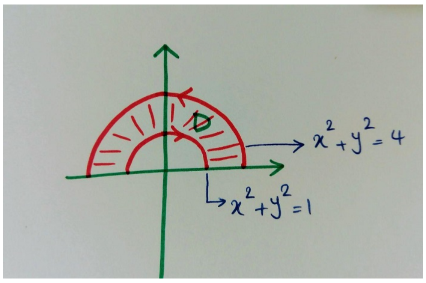
۱ جلسه‌ی سی و هشتم، دوشنبه (۹۷/۲/۳۱)

مثال ۱. $\oint_c y^2dx+3xydy$ را محاسبه کنید که c مرز ناحیه ی D و در جهت خلاف عقربه های ساعت است.



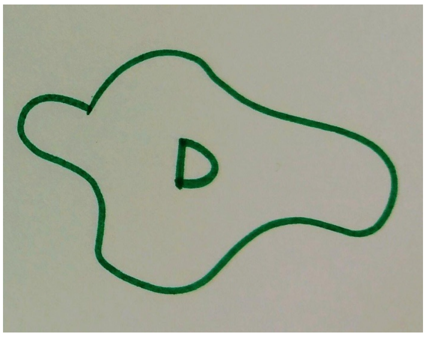
پاسخ. بنا به قضیه ی گرین:

$$\oint_c \underbrace{y^2}_{P}dx+\underbrace{3xy}_{Q}dy=\iint_D \underbrace{(3y-2y)}_{y}dA=\int_0^\pi\int_1^2 r(\sin\theta\theta)rdrd\theta=\int_0^\pi \sin\theta\times\int_1^2 r^2dr=\ldots$$

□

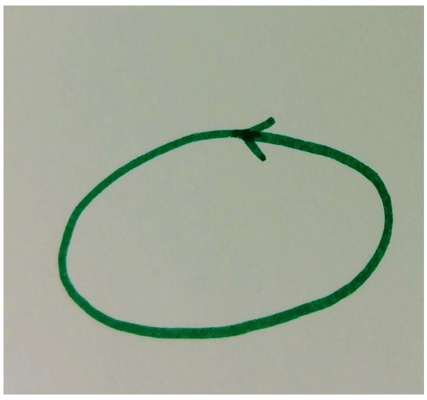
۱.۱ استفاده‌ی برعکس از قضیه‌ی گرین

محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی D :



$$\iint_D 1dA=\iint_D(Q_x-P_y)dA=\oint_c xdy=-\oint_c ydx=\oint_c \underbrace{\frac{1}{2}y}_{P}\,dx+\underbrace{\frac{1}{2}x}_{Q}\,dy$$

مثال ۲. مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را محاسبه کنید.



پاسخ.

