۱۲ جلسه‌ی سیزدهم، شنبه

در [۷] جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x_\cdot, y_\cdot, z_\cdot)$ به صورت زیر است:

$$z - z_\cdot = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\cdot, y_\cdot)(x - x_\cdot) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\cdot, y_\cdot)(y - y_\cdot)$$

مثال ۱۲۷. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر سهمی‌وار بیضوی $z = x^۲ + y^۲$ را در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۲)$ بنویسید.

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۱, ۱) = ۲x|_{x=۱} = ۲$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(۱, ۱) = ۲y|_{y=۱} = ۲$$

$$z - ۲ = ۲(x - ۱) + ۲(y - ۱)$$

□

توجه ۱۲۸. صفحه‌ی به معادله‌ی $z - z_\cdot = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\cdot, y_\cdot)(x - x_\cdot) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\cdot, y_\cdot)(y - y_\cdot)$ درواقع **تقریبی خطی** برای تابع $z = f(x,y)$ حول نقطه‌ی $(x_\cdot, y_\cdot)$ است. منظور از یک تقریب خطی، تابعی است به صورت $ax + by$. در واقع هدفمان در بحث دیفرانسیل‌پذیری این است که تقریبی به صورت $ax + by$ برای یک تابعِ $f(x,y)$ پیدا کنیم.

سوال ۱۲۹. آیا تقریب خطی بالا همواره تقریب **مناسبی** برای مقادیر تابع است؟

مثال ۱۳۰.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^۲ + y^۲} & (x,y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰, ۰) \end{cases}$$

تمرین ۱۳۱. نشان دهید که f_x و f_y در نقطه ی $(۰, ۰)$ پیوسته نیستند و

$$f_x(۰, ۰) = ۰$$

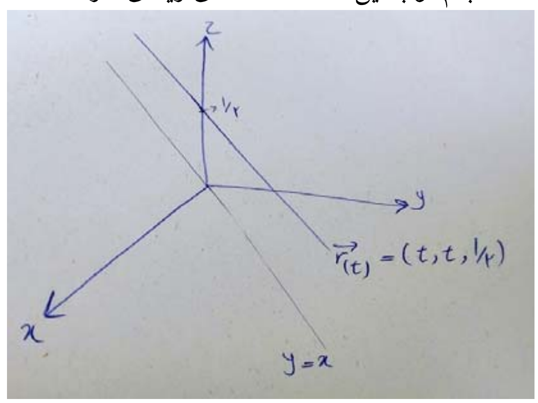
[۷] زحمت تایپ جزوه‌ی این جلسه را خانم شیرجزی کشیده‌اند.

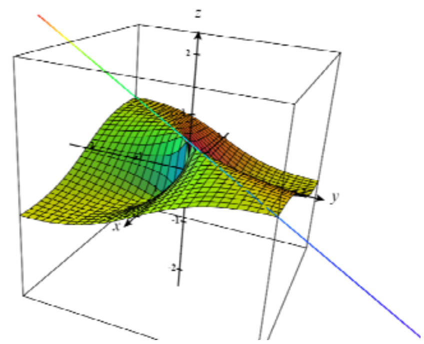
$$f_y(۰,۰) = ۰$$

پس معادله‌ی (صفحه‌ی مماس) بالا به صورت زیر در می آید:

$$z = ۰.$$

صفحه‌ی بالا تقریب مناسبی برای مقادیر تابع نیست؛ زیرا روی روی خط $x = y$ مقدار تابع برابر است با $\frac{۱}{۲}$ و با این صفحه فاصله‌ی زیادی دارد.





در واقع **صفحه‌ی مماس در صورتی تقریبی مناسب برای تابع است، که تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد.**

تعریف ۱۳۲ (غیررسمی). اگر تقریب خطی یاد شده تقریب مناسبی برای مقادیر تابع حول نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ باشد، می‌گوییم تابع مورد نظر در نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ دیفرانسیل‌پذیر است.

در ادامه، به بررسی دقیق این گفته می‌پردازیم.

