۱ جلسه‌ی سی‌ودوم، انتگرالهای سه‌گانه

پیش از شروع درس مثال دیگری از تغییر متغیر حل می‌کنیم.

مثال ۱. انتگرال دوگانه‌ی زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$$\iint_D \frac{x^2 \sin(xy)}{y} dA$$

D ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $x^2 = \pi y$ و $x^2 = \frac{\pi y}{2}$ و $y^2 = x$ و $y^2 = \frac{x}{2}$ است.

پاسخ.

$$u = \frac{x^2}{y} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \pi$$

$$v = \frac{y^2}{x} \quad \frac{1}{2} \leqslant v \leqslant 1$$

$$uv = \frac{x^2 y^2}{xy} = xy$$

$$\iint_D \frac{x^2 \sin(xy)}{y} dA = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} u \sin(uv) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dv du$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$y^2 = vx \Rightarrow x = \frac{y^2}{v}$$

$$x^2 = uy \Rightarrow \frac{y^4}{v^2} = uy \Rightarrow y = v^{\frac{2}{3}} u^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{y^2}{v} \Rightarrow x = v^{\frac{1}{3}} u^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = u^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} v^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2}{3} v^{-\frac{1}{3}} \cdot u^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = v^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} v^{-\frac{1}{3}} \cdot u^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} v^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} u \sin(uv) \cdot \frac{1}{3} dv du$$

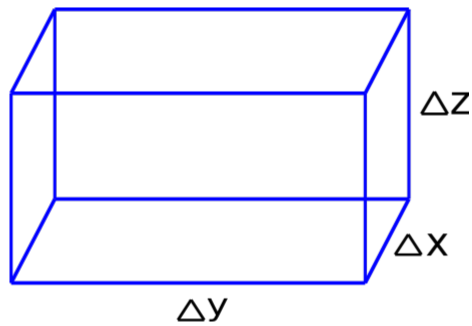
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} u \sin(uv) \cdot \frac{1}{3} dv = \cos(uv)\big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \cos u - \cos \frac{u}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos u - \cos \frac{u}{2}) du = \dots$$

□

۱.۱ انتگرال‌های سه‌گانه

فرض کنید B یک ناحیه‌ی مکعبی با حدود معلوم زیر باشد و f تابعی از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}$ باشد:



$$B = \{a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, r \leqslant z \leqslant s\}$$

تعریف می‌کنیم:

$$\iiint_B f(x,y,z)dv =$$

$$\int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)dzdydx = \int_a^b \left(\int_c^d \Big(\int_r^s f(x,y,z)dz \Big) dy \right) dx$$

مثال ۲. انتگرال $\iiint_B xyz^2 dv$ را محاسبه کنید که در آن ناحیه‌ی B به صورت زیر است:

$$B = \{(x,y,z) | 0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 3\}$$

$$\int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dxdydz$$

$$\int_0^1 xyz^2 dx = \frac{x^2}{2} yz^2 |_0^1 = \frac{1}{2} yz^2$$

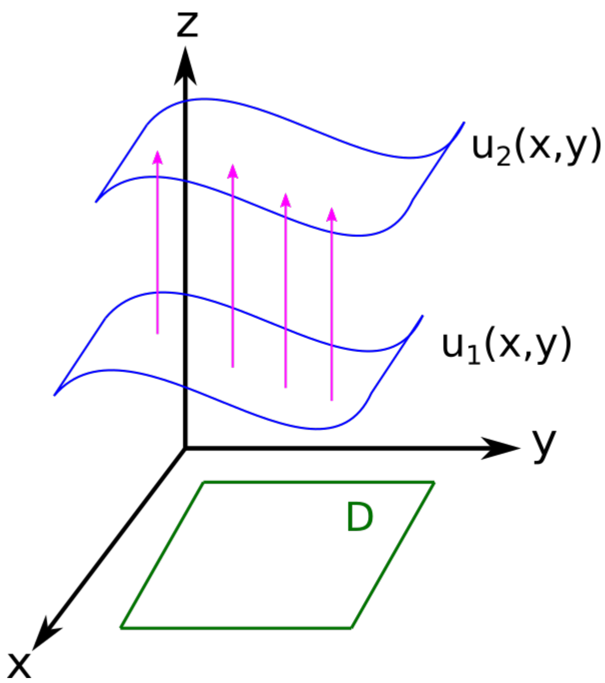
$$\int_{-1}^2 \frac{1}{2} yz^2 dy = \frac{y^2}{4} z^2 |_{-1}^2 = z^2 - \frac{z^2}{4} = \frac{3z^2}{4}$$

