به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی

مجموعه تمرین‌هایی در درس ریاضی عمومی ۱ (در حال تکمیل و تصحیح)

فصل اول. مروری بر حد و پیوستگی

---

۱. با استفاده از تعریف ریاضی حد، صحت هر یک از حدود زیر را نشان دهید

الف) $\lim\limits_{x\to -3}(1-4x)=13$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x-4}{x+2}=-2$

ج) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x+5)=1$

د) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-1)=8$

۲. نشان دهید برای هر $a>0$، $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$. (راهنمایی: توجه کنید که $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\dfrac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$.)

۳. مقدار هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$ (c ثابت)

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

۴. فرض کنید f در یک همسایگی $x=0$ تعریف شده باشد. اگر $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a$ و $\lim_{x\to 0^-}f(x)=b$، هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x^3-x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x^3-x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x^2-x^4)$

د) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x^2-x^4)$

۵. فرض کنید $g(x)=\dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$. مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)$. آیا مقدار $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$ وجود دارد؟ توضیح دهید.

۶. با مثالی نشان دهید امکان دارد عبارت $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ وجود داشته باشد ولی هیچ‌یک از حدود $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ وجود نداشته باشند.

۷. کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟ در هر مورد دلیل خود را توضیح دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x}{x-4}-\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\big(\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{8}{x-4}\big)$.

ب) $\dfrac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2-4}$.

ج) اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد.

د) اگر $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ و $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ وجود داشته باشند آنگاه $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ نیز وجود دارد.

ه) اگر برای هر x، $f(x)>1$ و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ وجود داشته باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to 0}f(x)>1$.

و) اگر تابع $|f|$ در نقطه a حد داشته باشد آنگاه تابع f نیز در این نقطه حد دارد.

۸. فرض کنید $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-8}{x-1}=10$. مقدار $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ را تعیین کنید.

۹. حد تابع $f(x)=x\sin(\dfrac{1}{x})$ را در $x=0$ و بینهایت بررسی کنید.

۱۰. اگر $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=5$ آنگاه مقدار هر یک از حدود $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ را تعیین کنید.

۱۱. با استفاده از قضیه فشردگی نشان دهید $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^2}\sin(\dfrac{\pi}{x})=0$.

۱۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در شرط $|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|$، که در آن $C>0$ عددی ثابت است، صدق نماید. نشان دهید f در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۳. در مورد هر یک از توابع زیر، بزرگترین زیرمجموعه از اعداد حقیقی را تعیین کنید که تابع داده شده بر آن پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x^2-1} & x\neq -1,1\\ 1 & x=-1 \text{ یا } 1\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}\cos x & x<0\\ 1-x^2 & x\geq 0\end{cases}$

۱۴. دامنه تعریف هر یک از توابع زیر را تعیین کرده، نشان دهید هر یک از این توابع بر دامنه تعریف خود پیوسته است.

الف) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{x^3-2}$

ب) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x+1}$

ج) $g(x)=\dfrac{\tan x}{\sqrt{4-x^2}}$

د) $g(x)=\sin\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$

ه) $h(x)=\sqrt[4]{x}+x^3\cos(x^2-1)$

۱۵. نشان دهید تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۶. فرض کنید $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in(0,\infty)$ در رابطه $f(xy)=f(x)+f(y)$ صدق نماید.

الف) نشان دهید $f(1)=0$.

ب) اگر f در $x=1$ پیوسته باشد نشان دهید f بر $(0,\infty)$ پیوسته است.

۱۷. نشان دهید هر یک از معادلات زیر دارای حداقل یک ریشه است.

الف) $x^{10}-10x^2+5=0$

ب) $\cos x=x^2$

ج) $\sqrt{x-5}=\dfrac{1}{x+3}$

۱۸. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[-1,1]$ باشد و $f(-1)=2$ و $f(1)=4$. نشان دهید c با شرط $|c|<1$ وجود دارد که $f(c)=\pi$.

۱۹. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[0,2]$ باشد و $f(0)<0$ و $f(2)>1$. نشان دهید معادله $f(x)=\sin x$ دارای حداقل یک ریشه است.

۲۰. فرض کنید $f:[0,1]\to[0,1]$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید $c\in[0,1]$ وجود دارد که $f(c)=c$.

۲۱. فرض کنید $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دو تابع پیوسته بر بازه $[a,b]$ باشند. اگر $f(a)>g(a)$ و $f(b)<g(b)$ نشان دهید نمودار دو تابع حداقل در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۲۲. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد . نشان دهید $c\in[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

۲۳. $(\star)$ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با دستور $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ به نام تابع دیریکله نامیده می‌شود.
الف) با استفاده از تعریف پیوستگی، نشان دهید این تابع در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.
ب) با استفاده از تابع فوق، تابعی مثال بزنید که فقط در یک نقطه پیوسته باشد. (ادعای خود را ثابت کنید.)

۲۴. $(\star)$ فرض کنید تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ بر بازه (a,b) تابعی پیوسته باشد. اگر $c\in(a,b)$ وجود داشته باشد که $f(c)>0$ نشان دهید f در یک همسایگی از این نقطه تابعی مثبت است.

۲۵. $(\star)$ فرض کنید f در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده در این نقطه حدی برابر ℓ داشته باشد. اگر برای هر x در این همسایگی محذوف $f(x)\geq 0$ نشان دهید $\ell\geq 0$.