۱.۱۲ دیفرانسیل پذیری، مقدمه

پیش از آنکه دیفرانسیل‌پذیریِ توابع دو متغیره را توضیح دهیم، مفهوم دیفرانسیل‌پذیریِ توابع تک‌متغیره را مرور می‌کنیم. فرض کنید

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

یک تابع تک‌متغیره باشد. در ریاضی ۱ دیدیم که حد زیر (در صورت وجود) مشتق تابع را به دست می‌دهد:

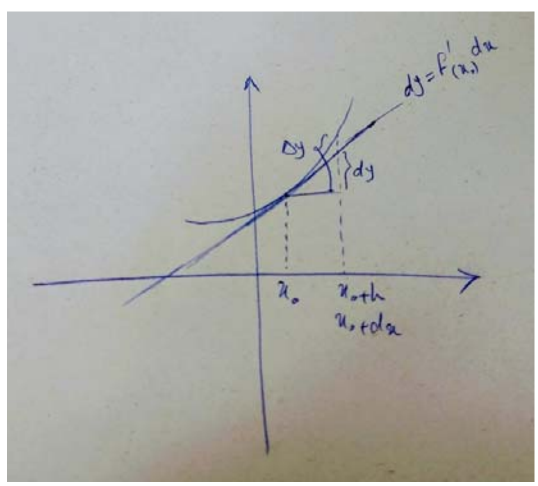
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

همچنین گفتیم که اگر $f'(x_0)$ موجود باشد آنگاه $dy = f'(x_0)dx$ **دیفرانسیل** تابع نامیده می شود. گفتیم که dy در واقع تقریبیِ برای Δy است؛ پس

$$y - y_0 \approx dy = f'(x_0)(x - x_0)$$

توجه کنید که معادله‌ی خط مماس بر تابع در نقطه‌ی x_0 به صورت زیر است (به شباهت دیفرانسیل و معادله‌ی این خط مماس توجه کنید).

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



تعریف دقیق دیفرانسیل‌پذیری برای توابع تک متغیره بدین صورت است: تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در

نقطه‌ی $x_\circ \in D_f$ دیفرانسیل‌پذیر می‌خوانیم هرگاه $\alpha \in \mathbb{R}$ به گونه‌ای موجود باشد که:

$$\lim_{h\to \circ} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ) - \alpha h}{h} = \circ$$

در واقع وقتی تابع دیفرانسیل‌پذیر است، تابع خطیِ αh شبیه به تابع $f(x_\circ + h) - f(x_\circ)$ می‌شود.
بیابید تابع صورت را $\epsilon(h)$ بخوانیم؛ داریم

$$f(x_\circ + h) - f(x_\circ) - \alpha h = h\epsilon(h)$$

پس

$$f(x_\circ + h) - f(x_\circ) = h\epsilon(h) + \alpha h$$

دقت کنید که [8]

$$\lim_{h\to \circ} \epsilon(h) = \circ$$

اگر f دیفرانسیل پذیر باشد،می توان ثابت کرد که $\alpha = f'(x_\circ)$. پس

$$\lim_{h\to \circ} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)h}{h} = \circ$$

۲.۱۲ تعریف دقیق دیفرانسیل پذیری(برای توابع دو متغیره)

حال می‌خواهیم مفهوم دیفرانسیل‌پذیری را به توابع دو متغیره تعمیم بدهیم. در بالا گفتیم که تابعِ αh تقریبی برای $f(x_\circ + h) - f(x_\circ)$ است و دیفرانسیل به صورتِ αdx است. در حالت دو متغیره، تقریب خطی ما برای تابع به صورتِ $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$ است.
تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ دیفرانسیل پذیر می خوانیم هرگاه $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ چنان موجود باشند که

$$\star \quad \lim_{(h_1,h_2)\to(\circ,\circ)} \frac{f(x_\circ + h_1, y_\circ + h_2) - f(x_\circ, y_\circ) - \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \circ$$

[8] معادله‌ی بالا در واقع قضیه‌ی نمو برای توابع تک‌متغیره است.

