۱ نیم‌جلسه‌ی ششم، چهارشنبه

۱.۱ پاسخ سوال

سوال ۱ (سوال دانشجویان). معادله‌ی $z = y + x^{۲}$ را چگونه رسم کنیم؟ این معادله جزو معادله‌هائی که دسته‌بندی کرده‌ایم نیست.

معادله‌ی بالا به ظاهر جزو معادله‌های دسته‌بندی شده نیست، اما در حقیقت معادله‌ی یک استوانه است که دوران یافته است. پیش از آنکه این سوال را پاسخ گوئیم، بیائید یک مشاهده درباره‌ی معادله‌ی $z = x^{۲} + y^{۲}$ داشته باشیم (که از آن مشاهده برای رسم معادله‌ی $z = y + x^{۲}$ استفاده خواهیم کرد).

مشاهده ۲.

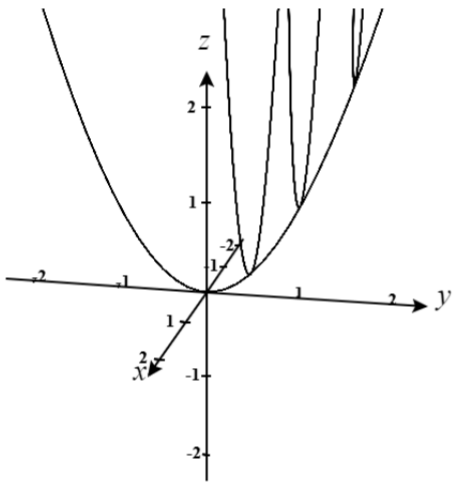
$$z = x^{۲} + y^{۲}$$

تصاویر ایجاد شده روی صفحاتِ $y = k$ در نظر بگیرید:

$$y = \frac{۱}{۲} \Rightarrow z = x^{۲} + \frac{۱}{۴}$$

$$y = ۱ \Rightarrow z = x^{۲} + ۱$$

$$y = \frac{۳}{۲} \Rightarrow z = x^{۲} + \frac{۹}{۴}$$



در واقع اگر همزمان تصاویر ایجاد شده روی همه‌ی صفحاتِ $y = k$ را رسم کنیم به شکل مورد

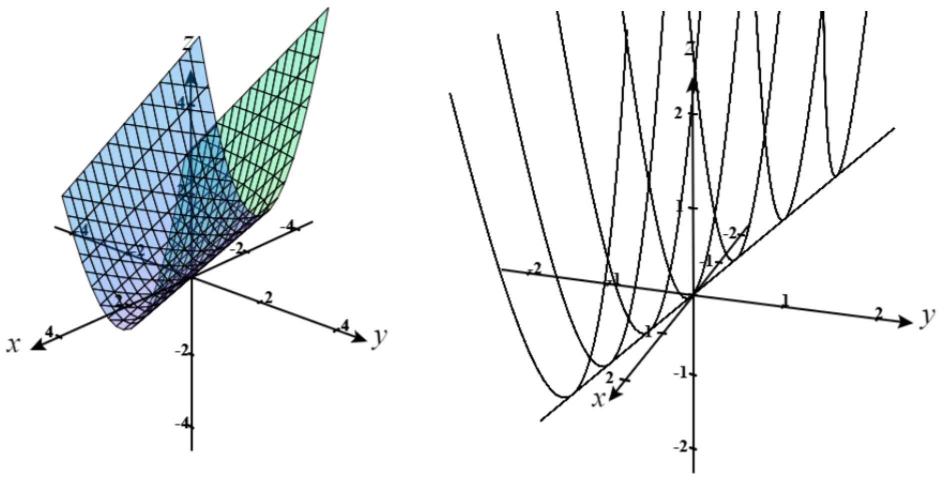
نظر می‌رسیم. روی صفحه‌ی $y = k$ منحنیِ $z = k^2 + x^2$ ایجاد می‌شود. برای رسم این منحنی، کافی است روی صفحه‌ی $y = k$ به اندازه‌ی k^2 با شروع از نقطه‌ی $(0, k)$ به سمت محور z بالا برویم و از آنجا، منحنیِ $z = x^2$ را رسم کنیم (یعنی پائین ترین نقطه‌ی سهمی، نقطه‌ی $z = k^2$ باشد). برای به اندازه‌ی k^2 بالا رفتن روی صفحه‌ی $y = k$ کافی است نقطه‌ی اشتراک این صفحه را با منحنی $z = x^2$ (در صفحه‌ی zx) در نظر بگیریم.