فصل دوم. مشتق

۲۶. در مورد هر یک از توابع زیر زبرگترین دامنه‌ای را تعیین کنید که تابع داده شده بر آن مشتق‌پذیر باشد. سپس ضابطه تابع مشتق را بر این بازه تعیین کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+6}{x}$

ب) $f(x)=x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$

ج) $f(x)=(x+x^{-1})^2$

د) $f(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

ه) $g(x)=x|x|$

و) $h(x)=\sqrt[3]{1+\sin x}$

ز) $f(x)=\sin(\sqrt{1+x})$

ح) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

ط) $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x}}$

ی) $f(t)=\sqrt[3]{t}(t^2+t^{-1})$

۲۷. مشتق‌پذیری هر یک از توابع زیر را بر $\mathbb{R}$ بررسی کرده، ضابطه تابع مشتق را به دست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x & x>0\\ x^3 & x\leq 0\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x^2} & x\geq 0\\ x^3-x & x<0\end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

۲۸. نشان دهید تابع f با دستور $f(x)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر است. ضابطه تابع مشتق را به دست آورید. نشان دهید تابع مشتق در $x=0$ پیوسته نیست.

۲۹. فرض کنید f تابعی با دستور $f(x)=\begin{cases} x^{۲}\sin\left(\frac{x+۱}{x}\right) & x>۰ \\ x^{۳} & x\leq ۰ \end{cases}$ باشد.نشان دهید تابع f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و ضابطه تابع مشتق را به دست آورید. آیا مشتق دوم f در $x=۰$ وجود دارد؟

۳۰. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه $f(x+y)=f(x)f(y)$ صدق نماید.

الف) نشان دهید $f(۰)=۱$.

ب) اگر f در $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد نشان دهید f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

۳۱. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر در $x=a$ باشد. نشان دهید

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

۳۲. مشتق اول و دوم تابع g با ضابطه $g(x)=\sqrt{\sin x}+\sin(\sqrt{x})$ را به دست آورید.

۳۳. فرض کنید $f(۱)=f'(۱)=۱$، $g(۱)=۲$ و $g'(۱)=۰$. مشتق هر یک از توابع زیر را در نقطه $x=۱$ به دست آورید.

الف) $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ب) $h(x)=\dfrac{g(x)}{۱+f(x)}$ ج) $h(t)=\dfrac{t}{f(t)+g(t)}$

۳۴. نشان دهید مشتق تابعی زوج، تابعی فرد و مشتق تابعی فرد، تابعی زوج است.

۳۵. تابع f با دستور $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\leq ۲ \\ ax+b & x>۲ \end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را به گونه‌ای تعیین کنید که f همه جا مشتق‌پذیر باشد. ضابطه تابع مشتق را تعیین کنید.

۳۶. هر یک از حدود زیر را با معرفی توابعی مناسب و استفاده از مشتق این توابع، محاسبه کنید.

الف) $\displaystyle\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(۳x)}{x}$ ب) $\displaystyle\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۴x}{\sin ۵x}$

ج) $\displaystyle\lim_{x\to ۱}\frac{\sin(x-۱)}{x^{۲}+x-۲}$ د) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\tan x}{\sin x-\cos x}$

ه) $\displaystyle\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(\sin x)}{x}$ و) $\displaystyle\lim_{x\to ۲}\frac{\tan(x^{۲}-۴)}{x-۲}$

۳۷. اگر $f(۰)=۱$، $f'(۰)=۲$ و $F(x)=f\big(xf(x)\big)$، مطلوب است تعیین مقدار $F'(۰)$.

۳۸. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ و مشتق‌پذیر در $x=۰$ با $f(۰)=۰$ و $f'(۰)=۱$ باشد. اگر تابع g با دستور $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(\sin x)}{x} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$ تعریف شده باشد نشان دهید g بر $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است.

۳۹. کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟ در هر مورد نظر خود را توضیح دهید.

الف) اگر $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sin x}{x} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$ آنگاه $f'(۰)=۰$.

ب) $\frac{d}{dx}|x^2+x| = |2x+1|$.

ج) $\frac{d}{dx}(\tan^2 x) = \frac{d}{dx}(\sec^2 x)$.

د) اگر f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در یک همسایگی این نقطه پیوسته است.

۴۰. فرض کنید f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند و $f\big(g(x)\big) = x$. اگر $f'(x) = 1 + \big(f(x)\big)^2$ نشان دهید $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

۴۱. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر در نقطه $a \in (0, \infty)$ باشد. مقدار حد زیر را بر حسب $f'(a)$ به دست آورید.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

۴۲. اگر سهمی $y = x^2 + C$ بر خط $y = x$ مماس باشد مقدار ثابت C را پیدا کنید.

۴۳. نقاطی از خم به معادله $y = \sin(x - \sin x)$ را تعیین کنید که در آن نقاط خم بر محور x مماس باشد.

فصل سوم. کاربردهای مشتق

۴۴. نزدیکترین نقطه از خم به معادله $y = \sqrt{x}$ را تا نقطه $(\frac{3}{2}, 0)$ تعیین کنید.

۴۵. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر $\mathbb{R}$ بوده، $f(0) = 0$ و $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$. نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $|f(x)| \le \frac{1}{2}|x|$.

۴۶. فرض کنید f و g توابعی دو بار مشتق‌پذیر بوده، در روابط $f'(x) = g(x)$ و $f''(x) = -f(x)$ صدق کنند. اگر h تابعی با دستور $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$ باشد و $h(0) = 5$، مقدار $h(10)$ را به دست آورید.

