۱ جلسه‌ی هفتم

مرور درس. گفتیم که در صورتی که برای دو دنباله‌ی با جملاتِ نامنفیِ a_n, b_n داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > ۰$$

آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست اگروتنهااگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. در صورتی که داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

آن گاه اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

همچنین ثابت کردیم که اگر $a_n = \frac{n}{\sqrt[۴]{۳n+n^۵}}$ آنگاه سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ واگراست؛ زیرا اگر فرض کنیم $b_n = \frac{۱}{n}$ که سری $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ واگراست، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[۴]{۳n+n^۵}} \times \frac{۱}{n} = \infty$$

مثال ۱. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n - n}{۳^n + n}$$

پاسخ. بگیرید $a_n = \frac{۲^n-n}{۳^n+n}$ و $b_n = \frac{۲^n}{۳^n}$. داریم

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{۲^n - n}{۳^n + n} \times \frac{۳^n}{۲^n} = \frac{۱ - \frac{n}{۲^n}}{۱ + \frac{n}{۳^n}}$$

از آنجا که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱ - \frac{n}{۲^n}}{۱ + \frac{n}{۳^n}} = ۱$$

و سری $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگراست، بنا به آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست.

راه حل دوم:

قرار دهید $b_n = \frac{۲^n}{۳^n+n}$. از آنجا که

$$b_n = \frac{۲^n}{۳^n + n} \leqslant \frac{۲^n}{۳^n}$$

و سری $\frac{۲^n}{۳^n}$ $\sum_{n=۰}^{\infty}$ همگراست، سری b_n $\sum_{n=۰}^{\infty}$ نیز همگراست. نیز

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۲^n - n}{۳^n + n} \times \frac{۳^n + n}{۲^n} = ۱$$

در نتیجه a_n $\sum_{n=۰}^{\infty}$ نیز همگراست.

راه حل سوم:

$$\frac{۲^n - n}{۳^n + n} \leqslant \frac{۲^n}{۳^n}$$

چون $\frac{۲^n}{۳^n}$ $\sum_{n=۰}^{\infty}$ همگراست، پس بنا به آزمون مقایسه $\frac{۲^n-n}{۳^n+n}$ $\sum_{n=۰}^{\infty}$ نیز همگراست. □

مثال ۲. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq ۰$ نشان دهید که سری $\frac{a_n}{۳^n+۱}$ $\sum_{n=۰}^{\infty}$ همگراست.

پاسخ. اگر $b_n = \frac{۱}{۳^n+۱}$، اولاً $\frac{۱}{۳^n+۱}$ $\sum_{n=۰}^{\infty}$ همگراست، زیرا

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۳^n + ۱} \leq \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۳^n}$$

و $\frac{۱}{۳^n}$ $\sum_{n=۰}^{\infty}$ همگراست. همچنین داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{\cancel{۳^n+۱}}}{\frac{۱}{\cancel{۳^n+۱}}} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

پس کل سری مورد نظر (بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی) همگراست. □

مثال ۳. همگرایی یا واگرایی سری $\frac{۱}{n\sqrt[n]{n}}$ $\sum_{n=۰}^{\infty}$ را بررسی کنید.

پاسخ. قرار دهید $b_n = \frac{۱}{n}$ و توجه کنید که b_n $\sum_{n=۰}^{\infty}$ واگراست.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n\sqrt[n]{n}} \times n = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\sqrt[n]{n}} = ۱$$

در نتیجه بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی a_n $\sum_{n=۰}^{\infty}$ نیز واگراست. □

مثال ۴. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{c^n - b^n} \quad , \quad ۰ < a < b < c$$

پاسخ. قرار دهید $d_n = (\frac{b}{c})^n$. سری $\sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{b}{c})^n$ همگراست زیرا $۰ < \frac{b}{c} < ۱$
اگر $e_n = \frac{a^n+b^n}{c^n-b^n}$ داریم:

$$\frac{e_n}{d_n} = \frac{a^n + b^n}{c^n - b^n} \times \frac{c^n}{b^n} = \frac{(ac)^n + (bc)^n}{(bc)^n - (b^۲)^n}$$

صورت و مخرج کسر را بر $(bc)^n$ تقسیم می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{ac}{bc})^n + ۱}{۱ - (\frac{b^۲}{bc})^n} = ۱$$

و بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n+b^n}{c^n-b^n}$ نیز همگراست. توجه کنید که در این مثال اگر $۰ < b < a < c$، با راه مشابه به همین نتیجه می‌رسیدیم. پس شرط $a < b$ اضافه است. □

مثال ۵. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n + n^{\frac{۴}{۳}}}{۲ + n^{\frac{۵}{۳}}}$$

پاسخ. می‌دانیم که سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست. پس اگر $a_n = \frac{n+n^{\frac{۴}{۳}}}{۲+n^{\frac{۵}{۳}}}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{۱}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \times a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲ + n^{\frac{۷}{۳}}}{۲ + n^{\frac{۵}{۳}}} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{n^{\frac{۵}{۳}}} = \infty$$

پس $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ واگراست. □

مثال ۶. فرض کنید $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. نشان دهید که $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a_n}{۱+a_n}$ نیز همگراست.

پاسخ. از آنجا که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$$

با توجه به آزمون مقایسه‌ی حدی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{۱+a_n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{۱ + a_n} \times \frac{۱}{a_n} = ۱$$

از آنجا که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a_n}{۱+a_n}$ نیز همگراست. □

۱.۱ آزمون نسبت

لم ۷. فرض کنید $\{a_n\}_{n=۰}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقیِ مثبت (و مخالف صفر) باشد. قرار دهید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = L$ آنگاه

۱. اگر $L > ۱$ آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ واگراست.

۲. اگر $۰ \leqslant L < ۱$ آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست.

اثبات.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = L$$

پس

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N_\epsilon \quad \forall n > N_\epsilon \quad |\frac{a_{n+۱}}{a_n} - L| < \epsilon$$

یعنی

$$\forall n > N_\epsilon \quad L - \epsilon < \frac{a_{n+۱}}{a_n} < L + \epsilon$$

در نتیجه داریم:

$$a_{n+۱} < a_n \underbrace{(L+\epsilon)}_{r}$$

دقت کنید که $L < ۱$ پس می‌توانیم ϵ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که داشته باشیم $r < ۱$.
دنباله‌ی مورد نظر را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$a_۰ \quad a_۱ \quad \dots \quad a_{N_\epsilon} \quad a_{N_{\epsilon+۱}} \quad a_{N_{\epsilon+۲}} \quad a_{N_{\epsilon+۳}} \quad \dots$$

داریم

$$a_{N_{\epsilon+۱}} \leqslant a_{N_\epsilon} \times r$$

$$a_{N_{\epsilon+۲}} \leqslant a_{N_\epsilon} \times r^۲$$

$$a_{N_{\epsilon+۳}} \leqslant a_{N_\epsilon} \times r^۳$$

$$\vdots$$

پس

$$\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n \leqslant a_{N_\epsilon}+a_{N_\epsilon}\times r+a_{N_\epsilon}\times r^۲+\ldots = a_{N_\epsilon}(۱+r+r^۲+\ldots) = a_{N_\epsilon}(\frac{۱}{۱-r})$$

پس داریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=۰}^{N_\epsilon-۱} a_n}_{\text{متناهی}} + \underbrace{\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n}_{\text{همگرا}}$$

در نتیجه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست. □

۳. اگر $L = ۱$ آنگاه این آزمون برای اثبات همگرایی یا واگرایی به کار نمی‌آید: بررسی کنید که هر دو سریهای زیر (که یکی همگرا و دیگری واگراست) در آزمون بالا در حالت $L = ۱$ قرار می‌گیرند.

$$\underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}}_{\text{همگرا}} \quad , \quad \underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n}}_{\text{واگرا}}$$

مثال ۸. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}$$

پاسخ.

$$a_n = \frac{۱}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+۱)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+۱)n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n+۱} = ۰$$

پس سری بالا همگراست.

بعداً خواهیم دید که

$$۱+۱+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۲!}+\ldots = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!} = e$$

و

$$e^a = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

حل همان سوال با آزمون مقایسه‌ی حدی:

با مقایسه $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{n!}}{\frac{۱}{n^۲}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{n!} = ۰$$

از آنجا که $\sum \frac{۱}{n^۲}$ همگراست، سری مورد نظر نیز همگراست. □

مثال ۹. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^n}{n!}$$

پاسخ. توجه کنید که بنا به آنچه در کادر بالا گفتیم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^n}{n!} = e^۳$$

راه حل با آزمون نسبت:

$$a_n = \frac{۳^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{\frac{۳^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{۳^n}{n!}} = \frac{۳}{n+۱}$$

پس از آنجا که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۳}{n+۱} = ۰$$

سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^n}{n!}$ همگراست.

