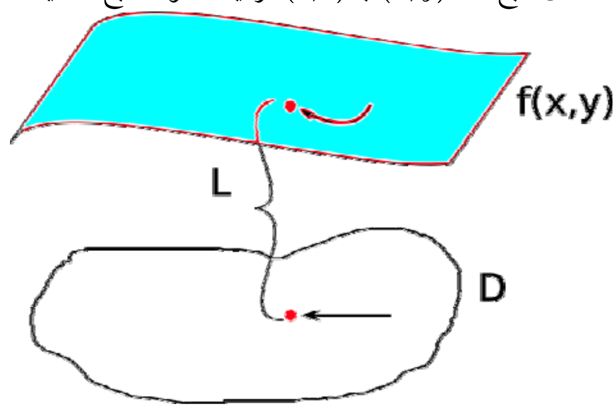
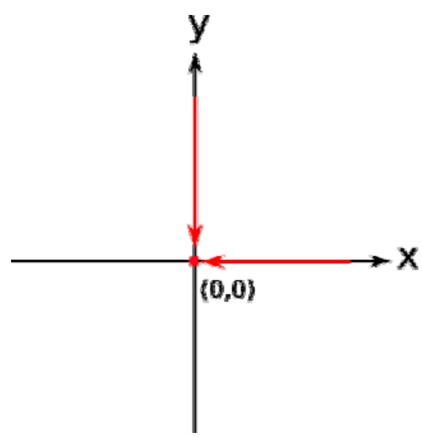
۸ جلسه‌ی هشتم، دوشنبه

توجه ۸۷. شرط لازم برای وجود حد تابع $f(x,y)$ در نقطه‌ی (a,b) این است که از هر مسیری (در دامنه‌ی تابع) که (x,y) به (a,b) نزدیک شود، تابع حد یکسانی داشته باشد.



به بیان دیگر اگر دو مسیر به سمت (a,b) پیدا شوند که تابع روی آندو حدهای مختلف داشته باشد، آنگاه حد تابع موجود نیست.

مثال ۸۸. نشان دهید که تابع $\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$ در هر نقطه‌ی $(۰,۰)$ حد ندارد.



پاسخ.

$$f(x,y)=\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$$

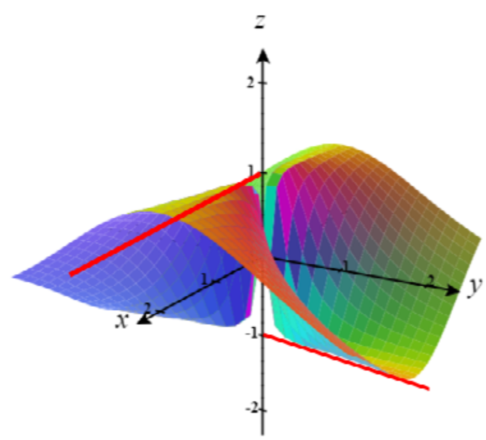
اگر روی نقاط $(x,۰)$ یعنی روی خط $y=۰$ ، نقطه‌ی (x,y) را به $(۰,۰)$ میل دهیم، داریم:

$$f(x,۰)=۱$$

$$\lim_{x\to ۰} f(x,۰) = ۱$$

اگر روی نقاط $(۰, y)$ یعنی روی خط $x = ۰$ ، نقطه‌ی (x, y) به $(۰, ۰)$ میل کند، داریم:

$$f(۰, y) = -۱$$

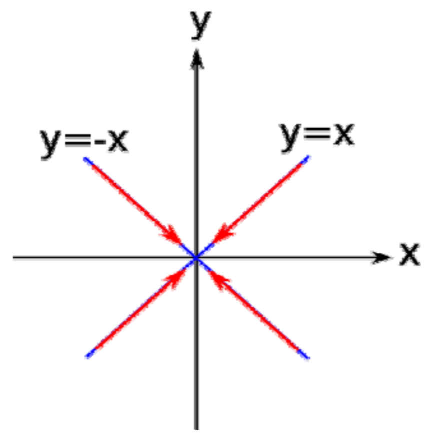


از آنجا که روی دو مسیر متفاوت به دو حد متفاوت رسیده‌ایم، تابع f حد ندارد (تصویر بالا را ببینید) □

مثال ۸۹. نشان دهید که تابع $f(x,y) = \frac{xy}{x^۲+y^۲}$ در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ حد ندارد.