۴۷. الف) فرض کنید $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ که در آن $a > 0$. با استفاده از روش اکسترمم‌های توابع، نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \ge 0$ اگر و تنها اگر $b^2 - ac \le 0$.

ب) برای اعداد حقیقی a_1، ...، a_n و b_1، ...، b_n با در نظر گرفتن تابع $f(x) = (a_1x+b_1)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2$ نامساوی شوارتز، یعنی

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

را ثابت کنید.

۴۸. فرض کنید f و g توابعی پیوسته بر $[a, b]$ و مشتق‌پذیر بر (a, b) باشند. اگر $f(a) = g(a)$ و برای هر $x \in (a, b)$، $f'(x) < g'(x)$ نشان دهید $f(b) < g(b)$.

۴۹. نشان دهید برای هر $x > 0$، $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{1}{2}x$.

۵۰. عدد a را یک نقطه ثابت برای تابع f نامیم هرگاه $f(a) = a$. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد و برای هر x، $f'(x) \ne 1$. نشان دهید f حداکثر یک نقطه ثابت دارد.

۵۱. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[0, 4]$ و مشتق‌پذیر بر $(0, 4)$ باشد و $f(0) = 1$. اگر برای هر $x \in (0, 4)$، $2 \le f'(x) \le 5$ نشان دهید $9 \le f(4) \le 21$.

۵۲. فرض کنید $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و برای هر $x\in(0,\infty)$، $f'(x)=\frac{1}{x}$. نشان دهید برای هر $a,b\in(0,\infty)$، $f(ab)=f(a)+f(b)$.

۵۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مثبت و مشتق‌پذیر با شرط $f'(x)=f(x)$، برای هر $x\in\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید برای هر $a,b\in\mathbb{R}$، $f(a+b)=f(a)f(b)$.

۵۴. فرض کنید $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی فرد باشد. اگر g در نقطه $a>0$ دارای یک مقدار ماکزیمم نسبی باشد نشان دهید g در نقطه $-a$ یک مقدار می‌نیمم نسبی دارد.

۵۵. فرض کنید f تابعی دوبار مشتق‌پذیر بوده، تابع f'' پیوسته باشد. اگر معادله $f(x)=0$ حداقل سه ریشه متمایز داشته باشد نشان دهید معادله $f''(x)=0$ دارای حداقل یک ریشه است.

۵۶. فرض کنید f تابعی دوبار مشتق‌پذیر بوده، تابع f'' پیوسته باشد.اگر برای هر x، $f''(x)>0$ نشان دهید معادله $f(x)=0$ حداکثر می‌تواند دو ریشه داشته باشد.

۵۷. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ بوده، $f(b)<f(a)$. نشان دهید f' در نقطه‌ای بین a و b باید منفی باشد.

۵۸. فرض کنید $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابعی مشتق‌پذیر بوده، برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)\leq g(x)$. اگر در نقطه‌ای چون $x_0\in\mathbb{R}$، $f(x_0)=g(x_0)$ نشان دهید در این نقطه $f'(x_0)=g'(x_0)$.

۵۹. ماکزیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-2|}$ را تعیین کنید.

۶۰. $(\star)$ فرض کنید f در یک همسایگی $x=a$ دو بار مشتق‌پذیر بوده، تابع f'' بر این همسایگی پیوسته باشد. اگر $f'(a)=0$ و $f''(a)>0$ نشان دهید f در $x=a$ دارای یک مقدار می‌نیمم است.

فصل چهارم. انتگرال معین

۶۱. فرض کنید که $r(t)$ نرخ (=میزان تغییر) مصرف نفت در جهان باشد که در آن t تعداد سال‌ها با شروع از اول ژانویه‌ی سال ۲۰۰۰ و $r(t)$ بر حسب تعداد بشکه در سال محاسبه شده است. به نظر شما $\int_0^8 r(t)dt$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۶۲. فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-x-1 & -3\leq x\leq 0\\ -\sqrt{1-x^2} & 0\leq x\leq 1\end{cases}$. با محاسبه‌ی مساحت، حاصل $\int_{-3}^{1}f(x)dx$ را بیابید.

۶۳. فرض کنید که تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx.$$

۶۴. معادله‌ی خط مماس بر منحنی نمایش تابع $F(x)=\int_\pi^x\frac{\cos t}{t}dt$ را در $x=\pi$ بیابید.

۶۵. در چه بازه‌ای تابع $f(x)=\int_0^x\frac{t^2}{t^2+t+2}$ تقعر به سمت پایین دارد؟

۶۶. فرض کنید که f یک تابع پیوسته باشد و $x\sin(\pi x)=\int_{0}^{x^{2}} f(t)dt$. در این صورت $f(4)$ را پیدا کنید.

۶۷. نشان دهید که برای هر $0 \leq x \leq 1$ داریم $\cos(x^{2}) \geq \cos(x)$ و از آن نتیجه بگیرید که

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos(x^{2})dx \geq \frac{1}{2}.$$

۶۸. نشان دهید

الف) $1 \leq \int_{0}^{1} \sqrt{1+x^{3}}dx \leq 1/25$

ب) $0 \leq \int_{5}^{10} \frac{x^{2}}{x^{4}+x^{2}+1}dx \leq 0/1$

۶۹. فرض کنید که f یک تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد به طوری که $f(x)$ هیچگاه صفر نشود. همچنین فرض کنید که برای هر x داشته باشیم $\int_{0}^{x} f(t)dt = \big(f(x)\big)^{2}$. در این صورت ضابطه‌ی تابع f را بیابید.

