۲ جلسه‌ی دوم

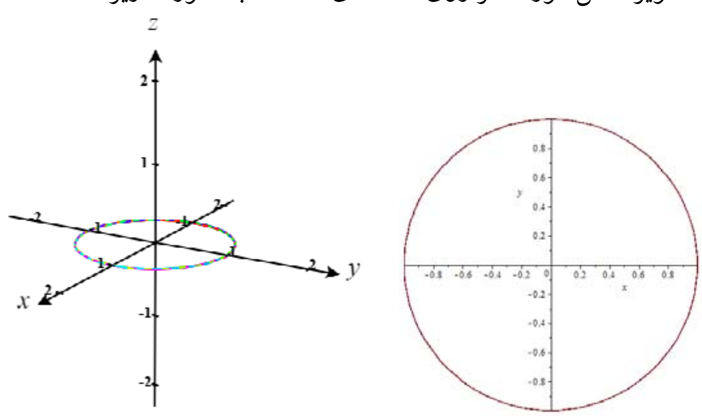
در جلسه‌ی قبل درباره‌ی استوانه‌ها، به عنوان مجموعه‌ای از خطوط موازی که از یک منحنی مشخص می‌گذرند، صحبت کردیم. بحث را با رسم چند استوانه پی می‌گیریم.

مثال ۱۱. استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ را رسم کنید.

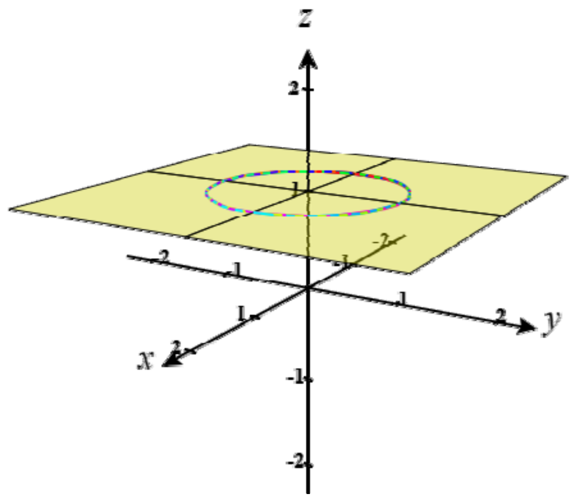
پاسخ. هدفمان رسم مجموعه‌ی نقاط زیر است.

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$$

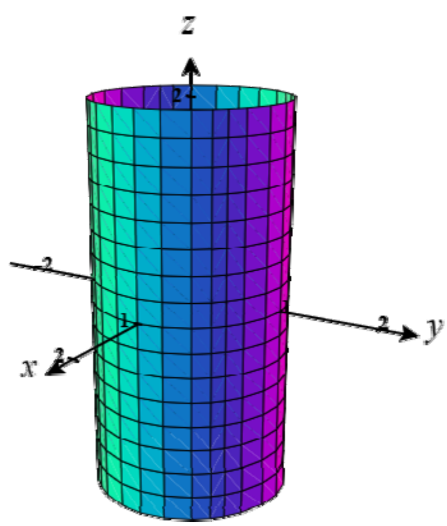
تصویر شکل مورد نظر روی صفحه‌ی $z = 0$ به صورت زیر است.



به طور مشابه در هر صفحه‌ی $z = k$ نیز یک دایره به معادله‌ی $z = k, x^2 + y^2 = 1$ ایجاد می‌شود:



بنابراین شکل مورد نظر ما یک استوانه به صورت زیر است:

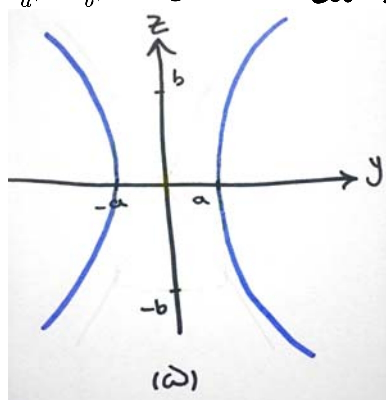


□

مثال ۱۲. استوانه‌ی $y^{۲} - z^{۲} = ۱$ را رسم کنید.

