۱ جلسه‌ی دهم

مثال ۱.

$$\lim_{x\to ۴} ۲x+۱=۹$$

پاسخ. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\forall\epsilon>۰\quad\exists\delta_\epsilon>۰\quad\forall x\quad(|x-۴|<\delta\to|۲x+۱-۹|<\epsilon)$$

می‌خواهیم

$$|۲x+۱-۹|<\epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$|۲x-۸|<\epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$۲|x-۴|<\epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$|x-۴|<\frac{\epsilon}{۲}$$

کافی است $\delta_\epsilon=\frac{\epsilon}{۲}$ در نظر گرفته شود. در این صورت داریم:

$$|x-۴|<\frac{\epsilon}{۲}\Rightarrow|۲x-۸|<\epsilon\Rightarrow|۲x+۱-۹|<\epsilon$$

$\square$

مثال ۲. ثابت کنید

$$\lim_{x\to ۰}x^۳\sin\frac{۱}{x}=۰$$

پاسخ. باید ثابت کنیم

$$\forall\epsilon>۰\quad\exists\delta_\epsilon>۰\quad\forall x\quad(|x|<\delta_\epsilon\to|x^۳\sin\frac{۱}{x}|<\epsilon)$$

$$|x^۳|\underbrace{|\sin\frac{۱}{x}|}_{|\sin\frac{۱}{x}|\leqslant ۱}<\epsilon$$

کافی است داشته باشیم:

$$|x^۳| < \epsilon$$

یعنی

$$|x|^۳ < \epsilon$$

یعنی

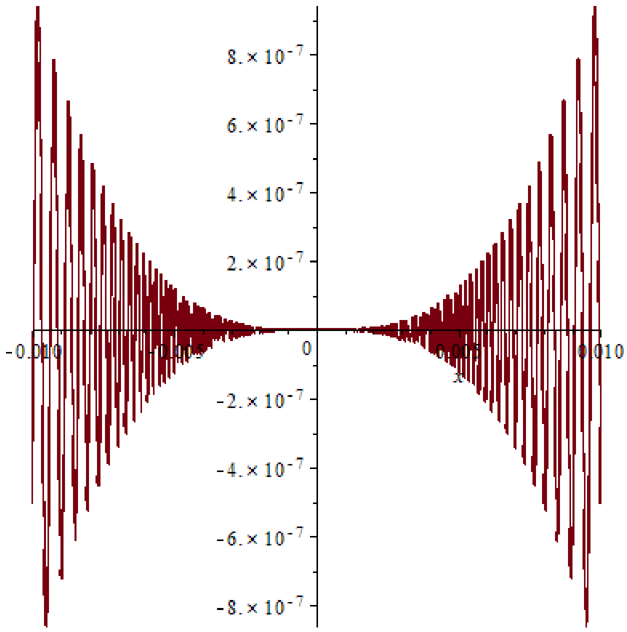
$$|x| < \sqrt[۳]{\epsilon}$$

کافی است قرار دهیم:

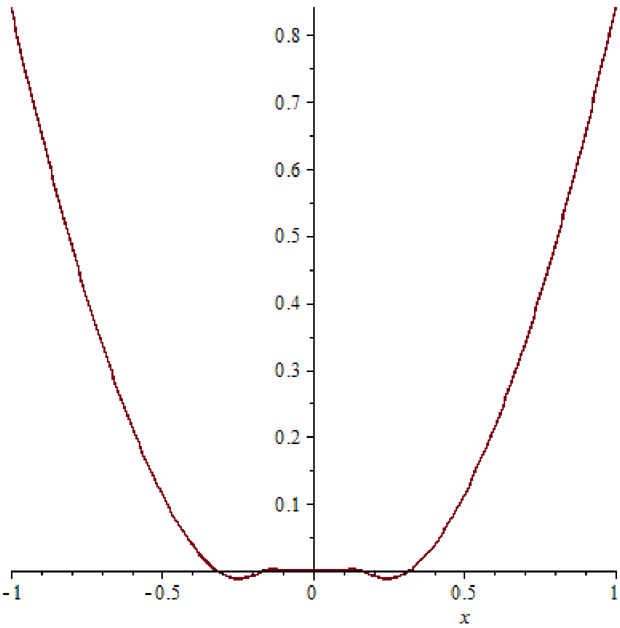
$$\delta_\epsilon = \sqrt[۳]{\epsilon}$$

در این صورت اگر $|x| < \delta_\epsilon = \sqrt[۳]{\epsilon}$ آنگاه $|x^۳ \sin(۱/x)| \leq |x^۳| < \epsilon$. □

نمودار تابع $x^۳ \sin(\frac{۱}{x})$ در نزدیکی صفر به صورت زیر است:



اما وقتی از دورتر بدان نگاه کنیم به صورت زیر است:



به عددهای روی محورهای مختصات در هر دو شکل بالا دقت کنید.

