۱۲۴) برای توابع زیر نقاط بحرانی را مشخص کرده و تعیین کنید ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطه‌ی زینی هستند.

الف) $f(x,y) = ۲x^۲ + (y-۱)^۲$

ب) $f(x,y) = ۸x^۳ + y^۳ - ۱۲xy + ۶$

ج) $f(x,y) = (x-۱)\ln xy \quad (xy > ۰)$

۱۲۵) فرض کنید تابع f روی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = x^۲ - y^۲$ تعریف شده باشد. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق f را روی D به دست آورید.

۱۲۶) در ریاضیات پیشرفته ثابت می‌شود که یک تابع سه متغیره‌ی f با مشتقات جزیی مرتبه‌ی دوم پیوسته دارای یک مینیمم موضعی در نقطه‌ی بحرانی $P = (a,b,c)$ است هرگاه سه مقدار A، D و E که توسط

$$A = f_{xx}\ ,\ D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, E = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

تعریف می‌شوند، در نقطه‌ی P مثبت باشند. همچنین f در P دارای یک ماکزیمم موضعی است هرگاه در نقطه‌ی P داشته باشیم $A < ۰\ ,\ D > ۰\ ,\ E < ۰$.

با استفاده از آنچه بیان شد مقادیر ماکزیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + ۲z^۲ + xy - ۹x - ۳y + ۴z + ۱۰$ را در صورت وجود پیدا کنید.

۱۲۷) آیا تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - xyz$ در مبدأ دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی است؟

۱۲۸) با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را با قید داده شده در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x,y) = x^۲ + ۸y^۲\ ,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = ۱$

ب) $f(x,y,z) = ۲x - ۳y + z - ۱\ ,\ x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱۴$

ج) $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲\ ,\ x - ۲y + ۲z = ۶$

د) $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲\ ,\ ۲x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۲$

ه) $f(x,y,z) = xy + xz\ ,\ x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ = ۴$

۱۲۹) با استفاده از روش تکثیرکننده‌های لاگرانژ فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (-۱,۴)$ و خط $۱۲x - ۵y + ۷۱ = ۰$ را پیدا کنید.

۱۳۰) با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ نقاطی از بیضی با معادله‌ی $۳x^۲ - ۲xy + ۳y^۲ - ۲ = ۰$ را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها تا مبدا کمترین یا بیشترین مقدار است.

۱۳۱) با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (۱, ۱, ۱)$ و صفحه‌ی π به معادله‌ی $۲x + ٦y - ۹z + ۱۲ = ۰$ را پیدا کنید.

۱۳۲) می‌توان نشان داد که اگر تابع سه متغیره‌ی f دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی در نقطه‌ی $P = (a, b, c)$ با قیدهای $g(a, b, c) = ۰$ و $h(a, b, c) = ۰$ باشد، اگر بردارهای گرادیان توابع f، g و h غیر صفر و غیر موازی باشند، آنگاه دو عدد μ و λ وجود دارند که

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c) + \mu \nabla h(a, b, c)$$

(مقادیر μ و λ تکثیر کننده‌های لاگرانژ نامیده می‌شوند . فرض بر آن است که توابع f، g و h دارای مشتقات جزیی پیوسته هستند.). با استفاده از توضیحات فوق فاصله‌ی بین مبدأ و فصل مشترک دو صفحه‌ی $x + ۲y - z - ۵ = ۰$ و $x - y + z - ۳ = ۰$ را پیدا کرده و پاسخ خود را با حل این مساله به کمک روش‌های دیگر مقایسه نمایید.

۱۳۳) اکسترمم‌های مطلق توابع زیر را روی ناحیه‌های مشخص شده تعیین نمایید.

الف) $f(x, y) = x^۲ + xy \ , \ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$

ب) $f(x, y) = ۲x - y^۲ \ , \ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ ۰ \leq x, ۰ \leq y, x + y \leq ۱\}$

ج) $f(x, y) = \sin(\frac{\pi xy}{۲}) \ , \ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ ۱ \leq x \leq ۲, ۱ \leq y \leq ۲\}$

د) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^۲}{x^۲ + y^۲} & (x, y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x, y) = (۰, ۰) \end{cases} \ , \ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ ۱ \leq x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$

۱۳۴) درجه‌ی حرارت در نقاط مختلف قرص $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ توسط $T(x, y) = x^۲ + ۲y^۲ - x$ داده می‌شود. گرم‌ترین و سردترین نقاط قرص D را تعیین کنید.