پاسخ. توجه کنید که از آنجا که x در معادله‌ی بالا ظاهر نشده است، شکل مورد نظر استوانه‌ای خواهد بود موازی محور x. پیش از آن که مثال بالا را پاسخ دهیم، نیازمند یادآوری چند مطلب از دوره‌ی دبیرستان هستیم:

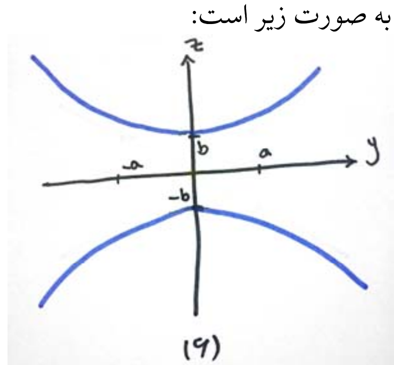
یادآوری ۱۳. معادله‌ی $\frac{y^{۲}}{a^{۲}} - \frac{z^{۲}}{b^{۲}} = ۱$ در صفحه‌ی yz یک هذلولی به دست می‌دهد.



به طور مشابه، مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی

$$\frac{z^{۲}}{b^{۲}} - \frac{y^{۲}}{a^{۲}} = ۱$$

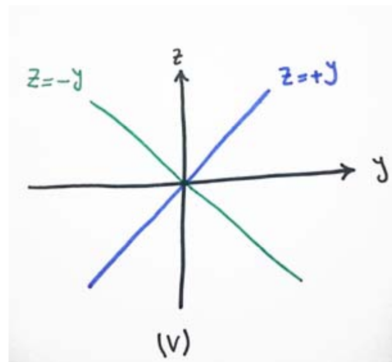
به صورت زیر است:



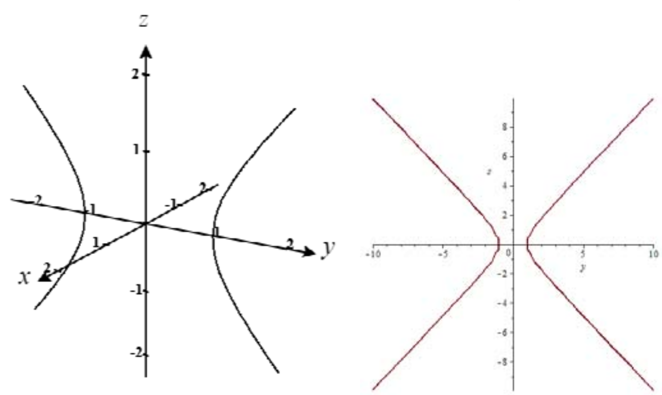
سوال ۱۴ (سوال یکی از دانشجویان). نقاط صادق در معادله‌ی $y^{۲} - z^{۲} = ۰$ چه شکلی تشکیل می‌دهند؟

پاسخ:

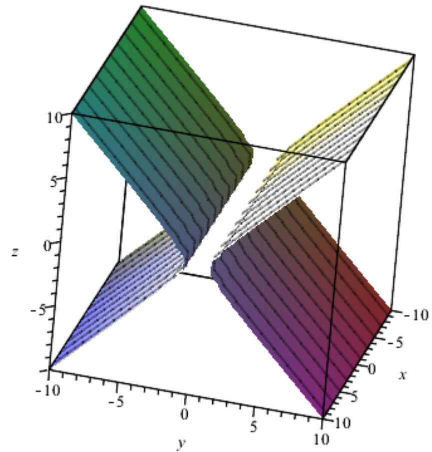
$$y^2 - z^2 = 0 \Rightarrow (y-z)(y+z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ y = -z \end{cases}$$



حال به حل مثال بالا می‌پردازیم. در صفحه‌ی $x = 0$ شکل زیر ایجاد می‌شود که از معادله‌ی $x = 0, y^2 - z^2 = 1$ به دست آمده است.



در هر صفحه‌ی $x = k$ نیز همان شکل بالا ایجاد می‌شود و از این رو معادله‌ی ذکر شده در مثال، منجر به استوانه‌ی زیر می‌شود:



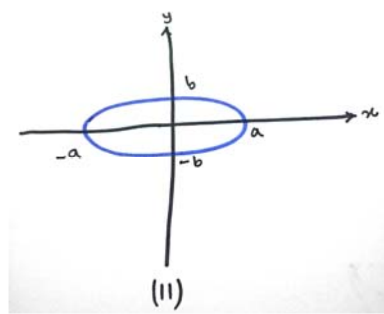
□

مثال ۱۵. استوانه‌ی $x^۲ + ۴z^۲ = ۴$ را رسم کنید.

