۱ جلسه‌ی هفدهم

یادآوری ۱. قضیه‌ی رُل : اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و در بازه‌ی بازِ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$ آنگاه نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ چنان موجود است که $f'(c)=۰$.

مثال ۲. نشان دهید که یک و تنها یک عدد $c>۰$ موجود است به طوری که $۳^c=\frac{۱}{c^۳}$. به بیان دیگر معادله‌ی $۳^x-\frac{۱}{x^۳}=۰$ تنها دارای یک جواب است.

پاسخ. توجه کنید که اگر معادله‌ی $۳^x=\frac{۱}{x^۳}$ دارای جواب باشد، جواب آن مثبت خواهد بود، زیرا ۳^x همواره مثبت است و از این رو $\frac{۱}{x^۳}$ نیز باید مثبت باشد. معادله را به صورت زیر بنویسید:

$$f(x)=۳^x x^۳-۱=۰$$

$$x=۳\Rightarrow f(x)=۳^۳\times ۳^۳-۱>۰$$

$$x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=۳^{\frac{۱}{۳}}\times\frac{۱}{۲۷}-۱=\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۲۷}-۱<۰$$

معادله‌ی بالا در بازه‌ی $[\frac{۱}{۳},۳]$ بنا به قضیه‌ی بولتسانو دارای حداقل یک ریشه است. اگر معادله‌ی فوق دارای دو ریشه باشد، f' باید در نقطه‌ای صفر شود.

$$f'(x)=\ln ۳\times ۳^x\times x^۳+۳x^۲\times ۳^x$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳^x(\underbrace{\ln ۳\times x^۳+۳x^۲}_{A})=۰$$

$$A=۰\Rightarrow x^۳\ln ۳+۳x^۲=۰\Rightarrow x^۲(x\ln ۳+۳)=۰$$

$$x=۰\quad \text{یا}\quad x=\frac{-۳}{\ln ۳}<۰$$

از آنجا که مشتق در هیچ نقطه‌ی مثبتی صفر نمی‌شود، معادله نمی‌تواند دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد. □

مثال ۳. نشان دهید که معادله‌ی $x+\ln x=۲$ در بازه‌ی $(۰,\infty)$ دقیقاً دارای یک جواب است.

پاسخ.

$$f(x)=x+\ln x-۲$$

$$f(۱) < ۰$$

$$f(e) = e + ۱ - ۲ = e - ۱ > ۰$$

بنابراین معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[۱, e]$ حداقل دارای یک ریشه است. اگر معادله‌ی $f(x) = ۰$ در $(۰, \infty)$ دو ریشه‌ی a و b را داشته باشد، آنگاه نقطه‌ای مثبت مثل $x_۰$ پیدا می‌شود که در آن $f'(x_۰) = ۰$. اما این غیرممکن است زیرا

$$\forall x \quad f'(x) = ۱ + \frac{۱}{x} \geqslant ۱$$

بنابراین f تنها یک ریشه دارد. □

مثال ۴. معادله‌ی $xe^x - ۲e^x + ۱ = ۰$ در $\mathbb{R}$ دقیقاً دو جواب دارد.

پاسخ.

$$f(۲) = ۲e^۲ - ۲e^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow f(۲) = ۱ > ۰$$

$$f(۰) = ۰ \times e^۰ - ۲e^۰ + ۱ = ۰ \Rightarrow -۲ + ۱ = -۱ \Rightarrow f(x) = -۱ < ۰$$

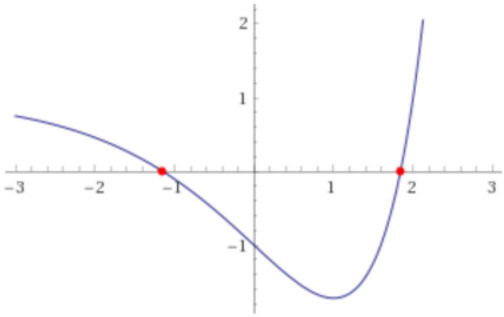
$$f(-۲) = -۲e^{-۲} - ۲e^{-۲} + ۱ = ۰ \Rightarrow -۴e^{-۲} + ۱ = ۰ \Rightarrow f(-۲) = -۴e^{-۲} + ۱ > ۰$$

بنا به قضیه‌ی بولتسانو معادله‌ی $f(x) = ۰$ حداقل یک ریشه در $[-۲, ۰]$ و حداقل یک ریشه در $[۰, ۲]$ دارد. اگر معادله‌ی یاد شده دارای بیش از دو ریشه مثلاً سه ریشه باشد، آنگاه معادله‌ی $f'(x) = ۰$ (بنا به قضیه‌ی رُل) دارای حداقل دو ریشه خواهد بود.

$$f'(x) = e^x + xe^x - ۲e^x$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow e^x + xe^e - ۲e^x = ۰ \Rightarrow e^x(۱ + x - ۲) = ۰ \Rightarrow e^x(x - ۱) = ۰$$

معادله‌ی فوق دارای تنها یک ریشه است. پس $f(x) = ۰$ نمی‌تواند بیش از دو ریشه داشته باشد.



