پاسخ پرسش‌های آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۲ - ترم دوم ۹۷-۹۶

۱. ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و نقاط زینی تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$ را در صورت وجود تعیین کنید. (۱۰ نمره)

حل. ابتدا نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}^2$ را تعیین می‌کنیم. با توجه به مشتق‌پذیری f بر $\mathbb{R}^2$، این نقاط جواب‌های دستگاه $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ هستند.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=4x^3-4y=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4y^3-4x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^3=y \\ y^3=x \end{cases}$$

درنتیجه به معادله $y^9=y$ خواهیم رسید که جواب‌های آن عبارتند از $y=0$، $y=1$ و $y=-1$. به توجه به اینکه $x=y^3$، نقاط بحرانی تابع نقاط $p_1(0,0)$، $p_2(1,1)$ و $p_3(-1,-1)$ خواهند بود. اکنون از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2 \qquad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4 \qquad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2$$

	A	B	C	$D=AC-B^2$
$p_1(0,0)$	0	-4	0	$-16<0$
$p_2(1,1)$	$12>0$	-4	12	$144-16>0$
$p_3(-1,-1)$	$12>0$	-4	12	$144-16>0$

بنابر این نقطه p_1 یک نقطه زینی و نقاط p_2 و p_3 نقاط نظیر می‌نیمم نسبی برای f هستند.

---

۲. اکسترمم‌های مطلق تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=y^3-x^3$ را بر دایره $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ به دست آورید. (۱۰ نمره)

حل. با استفاده از روش لاگرانژ، اکسترمم‌های تابع $f(x,y)=y^3-x^3$ را تحت شرط $g(x,y)=x^2+y^2=1$ به دست

می‌آوریم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۳x^۲ = ۲\lambda x \\ ۳y^۲ = ۲\lambda y \\ x^۲ + y^۲ = ۱ \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات فوق نقاط $p_۱(۰,۱)$، $p_۲(۰,-۱)$، $p_۳(۱,۰)$، $p_۴(-۱,۰)$، $p_۵(\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ و $p_۶(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ به دست می‌آیند. با تشکیل مقدار f در ۶ نقطه فوق مشاهده می‌شود بیشترین مقدار f (با شرط $g(x,y)=۱$) برابر ۱ است که در نقاط $p_۱$ و $p_۴$ اخذ می‌شود و کمترین مقدار آن نیز برابر ۱− است که در نقاط $p_۲$ و $p_۳$ اتفاق می‌افتد.

---

۳. هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_۰^۸ \int_{\sqrt[۳]{y}}^۲ e^{x^۴}\, dxdy$. (۱۰ نمره)

ب) $\iint_D (۱+\frac{y}{x})\, dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی محصور به خطوط $y=x$، $y=۳x$ و خم‌های $xy=۱$ و $xy=۲$ در $\frac{۱}{۴}$ اول صفحه است. (۱۰ نمره)

حل. الف) با توجه به کران‌های انتگرال‌های مکرر، ناحیه D که انتگرال دوگانه بر آن بیان شده است به صورت زیر خواهد بود.

$$D: \begin{cases} ۰ \le y \le ۸ \\ \sqrt[۳]{y} \le x \le ۲ \end{cases}$$

در بیان فوق D به عنوان یک ناحیه ساده افقی بیان شده است. با بیان D به عنوان یک ناحیه ساده عمودی خواهیم داشت

$$D: \begin{cases} ۰ \le x \le ۲ \\ ۰ \le y \le x^۳ \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_۰^۸ \int_{\sqrt[۳]{y}}^۲ e^{x^۴}\, dx\, dy &= \iint_D e^{x^۴}\, dA = \int_۰^۲ \int_۰^{x^۳} e^{x^۴}\, dy\, dx \\ &= \int_۰^۲ x^۳ e^{x^۴}\, dx = \frac{۱}{۴}\int_۰^{۱۶} e^u\, du \qquad (u := x^۴ \;\Rightarrow\; du = ۴x^۳ dx) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}e^u\Big|_0^{16} = \frac{1}{4}(e^{16}-1)$$

ب) با توجه به بیان مسئله، ناحیه انتگرال‌گیری عبارت است از $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le xy\le 2\ ,\ 1\le \frac{y}{x}\le 3\}$. با استفاده از تغییر متغیرهای $u := xy$ و $v := \frac{y}{x}$ خواهیم داشت $x = x(u,v) = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}$ و $y = y(u,v) = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$ و از آنجا

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2v}$$

همچنین تصویر ناحیه D در صفحه uv به صورت $D^* = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le u\le 2\ ,\ 1\le v\le 3\}$ خواهد بود. در نتیجه با استفاده از فرمول تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

$$\begin{aligned} \iint_D (1+\frac{y}{x})\,dxdy &= \int_1^2\int_1^3 (1+v)|\frac{1}{2v}|\,dv\,du \\ &= \int_1^3 \frac{1+v}{2v}\,dv = \frac{1}{2}(\ln v + v)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(2+\ln 3) \end{aligned}$$

---

۴. فرض کنید منحنی C مرز مثلث به رئوس $(0,0),(1,1),(0,1)$ باشد که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده شود. مطلوب است محاسبه‌ی $\oint_C \sqrt{1+x^2}\,dx + \tan^{-1}x\,dy$. (۱۰ نمره)

حل. فرض کنیم D ناحیه محصور توسط منحنی C باشد. در این صورت $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1\ ,\ x\le y\le 1\}$. با استفاده از قضیه گرین،

$$\begin{aligned} \oint_C \sqrt{1+x^2}dx + \tan^{-1}x\,dy &= \oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})xdy \\ &= \iint_D \frac{1}{1+x^2}\,dxdy = \int_0^1\int_x^1 \frac{1}{1+x^2}\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