مثال ۳. نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۰} e^x = ۱ = e^۰$$

(یعنی تابع e^x در نقطه‌ی ۰ پیوسته است.)

پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall\epsilon > ۰ \quad \delta_\epsilon > ۰ \quad \forall x \quad (|x| < \delta_\epsilon \to |e^x - ۱| < \epsilon)$$

$$e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

$$e^x - ۱ = x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

$$e^x - ۱ = x(۱ + \frac{x}{۲!} + \frac{x^۲}{۳!} + \dots)$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$|e^x - ۱| \leqslant \underbrace{|x|(۱ + \frac{|x|}{۲!} + \frac{|x|^۲}{۳!} + \dots)}_{A}$$

می‌خواهیم δ را به گونه‌ای پیدا کنیم که اگر

$$|x| < \delta \Rightarrow A < \epsilon$$

فرض کنید

$$|x| < ۱$$

آنگاه

$$|e^x - ۱| < |x| \underbrace{(۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \dots)}_{e-۱}$$

پس اگر $|x| < ۱$ آنگاه برای این که $|e^x - ۱| < \epsilon$ کافی است داشته باشیم

$$|x|(e - ۱) < \epsilon$$

یعنی

$$|x| < \frac{\epsilon}{e - ۱}$$

پس اگر

$$\delta = \min\{۱, \frac{\epsilon}{e - ۱}\}$$

آنگاه اگر $|x| < \delta$ آنگاه $|e^x - ۱| < \epsilon$. $\square$

قضیه ۴. فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff$$

$$\forall \{a_n\}_{n=۰}^{\infty} \quad (\{a_n\} \mapsto a, a_n \neq a \Rightarrow \{f(a_n)\} \mapsto L)$$

$$a_۰ \quad a_۱ \quad a_۲ \quad a_۳ \quad \dots \quad \to a$$

$$f(a_۰) \quad f(a_۱) \quad f(a_۲) \quad \dots \quad \to L$$

در قضیه‌ی بالا گفته‌ایم که حد تابع در $x = a$ برابر با L است هرگاه هنگامی که با مقادیر گسسته‌ی x به a نزدیک شویم، مقادیرِ f به L نزدیک شوند. به بیان دیگر، حد تابع، وقتی $x \to a$ برابر با L است هرگاه برای **هر** دنباله‌ی a_n اگر این دنباله به a میل کند، دنباله‌ی $f(a_n)$ به L میل کند. پس برای این که حد تابع L باشد، گفته‌ی بالا باید برای همه‌ی دنباله‌ها درست باشد. یعنی برای این که ثابت کنیم حد تابع در $x = x.$ برابر با L نیست، کافی است یک دنباله ناثابتِ a_n پیدا کنیم که به a میل کند ولی $f(a_n)$ به L میل نکند. یا برای این که نشان دهیم که تابع در یک نقطه حد ندارد کافی است دو دنباله پیدا کنیم که هر دو به آن نقطه میل کنند، ولی دنباله‌ی f هایشان به اعداد مختلفی همگرا باشد.

مثال ۵. نشان دهید تابع $\sin \frac{1}{x}$ در $x = 0$ حد ندارد.

پاسخ.

$$\begin{cases} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1 \\ \sin(4n+3)\frac{\pi}{2} = -1 \end{cases}$$

اگر حد تابع برابر L باشد، با هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که به صفر نزدیک شویم، باید دنباله‌ی $\{\sin(1/a_n)\}$ به L میل کند. دنباله‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$a_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$b_n = \frac{1}{(4n+3)\frac{\pi}{2}}$$

داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad a_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad b_n \neq 0$$

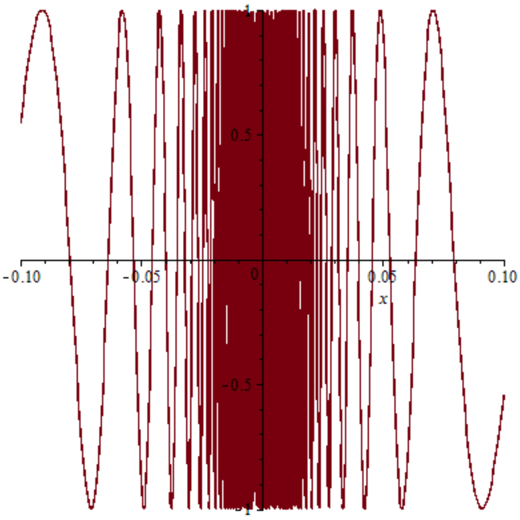
حال دنباله‌های c_n و d_n را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$c_n = \{\sin(a_n)\} = \{1\}$$