حال سوال مورد نظر را پاسخ می‌گوئیم:

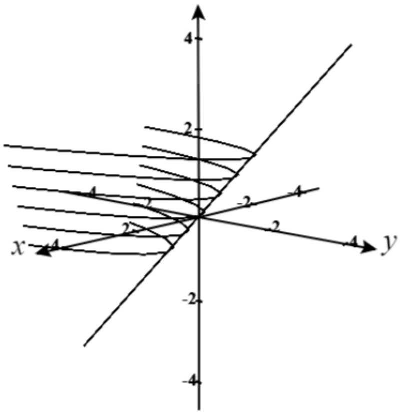
مثال ۳. رویه‌ی $z = y + x^2$ را رسم کنید.

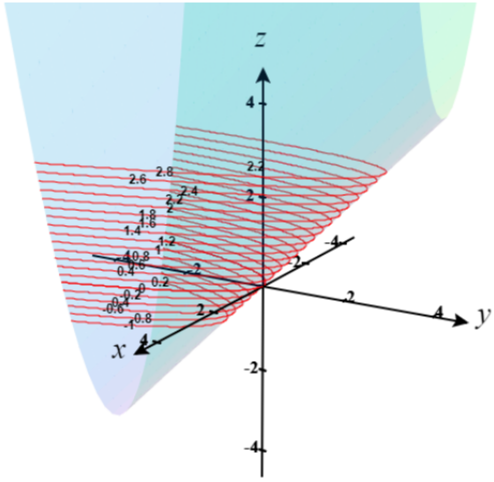
این شکل (با توضیحی مشابه بالا) از کشیدنِ سهمی‌های $z = x^2$ روی خطِ $z = y$ ایجاد می‌شود. پس یک استوانه‌ی موازیِ خطِ $z = y, x = 0$ است.

پاسخ.



به طور مشابه، مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $z = x + y^2$ به صورت زیر است:





□

۲.۱ ادامه‌ی مبحث منحنی‌های تراز

مثال ۴. منحنی‌های تراز تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱. $h(x,y) = 4x^2 + y^2 + 1$

پاسخ.

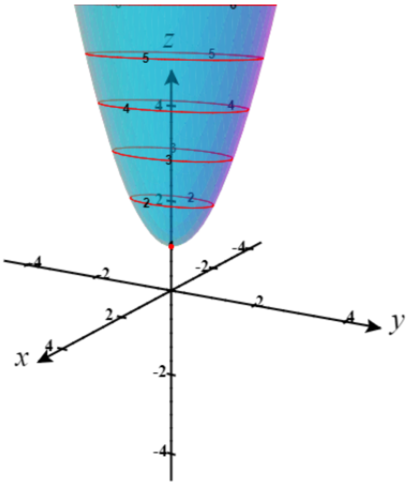
$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