۷۰. حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$\frac{d^{2}}{dx^{2}}\int_{0}^{x}\Big(\int_{1}^{\sin t}\sqrt{1+u^{4}}du\Big)dt.$$

۷۱. فرض کنید که f' در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$2\int_{a}^{b} f(x)f'(x)dx = (f(b))^{2}-(f(a))^{2}.$$

۷۲. تابع f و ثابت a را به گونه‌ای بیابید که

$$2\int_{a}^{x} f(t)dt = 2\sin(x)-1.$$

۷۳. فرض کنید که تابع f پیوسته و به گونه‌ای باشد که برای هر x داشته باشیم

$$\int_{0}^{x} f(t)dt = x\sin(x)+\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{1+t^{2}}dt$$

در این صورت ضابطه‌ی $f(x)$ را بیابید.

۷۴. حاصل هر یک از حدود زیر را با استفاده از انتگرال‌های معین محاسبه کنید.

الف) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big((\frac{1}{n})^{9}+(\frac{2}{n})^{9}+\ldots+(\frac{n}{n})^{9}\Big)$

ب) $\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}\Big)$

۷۵. فرض کنید که تابع f در $[0,1]$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(1-x)dx.$$

۷۶. حاصل هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{2}^{2+h} \sqrt{1+t^3}dt$

ب) $\lim_{x\to 3} \left(\frac{x}{x-3}\int_{3}^{x} \frac{\sin t}{t}dt\right)$

۷۷. فرض کنید که f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx.$$

فرمول بالا را از نظر هندسی تحلیل کنید.

۷۸. الف) اگر f یک تابع پیوسته باشد، نشان دهید که $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(x))dx$.

ب) با استفاده از فرمول بالا حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx$ را محاسبه کنید.

۷۹. الف) اگر f بر $[0,\pi]$ پیوسته باشد نشان دهید که $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$ (از جایگذاریِ $u = \pi - x$ کمک بگیرید).

ب) با استفاده از عبارت بالا انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

۸۰. یک کارخانه دارای دستگاهی است که ارزش آن با نرخِ $f(t)$ در حال کاهش است، که در آن t زمان بر حسب ماه، با شروع از زمان تعمیر قبلی است. هزینه‌ی هر بار تعمیر این دستگاه، ثابت و برابر با A است. کارخانه‌ی مورد نظر به دنبال فاصله‌ی بهینه‌ی T (بر حسب تعداد ماه‌ها) بین هر دو بار تعمیر است.

الف) توضیح دهید که چرا $\int_0^t f(s)ds$ نشان‌دهنده‌ی کاهش ارزش دستگاه بعد از گذشت زمان t است.

ب) فرض کنید

$$C(t) = \frac{1}{t}\Big(A + \int_0^t f(s)ds\Big)$$

توضیح دهید که تابع بالا نشان دهنده‌ی چه چیزی است و چرا کارخانه باید مقدار این تابع را حداقل نگه دارد؟

ج) نشان دهید که تابع C در مقدار $t=T$ حداقل است که در آن $C(T) = f(T)$.

۸۱. فرض کنید f یک تابع پیوسته باشد و $\int_0^2 f(x)dx = 6$. حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin(\theta))\cos\theta d\theta$ را محاسبه کنید.

۸۲. تابع f و عدد a را به گونه‌ای بیابید که برای هر $x > 0$ داشته باشیم $6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} = 2\sqrt{x}$.

۸۳. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \\ 0 & x>2 \end{cases}$ و $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

الف) ضابطه‌ای برای تابع g (مشابه تابع f) به دست بیاورید.

ب) هر دو تابع f,g را رسم کنید.

ج) تعیین کنید که هر یک از توابع f,g در چه نقاطی مشتق‌پذیرند.

۸۴. مشتق تابع زیر را محاسبه کنید:

$$g(x) = \int_{۲x}^{۳x} \frac{u^{۲} - ۱}{u^{۲} + ۱} du$$

۸۵. تابع $Si(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، در مهندسی برق کاربرد فراوان دارد:

$$Si(x) = \int_{۰}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$$

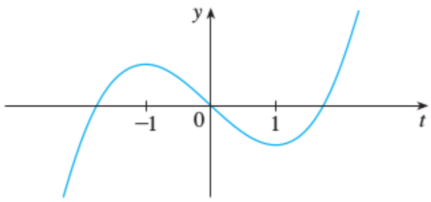
دقت کنید که مقدار تابع $\frac{\sin t}{t}$ را در نقطه‌ی ۰ برابر با یک تعریف می‌کنیم تا انتگرال بالا معنی داشته باشد.

الف) نقاط ماکزیمم و مینیمم موضعی این تابع را بیابید.

ب) اولین نقطه‌ی عطف این تابع در سمت راست مرکز مختصات را بیابید.

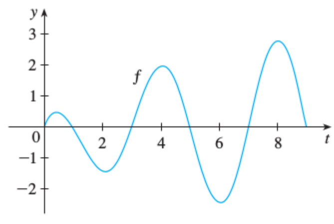
ج) آیا این تابع دارای مجانب افقی است؟

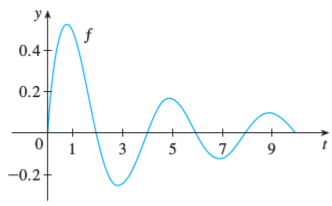
۸۶. نمودار تابع f در زیر آمده است. در چه نقاطی تابع $F(x) = \int_{۱}^{x} f(t)dt$ تقعر به سمت پایین دارد؟



۸۷. اگر $f(x) = \int_{۰}^{\sin x} \sqrt{۱ + t^{۲}} dt$ و $g(y) = \int_{۳}^{y} f(x)dx$، آنگاه حاصل $g''(\frac{\pi}{۶})$ را بیابید.

