

۱ جلسه‌ی بیست و نهم

مثال ۱. انتگرال معین زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

پاسخ. اگر F تابع اولیه این انتگرال باشد، آنگاه حاصل انتگرال فوق برابر است با

$$F\left(\frac{1}{3}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)$$

محاسبه‌ی تابع اولیه، یعنی محاسبه‌ی انتگرال نامعین زیر:

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$\sqrt{1-x} = t \Rightarrow 1-x = t^2 \Rightarrow x = 1-t^2 \Rightarrow dx = -2t dt$$

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+1-t^2} = \sqrt{2-t^2}$$

$$- \int \frac{\sqrt{2-t^2}}{t} 2t dt = -2 \int \sqrt{2-t^2} dt$$

$$2-t^2 \geq 0 \iff -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \Rightarrow t = \sqrt{2} \sin u \Rightarrow dt = \sqrt{2} \cos u du$$

$$-2 \int \sqrt{2-t^2} dt = -2 \int \sqrt{2-2\sin^2 u} \times \sqrt{2} \cos u du =$$

$$-2 \int \sqrt{2} \cos u \times \sqrt{2} \cos u du = -2 \int 2 \cos^2 u du =$$

$$= -2 \int (1 + \cos 2u) du = -2\left(u + \frac{\sin 2u}{2}\right)$$

$$u = \sin^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = 0 \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(-2u - \sin 2u) \Big|_{\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})}^{\sin^{-1}(\frac{1}{2})} = -2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \sin\left(2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

□

مثال ۲. فرض کنید تابع f پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

پاسخ.

$f(a-a)$ $=f(0)$	$f(a-\frac{a}{2})$ $=f(\frac{a}{2})$	$f(a-0)$ $=f(a)$
----- -----		
0	$\frac{a}{2}$	a

$$\int_0^a f(a-x) dx$$

$$t = a - x \Rightarrow dt = -1 \times dx \Rightarrow dt = -dx$$

$$t = a - x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = a \\ x = a \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^a f(a-x) dx = - \int_a^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx$$

□

مثال ۳. با استفاده از مثال قبل انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

(برای هر $n \in \mathbb{N}$ جداگانه محاسبه کنید.)

پاسخ.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n(\frac{\pi}{4} - x)}{\sin^n(\frac{\pi}{4} - x) + \cos^n(\frac{\pi}{4} - x)} dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

$$A + A = 2A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} + \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \right) dx =$$

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

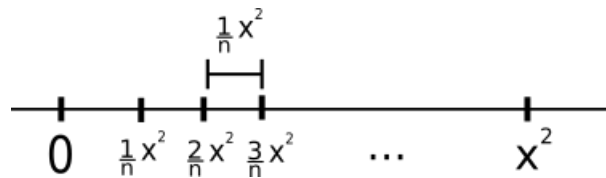
$$2A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{4}$$

□

مثال ۴. فرض کنید $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \tan(\frac{kx}{n})$ نشان دهید که f بر $(1, \frac{\pi}{4})$ مشتق پذیر است و مشتق آن را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\sum_{k=1}^n \tan(\frac{kx}{n}) = \tan(\frac{x}{n}) + \tan(\frac{2x}{n}) + \dots + \tan(\frac{nx}{n})$$



$$\frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \tan(\frac{kx}{n}) = \sum_{k=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

$$x_i^* = \frac{k}{n}x, \quad \Delta x_i = \frac{x}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x}{n} \tan(\frac{kx}{n}) = \int_{\cdot}^{x^*} \tan(t) dt$$

بنا به قضیه‌ی اساسی اول، تابع فوق مشتق پذیر است. می دانیم که $(\int_{\cdot}^x f(u) du)' = f(x)$ ، پس

$$(\int_{\cdot}^{x^*} f(t) dt)' = 2x f(x^*)$$

$$\Rightarrow \int_{\cdot}^{x^*} \tan(t) dt = 2x \tan x^*$$

□

مثال ۵. حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\int_1^x \frac{du}{1 + \ln u}}{x - 1}$$

پاسخ. قاعده‌ی لُپیتال:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\int_1^x \frac{du}{1+\ln u}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{1+\ln x}}{1} = 1$$

□

مثال ۶. فرض کنید f یک تابع پیوسته و فرد باشد، نشان دهید که برای هر a داریم

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

پاسخ.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

$$u = -x \Rightarrow du = -dx$$

$$\int_a^0 -f(-u) du + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a -f(u) du + \int_0^a f(x) dx = 0$$

□

مثال ۷. دامنه‌ی مشتق‌پذیری تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = \int_{\ln x}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

پاسخ. برای این که $\ln x$ قابل تعریف باشد باید داشته باشیم: $x > 0$.

$$f(x) = \int_{\ln x}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$\underbrace{- \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} \frac{1}{1+t^2} dt}_A + \underbrace{\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt}_B$$

تابع A ترکیب دو تابع زیر است.

$$\ln x$$

و

$$\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

تابع B ترکیب دو تابع زیر است.

$$\frac{1}{x}$$

و

$$\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

بنا به قضیه‌ی اساسی، اگر g یک تابع پیوسته باشد، هر تابع به شکل $\int_a^x g(x)dx$ مشتق پذیر است. تابع $\ln x$ در $x > 0$ مشتق پذیر است و برای مشتق پذیری $\frac{1}{x}$ باید $x \neq 0$ پس دامنه‌ی مشتق پذیری تابع مورد نظر $(0, \infty)$ است. به عنوان تمرین، مشتق این تابع را محاسبه کنید. \square

مثال ۸. حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \frac{n}{n^2 + 9} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$$

پاسخ.

