۱ جلسه‌ی بیست و هفتم

در پایان جلسه‌ی قبل قرار شد انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

مثال ۱.

$$\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx$$

پاسخ.

یادآوری ۲.

$$x^2+ax=(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}$$

$$\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{x}{x^2-x+1}dx}_{A}+\frac{2}{3}\underbrace{\int \frac{1}{x^2-x+1}dx}_{B}$$

محاسبه‌ی A:

$$u=x^2-x+1\Rightarrow du=(2x-1)dx$$

$$\int \frac{x}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx=$$

$$\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2-x+1}dx}_{D}$$

محاسبه‌ی D:

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx=\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx=\int \frac{1}{\frac{3}{4}(\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}+1)}dx=\frac{4}{3}\int \frac{1}{(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})^2+1}dx$$

$$t=\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow dt=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}dx$$

$$\frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t^2+1}dt=\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}(t)+c=$$

$$\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\tan^{-۱}(\frac{x-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}})+c$$

□

توجه ۳. روش محاسبه‌ی انتگرالهای زیر را به خاطر بسپارید:

.۱

$$\int\frac{۱}{ax^{۲}+bx+c}dx=\int\frac{۱}{a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}-\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}+c}dx$$

انتگرال بالا را باید به صورت

$$\int\frac{۱}{u^{۲}+۱}du$$

درآورد و محاسبه کرد.

.۲

$$\int\frac{cx+d}{ax^{۲}+bx+c}dx=\underbrace{\int\frac{cx}{ax^{۲}+bx+c}dx}_{A}+\underbrace{\int\frac{d}{ax^{۲}+bx+c}dx}_{B}$$

انتگرال B همانند انتگرال بالا محاسبه می‌شود و انتگرال A با استفاده از تغییر متغیر زیر

$$u=ax^{۲}+bx+c\Rightarrow du=۲ax+b$$

و ایجاد عبارت $۲ax+b$ در صورت کسر، نهایتاً استخراج $\int\frac{du}{u}$ از آن، محاسبه می‌شود.

مثال ۴. انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int\frac{x^{۳}+۳x^{۲}+۳x-۱}{x^{۳}+x^{۲}-۲x}$$

پاسخ. از آنجا که درجه‌ی صورت اکیداًکمتر از درجه‌ی مخرج نیست، برای محاسبه‌ی انتگرال فوق، نخست صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$x^{۳}+۳x^{۲}+۳x-۱=(x^{۳}+x^{۲}-۲x)(۱)+۲x^{۲}+۵x-۱$$

پس

$$\frac{x^{۳}+۳x^{۲}+۳x-۱}{x^{۳}+x^{۲}-۲x}=۱+\frac{۲x^{۲}+۵x-۱}{x^{۳}+x^{۲}-۲x}$$

$$\int 1dx + \int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx = x + \underbrace{\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx}_{A}$$

$$A = \int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx = \int \frac{2x^2+5x-1}{x(x+2)(x-1)}dx =$$
$$\int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x+2}dx + \int \frac{c}{x-1}dx$$

برای بدست آوردن A، B و C سه عدد در معادله قرار می‌دهیم تا با سه معادله و سه مجهول این مقادیر را بدست آوریم.

$$x = 2 \Rightarrow \frac{17}{8} = \frac{A}{2} + \frac{B}{4} + c \tag{1}$$
$$x = -1 \Rightarrow \frac{-4}{2} = \frac{A}{-1} + B + \frac{c}{-2} \tag{2}$$
$$x = 3 \Rightarrow \frac{32}{30} = \frac{A}{3} + \frac{B}{5} + \frac{c}{2} \tag{3}$$

پس از حل سه معادله و سه مجهول بالا به جواب‌های زیر می‌رسیم:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 2, \quad c = -\frac{1}{2}$$

حال باید انتگرال‌های زیر را حساب کنیم:

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{x}dx + \int \frac{2}{x+2}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x-1}dx =$$
$$\frac{1}{2}\ln|x| + 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$$

□

مثال ۵. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^2}dx$$

پاسخ.

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{c}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$$

پس از حل یک دستگاه چهار معادله و چهار مجهول به پاسخ‌های زیر می‌رسیم.

$$A=-\frac{1}{4},\quad B=-\frac{1}{4},\quad C=\frac{5}{4},\quad D=\frac{7}{4}$$

انتگرال کسر دوم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\int \frac{B}{x^2}dx = B\int \frac{1}{x^2}dx = B = \int x^{-2}dx = \frac{B}{-1}x^{-1} = -B\frac{1}{x}$$

بقیه نیز به همین ترتیب حساب می‌شوند. □

مثال ۶. انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$$

پاسخ.

$$u=\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx = 2udu$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int \frac{2udu}{u+1} = \int \frac{2u+2}{u+1}du - \int \frac{2}{u+1}du =$$

$$\int 2du - 2\ln|u+1| = 2u - 2\ln|u+1| = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + c$$

□

توجه ۷.

$$\int \frac{u}{u+1}du = \int \frac{u+1-1}{u+1}du$$

تمرین ۸. روشی برای محاسبه‌ی انتگرالهای به صورت زیر، ارائه کنید:

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}$$

توجه ۹.