۸۸. در هر مورد زیر، نمودار تابع f داده شده است. در هر مورد تعیین کنید که تابع $g(x) = \int_{۰}^{x} f(t)dt$ در چه نقاطی مینیمم و ماکزیمم موضعی، مینیمم و ماکزیمم مطلق و تقعر به سمت پایین دارد. نمودار g را رسم کنید.

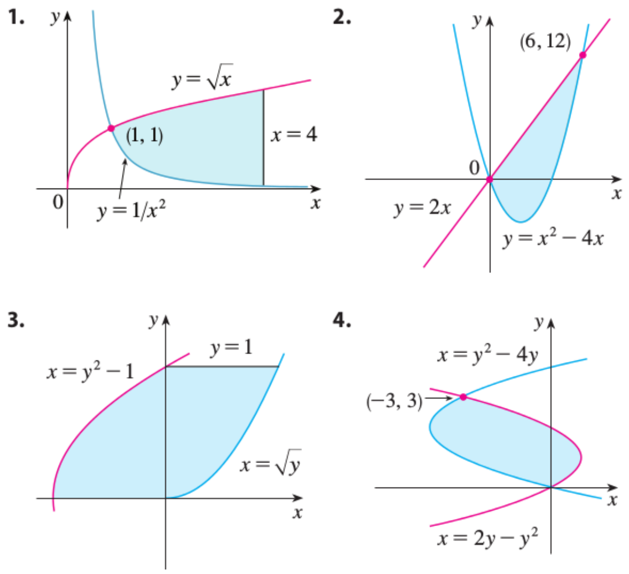




۸۹. فرض کنید که تابع f پیوسته و توابع g,h مشتق‌پذیر باشند. یک فرمولی کلی برای محاسبه‌ی مشتق تابع زیر ارائه کنید:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt.$$

۹۰. مساحت قسمت رنگی را در هر یک از شکل‌های زیر محاسبه کنید:

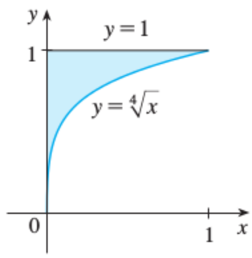


۹۱. در هر یک از حالت‌های زیر، مساحت ناحیه‌ی بین دو منحنی زیر را بیابید:

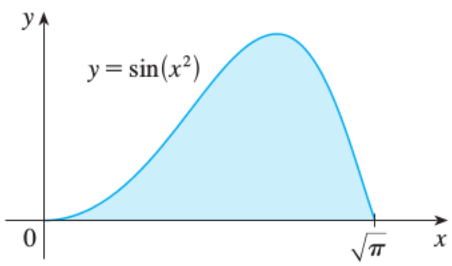
الف) $y=\frac{x}{۱+x^۲}$ و $y=\frac{x}{۹-x^۲}$ برای $x\geq ۰$.

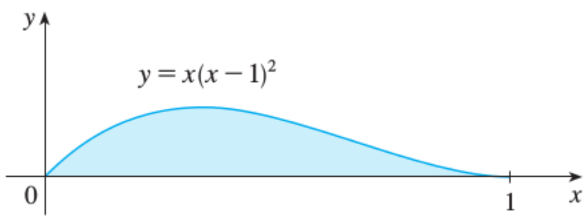
ب) $y=\cos^۲(x)\sin(x)$ و $y=\sin(x)$ برای $۰\leq x\leq \pi$.

۹۲. مساحت مشخص شده در زیر را محاسبه کنید:



۹۳. ناحیه‌ی نشان داده شده در هر یک از دو شکل زیر را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم‌های حاصل را بیابید.





۹۴. در هر مورد حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی مشخص شده، حول محور مشخص شده را بیابید.

الف) ناحیه محصور بین خط $y=x+۱$، $x=۰$، $x=۵$ و $y=۰$، حول محور x.

ب) ناحیه محصور بین خم $y=\frac{۱}{x}$ و خطوط $x=۱$، $x=۴$ و $y=۰$، حول محور x.

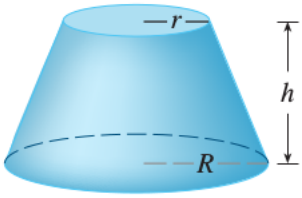
ج) ناحیه محصور بین خم $y=\sqrt{x-۱}$ و خطوط $x=۱$، $x=۵$ و $y=۰$، حول محور x.

د) ناحیه محصور بین خم $x^۲=۴y$ و خطوط $y=۰$، $y=۹$ و $x=۰$، حول محور y.

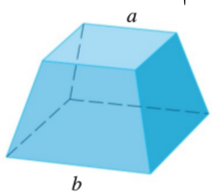
ه) ناحیه محصور بین دو خم $x = y^۲$ و $x = ۲y$، حول محور y.

و) ناحیه محصور بین دو خم $y = x^۲$ و $x = y^۲$، حول خط $y = ۱$.