پاسخ.

$$y = x \Rightarrow \frac{x^۲}{۲x^۲} = \frac{۱}{۲}$$
$$y = -x \Rightarrow \frac{-x^۲}{۲x^۲} = -\frac{۱}{۲}$$



از آنجا که روی دو مسیر متفاوت به دو حد متفاوت رسیده‌ایم، تابع f در $(۰, ۰)$ حد ندارد. □

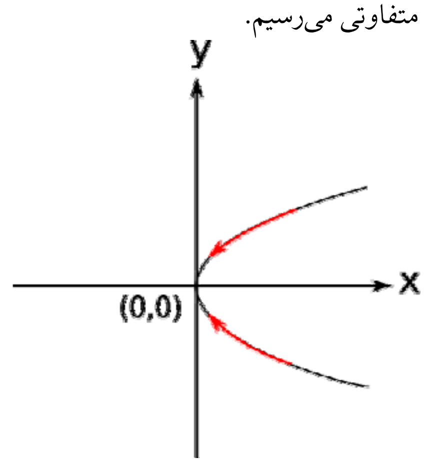
مثال ۹۰. نشان دهید که تابع $f(x,y) = \frac{xy^۲}{x^۲+y^۴}$ در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ حد ندارد.

پاسخ.

$$x = y^۲ \Rightarrow f(y^۲, y) = \frac{y^۴}{۲y^۴} = \frac{۱}{۲}$$

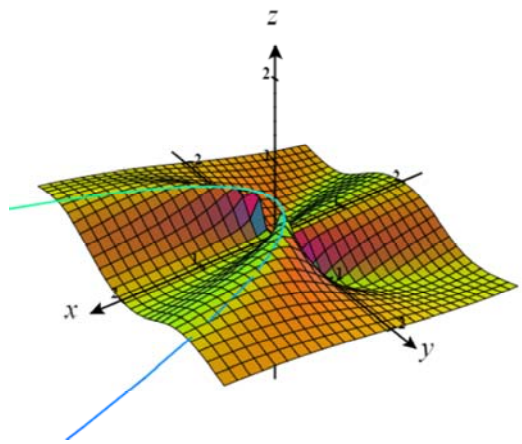
$$x = ky^۲ \Rightarrow f(ky^۲, y) = \frac{k}{۲}$$

از آنجا که حد، به مقدار k بستگی دارد، روی مسیرهای متفاوتِ $x = ky^۲$ در صفحه‌ی xy به حدود متفاوتی می‌رسیم.



مسیر زیر را نیز می‌توانستیم انتخاب کنیم.

$$y = ۰ \Rightarrow f(x, ۰) = ۰$$



□

۱.۸ پیوستگی

تعریف ۹۱. تابع $f(x,y)$ را در نقطه‌ی (a,b) **پیوسته** می‌خوانیم هرگاه

۱. نقطه‌ی (a,b) در دامنه‌ی تابع باشد،

۲. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجود باشد، و

۳. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

تابع f را پیوسته می‌خوانیم هرگاه در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد.

ترکیبات جبری توابع پیوسته، پیوسته‌اند.

$$f \pm g, f.g, \frac{f}{g} \quad g(a,b) \neq ۰, f^{\frac{m}{n}}$$

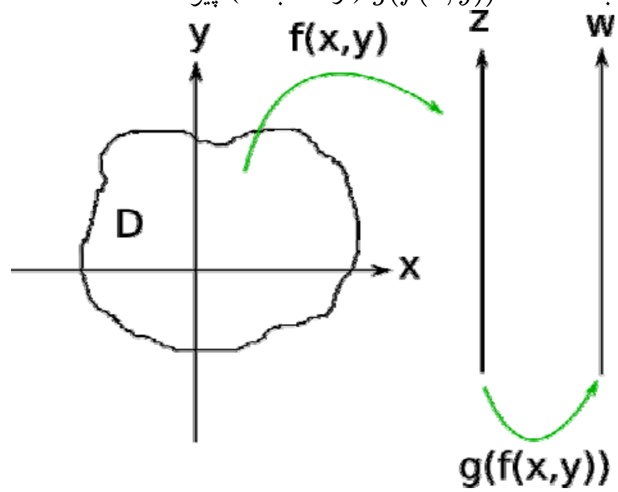
پیش‌تر گفتیم که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$$

پس $z = x$ تابعی پیوسته است. پس توابعِ $z = kx^n$ نیز پیوسته‌اند. به طور مشابه توابعِ $z = ky^n$ پیوسته‌اند و در نتیجه توابع $z = kx^n y^m$ پیوسته‌اند. از آنجا که حاصلجمع توابع پیوسته، پیوسته است، توابع چندجمله‌ای پیوسته‌اند.