پاسخ. نخست روش رسم یک بیضی را یادآوری می‌کنیم.

یادآوری ۱۶. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را در فضای دو بعدی رسم کنید:

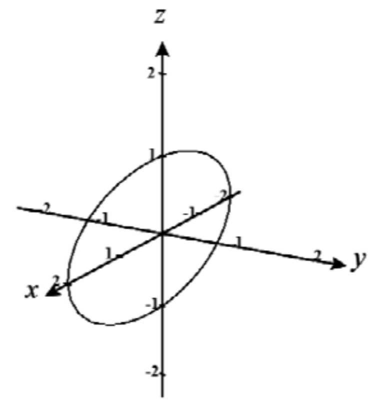
$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱.$$



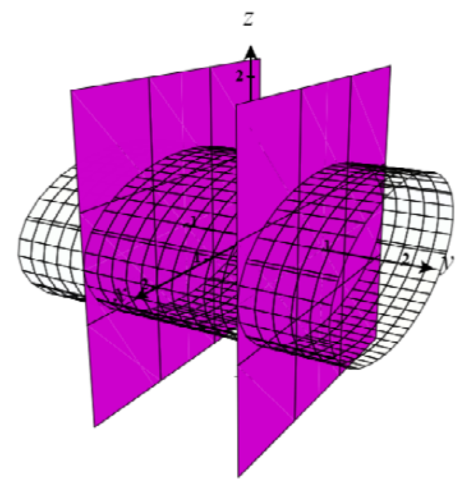
حال برای پاسخ به مثال ۱۵ نخست طرفین معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم.

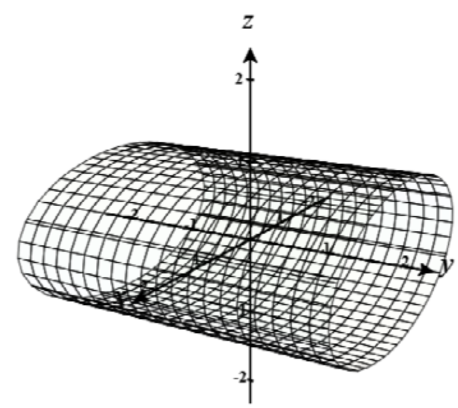
$$\frac{x^۲}{۴} + ۴z^۲ = ۱$$

در صفحه‌ی $y = ۰$ شکل ایجاده شده به صورت زیر است:



مشابه مثالهای قبلی، استوانه‌ی مورد نظر ما به صورت زیر خواهد بود.





□

توجه ۱۷. تا کنون با نحوه‌ی رسم استوانه‌ها آشنا شده‌ایم. رسم رویه‌های سه بُعدی در حالت کلی آسان نیست. در زیر چند رویه را برای نمونه رسم کرده‌ایم که آنها را در کلاس درس، با استفاده از نرم‌افزار میپل خواهیم کشید.

۱. معادله‌ی $z = xy^۲ - x^۳$ که به «زین میمون» معروف است.

۲. معادله‌ی $z = xy^۳ - yx^۳$ که به «زین سگ» معروف است.

۳. معادله‌ی $z = x^۲ - y^۲$ که به «زین اسب» معروف است.

۴. معادله‌ی $x^۳ + y^۳ + z^۳ + ۱ = (x + y + z + ۱)^۳$

۵. معادله‌ی $z = \sin(xy)$.

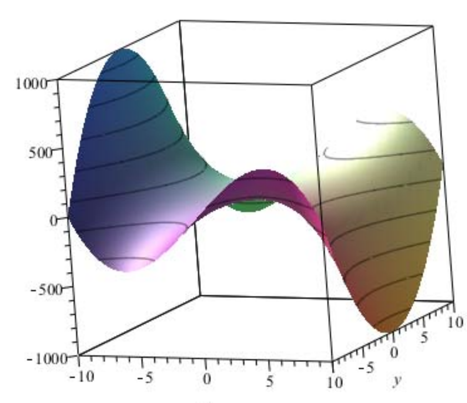
۶. معادله‌ی $z = \frac{xy}{۱+x^۲+y^۲}$،

۷.