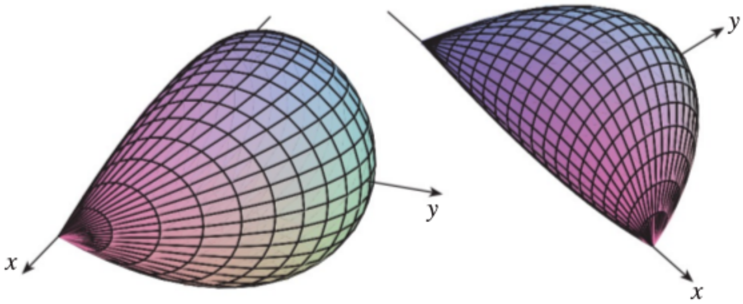
۹۵. حجم شکل زیر را بیابید



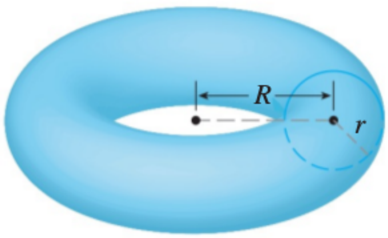
۹۶. شکل زیر بخشی از یک هرم به ارتفاع h است. حجم آن را محاسبه کنید. در صورتی که $a = ۰$، حجم مورد نظر چقدر است؟



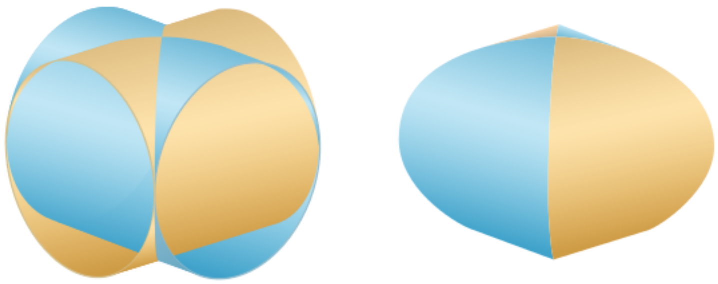
۹۷. در شکل زیر، حجم S توسط دوایری احاطه شده است که بر محور x عمودند و این محور را قطع می‌کنند و مرکز هر یک روی منحنی $y = \frac{۱}{۲}(۱ - x^۲)$ برای $-۱ \leq x \leq ۱$ واقع است. حجم S را بیابید:



۹۸. حجم چنبره‌ی زیر را بیابید.



۹۹. دو استوانه‌ی زیر با شعاع r بر هم متعامدند. حجم ناحیه‌ی بین این دو را بیابید.

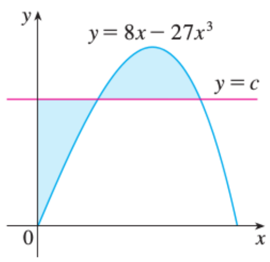


۱۰۰. تمام توابع پیوسته‌ی مثبت f را بیابید که مساحت زیر گراف f از ۰ تا $t > ۰$ برابر با $A(t) = t^{۳}$ است.

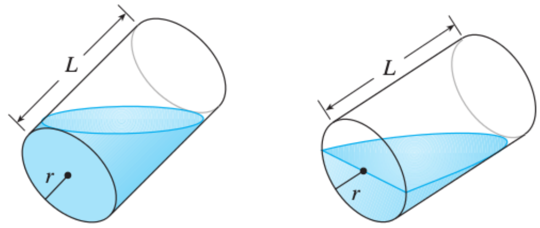
۱۰۱. یک جسم از دوران تابع مثبت $y = f(x)$ حول محور x (برای $x \geq ۰$) ایجاد شده است. حجم این جسم از $x = ۰$ تا $x = b$ برابر با $b^{۲}$ است (برای هر $b > ۰$). تابع f را پیدا کنید.

۱۰۲. یک خط گذرنده از مبدأ مختصات وجود دارد که ناحیه‌ی احاطه‌شده توسط سهمی $y = x - x^{۲}$ و محور x را به دو قسمت با مساحتهای مساوی تقسیم می‌کند. شیب این خط را بیابید.

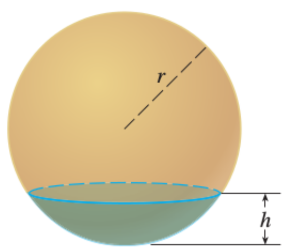
۱۰۳. در شکل زیر، عدد c را به گونه‌ای بیابید که مساحتهای رنگ‌شده با هم برابر باشند.



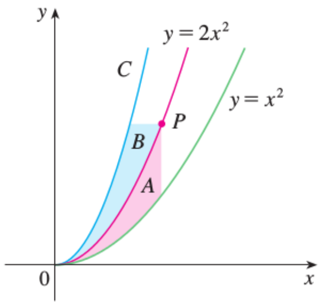
۱۰۴. حجم آب داخل لیوان زیر را در دو حالت کشیده شده، با استفاده از انتگرالگیری به دو صورت محاسبه کنید:



۱۰۵. با استفاده از انتگرالگیری نشان دهید که حجم نشان داده شده در شکل با فرمول $V = \frac{۱}{۳}\pi h^{۲}(۳r - h)$ محاسبه می‌شود.



۱۰۶. معادله‌ی منحنی C را به گونه‌ای بیابید که در زیر برای هر نقطه‌ی P مساحتهای A, B برابر باشند.



۱۰۷. فرض کنید $f(x) = \int_{۰}^{g(x)} \frac{۱}{\sqrt{۱+t^{۳}}}dt$ و $g(x) = \int_{۰}^{\cos(x)} (۱+\sin(t^{۲}))dt$. در این صورت $f'(\frac{\pi}{۲})$ را محاسبه کنید.