۱۳۵) اکسترمم‌های مقید توابع زیر را تحت شرط‌های داده شده تعین نمایید.

(الف) $f(x, y, z) = x + y + z \ , \ g(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۳ = ۰$

(ب) $f(x, y, z) = xyz \ , \ g(x, y, z) = ۲xy + ۳xz + yz = ۷۲$

(ج) $f(x, y, z) = xy \ , \ g(x, y, z) = y^۲ + z^۲ - ۱$

۱۳٦) نقطه‌ای را بر صفحه‌ی $x + ۴y + ۳z = ۲$ تعیین کنید که تابع $f(x, y, z) = ۲x^۲ + ۳y^۲ + z^۲$ در آن دارای کمترین مقدار باشد.

۱۳۷) نزدیکترین نقطه‌ی واقع بر رویه‌ی $xyz = ۸$ به مبدا مختصات را تعیین نمایید. ثابت کنید خط واصل از مبدا به این نقطه، بر رویه عمود است.

۱۳۸) در بین مجموعه‌ی مثلث‌ها، مثلثی را تعیین کنید که مجموع سینوس زوایای آن بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

انتگرال‌گیری چندگانه

۱) مطلوب است محاسبه‌ی هر یک از انتگرال‌های زیر.

(الف) $\int_{\circ}^{۱}\int_{۱}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy+\int_{۱}^{۴}\int_{\sqrt{y}}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy$

(ب) $\int_{\circ}^{۲}\int_{\circ}^{۴-x^{۲}}\frac{xe^{۲y}}{۴-y}dxdy$

(ج) $\int\int_{A}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\;dA \quad , \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}; ۱\leq x^{۲}+y^{۲}\leq ۲\}$

(د) $\int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{x}\frac{dydx}{(۱+x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}+\int_{۱}^{\sqrt{۲}}\int_{\circ}^{\sqrt{۲-x^{۲}}}\frac{dydx}{(۱+x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}$

(ه) $\int\int_{A}(x-y)\sin(x^{۲}-y^{۲})\;dA$

A ناحیه‌ی واقع بین خطوط $x+y=۲$, $y-x=۱$, $y-x=-۱$, $x+y=\circ$ است.

(و) $\int\int_{A}e^{\frac{y}{x+y}}\;dA$

A ناحیه‌ی واقع بین خطوط $x+y=۱$, $y=\circ$, $x=\circ$ است.

(ز) $\int\int_{G}x\;dA$

G ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $xy=۱$, $xy=۳$, $x(۱-y)=۲$, $x(۱-y)=۱$ است.

(ح) $\int\int_{D}\frac{dA}{(xy)^{\frac{۲}{۳}}}$

D ناحیه‌ی محصور شده باخم $x^{۲/۳}+y^{۲/۳}=۱$ است.

۲) مساحت هر یک از نواحی زیر را تعیین نمایید.

الف) مساحت داخل دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۴$ و سمت راست خط $x=۱$.

ب) مساحت محصور بین منحنی‌های $xy=۱$، $xy=۲$ و خطوط $x=۱$ و $x=۲$.

ج) مساحت محصور توسط منحنی‌های $x=۴-۳y^{۲}$ و $x=y^{۲}$.

۳) انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{\circ}^{۲}dx\int_{\circ}^{\ln x}e^{y}dy$$
$$\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}dx\int_{\sin x}^{۱}y^{۳}dy$$

۴) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}dydx$$
$$\int_{0}^{8}\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{2}\frac{dydx}{y^4+1}$$

۵) فرض کنید تابع f پیوسته است. با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری مجموع زیر را به صورت یک انتگرال دوگانه بنویسید.

$$\int_{0}^{3}dx\int_{0}^{x}f(x,y)dy+\int_{3}^{6}dx\int_{0}^{6-x}f(x,y)dy$$

٦) مقدار کدامیک از انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر بیشتر است؟

$$\int\int_{D}(x^4+6x^2y^2+y^4)dA \qquad (i)$$
$$\int\int_{R}(4x^3y+4xy^3)dA \qquad (ii)$$

۷) انتگرال دوگانه‌ی $\int\int_{R}xy\ dA$ را که در آن R ناحیه‌ای است محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ محاسبه کنید.

