۱ دامنه‌ی توابع

۱. دامنه‌ی تابع $f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲-۴}}$ کدامیک از موارد زیر است؟

الف) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲>۴\}$

ب) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲<۴\}\cup\{(x,۰)\in\mathbb{R}^۲ : x<-۲$ یا $x>۲\}$

ج) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲<۴\}$

د) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲>۴\}\cup\{(x,۰)\in\mathbb{R}^۲ : -۲<x<۲\}$

---

۲ رویه‌ها

۲. مجموعه‌ی نقاطی در $\mathbb{R}^۳$ که فاصله‌ی آنها تا محور x دو برابرِ فاصله‌شان تا صفحه‌ی yz است، به کدام صورت زیر است؟

الف) مخروط

ب) سهمی‌وار هذلولوی (زین اسبی)

ج) سهمی‌گون

د) هذلولیگونِ دوپارچه

---

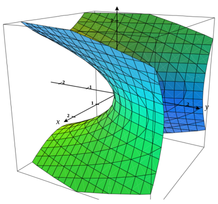
۳. رویه‌ی درجه‌ی ۲ به معادله‌ی $x^۲+y^۲-z^۲+۲x-۲y+۴z=۰$ کدامیک از رویه‌های زیر است؟

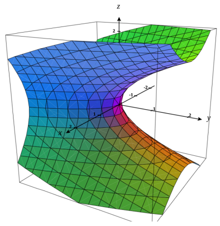
الف) بیضیگون ب) هذلولیگون یک پارچه ج) مخروط د) هذلولیگون دوپارچه

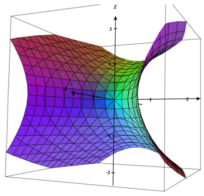
---

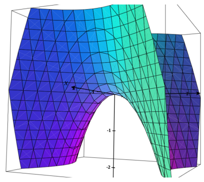
۴. کدامیک از نمودارهای زیر مربوط به معادله‌ی $y=x^۲-z^۲$ است؟ (جهت محورها استاندارد در نظر گرفته شده است)

الف)



ب) 

ج) 

د) 

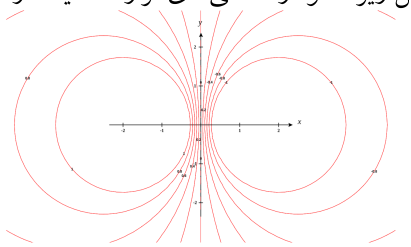
---

۵. معادله رویه‌ی حاصل از دوران خم $x = y^۲$ در صفحه xy حول محور x برابر است با

الف) $x = y^۲ + z^۲$ ب) $\sqrt{x^۲ + z^۲} = y^۲$ ج) $x^۲ + z^۲ = y^۲$ د) $x = \sqrt{y^۲ + z^۲}$

---

۶. شکل زیر، نمودار منحنی‌های تراز کدامیک از معادله‌های زیر است؟



الف) $z = \frac{-۴x}{x^۲+y^۲+۱}$

ب) $z = \frac{۷xy}{e^{x^۲+y^۲}}$

ج) $۴x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲ = ۹$.

د) $x^۲ - y^۲ - z^۲ - ۴x - ۲z + ۳ = ۰$.

---

۷. کدامیک از موارد زیر رویه‌ی $x^۲ + Z^۲ = y^۲ + ۲x - ۴z - ۴$ را توصیف می‌کند؟

الف) هذلولی‌گون بیضوی دوپارچه.   ب) هذلولی‌گون بیضوی یکپارچه.

ج) کره.   د) سهمی‌گون بیضوی.

۸. رویهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ $۱۶x^۲ + ۹y^۲ - ۱۶z^۲ - ۳۲x - ۳۶y + ۳۶ = ۰$ کدام یک از رویه‌های زیر است؟

الف) بیضی‌گون ب) هذلولی‌گون دوپارچه ج) هذلولی‌گون یک پارچه د)مخروط

---

۹. رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $yx^۲ = ۱$ حول محور y دارای کدامیک از معادلات زیر است؟

الف) $x = \frac{۱}{\sqrt{y^۲+z^۲}}$ ب) $y = \frac{-۱}{\sqrt{x^۲+z^۲}}$

ج) $y = \frac{۱}{x^۲+z^۲}$ د) $y = \frac{۱}{\sqrt{x^۲+z^۲}}$

---

۳ حد و پیوستگی

۱۰. در مورد حد تابع $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{۳x^۲ - xy}{x^۲ + y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ کدامیک از موارد زیر صحیح است؟

الف) در همه‌ی نقاط صفحه دارای حد است. ب) در هیچ نقطه‌ای از صفحه حد ندارد.