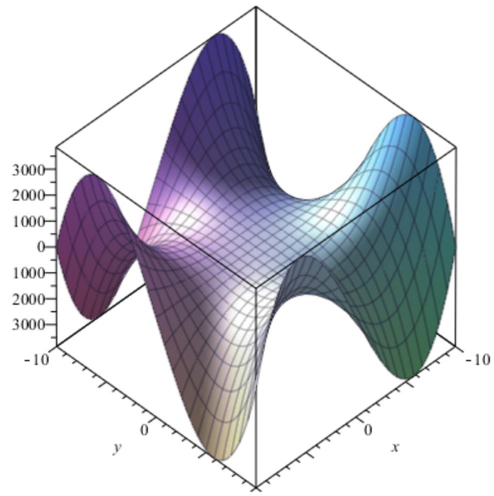
۸. معادله‌ی $z = \frac{x-y}{x^۲+y^۲}$،

۹. معادله‌ی $z = \ln\sqrt{x^۲ + y^۲}$، از قضا خواهیم دید که رسم این معادله چندان دشوار نیست (دوران).

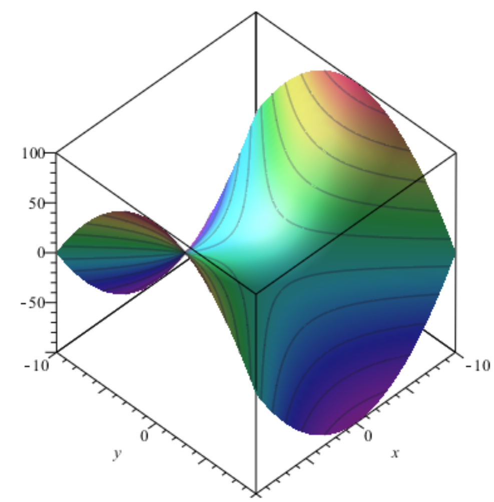
معادله‌ی ۱:



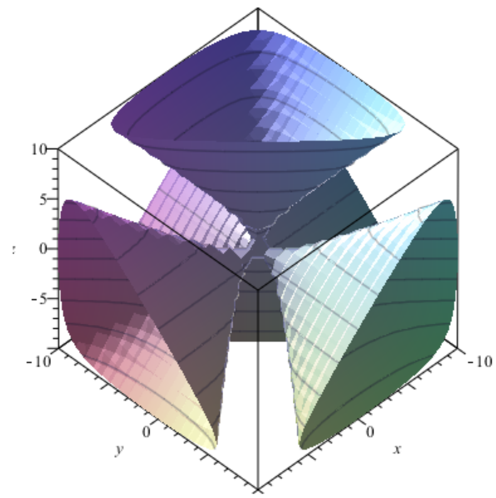
معادله‌ی ۲ :



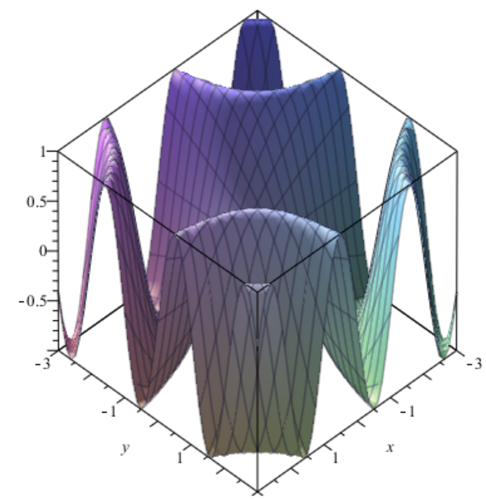
معادله‌ی ۳:



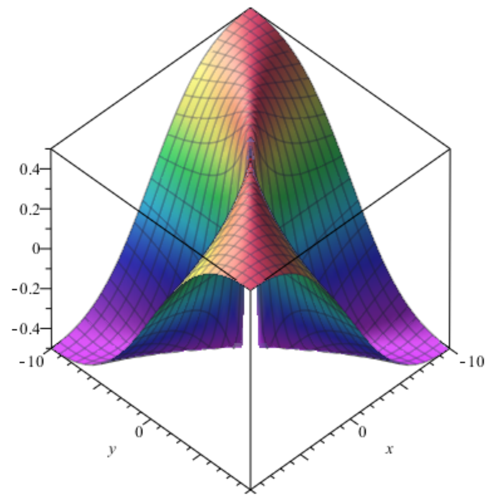
معادله‌ی ۴ :



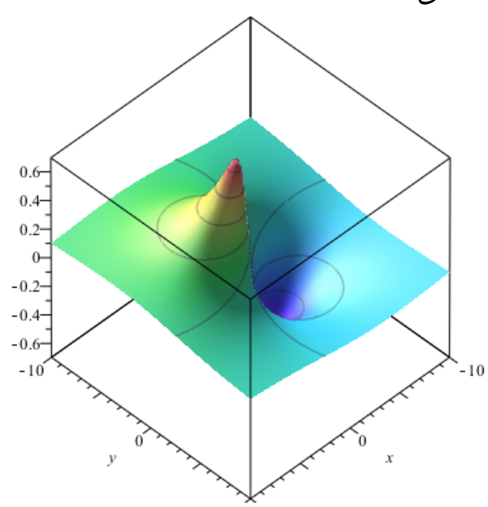
معادله‌ی ۵



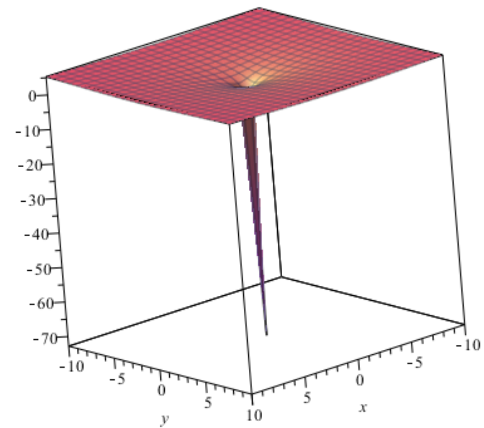
معادله‌ی ۶



معادله‌ی ۷:



معادله‌ی ۸:



در بخش آینده خواهیم کوشید تا مکان هندسیِ برخی معادلات ضمنی درجه‌ی دوم را رسم کنیم. توجه کنید که از کلمه‌ی ضمنی برای این استفاده کرده‌ایم که در معادلات زیر مقدار z را بر حسب دو متغیر x, y به طور مستقیم نداریم. در واقع آنچه رسم می‌کنیم لزوماً یک تابع نیست.

۱.۲ رسم رویه‌های درجه‌ی دوم

منظور از یک رویه‌ی درجه‌ی دوم، رویه‌ای است که با معادله‌ای به صورت زیر ایجاد می‌شود:

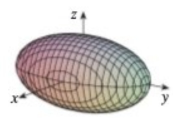
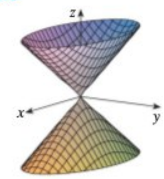
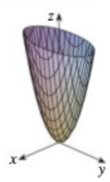
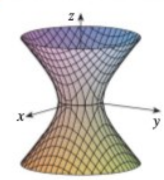
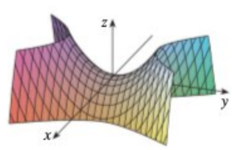
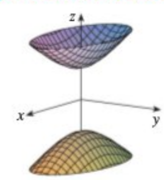
$$Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = ۰$$

توجه ۱۸. جای حروف بزرگ انگلیسی در بالا عدد قرار می‌گیرد.

توجه ۱۹. عبارتی شامل xyz در بالا نداریم (و به همین علت، معادله را درجه‌ی دوم نامیده‌ایم).

توجه ۲۰. با استفاده از تبدیل‌های خطی دوران و انتقال می‌توان ضرایب xz، yz و xy را از بین برد.

توجه ۲۱. شکلی که از معادله‌ی بالا حاصل می‌شود به یکی از صورت‌های زیر است:

Surface	Equation	Surface	Equation
Ellipsoid 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ All traces are ellipses. If $a=b=c$, the ellipsoid is a sphere.	Cone 	$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces in the planes $x=k$ and $y=k$ are hyperbolas if $k\neq 0$ but are pairs of lines if $k=0$.
Elliptic Paraboloid 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are parabolas. The variable raised to the first power indicates the axis of the paraboloid.	Hyperboloid of One Sheet 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are hyperbolas. The axis of symmetry corresponds to the variable whose coefficient is negative.
Hyperbolic Paraboloid 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are hyperbolas. Vertical traces are parabolas. The case where $c<0$ is illustrated.	Hyperboloid of Two Sheets 	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces in $z=k$ are ellipses if $k>c$ or $k<-c$. Vertical traces are hyperbolas. The two minus signs indicate two sheets.

در زیر معادلات بالا را یکی‌یکی تحلیل می‌کنیم.

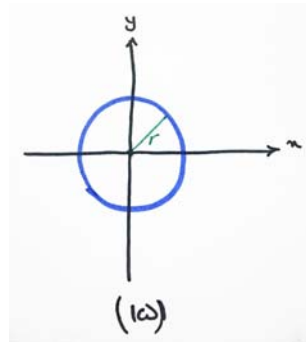
۲.۲ بیضی‌وار

یادآوری ۲۲. منظور از یک دایره در صفحه‌ی xy مجموعه‌ی نقاطی است که فاصله‌ی آنها تا مبدأ با هم برابر است.

$$\{(x,y) | \sqrt{x^2+y^2}=r\}$$

پس معادله‌ی یک دایره در صفحه‌ی xy به صورت زیر است:

$$x^2+y^2=r^2$$



منظور از کُره مجموعه نقاطی است مانند $(x,y,z)\in\mathbb{R}^۳$ که فاصله‌ی آنها تا مبدأ با هم برابر است.
(ثابت کنید که) فاصله‌ی نقطه‌ی (x,y,z) تا مبدأ برابر است با

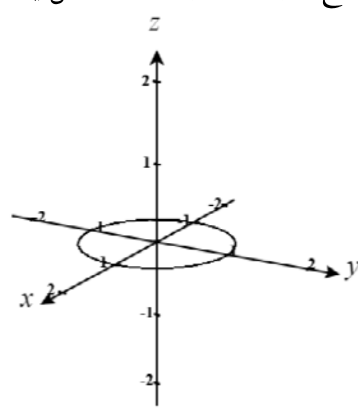
$$\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}.$$

پس معادله‌ی کلی یک کُره به مرکزِ مبدأ مختصات به صورت زیر است:

$$x^۲+y^۲+z^۲=r^۲$$

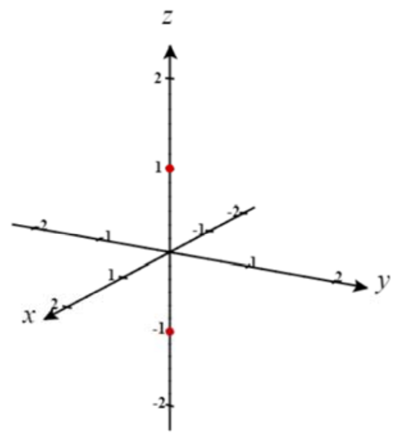
مثال ۲۳. رویه‌ی حاصل از معادله‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ را رسم کنید.

پاسخ. در صفحه‌ی $z=۰$ شکل یک دایره با معادله‌ی $x^۲+y^۲=۱$ ایجاد می‌شود.



معادله‌ی دایره‌ی بالا عبارت است از $x^۲+y^۲=۱, z=۰$.
در صفحه‌های $z=\pm۱$ تنها یک نقطه ایجاد می‌شود:

$$z=\pm۱\Rightarrow x^۲+y^۲=۰\Rightarrow (x,y)=(۰,۰)$$

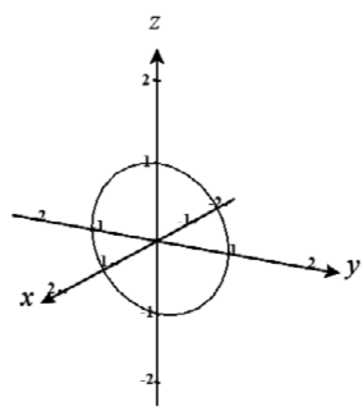


در صفحه‌های $z = k > ۱$ هیچ شکلی ایجاد نمی‌شود.

$z = ۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = -۳ \Rightarrow$ هیچ نقطه‌ای نداریم.

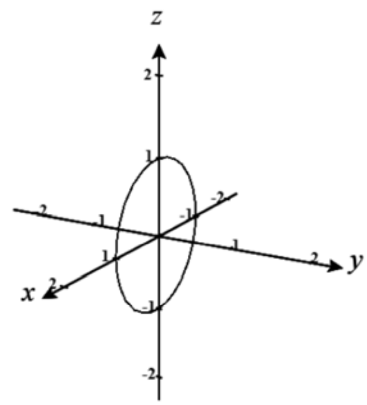
در صفحه‌ی $x = ۰$ نیز یک دایره ایجاد می‌شود:

$$x = ۰ \Rightarrow y^۲ + z^۲ = ۱$$

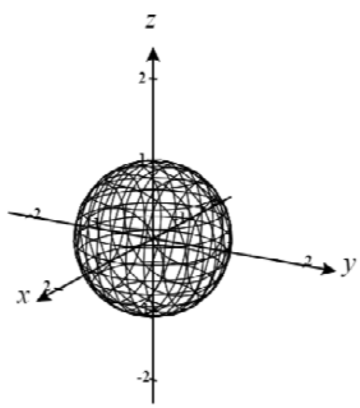


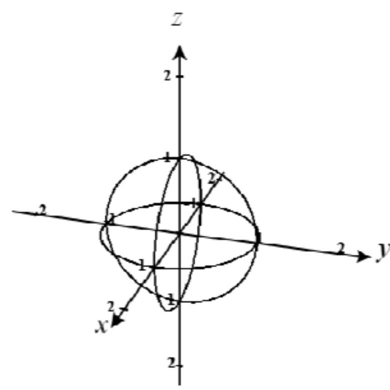
به همین ترتیب در صفحه‌ی $y = ۰$ نیز دایره‌ی زیر ایجاد می‌شود.

$$y = ۰ \Rightarrow x^۲ + z^۲ = ۱$$



شکل کلی نیز به صورت زیر خواهد بود:





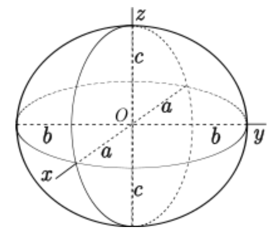
□

مثال ۲۴. شکل صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$$

پاسخ.

$$z=۰\Rightarrow\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$
$$z=c\Rightarrow\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۰$$
$$x=۰\Rightarrow\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$$
$$y=۰\Rightarrow\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$$



شکل بالا **بیضی‌وار** نامیده می‌شود. [1] □

توجه ۲۵. اگر $a = b = c$ شکل حاصل یک کُره خواهد بود.

۳.۲ سهمی‌وار بیضوی

مثال ۲۶. شکل حاصل از معادله‌ی $z = x^۲ + y^۲$ را رسم کنید.

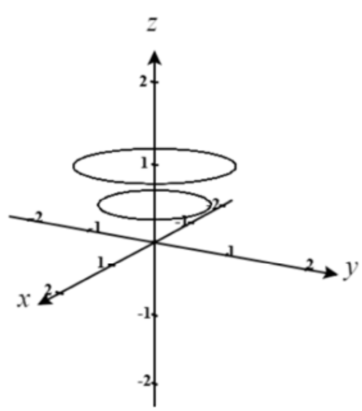
پاسخ.

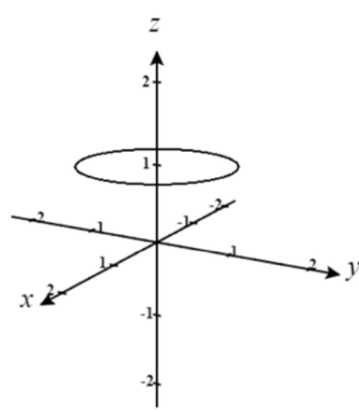
$$z = ۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x, y) = ۰.$$

$z < ۰ \Rightarrow$ شکلی ایجاد نمی‌شود.

