۱ جلسه‌ی سی و یکم، شنبه (۹۷/۲/۱۵)

بحث انتگرالگیری در مختصات قطبی را با نکته‌ی زیر به پایان می‌رسانیم.

توجه ۱. مختصات قطبی ابزار مناسبی برای محاسبه ی برخی انتگرالهای یگانه بدست می دهد.

مثال ۲. انتگرال ناسره‌ی $\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx$ رامحاسبه کنید.

یادآوری ۳.

$$\int_c^d\int_a^b f(x)g(y)dxdy=\int_a^b f(x)dx\int_c^d g(y)dy$$

پاسخ.

$$\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx\times\int_۰^\infty e^{-y^۲}dy=\int_۰^\infty\int_۰^\infty e^{-x^۲-y^۲}dxdy=(\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx)^۲$$

$$\int_۰^\infty\int_۰^\infty e^{-x^۲-y^۲}dxdy=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^\infty e^{-r^۲}rdrd\theta=\frac{\pi}{۲}\int_۰^\infty e^{-r^۲}rdr=\frac{\pi}{۲}(\frac{e^{-r^۲}}{-۲})|_۰^\infty=\dots$$

□

۱.۱ تغییر متغیر

گفتیم که در انتگرالگیری با مختصات قطبی، تغییر متغیر زیر را داریم:

$$dxdy=rdrd\theta$$

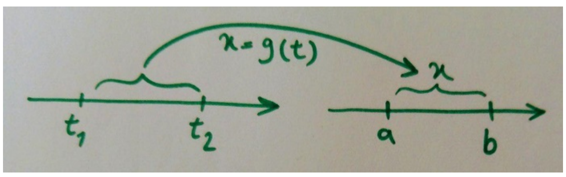
در ادامه‌ی درس، تغییر متغیر را به طور کلی بررسی می‌کنیم. نخست نکته‌ی زیر را از ریاضی ۱ یادآوری می‌کنیم.

یادآوری ۴. فرض کنید که $x=g(t)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. در ریاضی ۱ دیدیم که

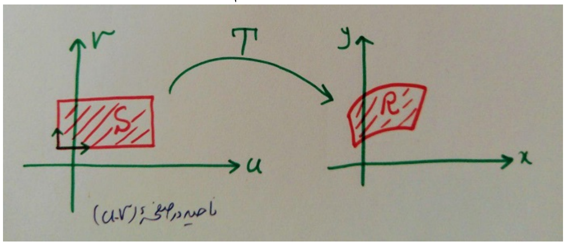
$$\int_{a=g(t_۱)}^{b=g(t_۲)} f(x)dx=\int_{t_۱}^{t_۲}\underbrace{f(g(t))}_{u}\,\underbrace{g'(t)dt}_{du}$$

به بیان دیگر

$$\int_{a=g(t_۱)}^{b=g(t_۲)} f(x)dx=\int_{t_۱}^{t_۲} f(x(t))\frac{\partial x}{\partial t}dt$$



در ادامه‌ی درس می‌خواهیم متناظر گفته‌ی بالا را برای انتگرال دوگانه به دست آوریم.



فرض کنید T یک نگاشت باشد که از مختصاتِ uv به مختصات xy می‌رود. به بیان دیگر نگاشت T به صورت زیر است:

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

هم‌چنین فرض می‌کنیم که این نگاشت ویژگی توپولوژیک و آنالیزی مطلوبی داشته باشد (توابع $x(u,v), y(u,v)$ مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند و ژاکوبین این نگاشت (که در ادامه تعریف خواهد شد، ناصفر باشد). چنین نگاشتی به گونه ای است که مرزهای ناحیه‌ی S (در شکل بالا) را به مرزهای ناحیه‌ی R می برد.

تحت شرطهای بالا، می‌توان انتگرالگیری در ناحیه‌ی R را به انتگرالگیری در ناحیه‌ی S تبدیل کرد:

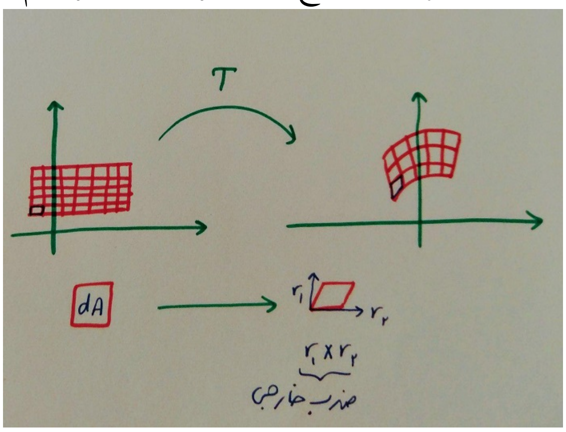
$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{\text{قدرمطلق}} dudv \quad (*)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

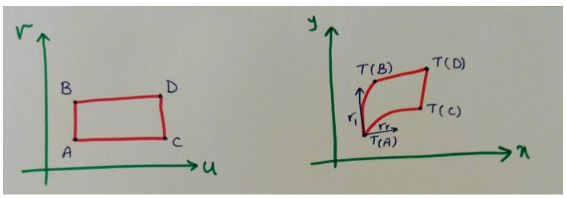
(ماتریس ژاکوبین تبدیل T)

دقت کنید که در فرمول $(*)$ علامت قدر مطلق آمده است، بنابراین اگر دترمینان منفی شود، آن را تبدیل به مثبت باید کرد.

