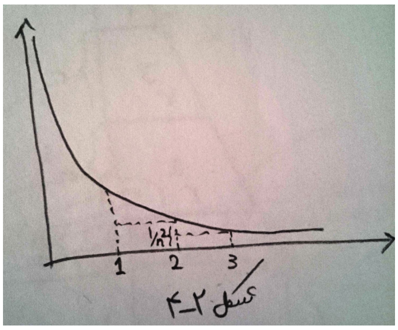
توجه کنید که دوباره، حاصلجمعی نامتناهی از اعداد گویا برابر با یک عدد اصم شده است. برای دانستن روش محاسبه‌ی این جمع، پیوندهای زیر را مطالعه بفرمائید:

https://www.math.purdue.edu/~eremenko/dvi/euler.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem

□

توجه ۲۰. تابع $\frac{1}{x^2}$ را در نظر بگیرید.



$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \text{مجموع مساحت مستطیلها در شکل} \leqslant \text{مساحت زیر منحنی} = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}$$

در فصلهای بعدی دربارهی رابطهی بین انتگرالگیری و سریها بیشتر خواهیم گفت.

توجه ۲۱. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

را در نظر بگیرید. دنبالهی حاصلجمعهای جزئی این سری نیز صعودی است و داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

پس سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ همگراست. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که اگر $p \geq 2$ و $p \in \mathbb{Q}$ آنگاه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

همگراست. حال اگر $p \in \mathbb{Q}^+, p < 1$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

پس در این صورت سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ واگراست. اگر $p = 1$ نیز دیدیم که سری یادشده واگراست. **همچنین اگر $1 < p < 2$ نیز این سری همگراست؛ این را فعلاً می‌پذیریم ولی در ادامهی درس با ابزارهای پیشرفته‌تر ثابت خواهیم کرد.**

در این جلسه فهمیدیم که

- سری هندسی $\sum_{n=۰}^{\infty} r^n$ همگراست اگر و تنها اگر $|r| < ۱$. در این صورت (یعنی در صورت همگرائی) داریم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} r^n = \frac{۱}{۱-r}$$

- سریِ $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ که در آن $p \in \mathbb{Q}^+$ است برای $p \leq ۱$ واگرا و برای $p > ۱$ همگراست. اگر $p = ۱$ به سری حاصل، سری هارمونیک، یا همساز می‌گویند. در حالت کلی، این سریها، pسری نامیده می‌شوند.

- اگر یک دنباله همگرا باشد، هر زیردنباله‌ی نامتناهی از آن نیز همگراست.

- اگر a_n یک دنباله باشد، داریم

$$\sum_{k=۰}^{n} (a_k - a_{k+۱}) = a_۰ - a_{n+۱}$$