

## جلسه‌ی دوم

ادامه‌ی مثالها:

مثال ۱. دنباله‌ی  $a_n = (r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  را در نظر بگیرید که در آن  $r$  یک عدد گویای ثابت است و  $0 < r < 1$ . نشان دهید که  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

اگر فرض کنیم  $r = \frac{1}{4}$  چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \dots$$

بنابراین این ادعا که دنباله‌ی یادشده به صفر می‌گراید درست به نظر می‌رسد.

پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad r^n < \epsilon$$

علت این که نوشته‌ایم  $|r^n| < \epsilon$  این است که می‌دانیم جملات این دنباله همه مثبتند. فرض کنید  $\epsilon > 0$  داده شده باشد. توجه کنید که  $r^n < \epsilon$  معادل است با  $\frac{1}{r^n} > \frac{1}{\epsilon}$ . طبق فرض سوال می‌دانیم که  $0 < r < 1$  پس  $\frac{1}{r} > 1$ . بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که یک عدد  $a > 0$  موجود است به طوری که  $\frac{1}{r} = 1 + a$ . پس می‌خواهیم که

$$\frac{1}{r^n} = \left(\frac{1}{r}\right)^n = (1 + a)^n > \frac{1}{\epsilon}$$

بنا به نامساوی برنولی  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ . پس کافی است داشته باشیم:

$$1 + na > \frac{1}{\epsilon}$$

و برای آن کافی است که

$$n > \frac{\frac{1}{\epsilon} - 1}{a}.$$

پس اگر

$$N_\epsilon = \left\lfloor \frac{\frac{1}{\epsilon} - 1}{a} \right\rfloor + 1$$

آنگاه

$$\forall n > N_\epsilon \quad r^n < \epsilon$$

از جمله‌ی  $a_{N_\epsilon}$  به بعد دنباله مد نظر ما است. یعنی اگر  $a_n$  یکی از اعضای مجموعه‌ی زیر باشد

$$a_{N_\epsilon}, a_{N_\epsilon+1}, a_{N_\epsilon+2}, \dots$$

□

آنگاه  $|a_n| < \epsilon$ .

**قضیه ۲.**

آ. فرض کنید  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  دو دنباله‌ی همگرا باشند، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

اثبات. فرض کنیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B.$$

برای این که نشان دهیم که  $\lim a_n + b_n = A + B$  باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |(a_n + b_n) - (A + B)| < \epsilon$$

فرض کنیم  $\epsilon > 0$  داده شده باشد. از آنجا که  $a_n$  همگرا به  $A$  است می‌دانیم که یک  $N_{\epsilon/2}$  موجود است، به طوری که

$$\forall n > N_{\epsilon/2} \quad |a_n - A| < \epsilon/2$$

همچنین از آنجا که  $b_n$  همگرا به  $B$  است می‌دانیم که یک  $N_{\epsilon/2}$  موجود است، به طوری که

$$\forall n > N_{\epsilon/2} \quad |b_n - B| < \epsilon/2$$

پس اگر  $N > \max\{N_{\epsilon/2}, N_{\epsilon/2}\}$  آنگاه

$$\forall n > N \quad |(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

**ب.**

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

اثبات. فرض کنیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |\lambda a_n - \lambda A| = |\lambda| |a_n - A| < \epsilon.$$

کافی است بگیریم  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{|\lambda|}$  و از همگرایی دنباله‌ی  $a_n$  استفاده کنیم.  $\square$

ج. اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$  آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

اثبات. فرض کنیم که  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \neq 0$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ . باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| < \epsilon$$

پس می‌خواهیم که داشته باشیم

$$\left| \frac{a_n B - A b_n}{B b_n} \right| < \epsilon$$

عبارت  $-AB + AB$  را به درون صورت اضافه می‌کنیم:

$$\left| \frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{B b_n} \right| < \epsilon$$

داریم

$$\left| \frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{B b_n} \right| \leq \frac{|B| |a_n - A| + |A| |b_n - B|}{|B b_n|}$$