ایده ی اثبات از دیدگاه هندسی: دقت کنید که یک المانِ مستطیلی به یک المان متوازی‌الاضلاع تبدیل شده است. بردارهای سازنده‌ی متوازی‌الاضلاع را در زیر محاسبه کرده‌ایم.



گوشه‌های مشخص شده در بالا را در زیر بزرگتر کشیده‌ایم:



توضیحات عکس:

$$A=(u_0,v_0) \quad , \quad B=(u_0,v_0+\Delta v) \quad , \quad C=(u_0+\Delta u,v_0) \quad , \quad D=(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)$$

$$T(A)=(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)) \qquad T(B)=(x(u_0,v_0+\Delta v),y(u_0,v_0+\Delta v))$$

$$T(C)=(x(u_0+\Delta u,v_0),y(u_0+\Delta u,v_0)) \qquad T(D)=(x(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v),y(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v))$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_1} \approx T(B)-T(A) &= (x(u_0,v_0+\Delta v),y(u_0,v_0+\Delta v))-(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)) = \\ &(x(u_0,v_0+\Delta v)-x(u_0,v_0),y(u_0,v_0+\Delta v)-y(u_0,v_0)) \\ &\simeq (\Delta v\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0),\Delta v\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0))=\Delta v(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_2} \approx T(C)-T(A) &= (x(u_0+\Delta u,v_0),y(u_0+\Delta u,v_0))-(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)) = \\ &(x(u_0+\Delta u,v_0)-x(u_0,v_0),y(u_0+\Delta u,v_0)-y(u_0,v_0)) \\ &\simeq (\Delta u\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0),\Delta u\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0))=\Delta u(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u})\end{aligned}$$

$$dA = \text{مساحت ناحیه‌ی به صورت متوازی‌الاضلاع} = \overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}\Delta u\Delta v$$

$$dA = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} dudv$$

توجه ۵. روش فوق زمانی کار می کند که در ناحیه ی S داشته باشیم:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

۲.۱ تغییر مختصات قطبی

حال فرمول بالا برای تغییر مختصات قطبی امتحان می‌کنیم.

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

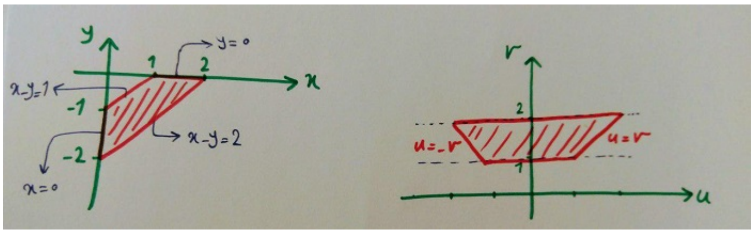
$$dA = dxdy = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}|drd\theta = rdrd\theta$$

۳.۱ مثالها

مثال ۶. $\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}dA$ را محاسبه کنید که در آن R ناحیه ی ذوزنقه ای محدود به نقاط $(۱,۰),(۲,۰),(۰,-۱),(۰,-۲)$ است.

پاسخ.

$$u=x+y \qquad v=x-y$$



$$x=\frac{۱}{۲}(u+v) \qquad y=\frac{۱}{۲}(u-v)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=det\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\int_۱^۲\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}|-\frac{۱}{۲}|dudv=\frac{۱}{۲}\int_۱^۲\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}dudv$$

$$\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}dv=ve^{\frac{u}{v}}=v(e^۱-e^{-۱})$$

$$\int_۱^۲\int_{-v}^{v}\frac{۱}{۲}e^{\frac{u}{v}}dudv=\frac{۱}{۲}(e-\frac{۱}{e})\int_۱^۲ vdv=\frac{۱}{۲}(e-\frac{۱}{e})\frac{v^۲}{۲}|_۱^۲=\frac{۱}{۲}(e-\frac{۱}{e})\frac{۳}{۲}$$

□

مثال ۷. انتگرال دوگانه ی زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$$\iint_D \frac{x^۲\sin(xy)}{y}dA$$

D ناحیه ی محدود به منحنی های $x^۲=\pi y$ و $x^۲=\frac{\pi y}{۲}$ و $y^۲=x$ و $y^۲=\frac{x}{۲}$ است. [1]

---

[1] از خانم شیرجزی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.