۱ جلسه‌ی بیست و چهارم، دوشنبه

تمرین ۱. نقاط بحرانی توابع زیر و نوع آنها را مشخص کنید.

۱. $f(x,y) = (x-۱)\ln(xy) \quad xy > ۰$

پاسخ.

$$f_y(x,y) = \frac{(x-۱)x}{xy} = ۰$$

تابع بالا در $x = ۰$ برابر صفر است ولی نظر به دامنه‌ی تابع $x = ۰$ غیر قابل قبول است. اگر $x \neq ۰$ داریم

$$f_y(x,y) = \frac{x-۱}{y} = ۰$$

پس $x = ۱$. حال

$$f_x(x,y) = \ln(xy) + \frac{y}{xy}(x-۱) = ۰ \Rightarrow \ln(xy) + \frac{x-۱}{x} = ۰$$
$$f_x(۱,y) = ۰ \Rightarrow y = ۱$$

نقطه‌ی $(۱,۱)$ تنها نقطه‌ی بحرانی تابع مورد نظر است.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} (۱,۱)$$

اگر $D > ۰$ و $f_{xx} > ۰$ آنگاه نقطه‌ی $(۱,۱)$ مینی‌موم نسبی است و اگر $D > ۰$ و $f_{xx} < ۰$ آنگاه نقطه‌ی $(۱,۱)$ یک ماکزیمم نسبی است.

$$f_{xx}(x,y) = \frac{y}{xy} + \frac{x-x+۱}{x^۲} = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow f_{xx}(۱,۱) = ۲$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{x}{xy} = \frac{۱}{y} \Rightarrow f_{xy}(۱,۱) = ۱$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{۱-x}{y^۲} \Rightarrow f_{yy}(۱,۱) = ۰$$

$$D = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} = -۱ < ۰$$

$D < ۰$ پس نقطه‌ی $(۱,۱)$ یک نقطه‌ی زینی است. □

۲. $f(x,y) = y(e^x - ۱)$

۳. $f(x,y) = xye^{\frac{-(x^۲+y^۲)}{۲}}$

۴. $f(x,y) = x^۲ + xy + y^۲ + y$

مثال ۲. کوتاهترین فاصله‌ی نقطه‌ی $(۱, ۰, -۲)$ را به صفحه‌ی $x + ۲y + z = ۴$ بیابید.

پاسخ. فرض کنید (x, y, z) نقطه‌ای روی صفحه باشد. پس $z = ۴ - x - ۲y$. فاصله‌ی نقطه‌ی $(۱, ۰, -۲)$ از نقطه‌ی (x, y, z) برابر است با

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-۱)^۲ + y^۲ + (z-۲)^۲} = \sqrt{(x-۱)^۲ + y^۲ + (۶ - x - ۲y)^۲}$$

$$F = d^۲(x, y) = (x-۱)^۲ + y^۲ + (۶ - x - ۲y)^۲$$

کافی است نقطه‌ای مانند $(x_۰, y_۰)$ پیدا کنیم که در آن تابع F مینی‌موم شود.
تعیین نقاط بحرانی F:

$$F_x(x, y) = ۲(x-۱) + (-۲)(۶ - x - ۲y) = ۴x + ۴y - ۱۴ = ۰ \Rightarrow ۲x + ۲y = ۷$$

$$F_y(x, y) = ۲y - ۴(۶ - x - ۲y) = ۴x + ۱۰y - ۲۴ = ۰ \Rightarrow ۲x + ۵y = ۱۲$$

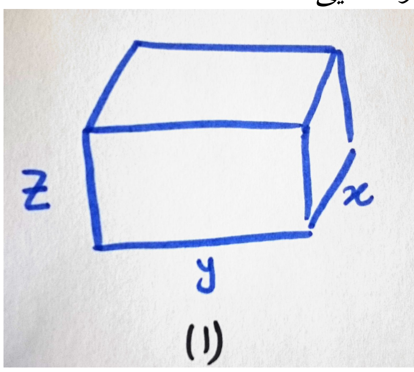
بعد از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به نقطه‌ی $(\frac{۱۱}{۶}, \frac{۵}{۳})$ می‌رسیم. بنا به صورت سوال می‌دانیم که تابع F دارای مینی‌موم نسبی است. پس این مینی‌موم در نقطه‌ی $(\frac{۱۱}{۶}, \frac{۵}{۳})$ رخ می‌دهد. (زیرا این نقطه، بحرانی است.) پس فاصله‌ی مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{F(\frac{۱۱}{۶}, \frac{۵}{۳})} = \dots$$

□

مثال ۳. حداکثر حجم یک جعبه‌ی مکعب مستطیلی بدون در را بیابید که بتوان با $۱۲m^۲$ مقوا ساخت.

