۱ جلسه‌ی چهاردهم

مثال ۱. نشان دهید که تابع e^x در نقطه‌ی ۰ مشتق‌پذیر است.

پاسخ.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-e^۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-۱}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\dots}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cancel{x}(۱+\frac{x}{۲!}+\frac{x^۲}{۳!}+\dots)}{\cancel{x}}$$

اگر

$$A=\frac{x}{۲!}+\frac{x^۲}{۳!}+\dots$$

آنگاه اگر $|x|<۱$ داریم

$$۰\leqslant |A|\leqslant |x|\overbrace{(e-۲)}^{\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\dots}\Rightarrow \lim_{x\to ۰}|A|=۰\Rightarrow \lim_{x\to ۰}A=۰$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to ۰}۱+\frac{x}{۲!}+\frac{x^۲}{۳!}+\dots=\lim_{x\to ۰}۱+A=۱$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-۱}{x}=۱=e^۰$$

□

مثال ۲. نشان دهید که $\exp$ در سرتاسر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

پاسخ. فرض کنید که $x_۰\in\mathbb{R}$ نقطه‌ای دلخواه باشد. داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{e^{x_۰+h}-e^{x_۰}}{h}=\lim_{h\to ۰}e^{x_۰}\underbrace{(\lim_{h\to ۰}\frac{e^h-۱}{h})}_{\exp'(۰)=۱=e^۰}=e^{x_۰}$$

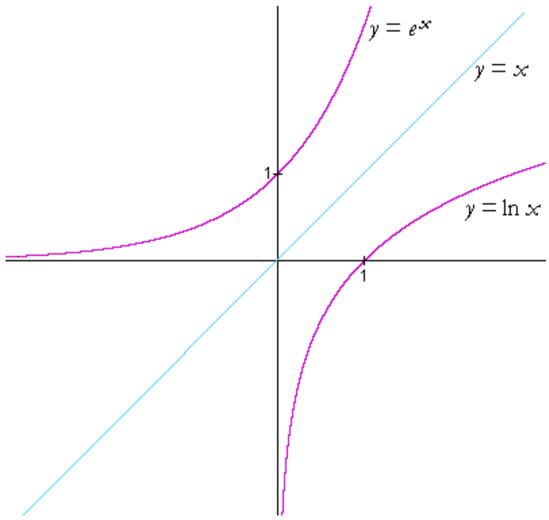
بنابراین اگر $f(x)=e^{x_۰}$ آنگاه

$$f'(x_۰)=e^{x_۰}$$

□

مثال ۳. نشان دهید که تابع $\ln x$ در نقطه‌ی $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.

پاسخ.



$$\lim_{x\to ۱} \frac{\ln x - \ln ۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{\ln x}{x-۱}$$

از تغییر متغیر $x = e^t$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{t\to ۰} \frac{\ln e^t}{e^t - ۱} = \lim_{t\to ۰} \frac{t}{e^t-۱} = \lim_{t\to ۰} \frac{۱}{\frac{e^t-۱}{t}} = \frac{۱}{\exp'(۰)} = \frac{۱}{e^۰} = ۱$$

پس مشتق $\ln x$ در $x = ۱$ برابر است با ۱ . $\square$

مثال ۴. نشان دهید که $\ln x$ در دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است.

پاسخ. فرض کنید $x_۰ \in (۰, \infty)$، داریم:

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{\ln x - \ln x_۰}{x - x_۰} = \lim_{x\to x_۰} \frac{\ln \frac{x}{x_۰}}{x - x_۰} = \lim_{x\to x_۰} \frac{\ln \frac{x}{x_۰}}{x_۰(\frac{x}{x_۰} - ۱)}$$

از تغییر متغیر $\frac{x}{x_۰} = t$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{t\to ۱} \frac{\ln t}{x_۰(t-۱)} = \frac{۱}{x_۰}\underbrace{(\ln'(۱))}_{=۱} = \frac{۱}{x_۰}$$

توجه کنید که در بالا $\lim_{t\to ۱} \frac{\ln t}{(t-۱)}$ همان مشتق تابع $\ln$ در نقطه‌ی ۱ است. پس تابع $\ln x$ در تمام دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(\ln(x))'(x.) = \frac{۱}{x.}$$

$$(e^x)'(x.) = e^{x.}$$

□

مثال ۵. نشان دهید که $\lim_{x\to .}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = e$.

پاسخ. داریم:

$$\lim_{x\to ۰} e^{\frac{۱}{x}\ln(۱+x)} = \lim_{x\to ۰} e^{\frac{\ln(۱+x)}{x}} = e^{\lim_{h\to .}\frac{\ln(۱+h)}{h}} = e^{\ln'(۱)} = e^{۱}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = e^{۱} = ۱$$

□

توجه ۶. بنا به مثال قبل، حد دنباله‌ی $(۱+\frac{۱}{n})^n$ نیز برابر با e است.