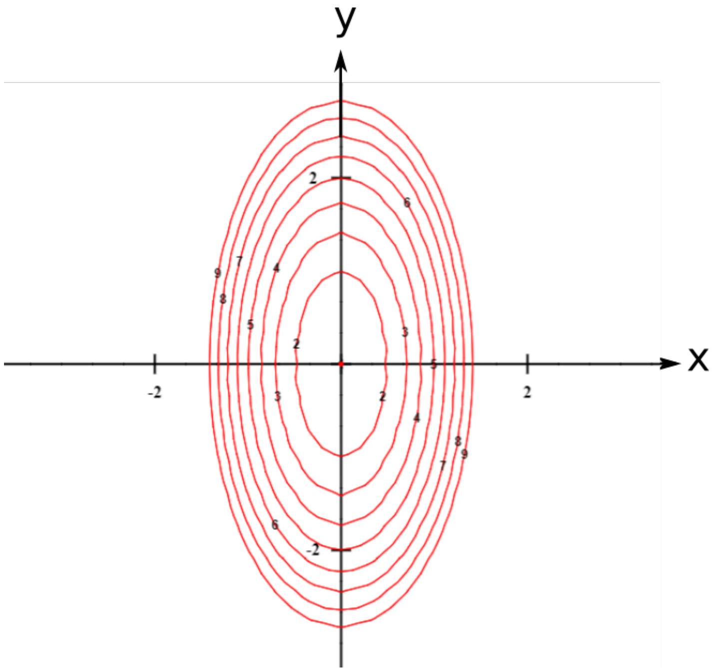
در $z < 1$ شکلی ایجاد نمی‌شود.

$$z = 1 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$z = 2 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1$$

$$z = 5 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$





توجه ۵. در معادله‌ی بالا، در صفحه‌ی $x = ۰$ سهمی زیر را داریم:

$$\begin{cases} x = ۰ \\ z = f(y) = y^۲ + ۱ \end{cases}$$

نقطه‌ی $(۰, ۰, ۱)$ یک مینی‌موم نسبی برای سهمی یادشده است. پس در این نقطه داریم $f'(y) = ۰$. این نکته را در بخش مشتقهای جزئی مفصلاً بررسی خواهیم کرد.

□

۲. $z = xy$

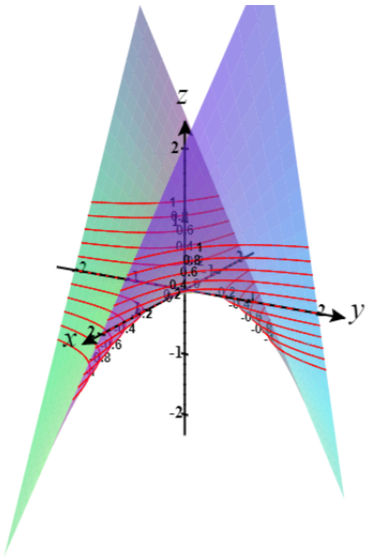
پاسخ.

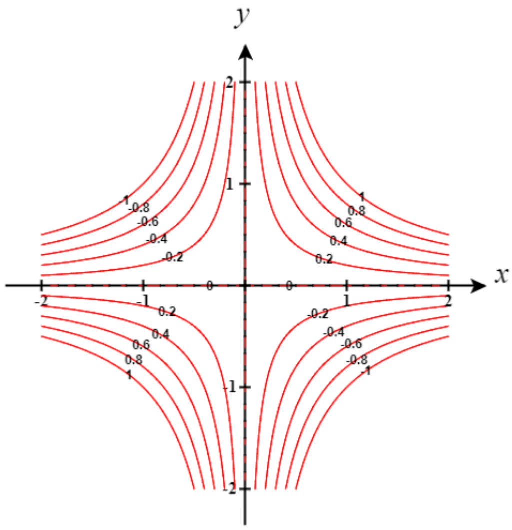
$$z = ۰ \Rightarrow xy = ۰$$

پس در $z = ۰$ داریم: $x = ۰$ یا $y = ۰$.

$$z = ۱ \Rightarrow xy = ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{x}$$

$$z = -۱ \Rightarrow xy = -۱ \Rightarrow y = -\frac{۱}{x}$$
$$z = ۲ \Rightarrow xy = ۲ \Rightarrow y = \frac{۲}{x}$$





