۱ جلسه‌ی بیست و نهم

مثال ۱. انتگرال معین زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}dx$$

پاسخ. اگر F تابع اولیه این انتگرال باشد، آنگاه حاصل انتگرال فوق برابر است با

$$F(\frac{۱}{۲}) - F(۰)$$

محاسبه‌ی تابع اولیه، یعنی محاسبه‌ی انتگرال نامعین زیر:

$$\int \frac{\sqrt{۱+x}}{\sqrt{۱-x}}dx$$

$$\sqrt{۱-x} = t \Rightarrow ۱-x = t^۲ \Rightarrow x = ۱-t^۲ \Rightarrow dx = -۲tdt$$

$$\sqrt{۱+x} = \sqrt{۱+۱-t^۲} = \sqrt{۲-t^۲}$$

$$-\int \frac{\sqrt{۲-t^۲}}{\cancel{t}}۲\cancel{t}dt = -۲\int \sqrt{۲-t^۲}dt$$

$$۲-t^۲ \geqslant ۰ \iff -\sqrt{۲} \leqslant t \leqslant \sqrt{۲} \Rightarrow t = \sqrt{۲}\sin u \Rightarrow dt = \sqrt{۲}\cos udu$$

$$-۲\int \sqrt{۲-t^۲}dt = -۲\int \sqrt{۲-۲\sin^۲ u} \times \sqrt{۲}\cos udu =$$

$$-۲\int \sqrt{۲}\cos u \times \sqrt{۲}\cos udu = -۲\int ۲\cos^۲ udu =$$

$$= -۲\int (۱+\cos ۲u)du = -۲(u + \frac{\sin ۲u}{۲})$$

$$u = \sin^{-۱}(\frac{t}{\sqrt{۲}}) = \sin^{-۱}(\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۲}})$$

$$x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^{-۱}(\frac{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{۲}}) = \sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})$$

$$x = ۰ \Rightarrow \sin^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۲}})$$

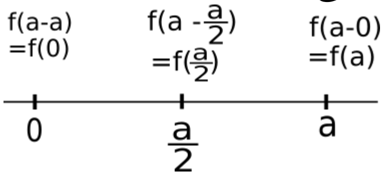
$$(-۲u - \sin ۲u)\Big|_{\sin^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۲}})}^{\sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})} = -۲\sin^{-۱}(\frac{۱}{۲}) - \sin(۲\sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})) + ۲\sin^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) + \sin(۲\sin^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۲}}))$$

□

مثال ۲. فرض کنید تابع f پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\int_{۰}^{a} f(x)dx = \int_{۰}^{a} f(a-x)dx$$

پاسخ.



$$\int_{۰}^{a} f(a-x)dx$$

$$t = a - x \Rightarrow dt = -۱ \times dx \Rightarrow dt = -dx$$

$$t = a - x \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow t = a \\ x = a \Rightarrow t = ۰ \end{cases}$$

$$\int_{۰}^{a} f(a-x)dx = -\int_{a}^{۰} f(t)dt = \int_{۰}^{a} f(t)dt = \int_{۰}^{a} f(x)dx$$

$\square$

مثال ۳. با استفاده از مثال قبل انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

(برای هر $n \in \mathbb{N}$ جداگانه محاسبه کنید.)

پاسخ.

$$A = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^n(\frac{\pi}{۲} - x)}{\sin^n(\frac{\pi}{۲} - x) + \cos^n(\frac{\pi}{۲} - x)} dx =$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

$$A + A = ۲A = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \left(\frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} + \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\right) dx =$$

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} ۱ dx = \frac{\pi}{۲}$$

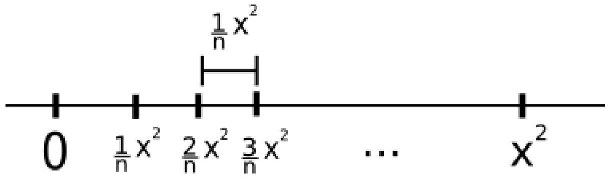
$$۲A = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow A = \frac{\pi}{۴}$$

□

مثال ۴. فرض کنید $F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^۲}{n} \sum_{k=۱}^{n} \tan(\frac{kx^۲}{n})$. نشان دهید که f بر $(۱, \frac{\pi}{۴})$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\sum_{k=۱}^{n} \tan(\frac{kx^۲}{n}) = \tan(\frac{x^۲}{n}) + \tan(\frac{۲x^۲}{n}) + \ldots + \tan(\frac{nx^۲}{n})$$



$$\frac{x^۲}{n} \sum_{k=۱}^{n} \tan(\frac{kx^۲}{n}) = \sum_{k=۱}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

$$x_i^* = \frac{k}{n}x^۲, \quad \Delta x_i = \frac{x^۲}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^۲}{n} \tan(\frac{kx^۲}{n}) = \int_۰^{x^۲} \tan(t)dt$$

