توجه. این مطالب را جناب آقای دکتر بهرامی درباره‌ی بسط تیلور توابع دو متغیره نوشته و در اختیار کلاس ما قرار داده‌اند. هر چند یادگرفتن آنها برای امتحان، ضروری نیست، خواندنشان را اکیداً توصیه می‌کنم.

بسط تیلور توابع چندمتغیره

ابتدا مفهوم بسط تیلور را برای توابع حقیقی یک متغیره یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم ϕ تابعی حقیقی تعریف شده بر بازه‌ای از اعداد حقیقی حاوی دو عدد $t_۰$ و t باشد. اگر مشتق مرتبه $(n+۱)$ـ ام ϕ بر این بازه پیوسته باشد آنگاه عدد c بین $t_۰$ و t وجود دارد که

$$\phi(t)=\phi(t_۰)+\phi'(t_۰)(t-t_۰)+\frac{\phi''(t_۰)}{۲!}(t-t_۰)^۲+\cdots+\frac{\phi^{(n)}(t_۰)}{n!}(t-t_۰)^n+\frac{\phi^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(t-t_۰)^{n+۱}$$

به این ترتیب برای مقادیر t به اندازه کافی نزدیک $t_۰$،

$$\phi(t)\approx\phi(t_۰)+\phi'(t_۰)(t-t_۰)+\frac{\phi''(t_۰)}{۲!}(t-t_۰)^۲+\cdots+\frac{\phi^{(n)}(t_۰)}{n!}(t-t_۰)^n$$

در قضیهٔ زیر این خاصیت را برای توابع دومتغیره گسترش می‌دهیم.

قضیه. فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^۲$ و $f:D\to\mathbb{R}$ بر D مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبهٔ $n+۱$ داشته باشد. برای دو نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ و (x,y) در D با این خاصیت که پاره‌خط واصل بین دو نقطه در D قرار بگیرد، نقطهٔ (x^*,y^*) بر این پاره‌خط وجود دارد که

$$\begin{aligned}
f(x,y) \;=\;& f(x_۰,y_۰)+\big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_۰,y_۰)(y-y_۰)\big)\\
&+\frac{۱}{۲!}\big(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)^۲+۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)(y-y_۰)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x_۰,y_۰)(y-y_۰)^۲\big)\\
&\qquad\vdots\\
&+\frac{۱}{n!}\big(\sum_{k=۱}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)^{n-k}(y-y_۰)^k\big)\\
&+\frac{۱}{(n+۱)!}\big(\sum_{k=۱}^{n+۱}\frac{(n+۱)!}{k!(n+۱-k)!}\frac{\partial^{(n+۱)} f}{\partial x^{n+۱-k}\partial y^k}(x^*,y^*)(x-x_۰)^{n+۱-k}(y-y_۰)^k\big)
\end{aligned}$$

اثبات. فرض کنیم L خط گذرکننده از دو نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ و (x,y) باشد. در این صورت معادلات پارامتری L به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} x(t)=x_۰+t(x-x_۰) \\ y(t)=y_۰+t(y-y_۰) \end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

با توجه به فرض، $\{(x(t),y(t))\mid t\in[۰,۱]\}\subset D$. قرار می‌دهیم $\phi(t):=f\big(x(t),y(t)\big)$. در این صورت ϕ تابعی تعریف شده بر

$[۰,۱]$ بوده، بنابر قاعده رنجیری، برای هر t در این بازه

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)(x-x_۰)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)(y-y_۰)\\
\phi''(t) &= \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}\big(x(t),y(t)\big)(x-x_۰)^۲+۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}\big(x(t),y(t)\big)(x-x_۰)(y-y_۰)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}\big(x(t),y(t)\big)(y-y_۰)^۲\\
&\vdots\\
\phi^{(n)}(t) &= \sum_{k=۰}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\big(x(t),y(t)\big)(x-x_۰)^{n-k}(y-y_۰)^k\\
\phi^{(n+۱)}(t) &= \sum_{k=۰}^{n+۱}\frac{(n+۱)!}{(n+۱-k)!k!}\frac{\partial^{(n+۱)} f}{\partial x^{n+۱-k}\partial y^k}\big(x(t),y(t)\big)(x-x_۰)^{n+۱-k}(y-y_۰)^k
\end{aligned}$$