۸) مجموعه‌ی D را **همبند** می‌نامیم اگر برای هر $P,Q\in D$، یک خم با معادلات پارامتری $x=x(t)\ ,\ y=y(t)$ به ازای $0\leq t\leq 1$ وجود داشته باشد به قسمی که x و y توابعی پیوسته باشند، برای هر $t\in[0,1]$ نقطه‌ی $(x(t),y(t))$ در D قرار گیرد، $P=(x(0),y(0))$ و $Q=(x(1),y(1))$.
نشان دهید اگر تابع دو متغیره‌ی f روی حوزه‌ی همبند D به مساحت A پیوسته باشد، آنگاه یک نقطه مثل (a,b) در D وجود دارد به قسمی که:

$$\int\int_{R}f(x,y)\ dA=Af(a,b)$$

(گزاره‌ی فوق قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌های دوگانه است.)

۹) انتگرال $\int\int_{D}\frac{y}{x^2+y^2}\ dA$ را روی ناحیه‌ی D محصور به سهمی $y=x^2$ و خط $y=x$ به دست آورید.

۱۰) الف) نشان دهید که اگر f و g دو تابع پیوسته بر فاصله‌ی $[a,b]$ باشند، آنگاه

$$|\int_{a}^{b}f(x)g(x)dx|\leq\sqrt{\int_{a}^{b}f^2(x)dx}\sqrt{\int_{a}^{b}g^2(x)dx}$$

(راهنمایی: از انتگرال $\int\int_{A}(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\ dA$ روی ناحیه‌ی مناسب A، استفاده کنید)
ب) اگر تابع f تابعی پیوسته و مثبت روی $[a,b]$ باشد، نشان دهید

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^{۲}$$

۱۱) $\int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}}dx$ را به دست آورید (راهنمایی: $\int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}}dx \int_{۰}^{\infty} e^{-y^{۲}}dy = \int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty} e^{-(x^{۲}+y^{۲})}dxdy$ را با استفاده از مختصات قطبی به دست آورید.)

۱۲) انتگرال $\int_{۰}^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ را حساب کنید. (راهنمایی: از رابطه‌ی $\int_a^b e^{-xy}dy = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ استفاده کنید.)

۱۳) انتگرال‌های دو یا سه‌گانه‌ی زیر را به کمک تغییر متغیرهای مناسب محاسبه کنید.

الف) $\int\int_D \frac{x^{۲}\sin xy}{y}\, dA$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $x^{۲} = \pi y$، $x^{۲} = \frac{\pi y}{۲}$، $y^{۲} = x$ و $y^{۲} = \frac{x}{۲}$ می‌باشد.

ب) $\int\int_D \cos\frac{x-y}{x+y}\, dA$ که در آن D محدود است به خطوط $y = ۰$، $y = x$ و $x + y = \frac{\pi}{۲}$.

ج) $\int\int\int_T yz\, dV$ که در آن T ناحیه‌ی محدود به صفحات $x+y+z = ۲$، $x+y+z = -۲$، $x-y+z = ۳$، $x-y+z = -۳$، $x+y-z = ۱$ و $x+y-z = -۱$ می‌باشد.

۱۴) به کمک تغییر متغیرهای $x = u\cos^{۴} v$ و $y = u\sin^{۴} v$ انتگرال دوگانه‌ی

$$\int\int_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\, dA$$

را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ی محدود به خطوط $x = ۰$، $y = ۰$ و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y} = ۱$ است.

۱۵) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت‌های زیر را پیدا کنید.

الف) سطح داخل کاردیوئید $r = a(۱-\cos\theta)$ و خارج دایره‌ی $r = a$.

ب) سطح محصور بین دوایر $x^{۲}+y^{۲} = x$ و $x^{۲}+y^{۲} = ۲x$ و خطوط $y = ۰$ و $y = x$.

ج) سطح بین مارپیچ‌های $r = \theta$ و $r = ۲\theta$ به ازای $۰ \leq \theta \leq ۴\pi$.

۱۶) حجم محصور از بالا به کره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = a^{۲}$، از زیر به مخروط $z^{۲} = (x^{۲}+y^{۲})\cot^{۲}\beta$ و از دو طرف به صفحات $y = x\tan\alpha$ و $y = ۰$ را به دست آورید. (α و β اعداد حقیقی ثابت و $۰ < \alpha, \beta < \frac{\pi}{۲}$ هستند.)

۱۷) ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{۲} : \pi^{۲} \leq x^{۲}+y^{۲} \leq ۴\pi^{۲}\}$ و تابع $f(x,y) = \sin\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ مفروض هستند. $\int\int_D f(x,y)\, dA$ را به‌دست آورید.