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$$

۲ انتگرال معین

گفتیم که این که F در بازه‌ی I یک تابع اولیه برای f است، یعنی:

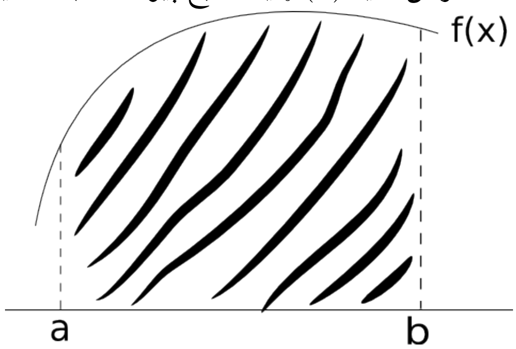
$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

در این حالت می‌نویسیم:

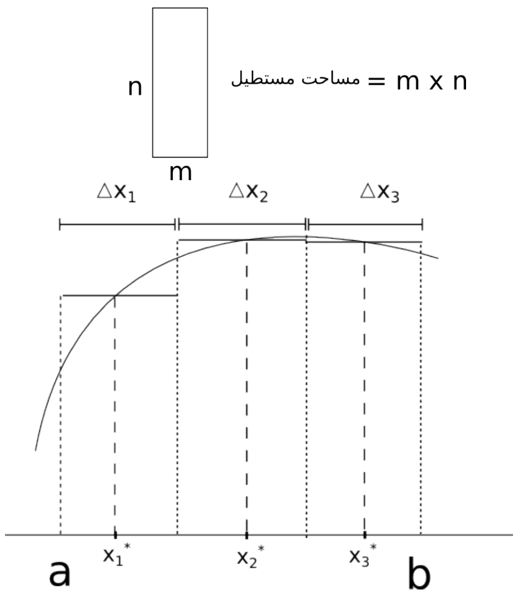
$$\int f(x)dx = F(x) + dx$$

در ادامه‌ی درس معنی نمادِ $\int$ را بهتر خواهیم فهمید.

فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته و با مقادیر مثبت روی بازه‌ی $[a, b]$ باشد.



می‌خواهیم مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ و بین خطوط $x = a$ و $x = b$ را بیابیم.



مطابق شکل بالا، مساحت مورد نظر ما تقریبا برابر است با حاصل جمع مساحت سه مستطیل؛ یعنی عبارت زیر:

$$= f(x_۱^*)\Delta x_۱ + f(x_۲^*)\Delta x_۲ + f(x_۳^*)\Delta x_۳$$

در واقع اگر از n مستطیل استفاده کنیم داریم:

$$\text{مساحت زیر منحنی} = \sum_{i=۰}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

اگر n به بینهایت میل کند و Δx_i ها به اندازه‌ی کافی کوچک شوند، به مساحت زیر منحنی نزدیک می‌شویم. پس شهود ما این است که

$$\text{مساحت زیر منحنی} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=۰}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

حد سمت راست بالا را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\int_a^b f(x)dx$$

تعریف ۱۰. مجموعه‌ی **متناهی** $p = \{x_۰, x_۱, \dots, x_n\}$ را یک افراز برای بازه‌ی $[a, b]$ می‌خوانیم هرگاه $x_۰ = a$، $x_n = b$ و $x_i < x_{i+۱}$. **تعریف می‌کنیم:**

$$\|p\| = \max \Delta x_i$$

تعریف ۱۱. فرض کنید $f(x)$ یک تابع **کراندار** [1] در بازه‌ی $[a,b]$ باشد، می‌گوییم تابع f در این بازه انتگرال‌پذیر است هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{\|p\|\to 0}^{\text{برای تمام افرازهای } p} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \quad x_i^* \in [x_i, x_{i+1}] \text{ برای‌تمام‌انتخابهای}$$

به بیان بهتر، تابع کراندار f در بازه‌ی I انتگرال‌پذیر است هرگاه عددی مانند l موجود باشد به طوری‌که برای هر $\epsilon > 0$ یک $\delta_\epsilon > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر افرازِ

$$p = \{\overset{=a}{x_0}, x_1, \ldots, \overset{=b}{x_n}\}$$

از بازه‌ی $I = [a,b]$ اگر

$$\|p\| < \delta_\epsilon$$

آنگاه برای هر گونه انتخاب $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ داشته باشیم:

$$|\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i - l| < \epsilon$$

در این حالت می‌نویسیم:

$$\int_a^b f(x)dx = l$$

توجه ۱۲. اگر $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$ آنگاه $\int_a^b f(x)dx$ مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ از نقطه‌ی a تا b را به دست می‌دهد.

توجه ۱۳. اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه انتگرال‌پذیر است. اثبات این گفته، چندان آسان نیست (ولی پیشنهاد می‌کنیم که روی آن فکر کنید).

مثال ۱۴. بدون توجه به توجه فوق نشان دهید که تابع ثابت $f(x) = k$ در هر بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید $p = \{\overset{a}{x_0}, x_1, \ldots, \overset{b}{x_n}\}$ افرازی برای بازه‌ی $[a,b]$ و $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ باشد. **جمع «ریمانی»** مربوط به این افراز به صورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i =$$

[1] و نه لزوماً پیوسته

$$k\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = k((x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})) = k(-x_0+x_n) = k(b-a)$$

$\square$

توجه ۱۵. برای هر افراز دیگر و برای هر انتخاب دیگر از x_i^*ها نیزبه همین حاصلجمع می‌رسیم. پس

$$\int_a^b k dx = k(b-a)$$