۱ نیم‌جلسه‌ی هشتم

مرور درس. در آزمون ریشه دیدیم که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} L < ۱ \Rightarrow \text{همگراست } \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \\ L = ۱ \Rightarrow \text{این آزمون کار نمی‌کند.} \\ L > ۱ \Rightarrow \text{واگراست } \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \end{cases}$$

مثال ۱. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(n^۳)}{n^۲}$$

پاسخ. می‌دانیم که

$$-۱ \leqslant \sin(n^۳) \leqslant ۱$$

پس

$$-\frac{۱}{n^۲} \leqslant \frac{\sin(n^۳)}{n^۲} \leqslant \frac{۱}{n^۲}$$

نکته ۲. آزمون مقایسه تنها برای جملات مثبت کار می‌کند. بنابراین نمی‌توانیم با استفاده از آزمون مقایسه، در این جا نتیجه بگیریم که سری مورد نظر همگراست.

بیائید راه حل بالا را به صورت زیر ترمیم کنیم.

$$-|\sin(n^۳)| \leqslant \sin(n^۳) \leqslant |\sin(n^۳)|$$

$$۰ \leqslant \sin(n^۳) + |\sin(n^۳)| \leqslant ۲|\sin(n^۳)|$$

بنابراین

$$۰ \leqslant \frac{\sin(n^۳) + |\sin(n^۳)|}{n^۲} \leqslant \frac{۲|\sin(n^۳)|}{n^۲}$$

می‌دانیم $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{|\sin(n^۳)|}{n^۲}$ ۲ همگراست(مقایسه با $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$).

پس بنا به آزمون مقایسه $\underbrace{\frac{|\sin(n^۳)|}{n^۲}}_{\text{همگرا}} + \frac{\sin(n^۳)}{n^۲}$ نیز همگراست. در نتیجه $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(n^۳)}{n^۲}$ نیز همگراست.

□

راه حل بالا را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

توجه ۳. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

اثبات.

$$-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|$$

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2|a_n|$ همگراست پس

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + |a_n|$$

نیز بنا به آزمون مقایسه همگراست. در نتیجه $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|)$ همگراست. □

مثال ۴. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ را بررسی کنید.

پاسخ.

$$S_0 = (-1)^0 = 1$$

$$S_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 0$$

$$S_2 = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 = 1$$

$$S_3 = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 0$$

$$S_{2n} = 1$$

$$S_{2n+1} = 0$$

یعنی جملات دنباله‌ی $\{S_n\}$ یک در میان صفر و یکند. پس این دنباله، و به تبع آن سری مورد نظر ما همگرا نیست. □

در قضیه‌ی زیر از لایبنیتز، شرطی برای همگرائی سریهای دارای جملات مثبت و منفی ارائه کرده‌ایم.

قضیه ۵. فرض کنیم $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد نامنفی باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ همگراست.

اثبات.

$$S_0 = (-1)^0 a_0 = a_0$$

$$S_1 = (-1)^0 a_0 + (-1)^1 a_1 = a_0 - a_1 \Rightarrow S_1 < S_0$$

$$S_2 = a_0 - a_1 + a_2 = a_0 + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{\text{چون نزولی است منفی می‌شود}} \Rightarrow \begin{cases} S_2 > S_1 \\ S_2 < S_0 \end{cases} \Rightarrow S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$S_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) \Rightarrow \begin{cases} S_3 > S_1 \\ S_3 < S_2 \end{cases} \Rightarrow S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$\vdots$$

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_4 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \leqslant S_4 \leqslant S_2 \leqslant S_0$$

دنباله‌ی (S_{2n+1}) صعودی و از بالا کراندار است. پس همگراست. دنباله‌ی (S_{2n}) نزولی و از پایین کراندار است. پس S_{2n} نیز همگراست. همچنین توجه کنید که

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$$

زیرا:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} -a_{2n+1} = 0$$

پس تا کنون مشاهدات زیر را داریم:

مشاهدات ۶.

۱. دنباله‌های S_{2n+1} و S_{2n} هر دو همگرا هستند.

۲. $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$.

مشاهدات بالا با کمک لم زیر نشان می‌دهند که S_n همگراست. □

لم ۷. فرض کنید که $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد باشد.

$$a_۰ \quad a_۱ \quad a_۲ \quad a_۳ \quad \dots$$

فرض کنید هر دو دنباله‌ی $a_{۲n}$ و $a_{۲n+۱}$ همگرا هستند و $\lim_{n\to\infty} a_{۲n+۱} = \lim_{n\to\infty} a_{۲n} = L$ آنگاه a_n نیز همگرا به L است.

اثبات. فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} a_{۲n+۱} = L$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{۲n} = L$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. باید نشان دهیم که

$$\forall\epsilon \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_n - L| < \epsilon$$

فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. قرار دهید

$$(b_n) = (a_{۲n}) \quad c_n = (a_{۲n+۱})$$

بنا بر همگرائیِ دنباله‌ی b_n عدد $N \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که برای هر $n > N$ داریم

$$|b_n - L| < \epsilon$$

یعنی برای هر $n > N$ داریم

$$|a_{۲n} - L| < \epsilon.$$

به طور مشابه از همگرائیِ دنباله‌ی c_n نتیجه می‌گیریم که عددِ $N_۱$ موجود است به طوری که

$$\forall n > N_۱ \quad |a_{۲n+۱} - L| < \epsilon.$$

قرار دهید

$$N_۲ = \max\{N, N_۱\}$$

بنا بر آنچه در بالا گفته‌ایم، اگر $n > N_۲$ آنگاه

$$|a_{۲n+۱} - L| < \epsilon, \quad |a_{۲n} - L| < \epsilon$$

یعنی برای هر $n > ۲N_۲$ داریم

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

□

مثال ۸. نشان دهید که سری $\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{۱}{n}$ همگراست.

پاسخ. می‌دانیم که سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست. از طرفی $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$ و دنباله‌ی $\frac{۱}{n}$ نزولی است. پس بنا به قضیه‌ی لایبنیتز، این سری همگراست. □

تمرین ۹. فرض کنید a_n دنباله‌ای باشد به طوری که

$$\forall n \quad a_n < p$$

آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant p$$

مثال ۱۰. ثابت کنید که $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n+۱}}$ همگراست. (راهنمایی: از آزمون لایبنیتز استفاده کنید)

مثال ۱۱. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} (\sqrt[n]{۲} - ۱)^n$$

پاسخ. آزمون ریشه:

$$a_n = (\sqrt[n]{۲} - ۱)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\sqrt[n]{۲}}_{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲} = ۱} - ۱$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ۰$$

بنا به این آزمون ریشه، سری فوق همگراست. □

در این جلسه ثابت کردیم که اگر a_n دنباله‌ای با جملات نامنفی باشد و نزولی باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$ آنگاه سری $\sum(-۱)^n a_n$ همگراست.