بنا به قضیه‌ی اساسی اول، تابع فوق مشتق‌پذیر است. می دانیم که $(\int_۰^x f(u)du)' = f(x)$، پس

$$(\int_۰^{x^۲} f(t)dt)' = ۲xf(x^۲)$$

$$\Rightarrow \int_۰^{x^۲} \tan(t)dt = ۲x \tan x^۲$$

□

مثال ۵. حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{\int_۱^x \frac{du}{۱+\ln u}}{x - ۱}$$

پاسخ. قاعده‌ی لُپیتال:

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{\int_۱^x \frac{du}{۱+\ln u}}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\frac{۱}{۱+\ln x}}{۱} = ۱$$

□

مثال ۶. فرض کنید f یک تابع پیوسته و فرد باشد،نشان دهید که برای هر a داریم

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۰$$

پاسخ.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{۰} f(x)dx + \int_{۰}^{a} f(x)dx$$

$$u = -x \Rightarrow du = -dx$$

$$\int_{a}^{۰} -f(-u)du + \int_{۰}^{a} f(x)dx = \int_{۰}^{a} -f(u)du + \int_{۰}^{a} f(x)dx = ۰$$

□

مثال ۷. دامنه‌ی مشتق‌پذیری تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = \int_{\ln x}^{\frac{۱}{x}} \frac{۱}{۱+t^۴}dt$$

پاسخ. برای این که $\ln x$ قابل تعریف باشد باید داشته باشیم: $x > ۰$.

$$f(x) = \int_{\ln x}^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۱+t^۴}dt + \int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{x}} \frac{۱}{۱+t^۴}dt =$$

$$\underbrace{-\int_{\frac{۱}{۲}}^{\ln x} \frac{۱}{۱+t^۴}dt}_{A} + \underbrace{\int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{x}} \frac{۱}{۱+t^۴}dt}_{B}$$

تابع A ترکیب دو تابع زیر است.

$$\ln x$$

و

$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{x} \frac{۱}{۱+t^۴}dt$$

تابع B ترکیب دو تابع زیر است.

$$\frac{۱}{x}$$

و

$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{x} \frac{۱}{۱+t^۴}dt$$

بنا به قضیه‌ی اساسی، اگر g یک تابع پیوسته باشد، هر تابع به شکل $\int_a^x g(x)dx$ مشتق پذیر است. تابع $\ln x$ در $x > ۰$ مشتق‌پذیر است و و برای مشتق‌پذیری $\frac{۱}{x}$ باید $x \neq ۰$. پس دامنه‌ی مشتق‌پذیری تابع مورد نظر $(۰, \infty)$ است. به عنوان تمرین، مشتق این تابع را محاسبه کنید. □

مثال ۸. حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^۲+۱} + \frac{n}{n^۲+۴} + \frac{n}{n^۲+۹} + \ldots + \frac{n}{n^۲+n^۲})$$

پاسخ.

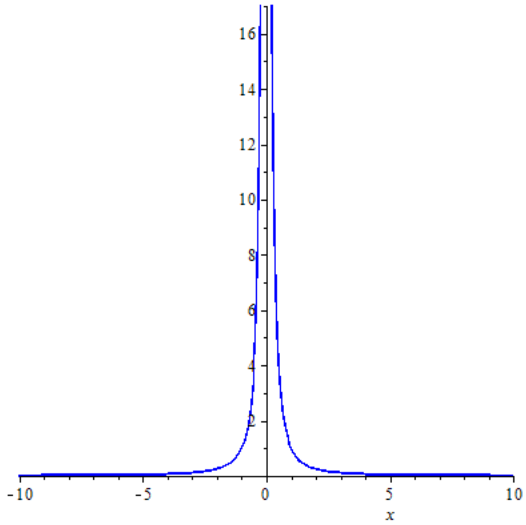
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{n}{n^۲+k^۲} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{n^۲}{n^۲+k^۲} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{۱}{n}}_{\Delta x_i}\sum_{k=۱}^{\infty}\underbrace{\frac{۱}{۱+(\frac{k}{n})^۲}}_{f(\frac{k}{n})} =$$

$$\int_۰^۱ \frac{۱}{۱+t^۲}dt = \tan^{-۱}(t)|_۰^۱ = \frac{\pi}{۴} - ۰ = \frac{\pi}{۴}$$