□

توجه ۵. اگر $f^{(k+1)}(x)$ (مشتق $k+1$اُم تابع f) حداکثر دارای n ریشه باشد $f^{(k)}(x)$ حداکثر در $n+1$ نقطه صفر می‌شود. به بیان دیگر اگر $f^{(k)}$ در $n+1$ نقطه صفر شود، $f^{(k+1)}$ حداقل در n نقطه صفر می‌شود.

مثال ۶. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر باشد و $f(۰)=۰$ ، $f(۱)=۱$ و $f(۲)=۲$. نشان دهید که

$$\exists c\in\mathbb{R}\quad f''(c)=۰$$

پاسخ. بنا به قضیه‌ی رُل برای اثبات اینکه f'' در یک نقطه صفر شده است، کافی است نقطه‌های a و b را چنان بیابیم که $f'(a)=f'(b)$.
تابع $g(x)=f(x)-x$ در سه نقطه صفر شده است:

$$g(۰)=۰$$
$$g(۱)=۰$$
$$g(۲)=۰$$

بنا به قضیه‌ی رُل g' در حداقل دو نقطه صفر می‌شود.

$$\exists a,b\quad g'(a)=g'(b)=۰$$

$$g'(a)=f'(a)-۱\Rightarrow f'(a)=۱$$
$$g'(b)=۰\Rightarrow f'(b)=۱$$

پس

$$f'(a)=f'(b)=۱$$

بنابراین $\exists c\in(a,b)$ به طوری که $f''(c)=۰$ $\square$

چند جمله‌های تیلور

توابع چند جمله‌ای توابع بسیار خوشرفتاری هستند. مشتق آنها به راحتی حساب می‌شود و تحلیل ریشه‌ها آنها ساده‌تر از بقیه‌ی توابع است. در ادامه‌ی درس خواهیم دید که برخی از توابع را می‌توان

با استفاده از چند جمله‌ای‌ها تقریب زد. یعنی می‌توان دنباله‌ای از توابعِ چندجمله‌ای پیدا کرد که به هر اندازه‌ی دلخواه به تابع مورد نظر نزدیک شوند. در زیر چگونگی این کار را توضیح داده‌ایم.

وقتی می‌گوئیم تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر است، یعنی در اطراف آن نقطه، تابع را می‌توان با خط مماس بر آن در آن نقطه تقریب زد. به بیان دیگر، Δy، یعنی تغییرات تابع را در اطراف آن نقطه، می‌توان با dy یعنی تغییرات خط مماس بر تابع تقریب زد. قضیه‌ی مقدار میانگین میزان این خطا را نیز مشخص می‌کند:

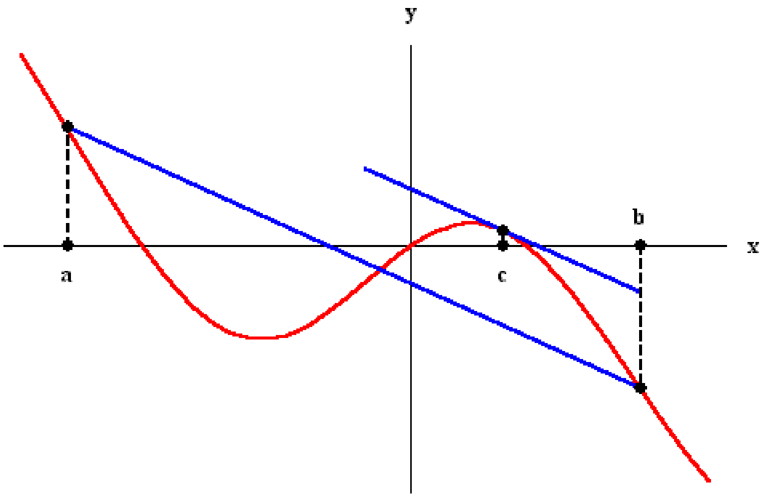
قضیه ۷. (آ) فرض کنید تابع $f : I \to \mathbb{R}$ در بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و $b > a$ و $a, b \in I$. آنگاه $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

به بیان دیگر $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

به این قضیه، قضیه‌ی **مقدار میانگین** گفته می‌شود. با توجه به شکل پائین، قضیه‌ی مقدار میانگین بیانگر این است که نقطه‌ای روی منحنی پیدا می‌شود که در آن خط مماس بر منحنی با خط مستقیم گذرنده از نقاطِ $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ برابر است.