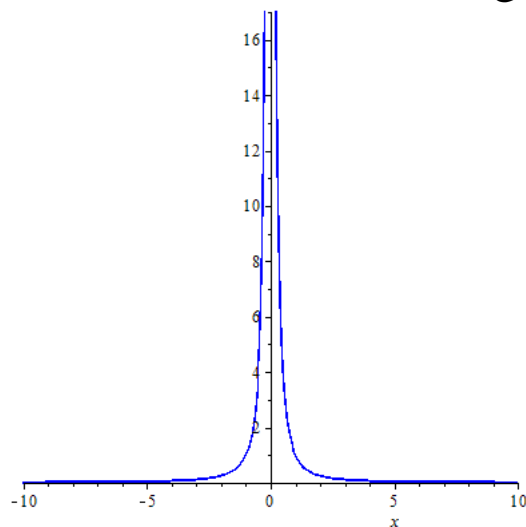
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^2 + k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i} \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{1}{1 + (\frac{k}{n})^2}}_{f(\frac{k}{n})} =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \tan^{-1}(t) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

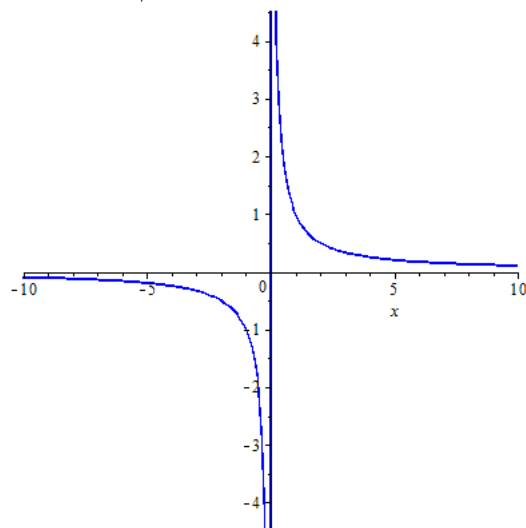
\square

ادامه‌ی درس

تابع $\frac{1}{x^2}$ را در نظر بگیرید.



تابع $\frac{1}{x}$ را نیز در نظر بگیرید. می‌خواهیم درباره‌ی مساحت زیر این دو تابع، با شروع از نقطه‌ی $x = 1$ بحث کنیم. در نگاه اول به نظر می‌رسد که مساحت زیر هر دو تابع از نقطه‌ی $x = 1$ تا نقطه‌ی $x \rightarrow \infty$ نامتناهی شود. نقطه‌ی دلخواه $t > 1$ را در نظر بگیرید. بیایید مساحت زیر منحنی از نقطه‌ی 1 تا t را با $A(t)$ نمایش دهیم.



$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \int_1^t x^{-2} dx = -x^{-1} \Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

همان طور که در بالا مشاهده می‌کنید، هر چقدر هم که t بزرگ باشد، $A(t)$ از ۱ کمتر است؛ همچنین

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 1$$

یعنی:

$$\underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx}_{\text{انتگرال نامتناهی}} := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 1$$

همین کار را با تابع $\frac{1}{x}$ امتحان کنیم:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx$$

$$\int_1^t \ln x dx = \ln x \Big|_1^t = \ln t$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty$$

پس مساحت زیر $\frac{1}{x}$ نامتناهی است ولی مساحت زیر $\frac{1}{x^2}$ متناهی است. شاید یک توجیه برای این که مساحت زیر $\frac{1}{x}$ نامتناهی است، این باشد که این مساحت از $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ بیشتر است. در این باره صحبت خواهیم کرد، فعلاً گفته‌های بالا را دقیقتر می‌کنیم:

تعریف ۹.

(ا). فرض کنید تابع f برای هر $t \geq a$ در بازه‌ی $[a, t]$ انتگرال پذیر باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

به شرطی که حد بالا موجود باشد، می‌گوییم $\int_a^{\infty} f(x) dx$ همگراست.

(ب). فرض کنید تابع f برای هر $t \leq a$ در بازه‌ی $[t, a]$ انتگرال پذیر باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

در صورتی که حدهای بالا موجود باشند انتگرال مربوطه را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می‌خوانیم.

توجه ۱۰. فرض کنید $f(x)$ یک تابع نزولی و پیوسته در بازه $[1, \infty)$ باشد، $\int_1^\infty f(x)dx$ همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ همگرا باشد. (در جلسه بعد ایده‌ی اثبات را خواهیم دید).

پیش از آن که درس این جلسه را به پایان برسانیم، یادآوری می‌کنیم در اوایل این درس، تابع e^x را با استفاده از یک سری تعریف کردیم. سپس نشان دادیم که این تابع دارای تابع وارونی است که آن هم صعودی و پیوسته است و آن را با $\ln x$ نشان دادیم. در زیر با روش دیگری برای تعریف تابع \ln آشنا می‌شویم:

نکته ۱۱.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^x = \ln x$$

بنا به قضیه‌ی اساسی:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$