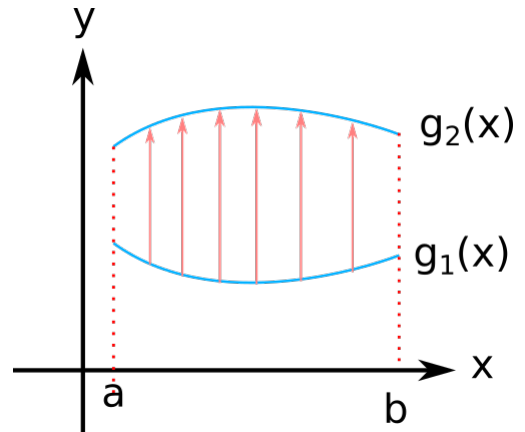


# ۱ نیم جلسه‌ی سی و سوم، چهارشنبه، انتگرالگیری در مختصات کروی

پیش از آنکه درس درباره‌ی مختصات کروی را آغاز کنیم، نیاز به رفع یک ابهام است. برای محاسبه‌ی مساحت هم می‌توان از انتگرال یکانه و هم دوگانه استفاده کرد. برای محاسبه‌ی حجم نیز هم می‌توان از انتگرال دوگانه و هم از انتگرال سه‌گانه به صورتهای زیر استفاده کرد:

## ۱.۰.۱ مساحت ناحیه‌ی محصور

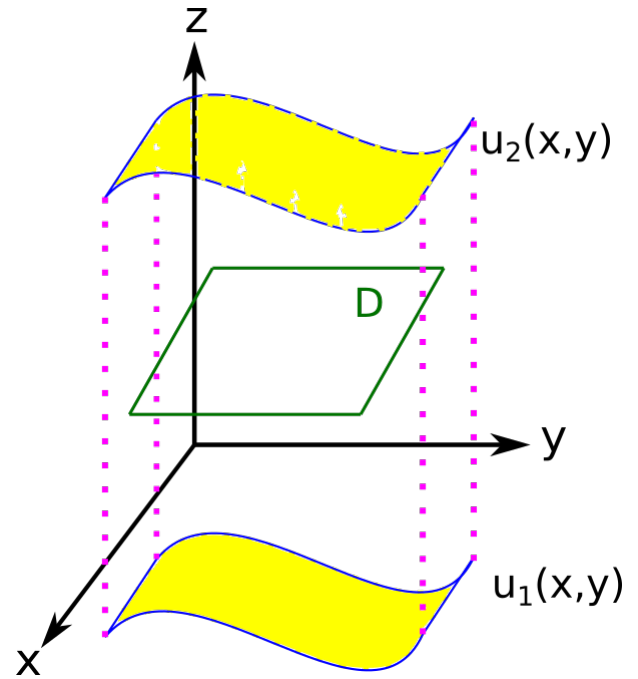


با استفاده از انتگرال یکانه:

$$\int_a^b |g_2(x) - g_1(x)| dx$$

با استفاده از انتگرال دوگانه:

$$\iint_A dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dA = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx$$



با استفاده از انتگرال دوگانه:

$$\iint_D (u_2(x,y) - u_1(x,y)) dA$$

با استفاده از انتگرال سه‌گانه:

$$\iiint_E dv = \iint_D \left( \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} dz \right) dA = \iint_D (u_2(x,y) - u_1(x,y)) dA$$

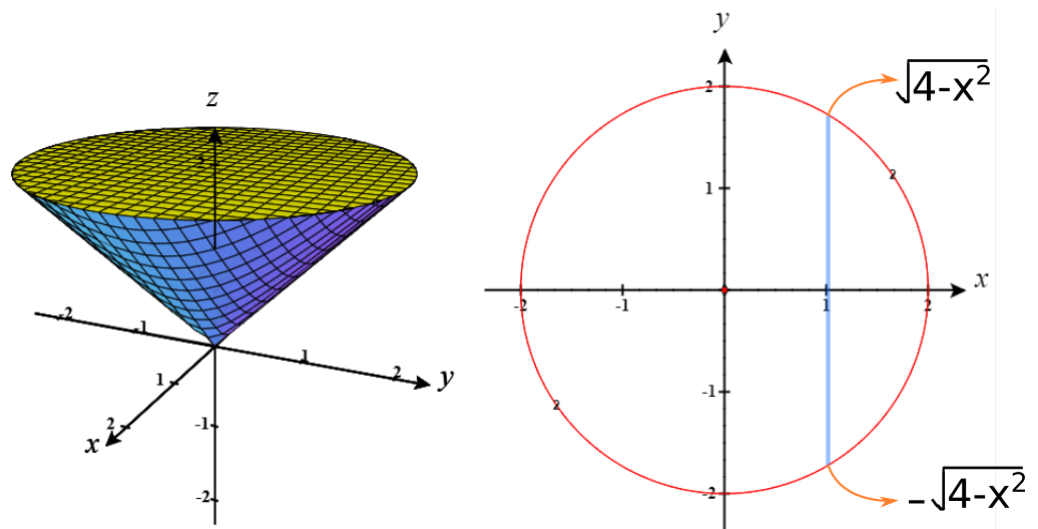
در جلسه‌ی قبل انتگرالگیری با استفاده از مختصات استوانه‌ای را بررسی کردیم:

$$\iiint_E \square dx dy dz = \iiint_E \square r dr d\theta dz$$

بگذارید این بحث را با مثالی به پایان ببریم:

مثال ۱.