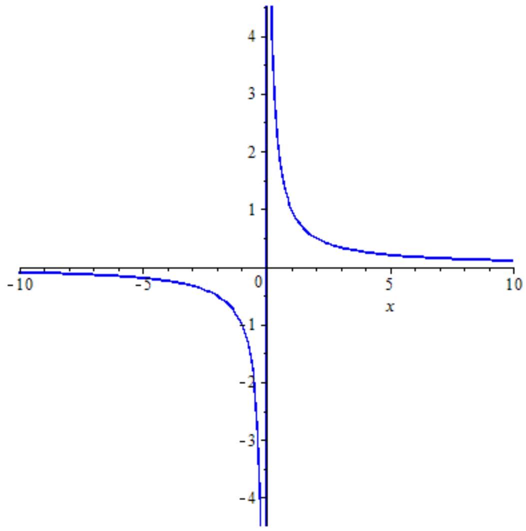
□

ادامه‌ی درس

تابع $\frac{۱}{x^۲}$ را در نظر بگیرید.



تابع $\frac{۱}{x}$ را نیز در نظر بگیرید. می‌خواهیم درباره‌ی مساحت زیر این دو تابع، با شروع از نقطه‌ی $x = ۱$ بحث کنیم. در نگاه اول به نظر می‌رسد که مساحت زیر هر دو تابع از نقطه‌ی $x = ۱$ تا نقطه‌ی $x \to \infty$ نامتناهی شود. نقطه‌ی دلخواهِ $t > ۱$ را در نظر بگیرید. بیایید مساحت زیر منحنی از نقطه‌ی ۱ تا t را با $A(t)$ نمایش دهیم.



$$A(t) = \int_۱^t \frac{۱}{x^۲} dx = \int_۱^t x^{-۲} dx = -x^{-۱}|_۱^t = ۱ - \frac{۱}{t}$$

همان طور که در بالا مشاهده می‌کنید، هر چقدر هم که t بزرگ باشد، $A(t)$ از ۱ کمتر است؛ همچنین

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = ۱$$

یعنی:

$$\underbrace{\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x^{۲}}dx}_{\text{انتگرال ناسره}} := \lim_{t\to\infty}\int_{۱}^{t} \frac{۱}{x^{۲}}dx = \lim_{t\to\infty} A(t) = ۱$$

همین کار را با تابع $\frac{۱}{x}$ امتحان کنیم:

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{۱}^{t} \frac{۱}{x}dx$$

$$\int_{۱}^{t} \ln x dx = \ln x|_{۱}^{t} = \ln t$$

$$\lim_{\to}\infty \int_{۱}^{t} \frac{۱}{x}dx = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

پس مساحت زیر $\frac{۱}{x}$ نامتناهی است ولی مساحت زیر $\frac{۱}{x^{۲}}$ متناهی است. شاید یک توجیه برای این که مساحت زیر $\frac{۱}{x}$ نامتناهی است، این باشد که این مساحت از $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ بیشتر است. در این باره صحبت خواهیم کرد، فعلا گفته‌های بالا را دقیقتر می‌کنیم:

تعریف ۹.

(آ). فرض کنید تابع f برای هر $t \geqslant a$ در بازه‌ی $[a,t]$ انتگرال‌پذیر باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx := \lim_{t\to\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx$$

به شرطی که حد بالا موجود باشد، می‌گوییم $\int_{۱}^{\infty} f(x)dx$ همگراست.

(ب). فرض کنید تابع f برای هر $t \leqslant a$ در بازه‌ی $[t,a]$ انتگرال‌پذیر باشد.، تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)dx$$

در صورتی که حدهای بالا موجود باشند انتگرال مربوطه را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می‌خوانیم.

توجه ۱۰. فرض کنید $f(x)$ یک تابع نزولی و پیوسته در بازه‌ی $[۱, \infty)$ باشد، $\int_{۱}^{\infty} f(x)dx$ همگرا است اگروتنهااگر $\sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$ باشد. (در جلسه‌ی بعد ایده‌ی اثبات را خواهیم دید).

پیش از آن که درس این جلسه را به پایان برسانیم، یادآوری می‌کنیم در اوایل این درس، تابعِ e^x را با استفاده از یک سری تعریف کردیم. سپس نشان دادیم که این تابع دارای تابع وارونی است که آن هم صعودی و پیوسته است و آن را با $\ln x$ نشان دادیم. در زیر با روش دیگری برای تعریف تابع ln آشنا می‌شویم:

نکته ۱۱.

$$\ln x = \int_{۱}^{x} \frac{۱}{t} dt$$

$$\int_{۱}^{x} \frac{۱}{t} dt = \ln t|_{۱}^{x} = \ln x$$

بنا به قضیه‌ی اساسی:

$$(\ln x)' = \frac{۱}{x}$$