حل با آزمون مقایسه‌ی حدی:

$$b_n = \frac{۱}{۳^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{۳^n}{n!}}{\frac{۱}{۳^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۹^n}{n!} = ۰$$

بنا به همگرائیِ سری $\sum \frac{۱}{۳^n}$ سری مورد نظر ما نیز همگراست. □

مثال ۱۰. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

پاسخ. آزمون مقایسه:

با $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ مقایسه کنید:

$$\frac{n^3}{2^n} \times n^3 = \frac{n^6}{2^n} \to 0$$

پس سری مورد نظر همگراست. برای اثبات این که $\lim n^6/2^n = 0$ از این که $2 > 1$ و از نامساوی برنولی استفاده کنید. در واقع می‌توان نشان داد که $\lim n^6/a^n = 0$ برای هر $a > 1$.

آزمون نسبت:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}(n+1)^3}{n^3 \underbrace{\cancel{2^{n+1}}}_{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \times \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3} = \frac{1}{2}$$

□

۲.۱ آزمون ریشه

فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی باشد و

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

۱. اگر $0 \leqslant L < 1$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست.

اثبات.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

پس

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\epsilon \quad |\sqrt[n]{a_n} - L| < \epsilon$$

در نتیجه

$$\forall n > N_\epsilon \quad L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < \epsilon + L$$

پس

$$\forall n > N_\epsilon \quad a_n < (L+\epsilon)^n$$

ϵ را طوری انتخاب کنید که $\cdot < \underbrace{L+\epsilon}_{r} < ۱$ پس

$$\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n = a_{N_\epsilon} + a_{N_\epsilon+۱} + \ldots \leqslant a_{N_\epsilon} + r^{N_\epsilon+۱} + r^{N_\epsilon+۲} + \ldots$$

توجه ۱۱.

$$r^{N_\epsilon+۱} + r^{N_\epsilon+۲} + \ldots = r^{N_\epsilon}(۱ + r + r^۲ + \ldots) = \frac{r^{N_\epsilon}}{۱ - r}$$

پس

$$\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n \leqslant a_{N_\epsilon} + r^{N_\epsilon} \sum r^n$$

$$\sum_{n=\cdot}^{\infty} a_n = \sum_{n=\cdot}^{N_\epsilon - ۱} a_n + \sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} a_n$$

در نتیجه $\sum_{n=\cdot}^{\infty} a_n$ همگراست. $\square$

مثال ۱۲. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} na^n \quad a > \cdot$$

پاسخ.

$$a_n = na^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \times a$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱} \times a = a$$

پس اگر $\cdot < a < ۱$ آنگاه سری مورد نظر همگراست و اگر $a \geqslant ۱$ سری فوق واگراست.

حل با آزمون مقایسه:

مقایسه با $\frac{۱}{n^۲}$: سری $\sum_{n=\cdot}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ همگراست.

$$na^n \times n^۲ = n^۳ \times a^n$$

اگر $۰ < a < ۱$ آنگاه $b = \frac{۱}{a} > ۱$ در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^۳}{b^n} = ۰$$

پس سری مورد نظر همگراست. $\square$

(ادامه‌ی آزمونِ ریشه)

۲. اگر $L > ۱$ آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ واگراست.

۳. اگر $L = ۱$ آنگاه این آزمون کارگر نیست.

مرور: اگر a_n, b_n دنباله‌های نامنفی باشند، آنگاه

- اگر $\lim a_{n+۱}/a_n = l$ و $۰ \leq l < ۱$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست. اگر $l > ۱$ سری یادشده واگراست.
- اگر $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$ و $۰ \leq l < ۱$ آنگاه سری $\sum a_n$ همگراست. اگر $l > ۱$ سری یادشده واگراست.
- در هر دو آزمون بالا، حالت $l = ۱$ کمکی به تشخیص همگرائی یا واگرائی نمی‌کند.