همچنین توابع توابع گویا، یعنی خارج‌قسمتهای دو چندجمله‌ای، (در دامنه‌شان)پیوسته‌اند.

اگر $w = g(z)$ (تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$) پیوسته باشد و $z = f(x, y)$ (تابعی از $\mathbb{R}^۲$ به $\mathbb{R}$) هم پیوسته باشد، آنگاه $g(f(x, y))$ (از $\mathbb{R}^۲$ به $\mathbb{R}$) پیوسته است.



مثال ۹۲. توابع زیر در $\mathbf{R}^۲$ پیوسته‌اند.

$$\ln(۱ + x^۲y^۲), \cos\frac{xy}{x^۲ + ۱}, e^{x-y}$$

مثال ۹۳. تابع زیر در چه نقاطی پیوسته است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{۲xy}{x^۲+y^۲} & (x, y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x, y) = (۰, ۰) \end{cases}$$

پاسخ. دامنه‌ی تابع کُلِّ $\mathbf{R}^۲$ است. در نقاط $(x, y) \neq (۰, ۰)$ تابع گویا است، پس پیوسته است. در مسیرهای $y = mx$ به $(۰, ۰)$ نزدیک می‌شویم:

$$f(x, mx) = \frac{۲mx^۲}{x^۲ + m^۲x^۲} = \frac{۲mx^۲}{x^۲(۱ + m^۲)} = \frac{۲m}{۱ + m^۲}$$

مشاهده ۹۴. وقتی در مسیرهای یاد شده به نقطه‌ی $(۰, ۰)$ نزدیک می‌شویم با تغییر شیب، حد تابع عوض می‌شود. در واقع اگر $m = \tan\theta$ حد تابع برابر است با

$$\frac{۲\tan\theta}{۱ + \tan^۲\theta} = \frac{۲\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{۱}{\cos^۲\theta}} = ۲\cos\theta\sin\theta = \sin ۲\theta$$

یعنی حد تابع روی این مسیرها، مقادیر مختلفی در بازه‌ی $(۰, ۱)$ اتخاذ می‌کند.

پس تابع در نقطه‌ی $(۰,۰)$ ناپیوسته است. □

تمرین ۹۵. نشان دهید که تابع $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ حد ندارد. (راهنمایی: در مسیرهای $y = kx^2$ حد تابع را بررسی کنید.)

تمرین ۹۶. تابع $h(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$ در چه نقاطی پیوسته است.

۲.۸ توابع با بیش از دو متغیر

منظور از یک تابع سه متغیره ضابطه‌ای است مانند:

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$$

که هر (x,y,z) متعلق به یک مجموعه‌ی $D \subseteq \mathbb{R}^3$ را به یک عنصر $f(x,y,z) \in \mathbb{R}$ می‌برد. مجموعه‌ی D را دامنه‌ی تابعِ f می‌خوانیم.

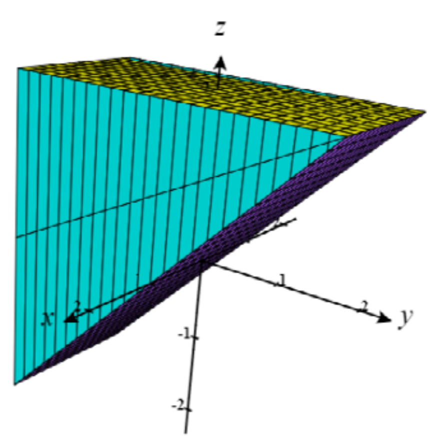
مثال ۹۷. دامنه‌ی تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x,y,z) = \ln(z-y) + xy\sin(z)$$

پاسخ.

$$D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z > y\}$$

نیم‌فضای بالای صفحه‌ی: $z = y$



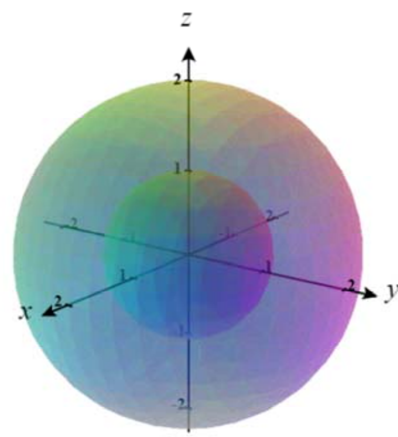
□

مثال ۹۸. رویه‌های تراز تابع $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲$ را رسم کنید.