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n = e$$

سری توان

گفتیم که اگر $|x| < ۱$ آنگاه

$$\sum_{n=۰}^{\infty} x^n = \frac{۱}{۱-x}$$

سمت راست عبارت بالا، یک تابعِ آشناست و سمت چپ آن یک سری همگراست. در واقع تابعِ $\frac{۱}{۱-x}$ در بازه‌ی $(-۱, ۱)$ دارای نمایش بالا به صورت یک سری است. به توابعی که در یک دامنه‌ی مشخص، دارای نمایشی به صورت یک سری توانی هستند، **توابع تحلیلی** گفته می‌شود. برای مشتقگیری و انتگرائي از این توابع، کافی است از تک‌تک جملات سری مربوط بدانها مشتق یا انتگرال بگیریم. در

زیر با سریهای توان آشنا می‌شویم که می‌توان هر یک از آنها را سریِ مربوط به تابعی تحلیلی در نظر گرفت.

فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله باشد. به عبارت زیر یک **سری توان** می‌گوییم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-x_۰)^n$$

به عبارت بالا یک سری توان با ضرایب a_n حول نقطه‌ی $x=x_۰$ می‌گوییم.

مثال ۷. عبارت زیر یک سری توان است:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} x^n$$

در سری بالا داریم $\{a_n\}=\{۱\}$.

مثال ۸. عبارت زیر یک سری توان است:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{۲n!}$$

در واقع سری بالا را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$$

که در آن

$$a_n=\begin{cases} ۱ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ ۰ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

اگر یک سری توان در یک نقطه‌ی $c>۰$ همگرا باشد، آنگاه در تمام نقاط متعلق به بازه‌ی بازِ $(-c,c)$ همگراست. این گفته را در قضیه‌ی زیر ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۹. اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ برای یک مقدارِ $x=c$ همگرا باشد، آنگاه برای هر x که $|x|<|c|$ مطلقاً همگراست.

اثبات. فرض کنید $|x| < |c|$ آنگاه

$$\frac{|x|}{|c|} < ۱$$

پس سری هندسیِ $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{|x|^n}{|c|^n}$ همگراست.

هدف. نشان دادن این که $\sum_{n=۰}^{\infty} |a_n||x|^n$ همگراست.

می‌دانیم که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n c^n$ همگراست. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} a_n c^n = ۰$$

یعنی برای عددِ دلخواه ϵ عددِ به اندازه‌ی کافی بزرگِ $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$\forall n > N \quad |a_n c^n| < \epsilon$$

به بیان دیگر

$$\forall n > N \quad |a_n| < \frac{\epsilon}{c^n}$$

پس داریم

$$\sum_{N}^{\infty} |a_n||x^n| \leqslant \sum_{N}^{\infty} \frac{\epsilon|x|^n}{|c|^n}$$

سری $\sum_N^{\infty} \frac{\epsilon|x|^n}{|c|^n}$ بنا بر آنچه در ابتدای اثبات گفتیم همگراست، درنتیجه $\sum_N^{\infty} |a_n||x^n|$ نیز همگراست.

بنابراین سری $\sum_{n=۰}^{\infty} |a_n||x^n|$ نیز همگراست. □

پس اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توان باشد، می‌توان آن را یک تابع دانست:

نتیجه ۱۰. اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توان باشد، آنگاه می‌توان تابع $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ را در نظر گرفت که دامنه‌ی آن، که آن را با D نشان می‌دهیم، به یکی از صورت‌های زیر است.

(آ) یا $D = \mathbb{R}$

(ب) یا $D = \{۰\}$

(ج) عدد $R \in \mathbb{R}$ موجود است به طوری که

$$\{x| \quad |x| < R\} \subseteq D \subseteq \{x| \quad |x| \leqslant R\}$$

به بیان دیگر

$$D=[-R,R] \quad \text{یا} \quad D=(-R,R] \quad \text{یا} \quad D=(-R,R) \quad \text{یا} \quad D=[-R,R)$$

راهنمائی برای اثبات. مشخص است که D همواره شامل صفر است. در قضیه‌ی قبل گفتیم که اگر $x \in D$ و $x > ۰$ آنگاه D شامل تمام نقاط بازه‌ی $(-x,x]$ است، اما این که D شاملِ $-x$ باشد یا نه مشخص نیست. به طور مشابه برای وقتی که x منفی باشد بحث کنید. □

در زیر روشی برای تعیین دامنه‌ی D ارائه کرده‌ایم: فرض کنید سری توان $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ داده شده باشد. برای تعیین دامنه‌ی همگرایی این سری، D، به صورت زیر عمل می‌کنیم:
آزمون مقایسه را در نظر بگیرید:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \underbrace{|a_n||x|^n}_{b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+۱}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+۱}||x|^{n+۱}}{|a_n||x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+۱}||x|}{|a_n|}$$

(آ) فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = L > ۰$$

آنگاه اگر $|x| < \frac{۱}{L}$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+۱}}{b_n} < ۱$ و بنا به آزمون نسبت، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ همگرا(ی مطلق) است. همچنین اگر $|x| > \frac{۱}{L}$ سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ واگراست. در $|x| = \frac{۱}{L}$ باید به صورت دستی بررسی کنیم.