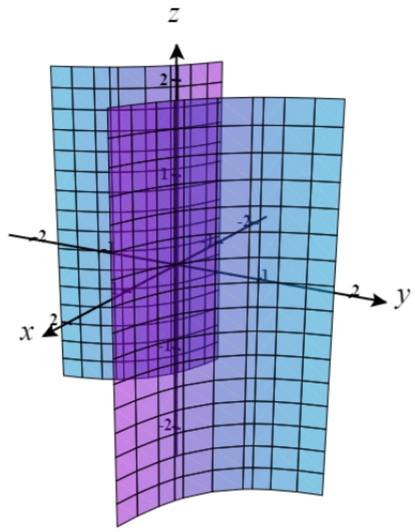
□

۳.۱ پاسخ سوال

دو رویه‌ی $z = xy$ و $xy = ۱$ را رسم کنید.

سوال ۶. رویه‌ی $xy = ۱$ را رسم کنید.

پاسخ. توجه کنید که معادله‌ی بالا، به z بستگی ندارد. پس یک استوانه است موازی محور z، که سطح مقطع آن منحنیِ $y = \frac{۱}{x}$ است.



$\square$

سوال ۷. رویه‌ی $z = xy$ را رسم کنید.

پاسخ. (همان طور که در دوره‌ی دبیرستان آموخته‌اید) اگر محورهای x و y را بطور همزمان به اندازه‌ی θ دوران دهیم (یعنی صفحه‌ی xy را به اندازه‌ی θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم): داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' - y')$$

$$y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' - y')$$

$$z = xy \Rightarrow z = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' - y') \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' + y') = \frac{۱}{۲}(x'^{۲} - y'^{۲})$$

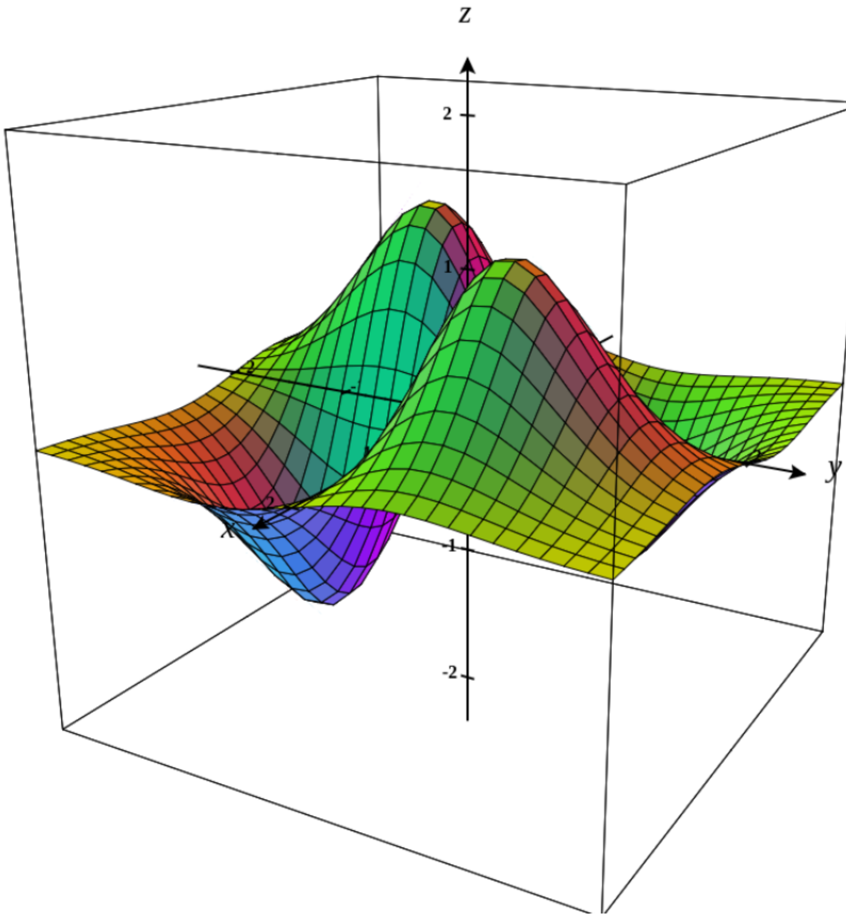
پس معادله‌ی جدید به صورت زیر است:

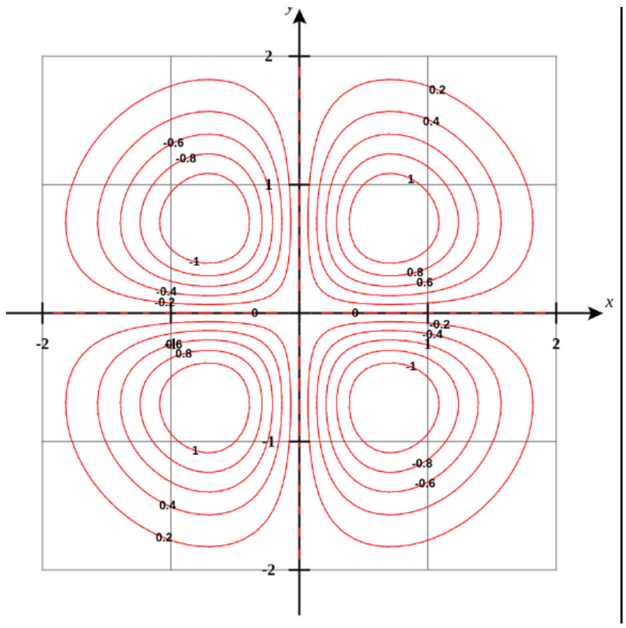
$$z = \frac{۱}{۲}(x'^{۲} - y'^{۲})$$

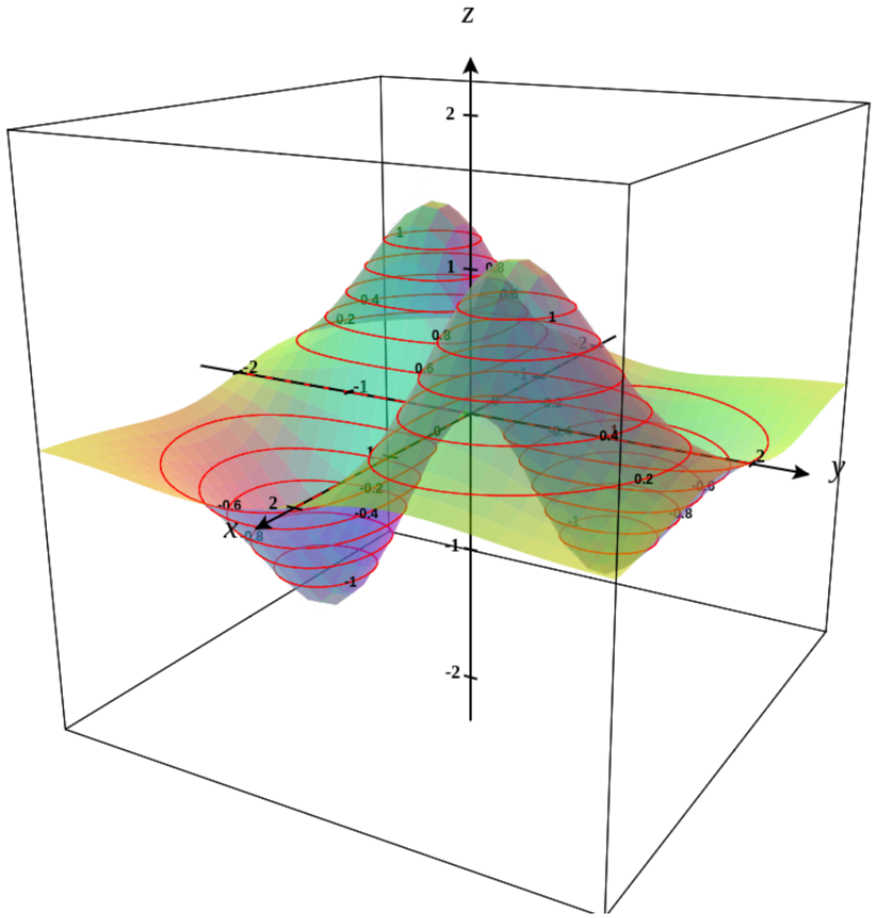
پس شکل بالا از دورانِ سهمی‌وار هذلولویِ $z = x^{۲} - y^{۲}$ به اندازه‌ی ۴۵ درجه روی صفحه‌ی xy به دست می‌آید (تصویر مورد نظر را در مثال منحنی‌های تراز در بالا کشیده‌ایم). $\square$