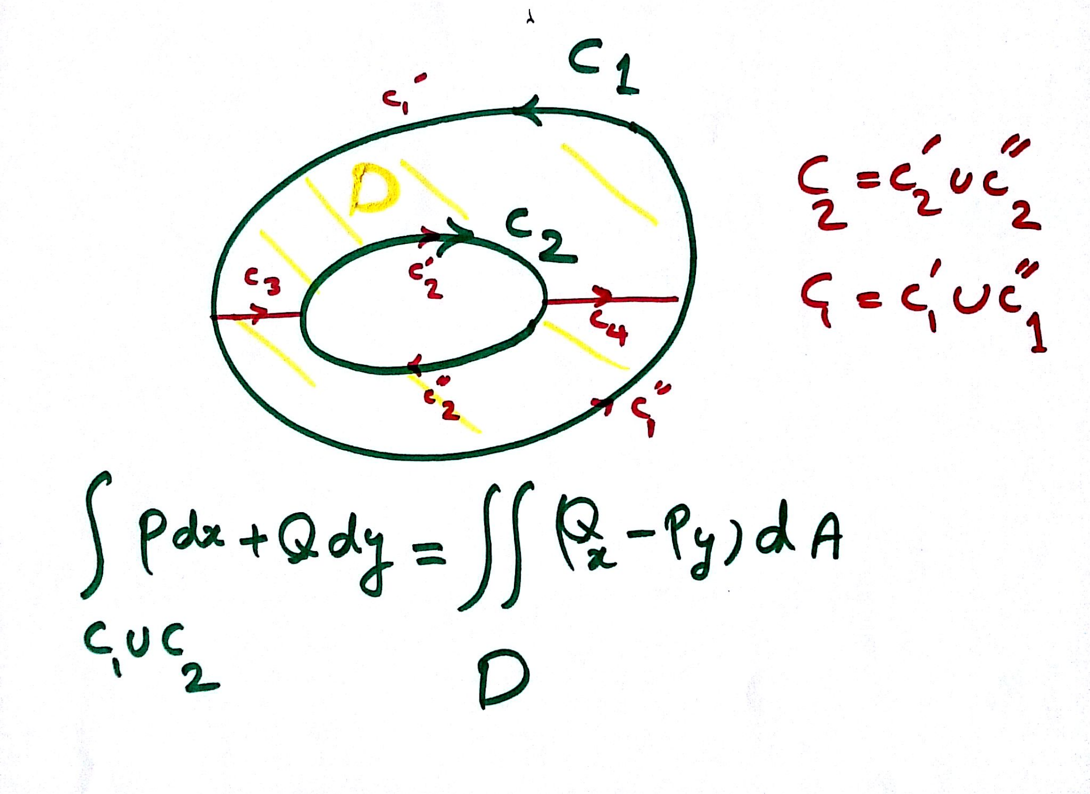
$$\iint_D ۱dA = \frac{۱}{۲}\oint_c -ydx + xdy$$

$$c : \overrightarrow{r}(t) : (a\cos\theta, b\sin\theta) \qquad ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$$

$$\iint_D ۱dA = \frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲\pi} (b\sin\theta)a\sin\theta + a\cos\theta b\cos\theta)d\theta = \frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲\pi} abd\theta = \frac{۱}{۲}ab \times ۲\pi = \pi ab$$

□

از قضیه‌ی گرین می‌توان برای محاسبه‌ی انتگرال روی نواحی حفره‌دار نیز به صورت زیر استفاده کرد:



اثبات.

$$D_۱ \bigcup D_۲ = D \quad , \quad c'_۱ \bigcup c"_۱ = c_۱ \quad , \quad c'_۲ \bigcup c"_۲ = c_۲$$

$$D : \oint_{c_۱ \bigcup c_۲} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dA$$

$$D_۱ : \oint_{c'_۱ \bigcup c'_۲ \bigcup c_۳ \bigcup c_۴} Pdx + Qdy = \iint_{D_۱} (Q_x - P_y)dA$$

$$D_۲ : \oint_{c"_۱ \bigcup c"_۲ \bigcup (-c_۳) \bigcup (-c_۴)} Pdx + Qdy = \iint_{D_۲} (Q_x - P_y)dA$$

با جمع دو طرف تساوی‌های بالا:

$$\iint_D (Q_x - P_y)dA = \oint_c Pdx + Qdy$$

□

۲.۱ انتگرالهای روی رویه

تا کنون با انتگرالهای روی خم آشنا شده‌ایم و دیدیم که دو نوع انتگرالگیری روی خم داریم:

۱) انتگرال توابع عددی روی خم

$$\int_c f ds = \int f(r(t))r'(t)dt$$

۲) انتگرال توابع برداری روی خم

$$\int_c F.T ds = \int_c F.r'(t)dt = \int Pdx + Qdy + Rdz$$

همچنین بررسی کردیم که

$$\int_c f ds = \int_{-c} f ds$$

$$\int_c F.dr = -\int_{-c} F.dr$$

در ادامه‌ی درس قرار است با دو نوع انتگرالگیری روی رویه‌ها آشنا شویم:

۱) انتگرالگیری از توابع عددی روی رویه ها

۲) انتگرالگیری از توابع برداری روی رویه ها

پیش از آن لازم است با رویه‌های پارامتری آشنا شویم:

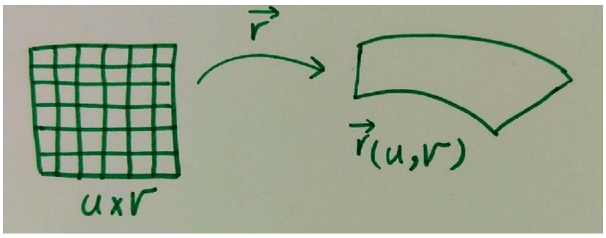
۱.۲.۱ رویه های پارامتری

یادآوری ۳. گفتیم که خمها را می‌توان به صورت زیر پارامتر بندی کرد:

$$c : r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

برای پارامتربندی رویه‌ها به دو متغیر نیازمندیم. یک رویه‌ی پارامتری توسط معادله‌ای برداری مانند معادله‌ی زیر داده می‌شود:

$$\overrightarrow{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \qquad a \leqslant u \leqslant b \quad , \quad c \leqslant v \leqslant d$$



مثال ۴. معادله‌ی پارامتری رویه‌ی $z = f(x, y)$ را بنویسید.(فرض کنید $a \leqslant x \leqslant b$ و $c \leqslant y \leqslant d$) رویه‌ی یادشده را می‌توان بدین صورت پارامتربندی کرد:

$$\overrightarrow{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad a \leqslant x \leqslant b \quad c \leqslant y \leqslant d$$

مثال ۵. کره ای به شعاع ۱ را پارامتر بندی کنید.

پاسخ.

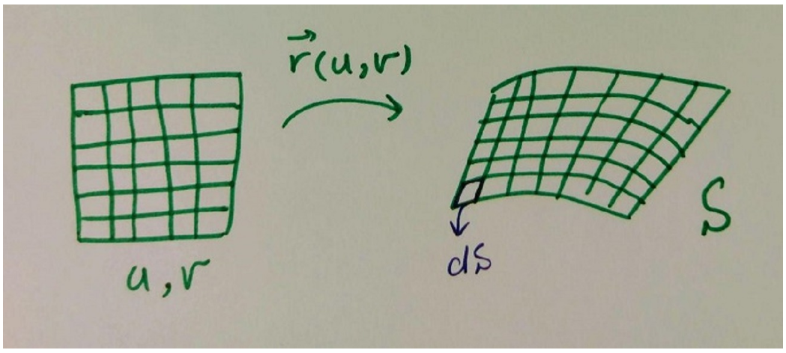
$$\rho = ۱$$

$$\overrightarrow{r}(\varphi, \theta) = (\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi) = (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)$$

$$۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi \quad , \quad ۰ \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

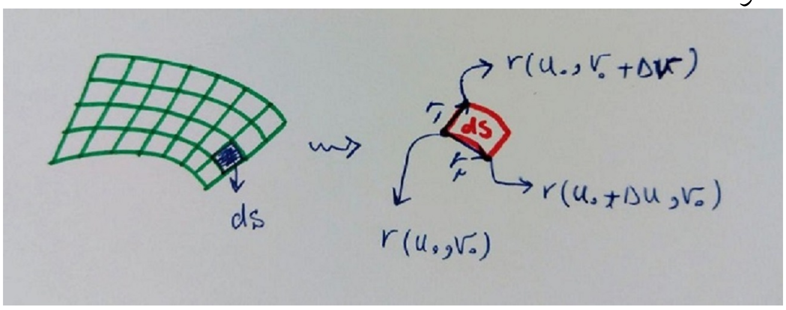
□

۲.۲.۱ انتگرال توابع عددی روی رویه ها



فرض کنید $f(x, y, z) : R^۳ \to R$ یک تابع باشد.

هدف: تعریف $\iint_S f(x, y, z) dS$ دقت کنید که از حالت بزرگ حرف S استفاده کرده‌ایم تا با انتگرال روی خمها اشتباه گرفته نشود.



$$\overrightarrow{r_۱} : \overrightarrow{r}(u_۰, v_۰ + \Delta v) - \overrightarrow{r}(u_۰, v_۰) \approx \Delta v r_v$$

$$\overrightarrow{r_۲} : \overrightarrow{r}(u_۰ + \Delta u, v_۰) - \overrightarrow{r}(u_۰, v_۰) \approx \Delta u r_u$$

$$dS = |r_u \times r_v| du dv$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{u, v \text{ دامنه‌ی متغیرهای}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |r_u \times r_v| du dv$$

نتیجه ۶. مساحت رویه ی S برابر است با:

$$\iint_S dS = \iint_D |r_u \times r_v| du dv$$

مثال ۷. حاصل $\iint_S x^۲ dS$ را محاسبه کنید که در آن S کره ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است.