راهنمایی.



$$۲xy + ۲zx + xy = ۱۲$$

$$V(x, y, z) = xyz$$

$$z = \frac{۱۲ - xy}{۲y + ۲x}$$

تابع $F(x, y)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$F(x, y) = xy(\frac{۱۲ - xy}{۲y + ۲x})$$

کافی است x, y را به گونه‌ای بیابیم که تابع F ماکزیمم داشته باشد. (به محک دوم نیازی نیست.) □

۱.۱ اکسترمم‌های مطلق

یادآوری ۴ (از توابع تک متغیره)**.** فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته در بازه‌ی بسته‌ی کراندار $[a,b]$ باشد. آنگاه f در بازه‌ی $[a,b]$ دارای ماکزیمم و مینی‌موم مطلق است.

دستورالعمل محاسبه:

۱. نقاط بحرانی تابع را در بازه‌ی $[a,b]$ بیابید.

۲. مقدار تابع را در نقاط مرزیِ b, a تعیین می‌کنیم.

۳. مقدار تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی مقایسه می‌کنیم.

اصطلاحات توپولوژیک در قضیه‌ی بالا:

۱. تابع پیوسته

۲. نقطه‌ی مرزی

۳. مجموعه‌ی بسته و کراندار

هدفمان در ادامه‌ی درس این است که متناظرِ آنچه در یادآوریِ ۴ بیان شده است، برای توابع دو متغیره ثابت کنیم. برای این منظور، باید مفاهیم بسته بودن، کراندار بودن و پیوسته بودن را برای این حالت نیز تعریف کنیم. مفهوم پیوسته بودن را در درسهای پیشین دیده‌ایم. در زیر به بقیه‌ی این مفاهیم توپولوژیک پرداخته‌ایم. یادگرفتن درست معنی توپولوژی، نیاز به گذراندن ۴ واحد درسی در رشته‌ی ریاضی دارد و جزو اهداف اصلی درس ریاضی ۲ نیست. شما تنها باید بدانید که هرگاه سخن از پیوستگی، فاصله، مجموعه‌ی باز و مجموعه‌ی بسته، و غیره به میان می‌آید، پای توپولوژی در کار است.

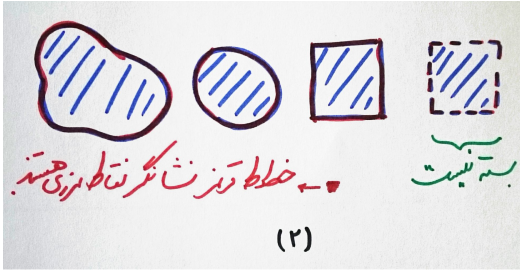
۲.۱ توپولوژی در $\mathbf{R}^۲$

۱. **دیسک باز** به مرکز (a,b) و شعاع δ:

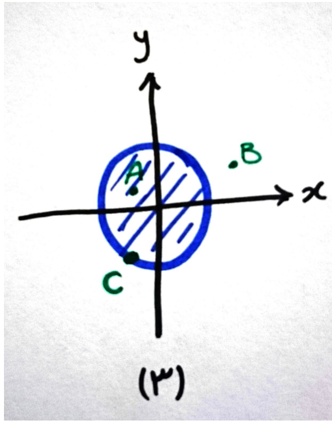
$$B_\delta\big((a,b)\big) = \{(x,y) | \sqrt{(x-a)^۲ + (y-b)^۲} \underbrace{<}_{\text{اکید}} \delta\}$$

۲. **نقاط مرزی** یک مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbf{R}^۲$. نقطه‌ی $(a,b) \in \mathbf{R}^۲$ را یک نقطه‌ی مرزی برای مجموعه‌ی $D \subseteq \mathbf{R}^۲$ می‌خوانیم هرگاه برای هر دیسکِ بازِ $B_\delta\big((a,b)\big)$ (به ازای مقادیر مختلفِ δ) داشته باشیم:

$$\begin{cases} B_\delta\big((a,b)\big) \cap D \neq \emptyset \to \text{این اشتراک نباید خودِ } (a,b) \text{ شود.} \\ B_\delta\big((a,b)\big) \cap \underbrace{D^c}_{D^c = \mathbf{R} - D} \neq \emptyset \to \text{این اشتراک نباید خودِ } (a,b) \text{ شود.} \end{cases}$$



مثال ۵. $D = \{(x,y) | x^۲ + y^۲ < ۱\}$ (دقت کنید که دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ جزوِ D نیست.)



A نقطه‌ی مرزی نیست.

B نقطه‌ی مرزی نیست.