$$z = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۱$$

$z = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$ دایره

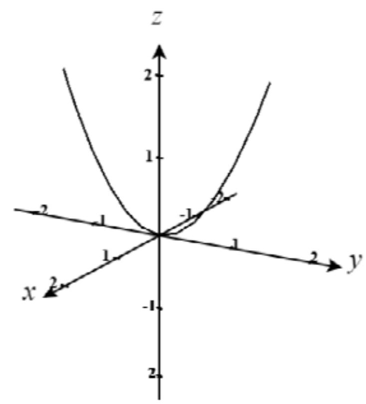




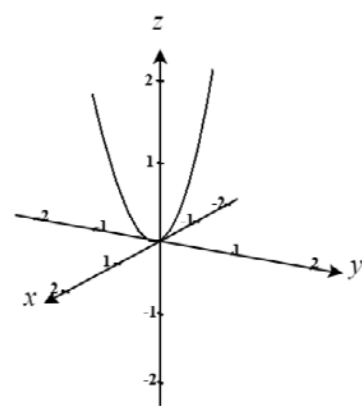
$$x = ۰ \Rightarrow z = y^۲$$

---

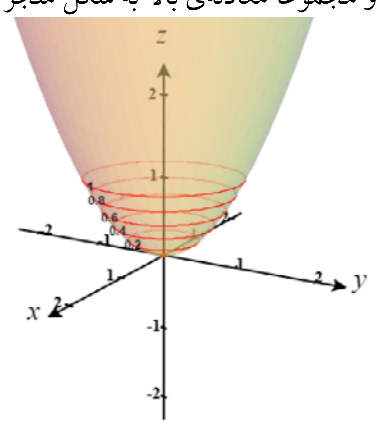
[1] ellipsoid

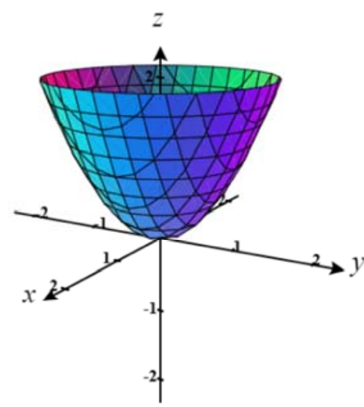


$$y = ۰ \Rightarrow z = x^۲$$



و مجموعاً معادله‌ی بالا به شکل منجر می‌شود.





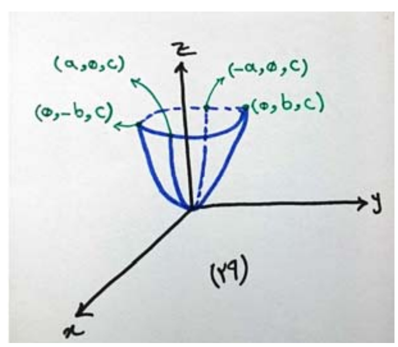
□

توجه ۲۷. در رسم اشکال از شما انتظار داریم که محل تلاقی شکل با محورها را دقیق مشخص کنید و مختصات آن را بنویسید.

مثال ۲۸. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $\frac{z}{c} = \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲}$ را رسم کنید. (فرض کرده‌ایم که $a, b, c > ۰$)

پاسخ.

$$z = ۰ \Rightarrow (x, y) = ۰$$
$$x = ۰ \Rightarrow z = \frac{c}{b^۲}y^۲$$



□

شکل بالا را به دو صورت می‌توان مجسم کرد. به صورت بیضی‌هائی که بزرگتر و بزرگتر می‌شوند و توسط سهمی به هم وصل شده‌اند؛ یا توسط سهمی‌هائی که دارند بالاتر و بالاتر می‌روند و شکل ظرف را ایجاد می‌کنند. توجه کنید که در بالا تنها مقطعی از شکل را کشیده‌ایم، با این فرض که شکل تا بی‌نهایت به همین صورت ادامه می‌یابد.

توجه ۲۹. هر مایعی در هر نوع ظرفی، در اثر دوران حول مرکز به شکل یک سهمی‌وار بیضوی درمی‌آید. در تلسکوپها، برای صرفه‌جوئی در هزینه‌ها، با دوران جیوه، عدسی مورد نظر خود را تولید می‌کنند. برای دیدن تلسکوپهای اینچنین و مایعهای تحت دوران، به پیوندهای زیر مراجعه کنید (هر چند متأسفانه یوتیوب فیلتر است!)

https://www.youtube.com/watch?v=Zip9ft1PgV0

https://www.youtube.com/watch?v=oY4zeQA1hD0

https://www.youtube.com/watch?v=Q5Cr9P-Q88Y

https://en.wikipedia.org/wiki/Liquid_mirror_telescope