---

۵. فرض کنید C قسمتی از خم به معادله‌ی برداری $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ از نقطه‌ی $A(0,0,0)$ به $B(1,1,1)$ باشد. مطلوب

است محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ که در آن $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz)\mathbf{i}+(xz)\mathbf{j}+(xy)\mathbf{k}$.   (۱۰ نمره)

حل.

$$\begin{cases} x=x(t)=t \\ y=y(t)=t^{۲} \\ z=z(t)=t^{۳} \end{cases} \quad t\in[۰,۱], \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} dx=dt \\ dy=۲tdt \\ dz=۳t^{۲}dt \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_C yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz &= \int_{۰}^{۱} t^{۵}dt+۲t^{۵}dt+۳t^{۵}dt \\ &= \int_{۰}^{۱} ۶t^{۵}\,dt = t^{۶}\big|_{۰}^{۱}=۱ \end{aligned}$$

---

۶. مطلوب است محاسبه $\iint_S z^{۲}\,d\sigma$ که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ است که بین صفحات $z=۱$ و $z=۳$ قرار دارد.   (۱۰ نمره)

حل. با توجه به توصیف مسئله، رویه S به صورت زیر قابل بیان خواهد بود.

$$S: z=g(x,y)=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \qquad (x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}\mid ۱\le\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\le ۳\}=\{(r,\theta)\mid ۰\le\theta\le ۲\pi\,,\,۱\le r\le ۳\}$$

به این ترتیب،

$$d\sigma=\sqrt{۱+(\frac{\partial g}{\partial x})^{۲}+(\frac{\partial g}{\partial y})^{۲}}dx\,dy=\sqrt{۱+\frac{x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}+\frac{y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}}dx\,dy=\sqrt{۲}dx\,dy$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_S z^{۲}\,d\sigma=\iint_D (x^{۲}+y^{۲})\sqrt{۲}\,dx\,dy &= \sqrt{۲}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۱}^{۳} r^{۳}\,dr\,d\theta \\ &= ۲\pi\sqrt{۲}(\frac{۱}{۴}r^{۴})\big|_{۱}^{۳}=\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}(۳^{۴}-۱) \end{aligned}$$

۷. فرض کنید T ناحیه‌ی محدود بین کره‌های $x^۲+y^۲+z^۲=۲z$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۴z$ و داخل مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$، S رویه‌ی محصور کننده‌ی ناحیه‌ی T و $\mathbf{n}$ قائم یکه بر S رو به سمت بیرون باشد.

الف) حجم ناحیه‌ی T را به دست آورید. (۱۰ نمره)

ب) مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+\sin(yz))\mathbf{i}+(y+e^{xz})\mathbf{j}+(z-\frac{x}{۲+x^۲})\mathbf{k}$. (۵ نمره)

حل. الف) ناحیه T در سیستم مختصات کروی به صورت زیر توصیف می‌شود.

$$T=\{(\rho,\phi,\theta)\mid ۰\leq\theta\leq ۲\pi\ ,\ ۰\leq\phi\leq\frac{\pi}{۴}\ ,\ ۲\cos\phi\leq\rho\leq ۴\cos\phi\}$$

به این ترتیب با استفاده از تغییر متغیر کروی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dV=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۲\cos\phi}^{۴\cos\phi}\rho^۲\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\ &= \frac{۲\pi}{۳}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\rho^۳\Big|_{۲\cos\phi}^{۴\cos\phi}\sin\phi\,d\phi \\ &= \frac{۲\pi}{۳}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} ۵۶\cos^۳\phi\sin\phi\,d\phi=\frac{۲\pi}{۳}(-۱۴\cos^۴\phi)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}=۷\pi \end{aligned}$$

ب) با استفاده از قضیه دیورژانس داریم

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma=\iiint_T div\mathbf{F}\,dV$$

اما $div\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=۳$. در نتیجه با استفاده از قسمت (الف)،

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma=\iiint ۳\,dV=۳V=۲۱\pi$$

۸. فرض کنید C خم حاصل از برخورد صفحه‌ی $z = y$ و استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ باشد. مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C (۲x + y)dx + (x + y + z)dy + (z - x)dz$ که در آن حرکت بر C با توجه به قائم رو به بالای صفحه، درجهت مثبت است. (۱۵ نمره)

حل. فرض کنیم S قسمتی از صفحه $z = y$ محصور در استوانه $x^۲ + y^۲ = ۱$ باشد. با توجه به بیان مسئله، بردار قائم یکه بر S عبارتست از $\mathbf{n} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(-\mathbf{j} + \mathbf{k})$. بنابر قضیه استوکس

$$I := \int_C (۲x + y)\, dx + (x + y + z)\, dy + (z - x)\, dz = \iint_S (curl\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$$

$$curl\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ۲x + y & x + y + z & z - x \end{pmatrix} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

در نتیجه $curl\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و از آنجا

$$I = \iint_S curl\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S -\frac{۱}{\sqrt{۲}}\, d\sigma = -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \iint_S d\sigma$$

برای مجاسبه انتگرال اخیر توجه می‌کنیم رویه S دارای معادله‌ای به صورت $z = g(x, y) = y$ با

$$(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \mid x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$$

است. در نتیجه

$$d\sigma = \sqrt{۱ + (\frac{\partial g}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial g}{\partial y})^۲} dx\, dy = \sqrt{۲} dx\, dy$$

و نهایتا

$$I = -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \iint_S d\sigma = -\iint_D dx\, dy = -\pi$$
