طرح درس پیشنهادی برای فصل سوم - کاربردهای مشتق

۱- مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم.

تعریف: فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}$. تابع $f : D \to \mathbb{R}$ را در نقطه $c \in D$ دارای ماکزیمم مطلق (می‌نیمم مطلق) بر D نامیم هرگاه برای هر $x \in D$، $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$). مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق f بر D را (در صورت وجود) اکسترمم‌های مطلق f بر D می‌نامیم. (تعبیر هندسی اکسترمم‌های مطلق به عنوان نقاطی از خم نمایش f با بیشترین و کمترین فاصله نسبت به محور x.)

نقطه $c \in D$ را یک نقطه درونی برای مجموعه D نامیم هرگاه D حاوی یک همسایگی از این نقطه باشد. تابع $f : D \to \mathbb{R}$ را در نقطه درونی $c \in D$ دارای یک اکسترمم نسبی یا موضعی نامیم هرگاه همسایگی از c داخل D مانند $(c-r, c+r)$ وجود داشته باشد که تابع $f : (c-r, c+r) \to \mathbb{R}$ در c یک اکسترمم مطلق داشته باشد.

۲- قضیه: اگر $f : D \to \mathbb{R}$ در نقطه درونی $c \in D$ یک اکسترمم نسبی داشته باشد آنگاه یا f در c مشتق‌پذیر نیست یا $f'(c) = ۰$.

اثبات: فرض کنیم f در c یک ماکزیمم موضعی داشته باشد. پس همسایگی چون $(c-r, c+r) \subset D$ وجود دارد که برای $x \in (c-r, c+r)$، $f(x) \leq f(c)$. به این ترتیب، برای هر $x \in (c-r, c)$، $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq ۰$ و برای هر $x \in (c, c+r)$، $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq ۰$. در نتیجه ...

۳- فرض کنیم $c \in D$ نقطه‌ای درونی باشد. این نقطه را یک نقطه بحرانی برای تابع $f : D \to \mathbb{R}$ نامیم هرگاه یا f در c مشتق‌پذیر نباشد یا $f'(c) = ۰$. بنابر قضیه فوق، هر نقطه نظیر یک اکسترمم نسبی f بر D یک نقطه بحرانی این تابع است. ولی عکس این خاصیت لزوما برقرار نیست. به طور مثال نقطه $x = ۰$ یک نقطه بحرانی برای تابع با ضابطه $f(x) = x^۳$ است ولی در این نقطه f اکسترممی ندارد.

۴- قضیه اکسترمم‌های مطلق: اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد آنگاه f اکسترمم‌های مطلق خود را بر $[a,b]$ اتخاذ می‌کند. یعنی نقاطی چون $c, d \in [a,b]$ وجود دارد که برای هر $x \in [a,b]$، $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$.
بنابر بحث قبل اگر c یا d درون بازه $[a,b]$ باشد آنگاه یک نقطه بحرانی برای f خواهد بود. بر این مبنا

۵- دستورالعمل تعیین اکسترمم‌های مطلق تابعی پیوسته بر بازه‌ای بسته و کراندار: ابتدا نقاط بحرانی f بر بازه (a,b) را به دست می‌آوریم. سپس با مقایسه مقادیر f در این نقاط و نقاط a و b، بیشترین مقدار و کمترین مقدار f را به دست می‌آوریم.

۶- مثال. اکسترمم‌های مطلق تابع f با ضابطه $f(x) = x^۳ + ۶x^۲ - ۷x - ۱$ را بر بازه $[۰, ۳]$ تعیین کنید.

۷- مثال. تابع f با دستور $f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x} & x \geq ۰ \\ x^۲ + ۲x & x < ۰ \end{cases}$ مفروض است. الف) نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}$ را تعیین کنید.
ب) اکسترمم‌های مطلق f بر بازه $[-۱, ۲]$ را به دست آورید.

۸- قضیه مقدار میانگین.

قضیع رل:فرض کنیم $f\,:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر $[a,b]$ و مشتق‌پذیر بر (a,b) باشد. اگر $f(a)=f(b)$ آنگاه $c\in(a,b)$ وجود دارد که $f'(c)=0$. (پیشنهاد میکنم اثبات گفته شود.)

۹- مثال: نشان دهید معادله $x^5+5x-1=0$ دارای دقیقا یک ریشه در $\mathbb{R}$ است.

۱۰- مثال: نشان دهید یک و تنها یک $c\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $c^3=\dfrac{1}{1+c^2}$.

۱۱- مثال: فرض کنید $f,g\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابعی مشتق‌پذیر باشند. اگر نمودار دو تابع حداقل در دو نقطه یکدیگر را قطع کنند نشان دهید نقطه‌ای چون $c\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $f'(c)=g'(c)$.