$$\int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz = \frac{z^3}{4} |_0^3 = \frac{27}{4}$$

انتگرالگیری سه‌گانه تنها روی نواحی مکعبی صورت نمی‌گیرد. انتگرالگیری روی نواحی کلی کار آسانی نیست ولی اگر خوش‌شانس باشیم ناحیه‌ی انتگرالگیری ما ممکن است به صورت ساده‌تری باشد.

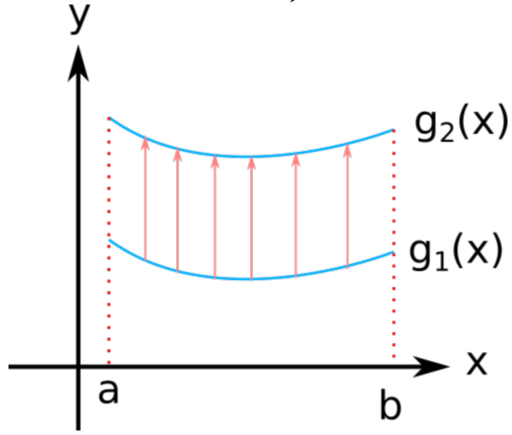
۱.۱.۱ نواحی ساده‌تر

$$B = \{(x,y,z) | (x,y) \in D, u_1(x,y) \leqslant z \leqslant u_2(x,y)\}$$



$$\iiint_B f(x,y,z)dv = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dA$$

باز ممکن است خودِ ناحیه‌ی D نیز به صورت زیر باشد:



آنگاه خواهیم داشت:

$$\iiint_B f(x,y,z)dv = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

وضعیتی که در بالا شرح داده شد، ممکن است با یک جابه‌جائی متغیرها برقرار باشد. مثلاً ممکن است ناحیه‌ی انتگرالگیری به صورت زیر باشد:

$$c \leq y \leq d \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \quad u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)$$

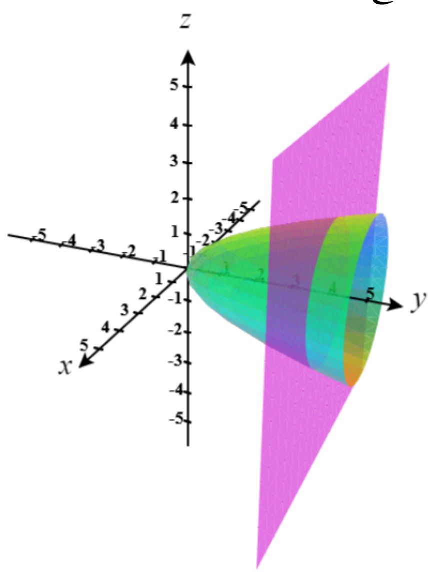
یا به صورت زیر:

$$r \leq z \leq s \quad g_1(z) \leq x \leq g_2(z) \quad u_1(x,z) \leq y \leq u_2(x,z)$$

سایر نواحی ممکن را شما بررسی و ترسیم کنید. همه‌ی آنچه درباره‌ی انتگرالگیری دوگانه فراگرفته‌ایم در محاسبه‌ی انتگرالهای سه‌گانه به کارمان می‌آید:

مثال ۳. $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}dv$ را محاسبه کنید که در آن E ناحیه‌ی محدود به سهمی‌وارِ $y = x^2 + z^2$ و صفحه‌ی $y = 4$ است.

پاسخ.



ابتدا انتگرالی را که باید محاسبه کنیم به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\iint_D \left(\int_{x^۲+z^۲}^{۴} \sqrt{x^۲+z^۲}\,dy\right)dxdz = \iint_D \left(y\sqrt{x^۲+z^۲}\Big|_{x^۲+z^۲}^{۴}\right)dxdz =$$

$$\iint_D \left(۴\sqrt{x^۲+z^۲} - (x^۲+z^۲)\sqrt{x^۲+z^۲}\right)dxdz$$

پس از اینجا به بعد با یک انتگرال دوگانه مواجهیم که آن را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}(۴r-r^۳)rdrd\theta = ۲\pi\int_۰^{۲}(۴r^۲-r^۴)dr = \ldots$$ محاسبات پایانی به عهده‌ی شما

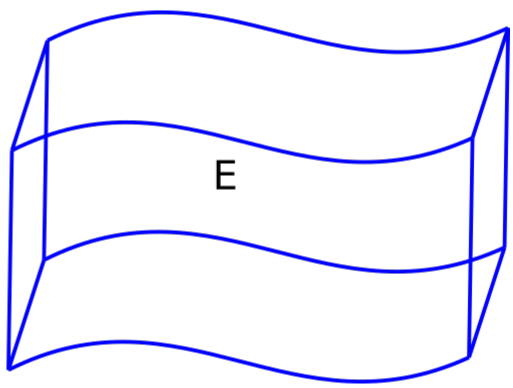
□

تمرین ۴. انتگرال $\int_۰^۱\int_۰^{x^۲}\int_۰^{y} f(x,y,z)dzdydx$ را به صورت $\iiint f(x,y,z)dxdzdy$ بنویسید.

توجه ۵. در درسهای پیشین روشی برای محاسبه‌ی حجم با استفاده از انتگرال دوگانه ارائه کردیم ولی محاسبه‌ی احجام با استفاده از انتگرال سه‌گانه غالباً راحت‌تر است.

حجم ناحیه‌ی سه بُعدی E با فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$v = \iiint_E dv$$

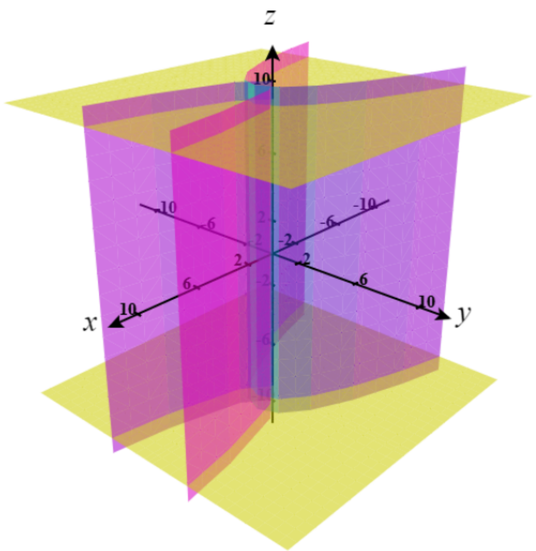


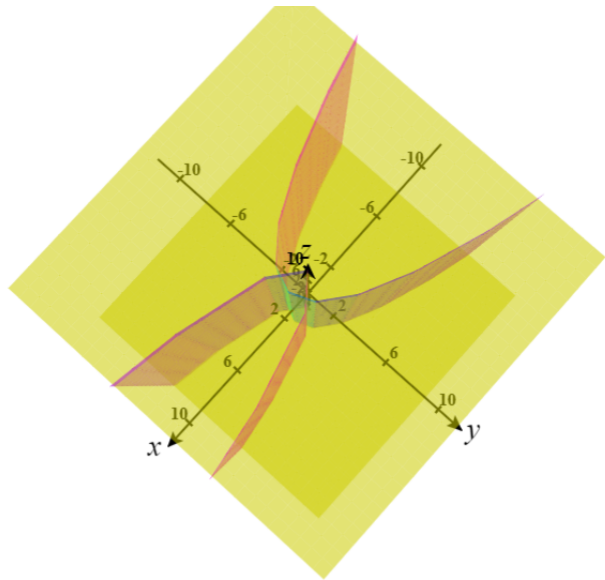
مثال ۶. حجم ناحیه‌ی محدود به استوانه‌ی $y^2 = 4 - 3x$ و $y^2 = x$ و صفحات $z = -9$ و $z = 9$ را محاسبه کنید.