پاسخ. هر رویه‌ی ترازِ تابع یادشده، یک کُره است:

$$k=۱\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۱$$

$$k=۴\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۴$$



□

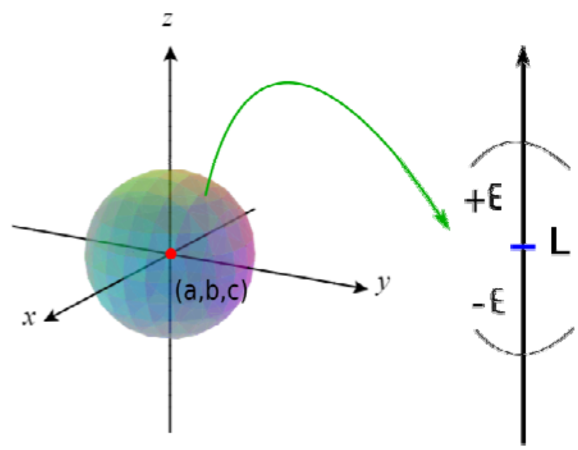
توجه کنید که رسم یک تابعِ از $\mathbb{R}^۳$ به $\mathbb{R}$ ممکن نیست. عموماً دامنه‌ی چنین تابعی را در $\mathbb{R}^۳$ و بُرد آن را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ رسم می‌کنیم.

تعریف ۹۹. فرض کنید f یک تابع سه متغیره باشد.

$$f:D\subseteq\mathbf{R}^۳\to\mathbf{R}$$

منظور از $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)}f(x,y,z)=L$ این است که:

$$\forall\epsilon>۰\quad\exists\delta(\epsilon)>۰\quad\forall(x,y,z)\quad\Big(۰<\underbrace{\sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲+(z-c)^۲}<\delta}_{\text{فاصله‌ی نقطه‌ی } (x,y,z) \text{ از } (a,b,c) \text{ کمتر از } \delta \text{ شود}}\to|f(x,y,z)-L|<\epsilon\Big)$$



مفهوم پیوستگی برای توابع سه متغیره، بطور مشابه تعریف می‌شود. چنین تابعی را در نقطه‌ی (a,b,c) پیوسته می‌خوانیم هرگاه $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$. به عنوان مثال توابع زیر پیوسته‌اند:

$$\ln(x,y,z), \frac{y\sin z}{x-۱} \quad (x \neq ۱)$$

پاسخ.

$$\lim_{(x,y,z)\to(۱,۰,-۱)} \frac{e^{x+z}}{z^۲ + \cos\sqrt{xy}} = \frac{۱}{۲}$$

□

تمرین ۱۰۰. فرض کنید $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$، یک تابع باشد. با الگوگیری از تعاریف حد برای توابع دو و سه متغیره، عبارتِ

$$\lim_{(x_۱,\dots,x_n)\to(a_۱,\dots,a_n)} f(x_۱,\dots,x_n) = L$$

را تعریف کنید.

پاسخ.

$$\lim_{(x_۱,\dots,x_n)\to(a_۱,\dots,a_n)} f(x_۱,\dots,x_n) = L \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta(\epsilon) > ۰ \quad \forall (x_۱,\dots,x_n) \in D(f)$$
$$\left(۰ < \sqrt{(x_۱-a_۱)^۲ + (x_۲-a_۲)^۲ + \dots + (x_n-a_n)^۲} < \delta \to |f(x_۱,\dots,x_n) - L| < \epsilon\right)$$

□

مثال ۱۰۱. حد تابع زیر را بیابید.

$$\lim_{(x,y,z)\to(۱,۰,-۱)} \frac{e^{x+z}}{z^{۲}+\cos\sqrt{xy}}$$