مطابق حالت تک متغیره قرار دهید:

$$\epsilon(h_۱, h_۱) = \frac{f(x_. + h_۱, y_. + h_۲) - f(x_., y_.) - \alpha_۱ h_۱ - \alpha_۲ h_۲}{\sqrt{h_۱^۲ + h_۲^۲}}$$

پس تابعِ f دیفرانسیل پذیر است هرگاه $\alpha_۱, \alpha_۲, \epsilon(h_۱, h_۲)$ موجود باشند به طوری که

$$\Rightarrow \epsilon(h_۱, h_۲)\sqrt{h_۱^۲ + h_۲^۲} + f(x_., y_.) + \alpha_۱ h_۱ + \alpha_۲ h_۲ = f(x_. + h_۱, y_. + h_۲)$$

و $\lim_{(h_۱,h_۲)\to(۰,۰)} \epsilon(h_۱, h_۲) = ۰$

توجه ۱۳۳. اگر f تابعی دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$(\alpha_۱, \alpha_۲) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_., y_.), \frac{\partial f}{\partial y}(x_., y_.))$$

و می‌نویسیم:

$$f'(x_., y_.) = (\alpha_۱, \alpha_۲).$$

برای اثبات این نکته کافیست حد اصلیِ بالا $(\star)$ را روی مسیرهای $(h, ۰)$ و $(۰, h)$ محاسبه کنیم.

توجه ۱۳۴. تنها وجود $\frac{\partial f}{\partial x}(x_., y_.)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x_., y_.)$ باعث دیفرانسیل پذیری نمی‌شود و باید حد نوشته شده در تعریف اصلی، صفر شود.

توجه ۱۳۵. اگر f در نقطه ی $(x_., y_.)$ دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه در این نقطه پیوسته است.

$$\lim_{(h_۱,h_۲)\to(۰,۰)} f(x_. + h_۱, y_. + h_۲) = f(x_., y_.)$$

اثبات به عهده ی شما (از حد نوشته شده در تعریف $\star$ کمک بگیرید)

مثال ۱۳۶.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۲xy}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

در این مثال f_x و f_y در $(۰,۰)$ موجودند، ولی تابع در این نقطه پیوسته نیست، پس در این نقطه دیفرانسیل پذیر نیست.

مثال ۱۳۷. نشان دهید که تابع زیر در $(\cdot,\cdot)$ دیفرانسیل پذیراست.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(\cdot,\cdot)\\ \cdot \quad (x,y)=(\cdot,\cdot)\end{cases}$$

پاسخ. مشتقات جزئی:

$$f_x(\cdot,\cdot)=\lim_{h_۱\to\cdot}\frac{f(\cdot+h_۱,\cdot)-f(\cdot,\cdot)}{h_۱}=\cdot$$

$$f_y(\cdot,\cdot)=\lim_{h_۲\to\cdot}\frac{f(\cdot,\cdot+h_۲)-f(\cdot,\cdot)}{h_۲}=\cdot$$

حد دیفرانسیل پذیری:

$$\lim_{h_۱,h_۲\to\cdot}\frac{f(\cdot+h_۱,\cdot+h_۲)-f(\cdot,\cdot)-\alpha_۱h_۱-\alpha_۲h_۲}{\sqrt{h_۱^۲+h_۲^۲}}$$

توجه ۱۳۸. اگر تابع f دیفرانسیل پذیر باشد، داریم:

$$\alpha_۱=f_x$$

$$\alpha_۲=f_y$$

$$\lim_{h_۱,h_۲\to\cdot}\frac{f(x_\cdot+h_۱,y_\cdot+h_۲)-f(x_\cdot,y_\cdot)-f_x(x_\cdot,y_\cdot)h_۱-f_y(x_\cdot,y_\cdot)h_۲}{\sqrt{h_۱^۲+h_۲^۲}}=\cdot$$

پس در مورد تابع بالا کافی است ثابت کنیم که

$$\lim_{h_۱,h_۲\to\cdot}\frac{f(\cdot+h_۱,\cdot+h_۲)-f(\cdot,\cdot)-(\cdot)h_۱-(\cdot)h_۲}{\sqrt{h_۱^۲+h_۲^۲}}=\cdot$$