پاسخ. حجم مورد نظر برابر است با

$$\iint_D \left(\int_{-9}^{9} dz\right) dA = \iint_D 18 dA = 18 \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{\frac{4-y^2}{3}} dxdy =$$

$$18 \int_{-1}^{1} \Big(\frac{4 - y^2}{3} - y^2\Big) dy = \ldots \text{ محاسبه‌ی پایانی به عهده‌ی شما}$$

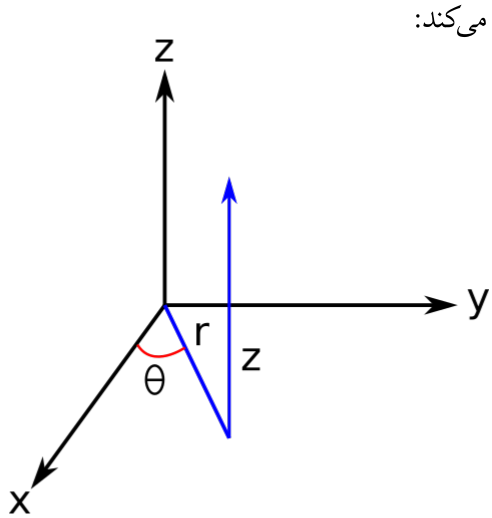




□

۲.۱ مختصات استوانه‌ای

برای محاسبه‌ی انتگرالهای سه‌گانه برای احجامی که حول یک محور، حالت استوانه‌ای دارند، تغییر متغیر استوانه‌ای کار را آسانتر می‌کند:



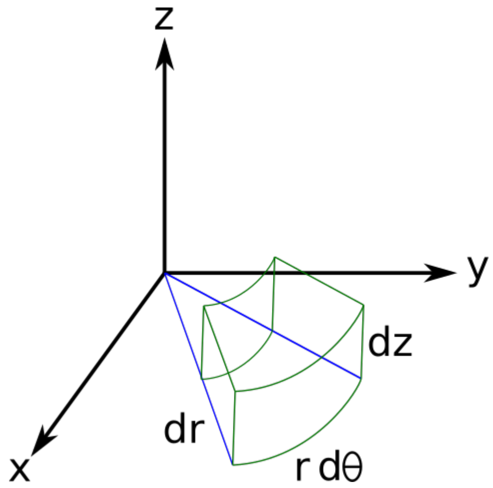
$$(x, y, z) \cong (r, \theta, z)$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

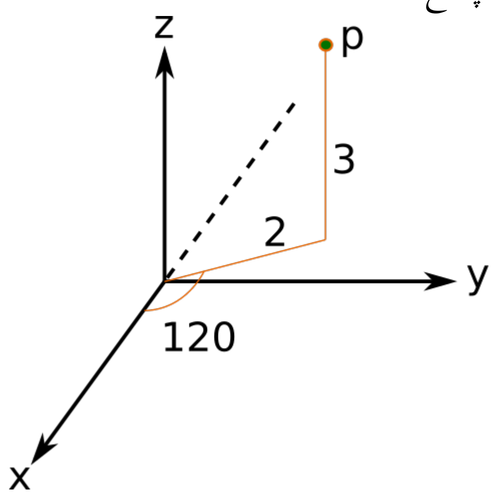
$$z = z$$

به وجود r دقت کنید $\quad dv = dxdydz \approx rdrd\theta dz$



مثال ۷. نقطه‌ی $(۲, \frac{۲\pi}{۳}, ۳)$ را در مختصات استوانه‌ای مشخص کنید.

