۱۰ جلسه‌ی دهم

تمرین ۱۰۷. برای $\epsilon > ۰$ داده شده، δ را به گونه‌ای بیابید که اگر $۰ < \sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta$ آنگاه

$$|f(x,y) - f(۰,۰)| < \epsilon$$

۱. $\epsilon = ۰/۰۵ \quad f(x,y) = \frac{y}{x^۲+۱}$

پاسخ.

$$f(۰,۰) = ۰$$

چرک‌نویس. $$\left|\frac{y}{x^۲ + ۱}\right| = \frac{\sqrt{y^۲}}{x^۲ + ۱} \le \sqrt{y^۲} \le \sqrt{y^۲ + x^۲}$$

اگر $\delta < \epsilon$ آنگاه اگر $۰ < \sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta$ آنگاه

$$\left|\frac{y}{x^۲ + ۱}\right| < \sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta < \epsilon$$

برای $\epsilon = ۰/۰۵$ کافیست برای مثال $\delta = ۰/۰۰۵$ را در نظر بگیریم. □

۲. $\epsilon = ۰/۰۵ \quad f(x,y) = \frac{y+x}{x^۲+۱}$

۳. $f(x,y) = \frac{x+y}{۲+\cos x}$

تمرین ۱۰۸. آیا حد زیر وجود دارد؟

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^۲y^۲}{x^۳ + y^۳}$$

تمرین بالا را در جلسه‌ی بعد پاسخ گفته‌ایم.

تمرین ۱۰۹. نشان دهید توابع زیر در $(۰,۰)$ حد ندارند.

۱. $f(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$

پاسخ. مسیر $y = x$:

$$f(x,x) = \frac{-x}{\sqrt{۲x^۲}} = \frac{-x}{\sqrt{۲}|x|} = \begin{cases} x > ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{\sqrt{۲}} \\ x < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{cases}$$

در واقع در همان مسیرِ $y = x$ در از دو طرف به دو حد متفاوت می‌رسیم. پس تابع مورد نظر در $(۰, ۰)$ حد ندارد. □

۲. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

پاسخ. توجه کنید که مسیرِ $y = x$ در این مثال، مجاز نیست زیرا این مسیر در دامنه‌ی تابع قرار ندارد.

مسیر $y = -x$:

$$f(x,y) = \frac{x+(-x)}{x-(-x)} = ۰$$

مسیر $(x, ۰)$:

$$f(x,y) = \frac{x}{x} = ۱$$

□

۱.۱۰ مشتقات جزئی

در ریاضی ۱ دیدیم که مشتق توابع تک متغیره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

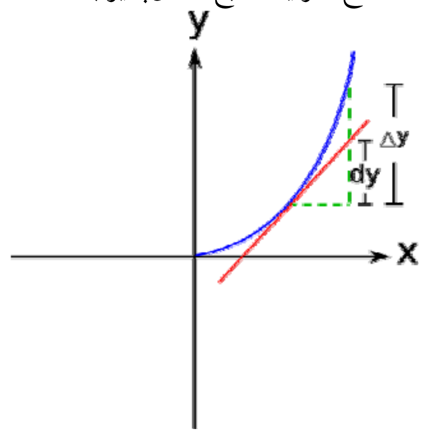
$$x_۰ \in Dom(f)$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x_۰ + h) - f(x_۰)}{h}$$

از روی مشتق، نیز «دیفرانسیل» یک تابع را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$dy = f'(x)dx$$

در واقع اگر یک تابع مشتق‌پذیر باشد، آنگاه Δy را می‌توان با استفاده از dy تقریب زد:

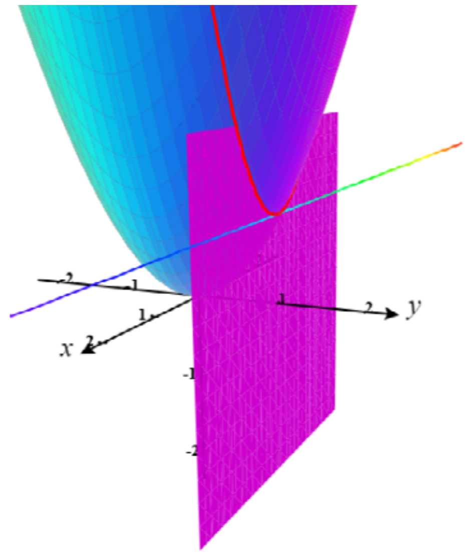


$$\Delta y \simeq dy$$

در واقع dy تغییر ارتفاع خط مماس را نشان می‌دهد و $\Delta(y)$ تغییر ارتفاع تابع را. در جلسات آینده خواهیم دید که برای یک تابع $z = f(x,y)$ نیز می‌توان dz را تعریف کرد و dz نیز قرار است تقریبی برای $\Delta(z)$ باشد. در آنجا خواهیم دید که dz تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد و $\Delta(z)$ تغییر ارتفاع تابع را. برای رسیدن به تعریفِ dz به مقدماتی نیازمندیم که آنها را در این جلسه و چند جلسه‌ی آینده فراهم آورده‌ایم.

مشتق جزئی تابع $f(x,y)$ **نسبت به متغیر** x **در نقطه‌ی** $(x_\circ, y_\circ) \in D$ به صورت زیر تعریف می‌شود: (در صورتی که حد زیر موجود باشد.)

$$\lim_{h \to \circ} \frac{f(x_\circ + h, y_\circ) - f(x_\circ, y_\circ)}{h}$$



۱.۱.۱۰ تعبیر هندسی

مشتق جزئی نسبت به متغیر x در نقطه‌ی (x_0, y_0) در واقع شیب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در اشتراک رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $y = y_0$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) است (به شکل بالا نگاه کنید).

نمادگذاری

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

در واقع، مشتق جزئی بر حسب x در نقطه‌ی (x_0, y_0) را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد: تابعِ $g(x) = f(x, y_0)$ را در نظر بگیرید و مشتق این تابع را بر حسبِ x در نقطه‌ی x_0 محاسبه کنید. در واقع، منحنی ایجاد شده در محل تقاطع صفحه‌ی $y = y_0$ و رویه‌ی $z = f(x, y)$ دارای معادله‌ی زیر است:

$$\begin{cases} z = g(x) = f(x, y_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

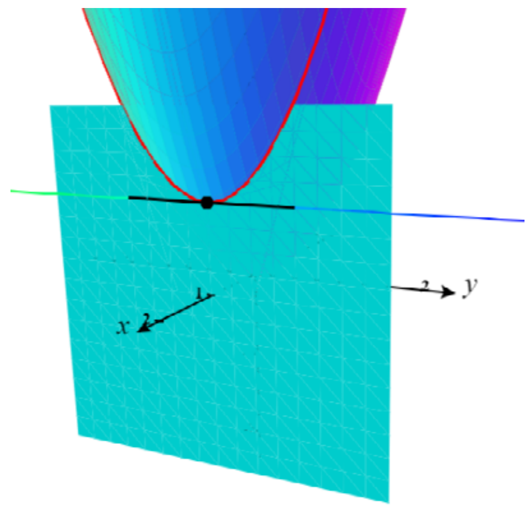
و مشتق جزئی بر حسب x در واقع شیب خط مماس بر منحنی بالاست در نقطه‌ی (x_0, y_0).

تعریف ۱۱۰.

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

در صورتی که این حد موجود باشد.

تمرین ۱۱۱. بر اساس شکل زیر $f_y(x_0, y_0)$ را تحلیل هندسی کنید.



مثال ۱۱۲. مشتقات جزئی اول توابع زیر را در نقطه‌ی $(x_0, y_0) = (4, 5)$ محاسبه کنید.

۱. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4, 5) = 23$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x + 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(4, 5) = 13$$

توجه ۱۱۳. فرض کنید $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ یک تابع دو متغیره باشد، آنگاه

$$f_x : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

$$(x_0, y_0) \mapsto f_x(x_0, y_0)$$

خودْ نیز تابعی دو متغیره است، و می‌توان درباره‌ی پیوستگی یا عدم پیوستگی آن در یک نقطه سخن گفت.

راه دوم.

$$f(x,۵) = x^۲ + ۱۵x + ۴ \Rightarrow f_x(x,۵) = ۲x + ۱۵ \Rightarrow f(۴,۵) = ۲۳$$

توجه ۱۱۴. تا کنون فهمیدیم که اگر $z = f(x,y)$ یک تابع باشد، و $(x_۰,y_۰) \in D(f)$ و قرار دهیم:

$$g(x) = f(x,y_۰)$$

آنگاه

$$g'(x_۰) = f_x(x_۰,y_۰)$$

و اگر قرار دهیم

$$h(y) = f(x_۰,y)$$

آنگاه

$$h'(y_۰) = f_y(x_۰,y_۰)$$

□

۲. $f(x,y) = y\sin(xy)$

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^۲\cos(xy) \Rightarrow f_x(۴,۵) = ۲۵\cos(۲۰)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xy) + xy\cos(xy) \Rightarrow f_y(۴,۵) = \sin(۲۰) + ۲۰\cos(۲۰)$$

□

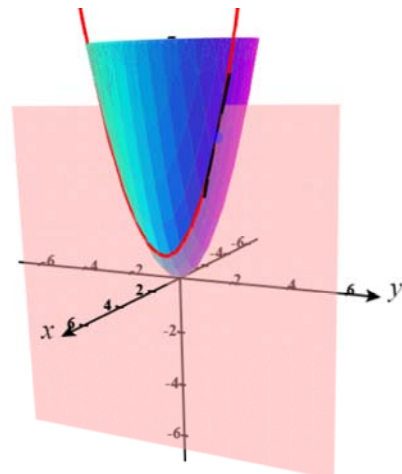
مثال ۱۱۵. صفحه‌ی $x = ۱$ سهمی‌وار $z = x^۲ + y^۲$ را در یک سهمی قطع می‌کند. شیب خط مماس بر این سهمی را در نقطه‌ی $(۱,۲,۵)$ بیابید.

پاسخ. داریم

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = ۲y$$

مطابق آنچه گفتیم، شیب خط مماس بر منحنی محل تلاقیِ صفحه‌ی $x = ۱$ و سهمی‌وار مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(۱, ۲) = ۴$$



$\square$

توجه ۱۱۶. در مثال بالا، در صفحه‌ی $x = ۱$ منحنی زیر را داریم:

$$\begin{cases} z = ۱ + y^۲ \\ x = ۱ \end{cases}$$

$$z'(۲) = ۲ \times ۲ = ۴$$

مثال ۱۱۷. معادله‌ی خط مماس بر منحنی محل اشتراک رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $y = y_۰$ را بنویسید.

مثال بالا را در جلسه‌ی بعد حل خواهیم کرد.