یعنی باید ثابت کنیم که

$$\lim_{h_۱,h_۲\to\cdot}\frac{h_۱h_۲(h_۱^۲-h_۲^۲)}{(h_۱^۲+h_۲^۲)^{\frac{۳}{۲}}}=\cdot$$

باید نشان داد که

$$\forall\epsilon>\cdot\,\exists\delta>\cdot\,\forall(h_۱,h_۲)$$

$$\left(0 < \sqrt{h_1^2+h_2^2} < \delta \to \left|\frac{h_1h_2(h_1^2-h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right| < \epsilon\right)$$

چرک نویس:

با توجه به $|h_1^2-h_2^2| \le |h_1^2+h_2^2|$ داریم:

$$\frac{|h_1h_2||(h_1^2-h_2^2)|}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}|h_1^2+h_2^2|}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}(h_1^2+h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

با توجه به محاسبات بالا، برای هر $\epsilon > 0$ اگر $\delta = \epsilon$ آنگاه اگر

$$\sqrt{h_1^2+h_2^2} < \delta$$

آنگاه

$$\frac{h_1h_2(h_1^2-h_2^2)}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)^3}} \le \sqrt{h_1^2+h_2^2} < \delta = \epsilon$$

□

قضیه ۱۳۹ (قضیه‌ی نِمُوْ). [9]

تابع $f(x,y)$ در نقطه ی (x_0,y_0) دیفرانسیل پذیر است اگر و تنها اگر توابع $\epsilon_1(\Delta x,\Delta y)$ و $\epsilon_2(\Delta x,\Delta y)$ موجود باشند بطوری که در یک همسایگی نقطه‌ی (x_0,y_0) بتوان نوشت:

$$\underbrace{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}_{=\Delta z} =$$
$$f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \epsilon_1(\Delta x,\Delta y) + \epsilon_2(\Delta x,\Delta y)$$

و

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1(\Delta x,\Delta y) = 0$$
$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2(\Delta x,\Delta y) = 0$$

اثبات به عهده ی شما.

[9] Increment

برای بررسی دیفرانسیل‌پذیری لزوماً از تعاریف استفاده نمی‌کنیم. در قضیه‌ی زیر شرطی کافی برای دیفرانسیل‌پذیر بودن بیان کرده‌ایم:

قضیه ۱۴۰. اگر f_x و f_y هردو در یک همسایگی نقطه‌ی $(x_., y_.)$ پیوسته باشند، آنگاه f در آن نقطه دیفرانسیل‌پذیر است.

مثال ۱۴۱. نشان دهید که تابع $f(x,y) = xe^{xy}$ در نقطه ی $(۱,۰)$ دیفرانسیل‌پذیر است و یک تقریب خطی برای این تابع در آن همسایگی بیابید.

پاسخ.

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$f_y(x,y) = x^۲e^{xy}$$

توابع بالا در تمام نقاط از جمله نقطه‌ی $(۱,۰)$ پیوسته اند. پس تابع مورد نظر دیفرانسیل پذیر است.
تقریب خطی:

$$\Delta z \approx f_x(۱,۰)\Delta x - f_y(۱,۰)\Delta y$$

$$f_x(۱,۰) = ۱ + ۰ = ۱$$

$$f_y(۱,۰) = ۱$$

$$\Delta z \approx \Delta x + \Delta y \Rightarrow f(۱ + \Delta x, ۰ + \Delta y) \approx f(۱,۰) + \Delta x + \Delta y = ۱ + \Delta x + \Delta y$$

پس می‌توان نوشت:

$$f(x,y) \approx ۱ + (x - ۱) + (y) = x + y$$

□

تعریف ۱۴۲. اگر f دیفرانسیل‌پذیر باشد، **دیفرانسیل کُلّی** آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

بنا به آنچه درباره‌ی معادله‌ی صفحه‌ی مماس گفتیم، دیفرانسیل کلی در واقع میزان تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد: