۱ جلسه‌ی بیست و پنجم

مثال ۱. توابع اولیه‌ی زیر را به دست آورید.

.۱

$$\int \cosh(\sqrt{x})dx$$

پاسخ. نخست سعی می‌کنیم حاصل انتگرال را از طریق زیر بیابیم.

$$\int \underbrace{\cosh(\sqrt{x})}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = uv - \int vdu = uv - \int x \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \sinh(\sqrt{x})dx$$

همانطور که مشاهده می‌کنید ادامه‌ی این راه حل دشوار به نظر می‌رسد. پس باید روش دیگری پیدا کنیم.

$$\int \cosh(\sqrt{x})dx = ۲\int \underbrace{\sqrt{x}}_{u}\underbrace{\frac{\cosh(\sqrt{x})}{۲\sqrt{x}}dx}_{dv} =$$

$$۲(\sqrt{x}\sinh(\sqrt{x}) - \int \frac{\sinh\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}dx) = ۲\sqrt{x}\sinh(\sqrt{x}) - ۲\cosh(\sqrt{x}) + c$$

□

.۲

$$\int e^x \cos x dx$$

پاسخ.

$$\int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\cos x dx}_{dv} =$$

$$uv - \int vdu = e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\sin x dx}_{dv} =$$

$$e^x \sin x - (uv - \int vdu) = e^x \sin x - e^x(-\cos x) - \int \cos x e^x dx$$

$$\Rightarrow ۲\int e^x \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{۲}(\sin x + \cos x) + c$$

□

۳.

$$\int \sec^{۳} x dx$$

پاسخ.

$$\int \sec^{۳} x dx = \int \frac{۱}{\cos^{۳} x} dx = \int \underbrace{\frac{۱}{\cos x}}_{u} \times \underbrace{\frac{۱}{\cos^{۲} x} dx}_{dv} =$$

$$uv - \int v du = \frac{۱}{\cos x} \times \tan x - \int \tan x \frac{\sin x}{\cos^{۲} x} dx =$$

$$\frac{\sin x}{\cos^{۲} x} - \int \frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۳} x} dx = \frac{\sin x}{\cos^{۲} x} - \int \frac{۱ - \cos^{۲} x}{\cos^{۳} x} dx = \frac{\sin x}{\cos^{۲} x} - \int \frac{۱}{\cos^{۳} x} dx + \underbrace{\int \frac{۱}{\cos x} dx}_{=F} =$$

F را در جلسه‌ی قبل محاسبه کرده‌ایم.

$$\Rightarrow ۲ \int \sec^{۳} dx = \frac{\sin x}{\cos^{۲} x} + F$$

$$\Rightarrow \int \sec^{۳} dx = \frac{\frac{\sin x}{\cos^{۲} x} + F}{۲}$$

در جلسه قبل دیدیم که

$$F(x) = \tan^{-۱}(\sin(x))$$

پس

$$\int \sec^{۳} dx = \frac{\frac{\sin x}{\cos^{۲} x} + \tan^{-۱}(\sin(x))}{۲}$$

تمرین ۲. انتگرال فوق را با تغییر متغیر نصف کمان حل کنید؛ یعنی قرار دهید:

$$t = \tan(\frac{x}{۲})$$

$$\cos(x) = \frac{۱ - t^{۲}}{۱ + t^{۲}}$$

$$dx = \frac{۲}{۱ + t^{۲}} dt$$

در تغییر متغیر بالا، تابع $\sin$ نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sin(x) = \frac{۲t}{۱ + t^{۲}}.$$

□

۴.

$$\int \sin^۲ x dx$$

پاسخ.

$$\int \sin^۲ x dx = \int \frac{۱ - \cos ۲x}{۲} = \frac{۱}{۲}x - \frac{\sin ۲x}{۴} + c$$

□

توجه ۳.

$$\cos^۲ x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲}$$

$$\sin^۲ x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲}$$

۵.

تمرین ۴.

$$\int \cos^۲(x) dx$$

۶.

$$\int \sqrt{x^۲ + ۹}$$

پاسخ. گفتیم که هرگاه $\sqrt{x^۲ + a^۲}$ در انتگرالی ظاهر شود، می‌توان از تغییر متغیرِ $x = a\sinh(t)$ یا $x = a\tan(t)$ استفاده کرد. در زیر هر دو راه را امتحان کرده‌ایم:

راه اول.

$$x = ۳\sinh t \Rightarrow dx = ۳\cosh t dt$$

$$\int \sqrt{x^۲ + ۹} dx = \int \sqrt{۹\sinh^۲ t + ۹} \times (۳\cosh t dt) = \int \sqrt{۹\cosh^۲ t} \times (۳\cosh t) dt =$$

$$\int (۳\cosh t)(۳\cosh t) dt = ۹\int \frac{۱ + \cosh ۲t}{۲} dt = \frac{۹}{۲}t + \frac{۹\sinh(۲t)}{۴}$$

$$\frac{۹}{۲}\sinh^{-۱}(\frac{x}{۳})+\frac{۹}{۴}\sinh(۲\sinh^{-۱}(\frac{x}{۳}))$$