پاسخ. نحست باید کره‌ی مورد نظر را پارامتربندی کنیم.

$$r(\theta,\varphi)=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)\qquad ۰\leqslant\theta\leqslant ۲\pi\quad,\quad ۰\leqslant\varphi\leqslant\pi$$

$$dS=|r_\varphi\times r_\theta|d\varphi d\theta$$

$$r_\varphi(\theta,\varphi)=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,-\sin\varphi)$$

$$r_\theta(\theta,\varphi)=(-\sin\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\theta,۰)$$

$$r_\varphi\times r_\theta=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & ۰\end{vmatrix}$$

$$=\overrightarrow{i}(+\sin^۲\varphi\cos\theta)-\overrightarrow{j}(-\sin^۲\varphi\sin\theta)+\overrightarrow{k}\underbrace{(\sin\varphi\cos\varphi\cos^۲\theta+\cos\varphi\sin\varphi\sin^۲\theta)}_{\cos\varphi\sin\varphi}$$

$$|r_\varphi\times r_\theta|=\sqrt{\sin^۴\varphi\cos^۲\theta+\sin^۴\varphi\sin^۲\theta+\cos^۲\varphi\sin^۲\varphi}=$$

$$\sqrt{\sin^۴\varphi\underbrace{(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta)}_{۱}+\cos^۲\varphi\sin^۲\varphi}=\sqrt{\sin^۲\varphi(\sin^۲\varphi+\cos^۲\varphi)}=\sin\varphi$$

$$\Rightarrow\iint_S x^۲dS=\int_۰^\pi\int_۰^{۲\pi}(\sin\varphi\cos\theta)^۲\sin\varphi d\theta d\varphi=\underbrace{\int_۰^\pi\sin^۳\varphi d\varphi}_{A}\times\underbrace{\int_۰^{۲\pi}\cos^۲\theta d\theta}_{B}$$

$$A=\int\sin^۲\varphi(\sin\varphi)d\varphi=\int\underbrace{(۱-\cos^۲\varphi)}_{۱-u^۲}\underbrace{(\sin\varphi)d\varphi}_{du}=\ldots$$

$$B=\int\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}d\theta=\ldots$$

$\square$

تمرین ۸. مساحت کره‌ی واحد را محاسبه کنید.

فرض کنید رویه‌ی مورد نظر دارای معادله‌ی صریح $z=f(x,y)$ باشد. آنگاه داریم:

$$r(x,y)=(x,y,f(x,y))$$

$$r_x(x,y)=(۱,۰,f_x)\qquad r_y(x,y)=(۰,۱,f_y)$$

$$r_x\times r_y=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۱ & ۰ & f_x\\ ۰ & ۱ & f_y\end{vmatrix}=i(-f_x)-j(f_y)+k(۱)=(-f_x,-f_y,۱)$$

$$dS=\underbrace{\sqrt{۱+f_x^۲+f_y^۲}}_{\text{اندازه‌ی بردار گرادیان}}dxdy$$

مثال ۹. $\iint_S ydS$ را حساب کنید که در آن S رویه ی

$$z = x + y^۲ \qquad ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \quad , ۰ \leqslant y \leqslant ۲$$

باشد.

پاسخ.

$$dS = \sqrt{۱ + (۱)^۲ + (۲y)^۲}dxdy$$

$$\iint_S ydS = \int_۰^۲ \int_۰^۱ y\sqrt{۲ + ۴y^۲}dxdy = \int_۰^۲ y\sqrt{\underbrace{۲ + ۴y^۲}_{u}}dy = \int \frac{\sqrt{u}}{۸}du = \frac{۲}{۳}\frac{u^{\frac{۳}{۲}}}{۸}|_۰^۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۱۲}$$

$\square$

از خانم شیرجزی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.