اثبات. فرض کنید $g(x)$ خط گذرنده از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ باشد. داریم:

$$f(a) - g(a) = ۰$$

$$f(b) - g(b) = ۰$$

تابع $f - g$ تابعی مشتق‌پذیر است و

$$f(a) - g(a) = ۰$$

$$f(b) - g(b) = ۰$$

پس نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$f'(c) - g'(c) = ۰$$

یعنی $f'(c) = g'(c)$. از طرفی $g(x)$ معادله‌ی یک خط راست است با شیب $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$؛ یعنی $g'(x)$ در تمام نقاط برابر است با $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. پس

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

یعنی

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

□

قضیه بالا در واقع می‌گوید که $f(a)$ تقریبی برای $f(b)$ است و خطای این تقریب نسبت به فاصله‌ی a, b خطی است؛ یعنی برابر است با $f'(c)(b - a)$ برای یک $c \in (a, b)$. در زیر می‌بینیم که $f(b)$ را می‌توان تقریب بهتری زد.

(ب) فرض کنیم که f در I دو بار مشتق‌پذیر باشد و $a, b \in I$ و $a < b$ آنگاه عنصری مانند $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(c)}{۲}(b - a)^۲$$

اثبات. تعریف کنید:

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - T(x - a)^۲$$

مقدار T را به راحتی می‌توان عددی گرفت که برای آن، $g(b)$ برابر با صفر شود. در اینجا آن عدد را برای راحتی نمی‌نویسیم. داریم

$$g(a) = 0$$

و گفتیم که T را عددی بگیرید که به ازای آن :

$$g(b) = 0.$$

بنا به قضیه‌ی رُل نقطه‌ی $d \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$g'(d) = 0 \quad (***)$$

همچنین دقت کنید که

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) - 2T(x-a) \quad (*)$$

$$g'(a) = 0 \quad (**)$$

دوباره بنا به قضیه‌ی رُل و با توجه به $(***), (**)$ نقطه‌ای مانند $c \in (a, d)$ موجود است به طوری که $g''(c) = 0$. داریم

$$g''(x) = f''(x) - 2T$$

$$g''(c) = 0 \Rightarrow f''(c) = 2T \Rightarrow T = \frac{f''(c)}{2}$$

در نتیجه داریم:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$$

□

قضیه بالا می‌گوید که $f(a) + f'(a)(b-a)$ تقریبی برای $f(b)$ است و خطای این تقریب برابر است با $\frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$ برای یک $c \in (a, b)$. دقت کنید که اگر $(b-a)$ عدد کوچکی باشد، وقتی به توان ۲ برسد کوچکتر می‌شود. پس به نظر می‌رسد که این تقریب، از تقریبِ مورد آ بهتر باشد. در زیر می‌بینیم که از این تقریب بهتر هم وجود دارد.

(ج) اگر تابع f ، $n+۱$ بار مشتق‌پذیر باشد:

$$\exists c \in (a,b) \quad f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{۲!}(b-a)^{۲}+\frac{f'''(a)}{۳!}(b-a)^{۳}+\dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(b-a)^{n+۱}$$

به بیان دیگر فرض کنید $x > a$. داریم

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^{۲}+\frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^{۳}+\dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}$$

به

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^{۲}+\frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^{۳}+\dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

یک چند **جمله‌ای تیلور** از درجه‌ی n حول نقطه‌ی a گفته می‌شود. دقت کنید که می‌توان با افزایش دادن درجه‌ی چندجمله‌ای تیلور یک تابع به آن نزدیکتر و نزدیکتر شد.

(د) به عبارت زیر، سری تیلور تابع f حول نقطه‌ی a گفته می‌شود (اگر f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد):

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+\frac{f^{(۱)}(a)}{۱!}(x-a)+\dots$$

به توابعی که در دامنه‌ای خاص دقیقا برابر با سری تیلور خود هستند، **توابع تحلیلی** گفته می‌شود.

توجه ۸. اگر تابع f در بازه‌ای بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، لزوماً سری تیلور f با خودِ آن برابر نیست.

مثال ۹.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{۱}{x^{۲}}} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

تمرین ۱۰. نشان دهید که

$$\forall n \quad f^{(n)}(۰) = ۰$$

بنابراین سری این تابع با خودِ آن برابر نیست.