راه دوم.

$$x=۳\tan t\Rightarrow dx=۳\frac{۱}{\cos^۲ t}dt$$

$$\int\sqrt{x^۲+۹}dx=\int\sqrt{۹\tan^۲ t+۹}\times(\frac{۳}{\cos^۲ t})dt=\int\frac{۳}{\cos t}\times\frac{۳}{\cos^۲ t}dt=\int ۹\sec^۳(t)dt$$

در همین جلسه، $\int\sec^۳(x)dx$ را محاسبه کرده‌ایم:

$$۹\int\sec^۳(t)dt=۹(\frac{\frac{\sin t}{\cos^۲ t}+\tan^{-۱}(\sin t)}{۲})=$$

$$۹\frac{\frac{\sin(\tan^{-۱}(\frac{x}{۳}))}{\cos^۲(\tan^{-۱}(\frac{x}{۳}))}+\tan^{-۱}(\sin(\tan^{-۱}(\frac{x}{۳})))}{۲}$$

$\square$

ادامه‌ی روش محاسبه‌ی انتگرال با استفاده از تغییر متغیر مثلثاتی

فرض کنید عبارت زیر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^۲-x^۲}$ باشد. باید داشته باشیم:

$$a^۲-x^۲\geqslant ۰\Rightarrow x\in[-a,a]$$

از آنجا که

$$-۱\leq\sin(t)\leq ۱$$

داریم

$$-a\leq a\sin(t)\leq a$$

قرار می‌دهیم:

$$x=a\sin t\quad -\frac{\pi}{۲}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{۲}$$

آنگاه

$$\sqrt{a^۲-x^۲}=\sqrt{a^۲-a^۲\sin^۲ t}=a\cos t$$

$$dx=a\cos tdt$$

توجه کنید که علت این که دامنه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ را برای t در نظر گرفته‌ایم این است که در این دامنه، تابعِ $\sin$ صعودی و یک به یک است و با حرکت کردن t در این دامنه، x دقیقاً در بازه‌ی $[-a,a]$ حرکت می‌کند.

روش دوم. از آنجا که تابعِ $\tanh(x)$ اکیداً صعودی است و

$$\forall x \quad -۱ \leq \tanh(x) \leq ۱$$

داریم

$$-a \leq a\tanh(x) \leq a$$

پس، از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = \tanh t$$

$$\sqrt{a^۲ - x^۲} = \sqrt{a^۲ - a^۲\tanh^۲ t} = \frac{a}{\cosh t}$$

مثال ۵. تابع اولیه‌ی زیر را بدست آورید.

$$\int \frac{\sqrt{۴ - x^۲}}{x}$$

پاسخ.

$$x = ۲\sin t \Rightarrow dx = ۲\cos t dt$$

$$\sqrt{۴ - x^۲} = ۲\cos t$$

$$\int \frac{۲\cos t}{۲\sin t} \times (۲\cos t)dt = ۲\int \frac{\cos^۲ t}{\sin t}dt$$

$$۲\int \frac{۱}{\sin t}dt - ۲\int \sin t dt$$

$$\int \frac{۱}{\sin t}dt = \int \frac{\sin t}{\sin^۲ t}dt = \int \frac{\sin t}{۱ - \cos^۲ t}dt$$

$$u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t dt$$

$$\int \frac{\sin t}{۱ - \cos^۲ t}dt = \int \frac{-du}{۱ - u^۲} = \ldots$$

□

تمرین ۶. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$$

۲ ایجاد آمادگی برای کوئیز دوم

یادآوری ۷. اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in (a,b) \quad f'(x) > 0$$

آنگاه f در $[a,b]$ صعودی است.
علت: فرض کنید $x_0 \in [a,b]$، آنگاه اگر $x_1 > x_0$، بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین، عددی چون c در بازه‌ی مورد نظر موجود است به طوری که

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_0)$$

فرض کنید c یک نقطه‌ی بحرانی در (a,b) باشد. اگر در همسایگی $(c-\delta,c)$ مشتق تابع f منفی باشد و در $(c,c+\delta)$ مشتق تابع مثبت باشد، آنگاه c یک مینیمم نسبی برای تابع f است. به طور مشابه اگر در $(c-\delta,c)$ مشتق تابع مثبت باشد و در $(c,c+\delta)$ منفی باشد، c یک ماکزیمم نسبی است. توجه کنید که در این شرایط نیاز نیست که تابع f در نقطه‌ی c مشتق پذیر باشد، ولی اگر مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن در نقطه‌ی c صفر می‌شود.

مثال ۸. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=3x+\sin^3 x$ مفروض است. نشان دهید که f بر $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر است و تابع وارون آن مشتق‌پذیر است و $(f^{-1})'(3\pi)$ را محاسبه کنید.

