

۱ جلسه‌ی ششم

در جلسه‌ی قبل دیدیم که

۱. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ آنگاه

۲. اگر $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n$

• اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

• اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگراست.

هم‌چنین در جلسه‌ی قبل درباره‌ی سریهای هندسی صحبت کردیم و گفتیم که اگر $|x| < 1$ داریم

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

حال تابعی را در نظر بگیرید که هر $x \in (-1, 1)$ را به حاصلجمع زیر ببرد:

$$1 + x + x^2 + \dots$$

این تابع دقیقاً برابر با تابع $\frac{1}{1-x}$ است. به بسط زیر برای تابع یادشده، بسط تیلور این تابع می‌گوئیم:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

در این باره در جلسات آینده مفصلاً صحبت خواهیم کرد.

مثال ۱. تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^{n+1}}$ به ازای چه مقادیری از x همگراست.

پاسخ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-5}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-5}{3}\right)^n$$

از آنجا که سری فوق یک سری هندسی است، برای این که همگرا باشد، باید داشته باشیم:

$$\left| \frac{2x-5}{3} \right| < 1$$

یعنی

$$-1 < \frac{2x-5}{3} < 1 \Rightarrow -3 < 2x-5 < 3 \Rightarrow 1 < x < 4$$

□

مثال ۲. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد نامنفی ($\forall n \quad a_n, b_n \geq 0$) و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ هر دو همگرا باشند. نشان دهید در اینصورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ نیز همگراست.

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots$$

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$$

توجه کنید که ادعا نکرده‌ایم که

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

همچنین توجه کنید که با فرض درست بودن مثال بالا، به ویژه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ همگراست.

پاسخ. $\forall n \quad a_n, b_n \geq 0$ بنابراین $S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ صعودی است:

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} b_{n+1} \geq 0$$

کافی است نشان دهیم که دنباله‌ی S_n کراندار است.

می‌دانیم که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست. پس داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ بنابراین برای $\epsilon = 1$ عدد $N_1 \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N_1 \quad \underbrace{a_n}_{|a_n - 0| < 1} < 1$$

پس داریم:

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n b_n \leq \sum_{n=N_1+1}^{\infty} 1 \times b_n$$

از طرفی b_n ، همگراست. پس عبارت $\sum_{n=N_1+1}^{\infty} b_n$ کراندار است. حال توجه کنید که

$$S_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = \underbrace{\sum_{n=0}^{N_1} a_n b_n}_{\text{کراندار، زیرا جمعی متناهی است}} + \underbrace{\sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n b_n}_{\text{کراندار}} \leq M$$

پس S_n کراندار است. \square

مثال ۳. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n+1}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. از آنجا که در صورت و منخرج، توان می‌بینیم منطقی به نظر می‌رسد که این سری را با یک p سری به صورت $\sum \frac{1}{n^p}$ مقایسه کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n+1}} \xrightarrow{\text{منخرج را بزرگ می‌کنیم تا کسر کوچک شود}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n^3+n^3}} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3} \times n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3} \times n^{\frac{1}{2}}}$$

می‌دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ واگراست. زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

پس سری مورد نظر ما نیز واگراست. \square

در زیر آزمون مقایسه‌ی حدی را ارائه کرده‌ایم. این آزمون در واقع همان آزمون مقایسه است که به زبان دیگری نوشته شده است. به بیان بهتر، در آزمون مقایسه‌ی حدی، سربها را از جمله‌های به‌اندازه‌ی کافی بزرگ به بعد، با هم مقایسه می‌کنیم. وقتی سخن از به‌اندازه‌ی کافی بزرگ به میان آید، در واقع سخن از مفهوم حد است.

لم ۴ (آزمون مقایسه‌ی حدی). فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به گونه‌ای که

$$\forall n \begin{cases} a_n \geq 0 \\ b_n > 0 \end{cases}$$

۱. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ آنگاه اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \end{array}$$

توجه کنید که در این آزمون بحث همگرایی یا واگرایی سری $\sum \frac{a_n}{b_n}$ نیست. بلکه می‌خواهیم بدانیم که چگونه می‌شود از همگرایی یا واگرایی $\sum a_n$ همگرایی یا واگرایی $\sum b_n$ را نتیجه گرفت.

اثبات. فرض: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگراست.

حکم: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

سری $\sum a_n$ صعودی است (زیرا جمله‌های آن نامنفی‌اند) پس کافی است کرانداری آن را ثابت کنیم.

داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ پس برای $\epsilon = \frac{1}{2}$ عدد $N_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$\forall n > N_{\frac{1}{2}} \quad \frac{a_n}{b_n} < \frac{1}{2}$$

یعنی

$$\forall n > N_{\frac{1}{2}} \quad a_n < \frac{b_n}{2}$$

پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

حال از آن جا که $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگراست، بنا به آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

□

همان گونه که مشاهده کردید، در اثبات بالا همان آزمون مقایسه را از جمله‌ای به بعد به کار گرفتیم.