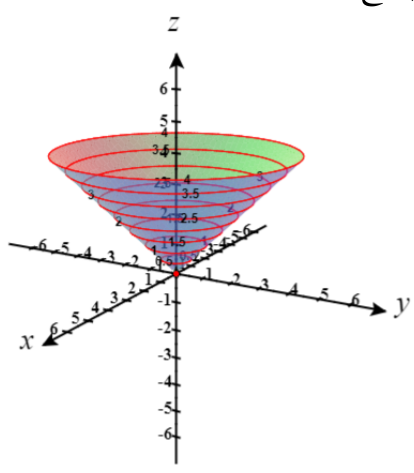
پاسخ.



□

مثال ۸. رویه‌ی $z = r$ را رسم کنید.

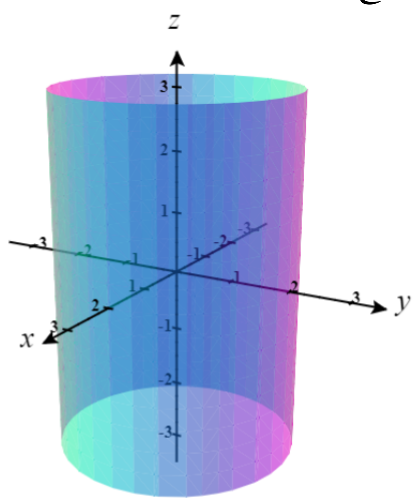
پاسخ.



□

مثال ۹. رویه‌ی $r = ۲$ را رسم کنید.

پاسخ.



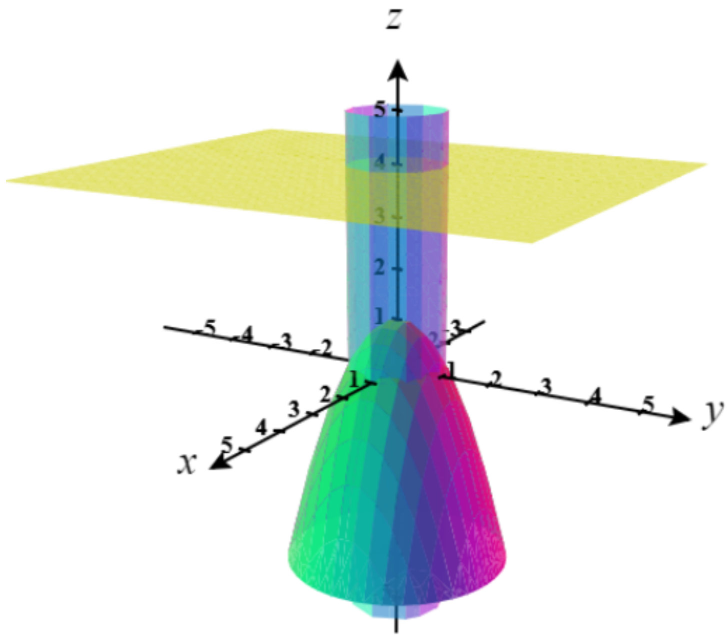
□

مثال ۱۰. جسم E داخل استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ و زیر صفحه‌ی $z = ۴$ و بالای سهمی‌وار $z = ۱ - x^۲ - y^۲$ واقع شده است. چگالی این جسم در هر نقطه رابطه‌ی خطی زیر را با فاصله‌ی آن نقطه تا محور مرکزی استوانه دارد.

$$f(x, y, z) = \underbrace{K}_{\text{ثابت}} r$$

جرم جسم را بیابید.

پاسخ.



$$\iiint_E Krdv = \int_۰^{۲\pi} \int_۰^{۱} \int_{۱-r^۲}^{۴} (Kr) rdzdrd\theta = \dots$$

□

تمرینهای تمرین ۳۷، ۳۸ در صفحه‌ی ۳۰ جزوه‌ی تمرینها را حل کنید.