۱۲- قضیه مقدار میانگین: فرض کنیم تابع $f\,:\,[a,b]\to\mathbb{R}$بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت $c\in(a,b)$ وجود دارد که $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. (همراه با اثبات)

۱۳- مثال: هر یک از نامساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\forall a,b\in\mathbb{R},\qquad |\sin b-\sin a|\leq|b-a|$ ب) $\forall a,b\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad |a-b|\leq|\tan a-\tan b|$

۱۴- مثال: فرض کنید $f,g\,:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ توابعی پیوسته بر این بازه و مشتق‌پذیر بر (a,b) باشند و $f(a)=f(b)$. اگر برای هر $x\in(a,b)$، $f'(x)<g'(x)$ نشان دهید $f(b)<g(b)$.

۱۵- مثال: فرض کنید $f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی دو بار مشتق‌پذیر باشد. اگر نمودار f خط L به معادله $mx+d$ را حداقل در سه نقطه قطع کند نشان دهید نقطه‌ای چون $c\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $f''(c)=0$.

۱۶- مثال: فرض کنید $f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر بوده، $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$. اگر $f(0)=0$ نشان دهید برای هر $x\in\mathbb{R}$، $|f(x)|\leq|x|$.

۱۷- رفتار هندسی توابع مشتق‌پذیر.

یادآوری مفهوم صعودی بودن و نزولی بودن.

قضیه: فرض کنیم I بازه‌ای از اعداد حقیقی و $f\,:\,I\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر این بازه و در نقاط درونی I مشتق‌پذیر باشد. در این صورت

الف) اگر برای هر نقطه درونی $x\in I$، $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)>0)$ آنگاه f بر I صعودی (اکیدا صعودی) است.

ب) اگر برای هر نقطه درونی $x\in I$، $f'(x)\leq 0$ $(f'(x)<0)$ آنگاه f بر I تابعی نزولی (اکیدا نزولی) است.

ج) اگر برای هر نقطه درونی $x\in I$، $f'(x)=0$ آنگاه f بر I ثابت است.

۱۸- آزمون مشتق اول در تعیین اکسترمم‌های نسبی یک تابع.

۱۹- مثال: کلیه اکسترمم‌های تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-2|}$ را بر $\mathbb{R}$ تعیین کنید.

۲۰- فرض کنید $p \geq ۱$ عددی گویا باشد. الف) نشان دهید برای هر $x \geq ۰$، $(۱+x)^p \leq ۱+x^p$. ب) برای هر دو عدد حقیقی $a, b \geq ۰$ نشان دهید $a^p + b^p \leq (a+b)^p$.

۲۱- مثال: فرض کنید $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ بر این بازه مشتق‌پذیر باشد. اگر برای هر $x \in I$ به جز $c \in I$، $f'(x) > ۰$ و $f'(c) = ۰$ نشان دهید f بر I اکیدا صعودی است.

۲۲- پادمشتق و تابع اولیه. فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$. تابع $F : I \to \mathbb{R}$ را یک تابع اولیه برای $f : I \to \mathbb{R}$ بر I نامیم هرگاه برای هر $x \in I$، $F'(x) = f(x)$. به طور مثال، هر یک از توابع $F(x) = x^۳$ و $G(x) = x^۳ + ۴$ توابع اولیه‌ای برای $f(x) = ۳x^۲$ بر $\mathbb{R}$ هستند.

۲۳- قضیه: اگر F یک تابع اولیه برای f بر I باشد آنگاه فرم کلی توابع اولیه f بر I به صورت $F + C$ است که در آن $C \in \mathbb{R}$ ثابتی دلخواه است.

۲۴- قضیه مقدار میانگین کوشی: فرض کنیم توابع $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ توابعی پیوسته بر این بازه و مشتق‌پذیر بر (a, b) باشند. در این صورت $c \in (a, b)$ وجود دارد که $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$. به خصوص اگر برای هر $x \in (a, b)$، $g'(x) \neq ۰$ آنگاه $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x)}{g'(c)}$.

۲۵- مثال: فرض کنید f در یک همسایگی $x_۰$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید برای هر x در این همسایگی c بین x و $x_۰$ وجود دارد که $f(x) = f(x_۰) + f'(x_۰)(x - x_۰) + \dfrac{f''(c)}{۲}(x - x_۰)^۲$. (در حالتی که $x > x_۰$، دو تابع $h(x) = f(x) - f(x_۰) - f'(x_۰)(x - x_۰)$ و $g(x) = (x - x_۰)^۲$ را بر $[x_۰, x]$ در نظر می‌گیریم.)