کافی است عبارت سمت راست بالا از  $\epsilon$  کمتر باشد. توجه کنید که از آنجا که  $b_n$  همگراست، یک  $N_1$  موجود است به طوری که

$$\forall n > N_1 \quad |b_n - B| < \epsilon \quad (*)$$

پس

$$\forall n > N_1 \quad B - \epsilon < b_n < B + \epsilon \quad (**)$$

بنا به (\*\*\*) می‌توان اعداد مثبت  $M_1, M_2$  را چنان یافت که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M_1 < |b_n| < M_2 \quad (***).$$

حال توجه کنید که دنباله‌ی  $a_n$  به  $A$  همگراست. پس عدد طبیعی  $N_2$  چنان موجود است که

$$\forall n > N_2 \quad |a_n - A| < \epsilon.$$

حال اگر  $n > \max\{N_1, N_2\}$  آنگاه

$$|a_n - A| < \epsilon, \quad |b_n - B| < \epsilon$$

پس

$$\frac{|B||a_n - A| + |A||b_n - B|}{|Bb_n|} \leq \frac{|B|\epsilon + |A|\epsilon}{|B|M_1} = \frac{(|A| + |B|)\epsilon}{|B|M_1}$$

بحث تقریباً تمام شده است؛ تا اینجا ثابت کرده‌ایم که:

برای هر  $\epsilon > 0$  عدد  $N \in \mathbb{N}$  چنان موجود است که

$$\forall n > N \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| < \frac{(|A| + |B|)\epsilon}{|B|M_1}$$

□

در بند بالا، به جای  $\epsilon$  مقدار  $\epsilon \frac{|B|M_1}{|A| + |B|}$  را بگذارید.<sup>۱</sup>

مثال ۳. حد دنباله‌های زیر را بیابید.

•

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+3} + 7}{5^n}$$

پاسخ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+3}}{5^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{5^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \times 4^3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n} \times 7 = 0 + 0 = 0$$

□

---

<sup>۱</sup>نه! در امتحان نمی‌آید!

$$a_n = \frac{3^n}{2^n + 4^n}$$

راهنمایی: صورت و مخرج را بر  $4^n$  تقسیم کنید.

در قضیه‌ی زیر می‌بینیم که اگر دنباله‌ای میان دو دنباله‌ی همگرا فشرده شود، همگراست. فرض کنیم  $\lim a_n = L, \lim b_n = L$  و  $a_n \leq c_n \leq b_n$  برای  $n$  های به اندازه‌ی کافی بزرگ جملات دنباله‌های  $a_n, b_n$  به  $L$  نزدیکند. جملات دنباله‌ی  $c_n$  که میان این دو دنباله هستند نیز به ناچار در نزدیکی  $L$  قرار می‌گیرند. در زیر این گفته را دقیق بیان و اثبات کرده‌ایم.<sup>۲</sup>

**قضیه ۴ (فشردگی).** اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$  و

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq c_n \leq b_n,$$

آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

اثبات. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |c_n - L| < \epsilon$$

یعنی می‌خواهیم

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$$

فرض کنیم که  $\epsilon > 0$  داده شده باشد. از آنجا که  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  می‌دانیم که  $N_1 \in \mathbb{N}$  چنان موجود است که

$$\forall n > N_1 \quad a_n < L + \epsilon$$

نیز از آنجا که  $\lim b_n = L$  می‌دانیم که  $N_2 \in \mathbb{N}$  چنان موجود است که

$$\forall n > N_2 \quad L - \epsilon < b_n$$

---

<sup>۲</sup>Squeeze Lemma

پس اگر  $n > \max\{\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2\}$  آنگاه

$$L_\epsilon < b_n \leq c_n \leq a_n < L + \epsilon.$$

□

مثال ۵. با استفاده از قضیه‌ی فشردگی ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

پاسخ. داریم

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}^{n \text{ بار}}}{\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}_{\geq 3 \times \dots \times 3}} \leq 2 \times \frac{2^{n-2}}{3^{n-2}} = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

دنباله‌ی ثابت ۰ و دنباله‌ی  $2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$  هر دو به صفر میل می‌کنند، پس بنا به فشردگی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

□

توجه ۶. همان اثبات بالا نشان می‌دهد که برای هر  $a > 0$  داریم  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

توجه ۷. از آنجا که  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$  برای هر  $\epsilon > 0$  دلخواه، یک  $N \in \mathbb{N}$  چنان یافت می‌شود که

$$\forall n > N \quad \frac{2^n}{n!} < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N \quad 2^n < \epsilon n!$$

و این تقریباً همان «نرخ رشد» است که درباره‌اش صحبت کرده‌ایم.

