

۱. فرض کنید  $f(x) = \int_2^x \sqrt{1+t^2} dt$  ثابت کنید وارون  $f$  موجود و مشتق‌پذیر است. مقدار  $(f^{-1})'(\circ)$  را بدست آورید.

۲. فرض کنید  $f$  تابع یک به یک و مشتق‌پذیر باشد بطوریکه  $f(3) = 2$  و  $f'(3) = \frac{1}{9}$ . اگر  $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$  مقدار  $g'(2)$  را بدست آورید.

۳. فرض کنید  $f$  یک تابع یک به یک و دوبار مشتق‌پذیر باشد به‌طوری‌که  $f'(x) \neq 0$  ثابت کنید

$$(f^{-1})''(x) = -\frac{f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3}.$$

ثابت کنید اگر  $f$  تقعر  $f$  رو به بالا باشد، آنگاه تقعر  $f^{-1}$  رو به پایین است.

۴. دامنه و برد توابع  $f(x) = \ln \ln x$  و  $g(x) = \sqrt{1 - \ln x}$  را بدست آورید.

۵. فرض کنید  $f(x) = 2x + \ln x$ . مقدار  $(f^{-1})'(2)$  را بدست آورید.

۶. ثابت کنید برای هر  $n$  طبیعی

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

۷. نشان دهید برای هر  $x \geq 0$   $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$ .

۸. به ازای چه مقادیری از  $c$  معادله  $\ln x = cx^2$  دقیقاً یک جواب دارد؟

۹. انتگرال‌های معین و نامعین زیر را بدست آورید.

$$\int_2^9 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx \quad \text{د} \quad \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \quad \text{ج} \quad \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx \quad \text{ب} \quad \int_e^e \frac{dx}{x \ln x} \quad \text{الف}$$

$$\int \frac{2^x}{2^x + 1} dx \quad \text{ح} \quad \int e^{\tan x} \sec^2 x dx \quad \text{ز} \quad \int \frac{\sqrt{1+e^{-x}}}{e^x} dx \quad \text{و} \quad \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \quad \text{ه}$$

۱۰. فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی مشتق‌پذیر بوده، برای هر  $x$ ،  $f'(x) = f(x)$ . اگر  $f(0) = 1$  نشان دهید  $f(x) = e^x$ .

۱۱. نشان دهید برای هر  $x > 0$   $\ln(1+x) > \frac{\tan^{-1} x}{x+1}$ .

۱۲. نشان دهید معادله  $e^x + x = 0$  تنها یک ریشه دارد.

۱۳. معادله خط مماس بر منحنی به معادله  $xe^y + ye^x = 1$  در نقطه  $(0, 1)$  را بدست آورید.

۱۴. مقدار حدود زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\ln x} \quad (د) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}} \quad (ج) \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} e^{\tan x} \quad (ب) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{x}} \cos x \quad (الف)$$

۱۵. مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید که تابع  $y = e^{ax}$  در معادله  $y + y' = y''$  صدق کند.

۱۶. مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x = e.$$

۱۷. اکسترم‌های مطلق تابع  $f(x) = x^2 e^{-x/2}$  را روی بازه  $[-1, 6]$  بدست آورید.

۱۸. حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به منحنی‌های  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  و  $x = 1$  حول محور  $x$  ها را بدست آورید.

۱۹. الف) ثابت کنید برای هر  $x \geq 0$  داریم  $e^x \geq 1 + x$ .

ب) با کمک الف، ثابت کنید برای هر  $x \geq 0$  داریم  $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ .

ج) ثابت کنید برای هر  $x \geq 0$  و هر عدد طبیعی  $n$ ، داریم  $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ .

د) با کمک (ج) برای هر  $n$  طبیعی ثابت کنید  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ .

۲۰. کلیه اکسترم‌های تابع  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  با دستور  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$  را تعیین کنید. نمودار این تابع را رسم کنید.

۲۱. ثابت کنید  $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$ .

۲۲. انتگرال‌های معین و نامعین زیر را بدست آورید.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \quad (د) \quad \int \frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (ج) \quad \int \frac{1+x}{1+x^2} dx \quad (ب) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx \quad (الف)$$

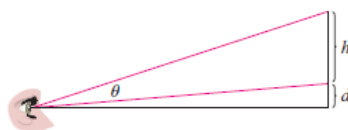
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16t^2+1}} dx \quad (ح) \quad \int \frac{e^x}{1-e^{\sqrt{x}}} dx \quad (ز) \quad \int \sinh(1+4x) dx \quad (و) \quad \int \tanh x dx \quad (ه)$$

۲۳. ثابت کنید برای  $xy \neq 1$  داریم

$$\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}.$$

۲۴. یک نقاشی با ارتفاع  $h$  به گونه‌ای روی دیوار قرار دارد که لبه پایین آن به اندازه  $d$  بالاتر از چشم ناظر است. فاصله ناظر تا

دیوار چقدر باشد که بهترین دید را داشته باشد (یعنی  $\theta$  ماکسیمم شود).



۲۵. پیوستگی و مشتق پذیری تابع  $f$  در  $x = 0$  را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

۲۶. روابط زیر را ثابت کنید.

الف)  $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

ب)  $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

ج)  $\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

۲۷. نشان دهید برای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $|\tanh x| \leq |x|$ .

۲۸. با استفاده از قاعده هوییتال حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$  (الف)    ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{\tan x}$  (ب)    ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - x}{x^3}$  (ج)    د)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$  (د)

ه)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x - \frac{1}{x}$  (ه)    و)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{1/(1-x)}$  (و)    ز)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$  (ز)    ح)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$  (ح)

۲۹. فرض کنید  $f$  یک تابع مثبت باشد. اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ، نشان دهید که  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = 0$ .

۳۰. فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$  نشان دهید  $f$  در صفر پیوسته است اما مشتق پذیر نیست.