۲۳ نیم‌جلسه‌ی بیست و سوم، چهارشنبه

تمرین ۲۲۵. تابع $\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

(آ). در چه جهت‌هایی مانند $\overrightarrow{u}=(a,b)$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ تابع دارای مشتق سوئی است؟

پاسخ. فرض کنید $u=(a,b)$ یک بردار یکه باشد.

$$\overrightarrow{u}=\sqrt{a^۲+b^۲}=۱$$

داریم:

$$D_uf(x,y)|_{(x.,y.)}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x.+ah,y.+bh)-f(x.,y.)}{h}\Rightarrow$$

$$D_uf(x,y)|_{(۰,۰)}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(ah,bh)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(ah)(bh)}{h\sqrt{a^۲h^۲+b^۲h^۲}}=\lim_{h\to ۰}\frac{abh}{|h|\underbrace{\sqrt{a^۲+b^۲}}_{=۱}}=\lim_{h\to ۰}\frac{abh}{|h|}$$

اگر $a\neq ۰$ و $b\neq ۰$ آنگاه حد بالا از یک طرف $ab+$ و از یک طرف $ab-$ است. پس تابع در سوی (a,b) مشتق‌پذیر نیست. برای این که حد بالا موجود باشد، باید یا $a\neq ۰$ یا $b\neq ۰$. یعنی تابع تنها در جهت بردارهای $i,-i,j$ و $-j$ مشتق سوئی دارد. □

(ب). آیا تابع در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر است؟

پاسخ.

یادآوری ۲۲۶. اگر تابع f در نقطه‌ی $(x.,y.)$ دیفرانسیل‌پذیر (مشتق‌پذیر) باشد، آنگاه f در نقطه‌ی $(x.,y.)$ در هر جهتی مشتق‌پذیر است و مشتق سوئی f در جهت (a,b) با فرمول $(*)$ محاسبه می‌شود.

$$(*)\quad D_{u=(a,b)}f(x,y)|_{(x.,y.)}=f_x(x.,y.)a+f_y(x.,y.)b=\nabla f(x.,y.)\cdot(a,b)$$

نشان می‌دهیم رابطه‌ی $(*)$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ برای تابع f برقرار نیست. پس این تابع مشتق‌پذیر نیست.

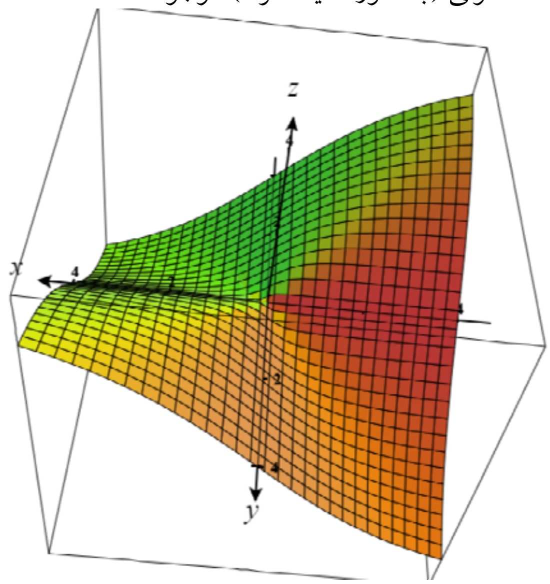
$$f_x(۰,۰)=۰\quad,\quad f_y(۰,۰)=۰$$

اگر تابع در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$D_{u=(a,b)}f(x,y)|_{(۰,۰)}=۰a+۰b$$

می‌بینیم که اگر $a\neq ۰$ و $b\neq ۰$ این فرمول برقرار نیست، پس این تابع نیز مشتق‌پذیر نیست.

در زیر تصویر تابع بالا کشیده است. دقت کنید که صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی $(۰,۰)$ قابل رسم نیست، هر چند مشتقات سوئی (به صورت یک‌طرفه) موجودند.



$\square$

تمرین ۲۲۷. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر z به عنوان تابعی از y, x توسط رابطه‌ی ضمنی زیر داده شده باشد،

$$f(x+z, y+z) = ۱$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -۱$$

پاسخ.

$$g(x,y,z) = f(\underbrace{x+z}_{u(x,y)}, \underbrace{y+z}_{v(x,y)}) - ۱ = ۰$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = ۰ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = ۰ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}\left(۱ + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(۰ + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial y}$ نیز بر عهده‌ی شما باشد. $\square$

تمرین ۲۲۸. تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲ \sin y}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ مفروض است.

(آ). نشان دهید f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

پاسخ. باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall (x,y) \in Dom \quad \left(۰ < \sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta \to |f(x,y) - ۰| < \epsilon\right)$$

محاسبات:

$$\left|\frac{x^۲ \sin y}{x^۲ + y^۲}\right| \leqslant \frac{x^۲ |\sin y|}{x^۲ + y^۲}$$

می‌دانیم که $\frac{x^۲}{x^۲+y^۲} \leqslant ۱$. پس داریم:

$$\frac{x^۲ |\sin y|}{x^۲ + y^۲} \leqslant |\sin y|$$

همچنین می‌دانیم $|\sin y| \leqslant |y|$. پس داریم

$$|\sin y| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

(اتمام محاسبات و ادامه‌ی پاسخ:)

اگر $\epsilon > \delta$ آنگاه اگر $\delta > \sqrt{x^۲ + y^۲} > ۰$ آنگاه $|f(x,y)| < \epsilon$. □

(ب). $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ را در تمام نقاط محاسبه کنید.

پاسخ. در نقاط $(x,y) \neq (۰,۰)$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sin y (۲x)(x^۲ + y^۲) - (۲x) x^۲ \sin y}{(x^۲ + y^۲)^۲}$$

محاسبه‌ی $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ نیز به صورت زیر است

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(۰ + h, ۰) - f(۰,۰)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{۰ - ۰}{h} = ۰$$

پس داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin y (۲x)(x^۲+y^۲) - (۲x) x^۲ \sin y}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ \quad (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

□

(ج). $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x,y)$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f_x(۰ + h, ۰) - f_x(۰,۰)}{h} = \dots$$

□

(د). در چه جهت‌هایی تابع بالا مشتق‌پذیر است؟

(ه). آیا تابع در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر است؟ (راهنمایی: رابطه‌ی $D_u f = \nabla f \cdot u$ برقرار نیست. پس مشتق‌پذیر نیست.)

پاسخ قسمتهای د و ه مشابه سوال اول این جلسه است. در زیر نمودار این تابع را رسم کرده‌ایم. دقت کنید که صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی $(0, 0)$ قابل رسم نیست ولی همه‌ی مشتقات سوئی در این نقطه موجودند.