



تقریب زد ولی هیچگاه نمی‌توان به کُل آن رسید. به بیان دیگر، به هر عدد گنگ می‌توان به هر اندازه‌ی دلخواه با «دنباله‌ای» از اعداد گویا نزدیک شد. باز به بیان دیگر، می‌شود فاصله‌ی خود را از یک عدد گنگ، «بی‌نهایت کوچک» کرد. بی‌نهایت نزدیک شدن به یک پارامتر، از موضوعات مهم در حساب است.

برای محاسبه‌ی سرعت یک جسم در لحظه‌ی  $t$  باید بدانیم مقدار تغییر مکان آن جسم در زمان بی‌نهایت کوچک نزدیک به  $t$  چقدر است. پس سرعت لحظه‌ای، یک نوع سرعت متوسط است. به بیان بهتر، برای یافتن سرعت متوسط یک جسم باید  $\Delta(x)/\Delta(t)$  را حساب کرد، ولی برای یافتن سرعت لحظه‌ای باید سرعت متوسط را در زمان بی‌نهایت نزدیک به  $t$  حساب کرد. همان گونه که شرح داده شد، بی‌نهایت نزدیک شدن به زمان  $t$  ممکن نیست، ولی می‌شود در مراحل متناهی، فاصله‌ی خود را از زمان  $t$  به هر اندازه‌ی دلخواه کم کرد. موضوع حساب، دقیقاً تغییرهای پیوسته‌ی یک متغیر بر حسب تغییرهای بی‌نهایت کوچک متغیری دیگر است. در مثال سرعت، و با نمادگذاری لایبنیتز در واقع هدف محاسبه‌ی  $\frac{dx}{dt}$  است که در آن  $dx$  و  $dt$  به ترتیب نشانگر تغییرات بینهایت کوچک  $x$  و  $t$  هستند. به بخشی از حساب که به مطالعه‌ی تغییرات یک متغیر بر حسب تغییرات بی‌نهایت کوچک یک متغیر دیگر می‌پردازد، «حساب دیفرانسیل» گفته می‌شود. اما حساب بخش دیگری نیز دارد.

نحوه‌ی محاسبه‌ی مساحت یک مستطیل را از دبستان می‌دانیم. برای محاسبه‌ی مساحت یک شکل پیچیده‌تر دارای انحنا، می‌توان مجموع مساحت‌های همه‌ی مستطیلهای درون آن را در نظر گرفت. برای این که شکل منحنی حاصل شود، باید مستطیلهای کوچکتر و کوچکتر کرد و نهایتاً یک «مجموع نامتناهی» را در نظر گرفت. لایبنیتز برای این مجموع از علامت  $\int$  استفاده کرد که یادآور حرف  $S$  است در کلمه‌ی Summe که در آلمانی به معنی «مجموع» است.<sup>۱</sup> از آنجا که بنا به گفته‌های بالا، جمع نامتناهی مقدار دست‌نیافتنی است، باید برای این کار با تقریبهای متناهی مناسب به هر اندازه‌ی دلخواه به حاصل جمع مورد نظر (یعنی مساحت) نزدیک شد و به بیان دیگر باید «حد» گرفت. به بخشی از حساب دیفرانسیل که بدین موضوع می‌پردازد، «حساب انتگرال» می‌گویند.

تا اینجا گفتیم که حساب، دو بخش دارد: حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال. ایندو را گاهی با هم «حسابان» می‌خوانند. اما حساب خواندن هر دوی آنها هم درست است. در واقع قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، بیانگر این است که این دو بخش با هم مربوطند (به بیان دقیقتر، هر یک برعکس دیگری است). این قضیه (تحت شرایطی روی تابع  $f$ ) دارای صورت فشرده‌ی زیر است:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

یعنی، اگر از یک تابع مشتق بگیریم، مساحت زیر منحنی مشتق، برابر با میزان تغییر تابع است از نقطه‌ی شروع تا نقطه‌ی پایان. به بیان غیردقیق، انتگرال مشتق یک تابع می‌شود خود تابع.

به همه‌ی آنچه که در بالا گفته شد، در طول ترم به طور دقیق خواهیم پرداخت. بگذارید مقدمه را با ذکر دو نکته‌ی عمومی به پایان بریم. نخست این که واژه‌ی calculus که آن را حساب ترجمه کرده‌اند، در اصل لاتین و به معنی سنگهای کوچکی است که از آنها در چرتکه استفاده می‌شود. دوم این که حساب را، در

<sup>۱</sup> و به انگلیسی می‌شود summation

معنی مُدرنِ آن و به گونه‌ای که در بالا شرح داده شد، نیوتون در انگلستان و لایبنیز در آلمان به طور همزمان و مستقل و بی‌خبر از یکدیگر بسط داده‌اند. نیوتون سپس لایبنیز را متهم به کپی‌برداری آثار خود کرده است و این ادعا را به ناحق و با استفاده از نفوذ و قدرت علمی و اجتماعی خود در دادگاهی در انگلستان به اثبات رسانده است. امروز اعتبار یافتن حساب را به هر دوی آنها می‌دهند ولی، بسیاری از نمادگذاریهای معروف حساب مانند  $\int, dx$  نمادهای ابتکاری لایبنیز هستند.