(ب) اگر $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = \infty$ سری مورد نظر تنها در $x = ۰$ همگراست.

(ج) اگر $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = ۰$ آنگاه سری مورد نظر در همه‌ی $x \in \mathbb{R}$ همگراست.

بنا به آنچه در بالا گفته شد برای تعیین دامنه‌ی همگرائیِ سری توانِ $\sum a_n x^n$ کافی است $\lim a_{n+۱}/a_n$ را محاسبه کنیم.

مثال ۱۱. دامنه‌ی همگرایی تابع (یا سری توانی) زیر را تعیین کنید.

(آ)

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} x^n$$

پاسخ. ضریب x^n برابر است با:

$$a_n = \frac{۱}{n^۲}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{(n+۱)^۲}}{\frac{۱}{n^۲}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{(n+۱)^۲} = ۱$$

پس دامنه‌ی همگرایی، بنا به قضیه‌ی قبل شامل بازه‌ی $(-۱, ۱)$ است و نیز در $(۱, \infty)$ و $(-\infty, -۱)$ سری فوق واگراست. باید نقاط $x = -۱$ و $x = ۱$ را نیز بررسی کنیم.

$$x = ۱ \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$$

این سری همگراست.

$$x = -۱ \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^۲}$$

این سری نیز همگراست. پس دامنه‌ی همگرایی سری مورد نظر ما دقیقاً برابر است با $D = [-۱, ۱]$.
□

(ب)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} x^n$$

پاسخ. ضریب x^n برابر است با:

$$a_n = \frac{۱}{n}$$

بنا به آزمون مقایسه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = ۱$$

پس $D \subseteq (-۱, ۱)$. بررسی نقاط ۱− و ۱ :

$$x = -۱ \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n}$$

سری فوق همگراست.

$$x = ۱ \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$$

سری فوق واگراست. پس دامنه‌ی همگرایی تابع برابر است با $D = [-۱, ۱)$ □

(ج)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{(۲n)!}$$

پاسخ. با استفاده از تغییر متغیر $t = x^۲$ داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{t^n}{(۲n)!}$$

و می‌خواهیم این سری را بررسی می‌کنیم.

$$a_n = \frac{۱}{(۲n)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{(۲n+۲)!}}{\frac{۱}{(۲n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(۲n)!}{(۲n+۲)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(۲n)!}}{(۲n+۲)(۲n+۱)\cancel{۲n!}} = ۰$$

پس $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{t^n}{(۲n)!}$ برای تمام مقادیر t همگراست. پس $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(x^۲)^n}{(۲n)!}$ هم برای تمام مقادیر x همگراست. □

(د)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}(۲x-۱)^n$$

پاسخ. قرار دهید: $t = ۲x - ۱$.

حال سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} t^n$ را بررسی می‌کنیم. مطابق دو مثال قبل دامنه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} t^n$ برابر است با $D = [-۱, ۱)$ پس باید داشته باشیم:

$$-۱ \leqslant ۲x - ۱ < ۱ \Rightarrow ۰ \leqslant x < ۱$$

در نتیجه دامنه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}(۲x-۱)^n$ برابر است با $D = [۰, ۱)$ □

اگر f یک تابع تحلیلی باشد، مشتق آن نیز یک تابع تحلیلی است:

قضیه ۱۲. اگر $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ برای $|x| < R$ آنگاه

$$\forall x \in (-R, R) \quad f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n a_n x^{n-۱}$$

توجه ۱۳. در قضیه‌ی بالا در واقع دو حکم داریم. نخست این که در بازه‌ی $(-R, R)$ سریِ $\sum_{n=۱}^{\infty} na_n x^{n-۱}$ همگراست، و دوم این که این سری، تابعی را مشخص می‌کند که مشتق تابعی است که سری اول مشخص می‌کرد.

خلاصه‌ی درس:

$$(\ln(x))'(x_۰) = \frac{۱}{x_۰}$$

$$(e^x)'(x_۰) = e^{x_۰}$$

$$\lim_{x \to ۰} (۱ + x)^{\frac{۱}{x}} = e$$

$$\lim_{n \to \infty} (۱ + \frac{۱}{n})^n = e$$

اگر $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ برای $|x| < R$ آنگاه

$$\forall x \in (-R, R) \quad f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} na_n x^{n-۱}$$

فرض کنید سری توان $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ داده شده باشد.

(آ) اگر

$$\lim_{n \to \infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = L > ۰$$

آنگاه اگر $|x| < \frac{۱}{L}$ سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ همگرا(ی مطلق) است. همچنین اگر $|x| > \frac{۱}{L}$ سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ واگراست. در $|x| = \frac{۱}{L}$ باید به صورت دستی بررسی کنیم.

(ب) اگر $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = \infty$ سری مورد نظر تنها در $x = ۰$ همگراست.

(ج) اگر $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = ۰$ آنگاه سری مورد نظر در همه‌ی $x \in \mathbb{R}$ همگراست.