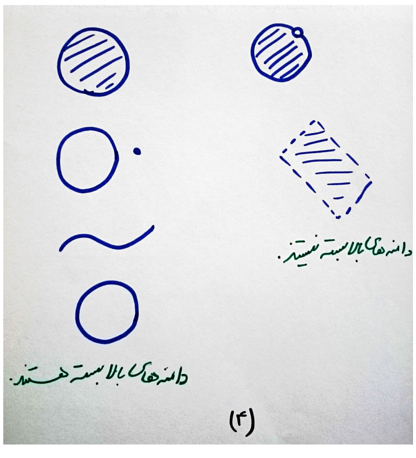
C نقطه‌ی مرزی است. پس مجموعه‌ی نقاط مرزی D مجموعه‌ی زیر است:

$$\{(x,y) | x^۲ + y^۲ = ۱\}$$

۳. **مجموعه‌ی بسته:**

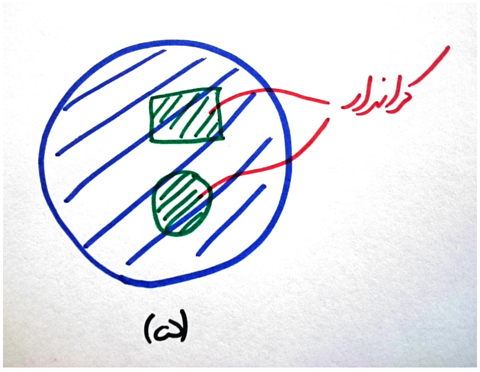
مجموعه‌ی $D \subseteq \mathbf{R}^۲$ را بسته می‌خوانیم هرگاه شامل تمام نقاط مرزی خود باشد.

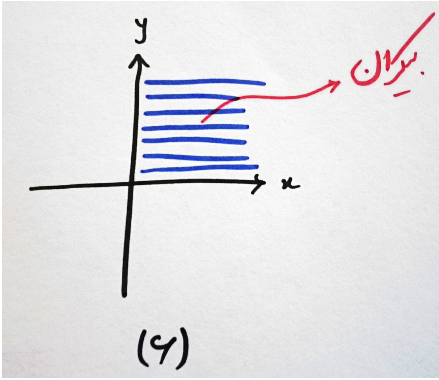
$$\{(x,y) | x^۲ + y^۲ \leqslant ۱\}$$



۴. **مجموعه‌ی کراندار**

مجموعه‌ی $D \subseteq \mathbf{R}^2$ را کراندار می‌خوانیم هرگاه نقطه‌ی $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ و شعاع δ موجود باشند به طوری که $D \subseteq B_\delta\big((a,b)\big)$





تعریف ۶. فرض کنید $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی (a,b) ماکزیمم مطلق دارد هرگاه

$$\forall (x,y) \in Dom(f) \quad f(x,y) \leqslant f(a,b)$$

توجه کنید که نیازی نیست که تابع در یک همسایگی (دیسک باز) از نقطه‌ای که در آن ماکزیمم یا مینی‌موم مطلق اتفاق می‌افتد، تعریف شده باشد. در واقع ممکن است که اکسترممهای مطلق روی مرز یک ناحیه رخ دهند. حال آماده‌ایم تا قضیه‌ای مشابه درس ریاضی ۱، برای اکسترممهای مطلق توابع دو متغیره بیان کنیم:

قضیه ۷. اگر $f(x,y)$ یک تابع پیوسته در یک مجموعه‌ی بسته و کراندار D باشد آنگاه f در D هم ماکزیمم و هم مینی‌موم مطلق دارد.

روش محاسبه‌ی اکسترمم‌های مطلق

۱. نقاط بحرانی تابع را بیابید.

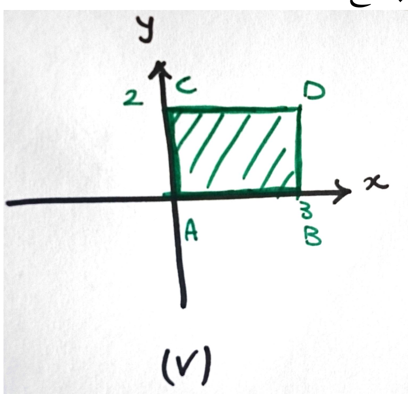
۲. مرز دامنه را مشخص کنید.

۳. مقادیر تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی مقایسه کنید.

مثال ۸. اکسترمم‌های مطلق تابع زیر را در دامنه‌ی مشخص شده بیابید.

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y \quad D = \{(x,y) | 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$$

پاسخ.



پاسخ سوال بالا را در جلسه‌ی بعدی خواهیم داد. □