پاسخ. اولاً دامنه‌ی تابع یاد شده کل $\mathbb{R}$ است. داریم:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3 + 3\sin^2 x \cos x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$$

پس تابع f اکیداً صعودی است. این تابع همچنین پیوسته است پس f^{-1} موجود و تابعی پیوسته است. از آنجا که $f'(x) > ۰$ تابع f^{-1} در تمام نقاط دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است. بنا به قضیه‌ی مشتق تابع وارون داریم:

$$(f^{-۱})'(۳\pi) = \frac{۱}{f'(\pi)} = \frac{۱}{۳}$$

□

مثال ۹. فرض کنید تابع f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x)$$

نشان دهید که

$$\exists c \quad f = ce^x.$$

پاسخ. تعریف کنید:

$$G(x) = \frac{f(x)}{e^x}$$

داریم

$$G'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{e^{۲x}} = ۰$$

پس G یک تابع ثابت است. یعنی

$$\exists c \quad G = c \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x} = c \Rightarrow f(x) = ce^x$$

□

مثال ۱۰. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall x \quad f'(x) = \frac{۲x^۳}{۱ + x^۲}$$

و $f(۰) = ۰$. نشان دهید که

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant |x|$$

پاسخ. در اینجا فقط برای $x > ۰$ حکم را ثابت می‌کنیم و اثبات حکم برای حالت $x < ۰$ را به عهده‌ی دانشجو می‌گذاریم. نشان می‌دهیم که

$$\forall x > ۰ \quad f(x) \leqslant x$$

به بیان دیگر

$$\forall x > ۰ \quad \underbrace{x - f(x)}_{g(x)} \geqslant ۰$$

داریم

$$g(۰) = ۰$$
$$g'(x) = ۱ - f'(x) = ۱ - \frac{۲x^۳}{۱ + x^۶} = \frac{۱ + x^۶ - ۲x^۲}{\underbrace{۱ + x^۶}_{\geqslant ۱}} = \frac{(x^۳ - ۱)^۲}{۱ + x^۶} \geq ۰$$

پس تابع $g(x)$ صعودی است. از آنجا که $g(۰) = ۰$ و این که تابع صعودی است، نتیجه می‌گیریم که

$$\forall x > ۰ \quad g(x) \geqslant ۰$$

پس

$$\forall x > ۰ \quad f(x) \leqslant x$$

□

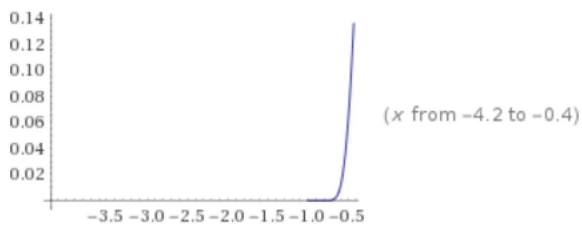
تمرین ۱۱. با استفاده از تحلیل مشتق، توابع زیر را رسم کنید(اکسترمم‌های آنها را مشخص کنید).

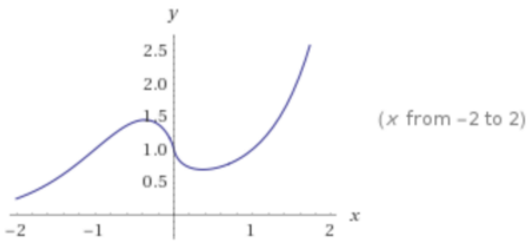
$$f(x) = (۱ + x)^{\frac{۲}{۱+x}}$$

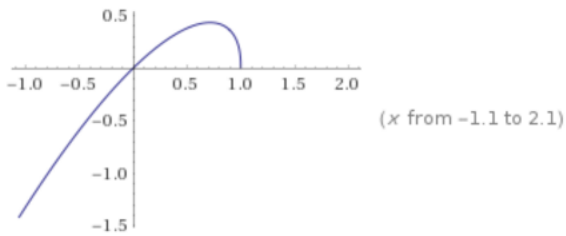
$$f(x) = |x|^x$$

$$f(x) = x(۱ - x)^{\frac{۲}{۵}}$$

در زیر نمودارهای خواسته شده را (به همان ترتیبِ بالا) رسم کرده‌ایم:







مثال ۱۲. فرض کنید $f:[۰,+\infty)\to\mathbb{R}$ بر $[۰,\infty)$ پیوسته باشد و بر $(۰,\infty)$ مشتق‌پذیر، و بدانیم که

$$\forall x\in(۰,\infty)\quad f'(x)\geqslant ۲x$$

و $f(۰)=۱$. نشان دهید

$$\forall x\quad f(x)\geqslant x^۲+۱$$

پاسخ.

$$f(x)\geqslant x^۲+۱\Leftrightarrow \underbrace{f(x)-(x^۲+۱)}_{g(x)}\geqslant ۰$$

$$f(۰)=۱\Rightarrow g(۰)=۰$$

$$g'(x)=f'(x)-۲x$$

از آن جا که $f'(x)\geqslant ۲x$ تابعِ g تابع صعودی است و از آنجا که $g(۰)=۰$ داریم:

$$\forall x\quad g(x)\geq ۰.$$

□