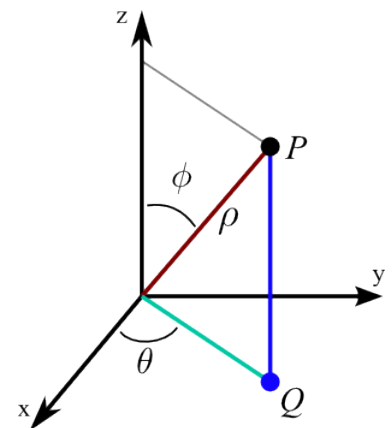
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$$



برای محاسبه‌ی انتگرال فوق کافی است انتگرال زیر را محاسبه کنیم. محاسبه‌ی آن را به عهده‌ی شما می‌گذاریم:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_r^2 (r^2) r dz dr d\theta = \dots$$

## ۱.۱ مختصات کروی



فاصله‌ی نقطه‌ی  $P$  تا مبدأ برابر است با  $\rho$ . مختصات نقطه‌ی  $(x, y, z)$  در دستگاه دکارتی را در دستگاه کروی به صورت  $(\rho, \theta, \phi)$  نشان می‌دهیم. با مختصات  $(\rho, \theta, \phi)$  که  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq \phi \leq \pi$  و  $\rho \geq 0$  می‌توان تمام هشت قسمت دستگاه مختصات سه بُعدی را پوشش داد.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \phi$$

$$x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

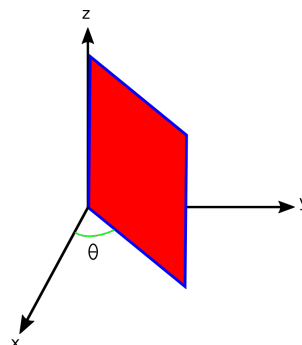
$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

معادله‌ی کره  $x^2 + y^2 + z^2 = c$  در دستگاه کروی به صورت زیر است:

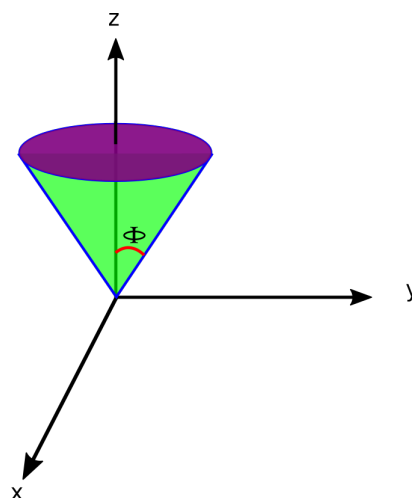
$$\rho = c$$

در زیر چند شکل با استفاده از دستگاه کروی کشیده شده‌اند.

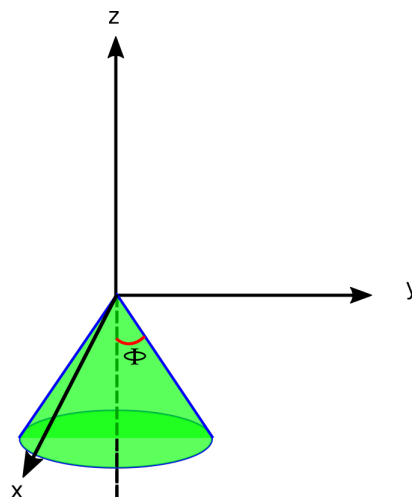
$$\theta = c$$



$$0 < \phi < \frac{\pi}{4}$$



$$\frac{3\pi}{4} < \phi < \pi$$

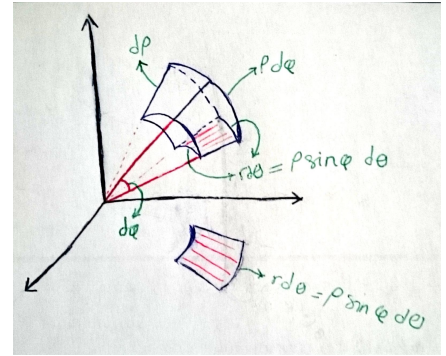


تغییرات متغیر لازم برای محاسبه‌ی انتگرال در مختصات کروی به صورت زیرند:

$$\iiint_E f(x, y, z) dv$$

$$dv = dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dv = \iiint_E f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$



مثال ۲. انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{1/3}} dv$$

که در آن:

$$B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

پاسخ.

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\rho^{1/3}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

$$\int_0^1 e^{\rho^{1/3}} \rho^2 \sin \phi d\rho = \sin \phi \left. \frac{e^{\rho^{1/3}}}{\frac{1}{3}} \right|_0^1 = \frac{\sin \phi}{3} (e - 1)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi}{3} (e - 1) d\theta = \frac{2\pi}{3} \sin \phi (e - 1)$$

$$\int_0^\pi \frac{2\pi}{3} \sin \phi (e - 1) d\phi = \frac{2\pi}{3} (e - 1) (-\cos \phi) \Big|_0^\pi$$

توجه ۳. اگر حدود انتگرالها مشخص باشد و هر تابعی تنها به یک متغیر بستگی داشته باشد، آنگاه

$$\int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x)g(y)h(z)dzdydx = \int_r^s h(z)dz \times \int_c^d g(y)dy \times \int_a^b f(x)dx$$

تمرین ۴. تمرینهای ۳۸ تا ۴۱ صفحه‌ی ۳۰ جزوه‌ی تمرینها را حل کنید.