۱۰۸. اگر $f(x) = \int_{۰}^{x} x^{۲}\sin(t^{۲})dt$ آنگاه $f'(x)$ را محاسبه کنید (دقت کنید که داخل انتگرال یک تابع بر حسب x و دیگری بر حسب t است).

۱۰۹. الف) حاصل $\int_{۰}^{n} [x]dx$ را برای عدد طبیعی n محاسبه کنید.

ب) حاصل $\int_{a}^{b} [x]dx$ را بیابید که در آن a, b اعدادی حقیقی هستند و $۰ \leq a < b$.

۱۱۰. نشان دهید که تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ بر $[۰, ۱]$ انتگرال‌پذیر نیست.

۱۱۱. حداقل مساحت ناحیه‌ی زیر منحنیِ $y = ۴x - x^{۳}$ از $x = a$ تا $x = a + ۱$ در میان تمام a های مثبت چقدر است؟

۱۱۲. الف) نشان دهید که اگر f یک تابع پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_{۰}^{a} f(x)dx = \int_{۰}^{a} f(a-x)dx$$

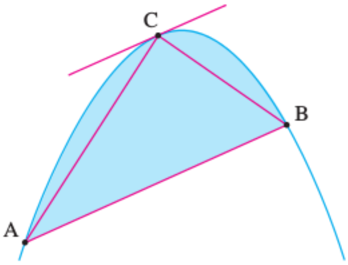
ب) با استفاده از قسمت (الف)، نشان دهید که برای هر عدد طبیعیِ n داریم

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^{n} x}{\sin^{n}(x) + \cos^{n} x} = \frac{\pi}{۴}.$$

۱۱۳. نشان دهید که اگر f یک تابع پیوسته باشد آنگاه

$$\int_{۰}^{x} f(u)(x-u)du = \int_{۰}^{x} \Big(\int_{۰}^{u} f(t)dt\Big)du.$$

۱۱۴. در شکل زیر نقاط A, B, C روی یک سهمی قرار دارند و خط مماس بر سهمی در نقطه‌ی C موازی با پاره‌خط AB است. ارشمیدس نشان داده است که در این صورت، مساحت قطاع سهموی $\frac{۴}{۳}$ برابرِ مساحت مثلثِ ABC است. این گفته را برای سهمیِ $y = ۴ - x^{۲}$ و خط $y = x + ۲$ تحقیق کنید.



۱۱۵. نقطه‌ی (a,b) را در نظر بگیرید که در آن $a,b>0$. سهمی‌ای را پیدا کنید که دهانه‌اش به سمت پایین است و از نقطه‌ی (a,b) و از مرکز مختصات می‌گذرد و مساحت زیر آن حداقل است.

۱۱۶. فرض کنید برای هر عدد c مقدار تابع $f_c(x)$ مینیمم دو مقدارِ $(x-c)^2$ و $(x-c-2)^2$ باشد. اگر تابع g با دستور $g(c)=\int_0^1 f_c(x)dx$ تعریف شده باشد مینیمم و ماکزیمم تابع g را بر بازه $[-2,2]$ محاسبه کنید.

فصل پنجم. تابع وارون، توابع لگاریتمی و نمایی

فصل ششم. روش‌های انتگرال‌گیری و انتگرال‌های ناسره

۱۱۷. انتگرال های زیر را با استفاده از روش جزء به جزء محاسبه کنید.

الف) $\int x^2 \ln x \, dx$
ب) $\int \theta \cos\theta \, d\theta$
ج) $\int x \sin 5x \, dx$
د) $\int \arcsin x \, dx$
ه) $\int x^2 \sin \alpha x \, dx$
و) $\int x^3 e^x \, dx$
ز) $\int (\ln x)^2 \, dx$
ح) $\int \ln \sqrt[3]{x} \, dx$
ط) $\int x^5 \ln x \, dx$
ی) $\int_0^1 x \cosh x \, dx$
ک) $\int x \tan^2 x \, dx$
ل) $\int (\arcsin x)^2 \, dx$
م) $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$

۱۱۸. انتگرال‌های زیر را بعد از انجام تغییر متغیر مناسب با استفاده از روش جزء به جزء محاسبه کنید.

الف) $\int \cos\sqrt{x} \, dx$
ب) $\int x^3 e^{-x^2} \, dx$
ج) $\int \sin(\ln x) \, dx$
د) $\int x \ln(1+x) \, dx$

۱۱۹. روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $\int (\ln x)^n \ dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} \ dx$

ب) $\int x^n e^x \ dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x \ dx$

ج) $\int (\tan x)^n \ dx = \frac{(\tan x)^{n-1}}{n-1} - \int (\tan x)^{n-2} \ dx \qquad (n \neq 1)$

د) $\int (\sec x)^n \ dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x \ dx \qquad (n \neq 1)$

۱۲۰. انتگرال‌های زیر را با استفاده از تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی محاسبه کنید.