بنابر این ϕ بر بازهٔ $[۰,۱]$ مشتق مرتبهٔ $(n+۱)$ـام پیوسته دارد. بنابر بسط تیلور برای توابع یک متغیره، $c\in(۰,۱)$ وجود دارد که

$$\phi(۱)=\phi(۰)+\phi'(۰)(۱-۰)+\frac{\phi''(۰)}{۲!}(۱-۰)^۲+\cdots+\frac{\phi^{(n)}(۰)}{n!}(۱-۰)^n+\frac{\phi^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(۱-۰)^{(n+۱)}$$

با جایگذاری مقادیر در رابطهٔ فوق و معرفی $(x^*,y^*):=(x(c),y(c))$ نتیجه به دست می‌آید.

نتیجه. تحت شرایط قضیهٔ فوق، برای (x,y) نزدیک $(x_۰,y_۰)$،

$$\begin{aligned}
f(x,y)\approx f(x_۰,y_۰) &+ \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_۰,y_۰)(y-y_۰)\Big)\\
&+ \frac{۱}{۲!}\Big(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)^۲+۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)(y-y_۰)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x_۰,y_۰)(y-y_۰)^۲\Big)\\
&+ \cdots \quad +\frac{۱}{n!}\Big(\sum_{k=۱}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)^{n-k}(y-y_۰)^k\Big)
\end{aligned}$$

مثال. تابع f با ضابطهٔ $f(x,y)=\frac{۱}{\sqrt{x-y}}$ مفروض است. دامنهٔ تعریف این تابع برابر مجموعهٔ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \mid x>y\}$ است. به سادگی مشاهده می‌شود، f بر دامنهٔ تعریف خود دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه است. به این ترتیب، به طور مثال اگر بخواهیم مقدار f را در یک همسایگی از نقطهٔ $(۲,۱)$ با یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲ تقریب بزنیم آنگاه

$$\begin{aligned}
f(x,y)\approx f(۲,۱) &+ \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(۲,۱)(x-۲)+\frac{\partial f}{\partial y}(۲,۱)(y-۱)\Big)\\
&+ \frac{۱}{۲!}\Big(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۲,۱)(x-۲)^۲+۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۲,۱)(x-۲)(y-۱)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۲,۱)(y-۱)^۲\Big)
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{۱}{۲}(x-y)^{-\frac{۳}{۲}} \;\;,\;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{۱}{۲}(x-y)^{-\frac{۳}{۲}}$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x,y)=\frac{۳}{۴}(x-y)^{-\frac{۵}{۲}} \;\;,\;\; \frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(x,y)=-\frac{۳}{۴}(x-y)^{-\frac{۵}{۲}} \;\;,\;\; \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x,y)=\frac{۳}{۴}(x-y)^{-\frac{۵}{۲}}$$

خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۲,۱)=-\frac{۱}{۲}\,,\; \frac{\partial f}{\partial y}(۲,۱)=\frac{۱}{۲}\,,\; \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۲,۱)=\frac{۳}{۴}\,,\; \frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۲,۱)=-\frac{۳}{۴}\,,\; \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۲,۱)=\frac{۳}{۴}$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{\sqrt{x-y}}\approx ۱+\big(-\frac{۱}{۲}(x-۲)+\frac{۱}{۲}(y-۱)\big)+\frac{۱}{۲}\big(\frac{۳}{۴}(x-۲)^۲-\frac{۳}{۲}(x-۲)(y-۱)+\frac{۳}{۴}(y-۱)^۲\big)$$