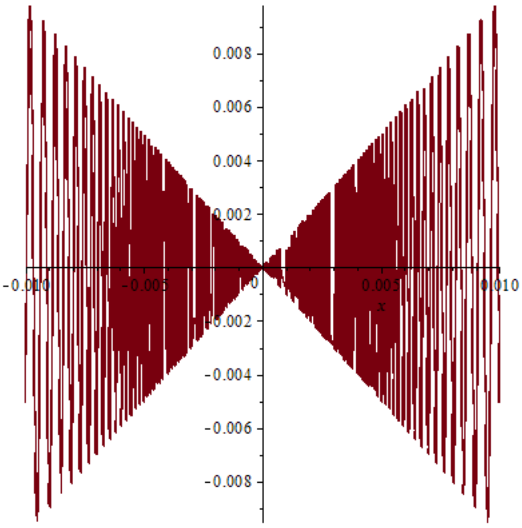
$$d_n = \{\sin(b_n)\} = \{-1\}$$

از آنجا که حد دنباله‌های c_n و d_n متفاوت است، تابع در نقطه‌ی $x = 0$ حد ندارد. □

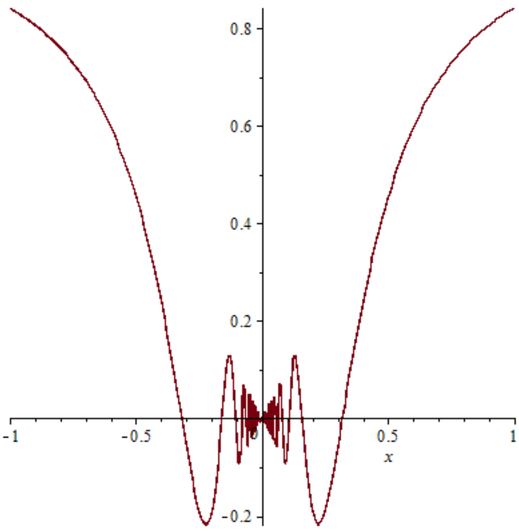
نمودار تابع $\sin(\frac{1}{x})$ به صورت زیر است:



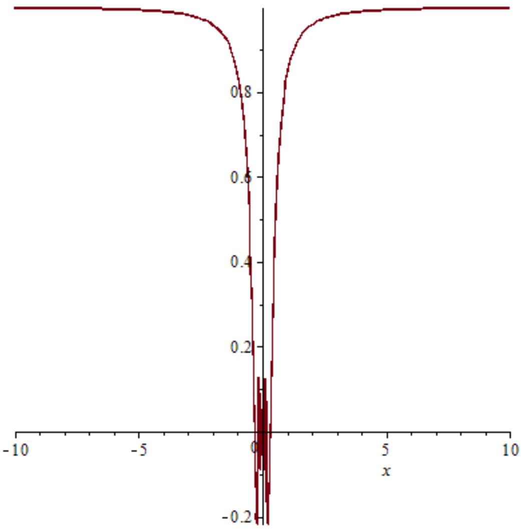
نمودار تابعِ $x\sin(1/x)$ در نزدیکی صفر به صورت زیر است:



اما اگر از فاصله‌ی دورتر به آن نگاه کنیم به شکل زیر است:



در دو شکل بالا به اندازه‌های نوشته شده روی محورها دقت کنید. اگر از این هم دورتر شویم به شکل زیر می‌رسیم:



مثال ۶. ثابت کنید تابع زیر تنها در $x = ۱$ حد دارد.

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

پاسخ. فرض کنید دنباله‌ی $\{a_n\}$ به صورتی باشد که

$$a_n \mapsto a \neq ۱$$

و همه‌ی a_nها گویا باشند

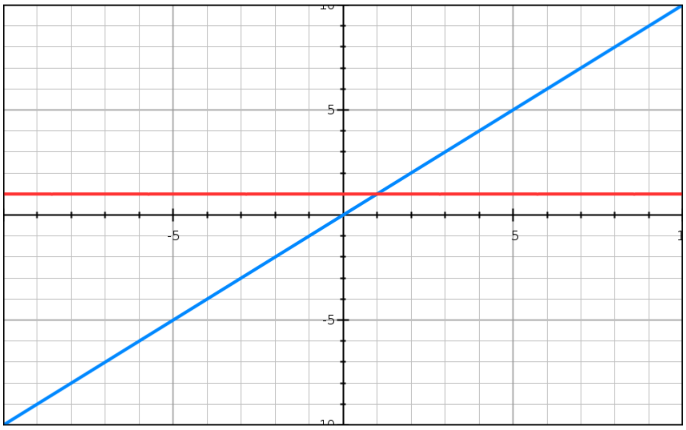
$$\{f(a_n)\} = \{۱\}$$

حال فرض کنید دنباله‌ی b_n همه‌ی جملاتش غیر گویا باشند و

$$b_n \mapsto a \neq ۱$$

$$\{f(b_n)\} = \{b_n\} \mapsto a \neq ۱$$

پس تابع در هیچ $a \neq ۱$ حد ندارد.



فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۱$$

برخی جملات این دنباله گویایند و برخی گنگ. ادّعا:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = ۱$$

برای این منظور باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |f(a_n) - ۱| < \epsilon$$

داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۱$$

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_n - ۱| < \epsilon$$

توجه

$$f(a_n) = \begin{cases} ۱ & a_n \in \mathbb{Q} \\ a_n & a_n \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

گفتیم که

$$\forall n > N_۱ \quad |a_n - ۱| < \epsilon$$

پس

$$\forall n > N_۱ \begin{cases} f(a_n) = a_n \Rightarrow |f(a_n) - ۱| < \epsilon \\ f(a_n) = ۱ \Rightarrow |f(a_n) - ۱| < \epsilon \end{cases}$$

پس در هر صورت اگر $n > N$ آنگاه $|f(a_n) - ۱| < \epsilon$. □

مثال ۷. فرض کنید تابع $f : D \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x.$ تعریف شده باشد و

$$\lim_{x \to x.} f(x) = L$$

و $L > ۰$ آنگاه تابع f در یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی $x.$ مثبت است. یعنی

$$\exists \delta > ۰ \quad \forall x \quad [x \in (x. - \delta, x. + \delta) \to f(x) > ۰]$$

به بیان دیگر اگر تابع f در یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی $x.$ منفی باشد، حد آن در $x.$ نمی تواند مثبت شود.

اثبات.

$$\lim_{x \to x.} f(x) = L > ۰ \Rightarrow$$

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta_\epsilon > ۰ \quad \forall x \quad (۰ < |x - x.| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$$

$$\forall x \quad (۰ < |x - x.| < \delta \to L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon)$$

گفتیم $L > ۰$. اگر ϵ را به صورتی در نظر بگیریم که $۰ < \epsilon < L$ آنگاه

$$\exists \delta_\epsilon \quad \forall x \quad (۰ < |x - x.| < \delta \to f(x) > L - \epsilon > ۰)$$

□

لم ۸ (یادآوری). فرض کنید f و g در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x_\circ$ تعریف شده باشند و $\lim_{x\to x_\circ} f(x)$ و $\lim_{x\to x_\circ} g(x)$ موجود باشند.

۱.

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x)\pm g(x)=\lim_{x\to x_\circ} f(x)\pm \lim_{x\to x_\circ} g(x)$$

۲.

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_\circ} f(x)\lim_{x\to x_\circ} g(x)$$

۳.

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_\circ} f(x)}{\lim_{x\to x_\circ} g(x)}$$

در صورتیکه $g(x)$ در همسایگی مورد نظر صفر نشود.

تعریف ۹. فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی $x_\circ$ تعریف شده باشد، تابع f را در $x=x_\circ$ پیوسته می‌خوانیم هرگاه

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x)=f(x_\circ)$$

به بیان دیگر هرگاه

$$\lim_{h\to \circ} f(x_\circ+h)=f(x_\circ)$$

برای رسیدن به تعریف دوم، کافی است در تعریف اول تغییر متغیرِ $h=x-x_\circ$ را در نظر بگیرید.

به بیان دیگر تابع f در نقطه‌ی $x_\circ$ پیوسته است هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ اگر $\{a_n\}\to x_\circ$ آنگاه

$$\{f(a_n)\}\to f(x_\circ)$$

مثال ۱۰. تابع e^x در نقطه‌ی $x=\circ$ پیوسته است. ثابت کردیم که $\lim_{x\to\circ} e^x=e^\circ=1$ یادآوری می‌کنیم که دامنه‌ی تابع e^x تمام $\mathbb{R}$ است.

مثال ۱۱. نشان دهید که e^x در تمام نقاط $x_\circ\in\mathbb{R}$ پیوسته است.

پاسخ.

$$\lim_{h\to\circ} e^{x_\circ+h}=\lim_{h\to\circ} e^{x_\circ}\times e^h=e^{x_\circ}$$

□

مثال ۱۲. نشان دهید که

$$\lim_{x \to \infty} e^x = +\infty$$

پاسخ. داریم

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

پس

$$\forall x > ۰ \quad e^x > ۱ + x$$

پس

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

□