ج) تنها در مبدا حد ندارد. د) فقط در مبدا حد دارد.

---

۱۱. کدامیک از توابع زیر در نقطه‌ی $(۰,۰)$ حد ندارد؟

الف) $f(x,y) = \dfrac{xy^۲}{x^۲ + y^۲}$ ب) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^۳)}{x^۲ + y^۲}$ ج) $f(x,y) = \dfrac{xy^۳}{x^۲ + y^۶}$ د) $f(x,y) = \dfrac{x^۲}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}$.

---

۱۲. برای تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & y = ۰ \\ \frac{۲x^۳}{x^۲+y^۲} & y \neq ۰ \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

الف) در نقاط $(۰,۰)$ و $(۱,۰)$ پیوسته است.

ب) در نقاط $(۰,۰)$ و $(۱,۰)$ ناپیوسته است.

ج) در نقطه $(۰,۰)$ پیوسته و در نقطه $(۱,۰)$ ناپیوسته است.

د) در نقطه $(۰,۰)$ ناپیوسته و در نقطه $(۱,۰)$ پیوسته است.

---

۱۳. فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^۴+y^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$. در مورد تابع f کدام گزینه درست است؟

الف) f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ پیوسته است ولی هیچ یک از مقادیر $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ وجود ندارند.

ب) $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ وجود ندارد.

ج) f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ ناپیوسته است.

د) f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ پیوسته است و $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ هر دو وجود دارند.

---

۴ مشتقات جزئی

۱۴. کدامیک از موارد زیر در مورد تابعِ $z=f(x,y)$ درست است؟

الف) در صورت وجود مشتقات جزئی دوم، همواره داریم $f_{xy}=f_{yx}$.

ب) در صورتی که مشتقات جزئی دوم وجود داشته باشند و مشتقات جزئی اول در یک همسایگی از نقطه‌ای پیوسته باشند، در آن همسایگی داریم $f_{xy}=f_{yx}$.

ج) هرگاه مشتقات جزئی اول در نقطه‌ای موجود باشند، تابع در آن نقطه پیوسته است.

د) هیچکدام

---

۱۵. کدامیک از موارد زیر در مورد تابعِ $z=f(x,y)$ درست است؟

الف) اگر مشتقات جزئی اول تابع در نقطه‌ای موجود باشند، تابع در آن نقطه دیفرانسیل‌پذیر است و دیفرانسیل کلی آن به صورت $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ است.

ب) اگر مشتقات جزئی اول تابع در نقطه‌ای موجود باشند، تابع در آن نقطه پیوسته است.

ج) اگر تابع در نقطه‌ای دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه در نزدیکی آن نقطه، dz تقریب مناسبی برای Δz است.

د)همه‌ی موارد

---

۱۶. تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^۴}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ مفروض است. کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۰,۰)=۲$ ب) $\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)=۱$ ج) $\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰)=۲$ د) $\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۰,۰)=۱$.

۱۷. برای تابع $f:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz-z^۳}{x^۲+y^۲+z^۲} & (x,y,z)\neq(۰,۰,۰)\\ ۰ & (x,y,z)=(۰,۰,۰)\end{cases}$ کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰,۰)=۱ \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰,۰)=۰$ ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰,۰)=۰ \ , \ \frac{\partial f}{\partial z}(۰,۰,۰)=۰$

ج) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰,۰)=۰ \ , \ \frac{\partial f}{\partial z}(۰,۰,۰)=-۱$ د) $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰,۰)=-۱ \ , \ \frac{\partial f}{\partial z}(۰,۰,۰)=۰$

---

۱۸. فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\left(y\sin(xy)+\sqrt{x^۲+y^۲}\right)}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & x^۲+y^۲\neq ۰\\ ۰ & x^۲+y^۲=۰\end{cases}$ در اینصورت داریم

الف) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=۰$ ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=۱$

ج) $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=۰$ و $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=۱$ د) $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=۱$ و $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=۰$