الف) $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2} \ dx$

ب) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}} \ dx$

ج) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}} \ dx$

د) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \ dx$

ه) $\int_0^a \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}} \ dx$

و) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2} \ dx$

ز) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \ dx$

ح) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ dx$

ط) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \ dx$

ی) $\int \sqrt{5+4x-x^2} \ dx$

ک) $\int x\sqrt{1-x^4} \ dx$

ل) $\int_0^1 \sqrt{x^2+1} \, dx$

م) $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} \ dx$

۱۲۱. انتگرال‌های زیر را با استفاده از روش تجزیه کسرهای جزئی محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{x^4}{x-1} \ dx$

ب) $\int \frac{3x-2}{x+1} \ dx$

ج) $\int \frac{ax}{x^2-bx} \ dx$

د) $\int \frac{x^3+4}{x^2+4} \ dx$

ه) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)^2}$

و) $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} \ dx$

ز) $\int \frac{x^5+x+1}{x^3+1} \ dx$

۱۲۲. با یک تغییر متغیر انتگرال‌های زیر را به انتگرال توابع گویا تبدیل کرده و سپس انتگرال را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} \ dx$

ب) $\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{x}}$

ج) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \ dx$

د) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} \ dx$

ه) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

و) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x} \ dx$

ز) $\int \frac{\cosh x}{\sinh^2 x + \sinh^4 x} \ dx$

۱۲۳. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\, dx$

ب) $\int \sin\sqrt{ax}\, dx$

ج) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$

د) $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$

ه) $\int \cos 2x \cos 6x\, dx$

و) $\int x \sin x \cos x\, dx$

ز) $\int x^5 e^{-x^3}\, dx$

ح) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\, dx$

ط) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\, dx$

ی) $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx$

ک) $\int \sqrt{1-\sin x}\, dx$

ل) $\int \frac{4^x+10^x}{2^x}\, dx$

م) $\int \sqrt{1+e^x}\, dx$

۱۲۴. نشان دهید که $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ واگراست ولی $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} xdx = 0$.

۱۲۵. تابعِ f در $[0,+\infty]$ پیوسته است و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$. آیا ممکن است که $\int_0^{\infty} f(x)dx$ همگرا باشد؟

۱۲۶. نشان دهید که اگر $a > -1$ و $b > a+1$ آنگاه انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^b}dx$ همگراست.

۱۲۷. مقدار C را به گونه‌ای پیدا کنید که انتگرال زیر همگرا باشد؛ سپس حاصل انتگرال را برای آن مقدار بیابید.

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right)dx.$$

۱۲۸. با تعبیر مساحتها، نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{1} \sqrt{-\ln y}\,dy$$

۱۲۹. نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

۱۳۰. اگر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ همگرا و a,b دو عدد حقیقی باشند، نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{\infty} f(x)dx$$

۱۳۱. اگر $f(t)$ یک تابع پیوسته برای $t \geq 0$ باشد، تبدیل لاپلاس آن تابعی بر حسب s است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

دامنه‌ی تابع بالا متشکل از تمام s هائی است که به ازای آنها انتگرال بالا همگراست. تبدیل لاپلاس هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f(t) = ۱$ ب) $f(t) = e^t$ ج) $f(t) = t$

۱۳۲. دقت کنید که انتگرالهای زیر، همزمان ناسره‌ی نوع اول و دوم هستند. حاصل آنها را محاسبه کنید.

الف) $\int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{x}(۱+x)} dx$ ب) $\int_{۲}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{x}\sqrt{x^۲ - ۴}}$

۱۳۳. حاصل انتگرال $\int_{۰}^{\infty} x^n e^{-x}\, dx$ را برای $n = ۰, ۱, ۲, ۳$ محاسبه کنید.

۱۳۴. حاصل انتگرال سوال قبل را برای عدد طبیعی دلخواهِ n حدس بزنید و حدس خود را با استقراء ثابت کنید.

۱۳۵. مقادیر p را به گونه‌ای تعیین کنید که هر یک از انتگرالهای زیر همگرا باشند (مقدار انتگرال مورد نظر را نیز محاسبه کنید).

الف) $\int_{۰}^{۱} \frac{۱}{x^p} dx$ ب) $\int_{e}^{\infty} \frac{۱}{x(\ln x)^p} dx$ ج) $\int_{۰}^{۱} x^p \ln x dx$

۱۳۶. با ذکر دلیل مشخص کنید که کدامیک از انتگرالهای زیر همگرا و کدام واگرا هستند.

33. $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

34. $\int_0^5 \frac{w}{w-2}\,dw$

35. $\int_0^{\pi/2} \tan^2\theta\,d\theta$

36. $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-x-2}$

37. $\int_0^1 r\ln r\,dr$

38. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\,d\theta$

39. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

40. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

9. $\int_2^\infty e^{-5p}\,dp$

10. $\int_{-\infty}^0 2^r\,dr$

11. $\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

12. $\int_{-\infty}^\infty (y^3-3y^2)\,dy$

13. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx$

14. $\int_1^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$

15. $\int_0^\infty \sin^2\alpha\,d\alpha$

16. $\int_0^\infty \sin\theta\, e^{\cos\theta}\,d\theta$

17. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,dx$

18. $\int_2^\infty \frac{dv}{v^2+2v-3}$

19. $\int_{-\infty}^0 ze^{2z}\,dz$

20. $\int_2^\infty ye^{-3y}\,dy$

21. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

22. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

23. $\int_{-\infty}^0 \frac{z}{z^4+4}\,dz$

24. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

25. $\int_0^\infty e^{-\sqrt{y}}\,dy$

26. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$

27. $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

28. $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt[3]{5-x}}\,dx$

29. $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

30. $\int_{-1}^2 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

31. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$

32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$

6. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\,dx$

7. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x}\,dx$

8. $\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

فصل هفت. دنباله‌ها و سری‌ها