۲. (قسمت دوم لم) اگر $L > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد (یا از همگرایی هر یک از این دو سری، همگرایی دیگری نتیجه می‌شود و از واگرایی هر یک از این دو سری، واگرایی دیگری نتیجه می‌شود)

اثبات. از آنجا که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ داریم:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{\epsilon} \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_{\epsilon} \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \epsilon$$

$$\forall n > N_{\epsilon} \quad L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon$$

می‌دانیم که $L > 0$ پس یک عدد $\epsilon > 0$ را چنان در نظر بگیرید که $L > \epsilon > 0$ در نتیجه داریم:

$$\forall n > N_{\epsilon} \quad b_n(L - \epsilon) < a_n < b_n(L + \epsilon)$$

نشان می‌دهیم که اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست. داریم

$$\sum_{n=N_{\epsilon}+1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N_{\epsilon}+1}^{\infty} b_n$$

عبارت سمت راست همگراست، پس $\sum_{n=N_{\epsilon}+1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست. همچنین

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N_{\epsilon}} a_n + \sum_{n=N_{\epsilon}+1}^{\infty} a_n$$

پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

به طور مشابه با استفاده از نامساوی

$$\forall n > N_{\epsilon} \quad b_n(L - \epsilon) < a_n$$

نشان دهید که اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum b_n$ همگراست.

□

۳. (قسمت سوم لم) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ آنگاه اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

اثبات. از آنجا که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

حال بنا به قسمت اول لم اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز همگراست. پس \square اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

مثال ۵. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{3n+2n^5}}$ را بررسی کنید.

پاسخ. با نگاهی به توانهای n در صورت و مخرج عبارت داخل سری متوجه می شویم که اگر صورت را در n ضرب کنیم (یعنی اگر عبارت داخل سری را بر $\frac{1}{n}$ تقسیم کنیم) حاصل به بی نهایت میل خواهد کرد. به بیان دیگر، این سری را با $\sum \frac{1}{n}$ مقایسه می کنیم. فرض کنید $b_n = \frac{1}{n}$. می دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگراست. اگر $a_n = \frac{n}{\sqrt[3]{3n+2n^5}}$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{3n+2n^5}} = \infty$$

پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست (با توجه به آزمون مقایسه‌ی حدی). در زیر علت این را که حد فوق بی نهایت شده است بیان کرده ایم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{3n+2n^5}} \stackrel{\text{مخرج را بزرگ می کنیم}}{\geq} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{5n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{5} \times n^{\frac{5}{3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2-\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{5}} = \infty$$

\square

بهتر است پیش از ادامه‌ی درس، مختصری درباره‌ی بی نهایت شدن حد دنباله‌ها بگوئیم.

توجه ۶. عبارت $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ یعنی:

جملات دنباله به اندازه‌ی دلخواه بزرگ می شوند، به شرط اینکه اندیسهای آنها به اندازه‌ی کافی بزرگ شوند.

$$\overbrace{\forall M \in \mathbb{N}}^{\text{اندازه‌ی دلخواه}} \quad \overbrace{\exists N_M \in \mathbb{N}}^{\text{اندازه‌ی کافی}} \quad \forall n > N_M \quad |a_n| > M$$

بحث را با حل مثالی از دنباله‌ها پی می‌گیریم.

مثال ۷ (از دنباله‌ها). فرض کنید که $a > 1$ نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

معنی عبارت بالا این است که «نرخ رشد» دنباله‌ی a^n از نرخ رشدِ دنباله‌ی n بیشتر است. اگر بخواهید با استناد به «نرخ رشد» این سوال را حل کنید، نوشتن چند جمله‌ی اول دو دنباله و مقایسه‌ی آنها کافی نیست.

پاسخ. می‌دانیم که $a > 1$ پس $b \geq 1$ موجود است به طوری که $a = b + 1$.

$$\frac{n}{a^n} = \frac{n}{(b+1)^n} = \frac{n}{1 + nb + \underbrace{\binom{n}{2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n}_{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

داریم $(b+1)^n \geq \binom{n}{2}b^2$ پس

$$0 \leq \frac{n}{(b+1)^n} \leq \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}b^2}$$

دنباله‌ی $\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}b^2}$ به صفر میل می‌کند، پس بنا به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$$

علت این که جمله‌ی $\binom{n}{2}b^2$ را استفاده کردیم این بود که می‌خواستیم توان ۲ برای n ظاهر شود. \square

از مثال بالا نتیجه می‌شود که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad n < (a^n)\epsilon.$$

در این جلسه ثابت کردیم که

- اگر a_n و b_n دو دنباله با جملات نامنفی باشند و b_n ها مخالف صفر باشند، آنگاه اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ آنگاه از همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ نتیجه می‌شود و از واگرایی $\sum a_n$ و واگرایی $\sum b_n$ نتیجه می‌شود.

• با فرضهای بالا اگر $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum b_n$ همگرا باشد.

• $\lim \frac{n}{a^n} = 0$ برای هر $a > 1$.