مثال ۸. قرار دهید  $a_n = \sqrt[n]{n}$  و نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

پاسخ. چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند:

$$۱ \quad \sqrt[۲]{۲} \quad \sqrt[۳]{۳} \quad \sqrt[۴]{۴} \quad \dots$$

داریم

$$a_n = \sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{۱} = ۱$$

پس می‌توان نوشت

$$a_n = ۱ + b_n \quad b_n \geq ۰$$

نشان می‌دهیم که  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ۰$

$$a_n = \sqrt[n]{n} = ۱ + b_n \Rightarrow n = (۱ + b_n)^n = ۱ + nb_n + \binom{n}{۲} b_n^۲ + \dots$$

$$\Rightarrow n \geq \binom{n}{۲} b_n^۲ = \frac{n(n-۱)}{۲} b_n^۲$$

$$\Rightarrow b_n^۲ \leq \frac{۲}{n-۱} \Rightarrow ۰ \leq b_n \leq \sqrt{\frac{۲}{n-۱}}$$

بنا به فشردگی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ۰$$

□

مثال ۹. اگر  $a_n = \sqrt[n]{۱ + ۲^n}$  نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ۲$$

پاسخ.

$$a_n = \sqrt[n]{۱ + ۲^n} \geq \sqrt[n]{۲^n} = ۲ \Rightarrow a_n \geq ۲ \Rightarrow \frac{a_n}{۲} \geq ۱$$

$$(a_n)^n = ۱ + ۲^n \Rightarrow \left(\frac{a_n}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۲^n} + ۱$$

$$۱ \leq \frac{a_n}{۲} \leq \underbrace{\left(\frac{a_n}{۲}\right)^n}_{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{۲}\right)^n = ۱}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{۲} = ۱ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ۲$$

□

**تعریف ۱۰** (دنباله‌ی کراندار). دنباله‌ی  $(a_n)$  را کراندار می‌خوانیم هرگاه

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < M$$

یعنی

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -M < a_n < M.$$

مشاهده. هر دنباله‌ی همگرا کراندار است.

$$a_n \mapsto L$$

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{1}{4} \quad \exists N_\epsilon \quad \forall n > N_\epsilon \quad |a_n - L| < \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \quad \forall n > N_\epsilon \quad L - \frac{1}{4} < a_n < L + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

□

**توجه ۱۱.**  $(-1)^n$  کراندار نیست ولی همگراست.

**قضیه ۱۲.** هر دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار همگراست (و هر دنباله‌ی نزولی و از پایین کراندار همگراست).

یک دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار به کوچکترین کران بالای خود همگراست. وجود کوچکترین کران بالا را اصل تمامیت در اعداد حقیقی تضمین می‌کند:

**توجه ۱۳.** هر زیرمجموعه‌ی کراندار از اعداد حقیقی، دارای کوچکترین کران بالا است.

آیا آنچه در بالا گفته‌ایم درباره‌ی اعداد گویا هم درست است؟

**مثال ۱۴.** نشان دهید که دنباله‌ی  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  همگراست.

پاسخ. چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیرند:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2!} \quad a_3 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

دقت کنید که

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n!} \geq 0$$



یعنی دنباله‌ی  $(a_n)$  صعودی است. کافی است نشان دهیم که دنباله‌ی یادشده از بالا کراندار است.

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 2 \times 2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$a_n \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{= \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 2(1 - (\frac{1}{2})^n) \leq 2}$$

□

در جلسات بعد این را که

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

ثابت خواهیم کرد.