سوال ۸. منحنی‌های تراز توابع زیر را با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای رسم کنید:

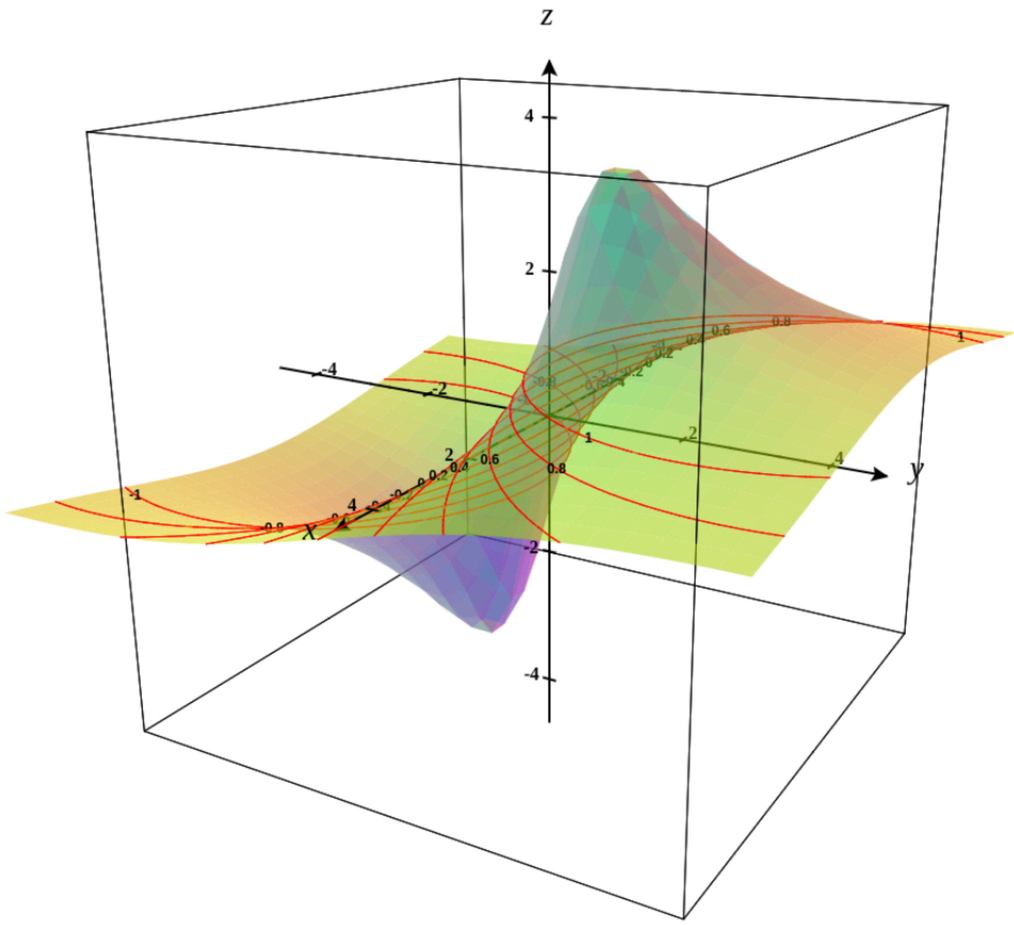
۱. $f(x,y)=\frac{۷xy}{e^{x^۲+y^۲}}$

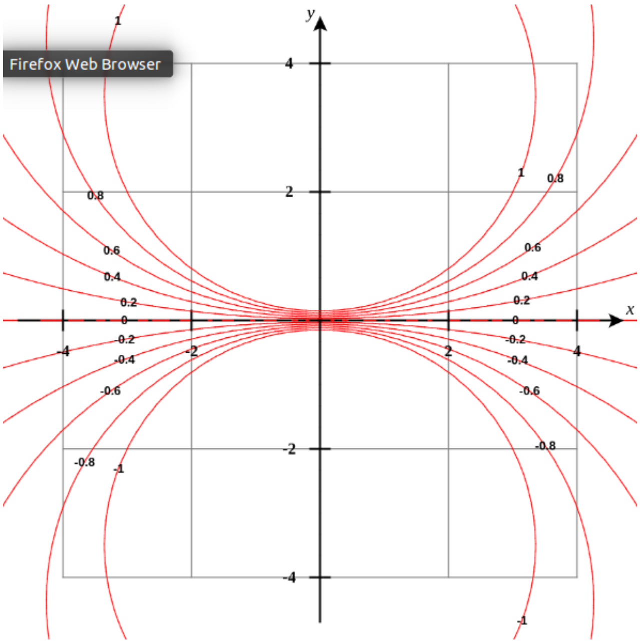






۲. $f(x,y)=\frac{۷y}{x^{۲}+y^{۲}+۱}$





۴.۱ تمرین

تمرین ۹. منحنی‌های تراز توابع زیر را رسم کنید:

- $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$
- $f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$

۵.۱ حد و پیوستگی

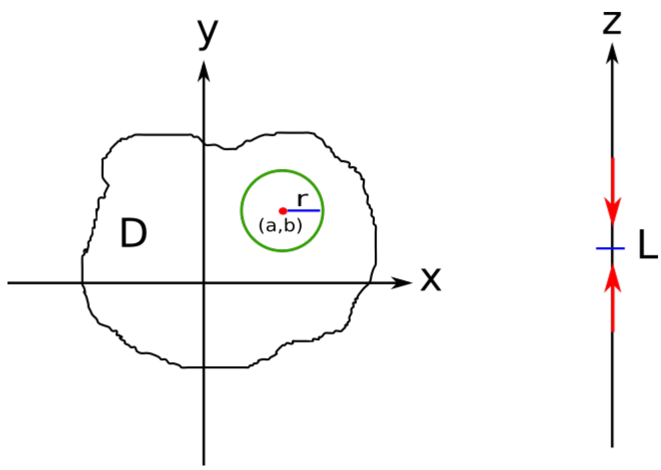
فرض کنید

$$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$$

یک تابع باشد. می‌گوئیم

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

هرگاه مقادیر $f(x,y)$ را بتوان به **هر اندازه‌ی دلخواه** به L نزدیک کرد، به شرط آنکه (x,y) **به اندازه‌ی کافی** به (a,b) نزدیک شود.



$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \Big(\forall x,y \quad (\text{فاصله‌ی } (x,y) \text{ از } (a,b) \text{ کمتر از } \delta \text{ باشد} \to \text{فاصله‌ی } z \text{ از } L \text{ کمتر از } \epsilon \text{ شود})\Big)$$

$$\iff \forall \epsilon \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,y \quad \Big(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \to |f(x,y) - L| < \epsilon\Big)$$

این مطلب را در جلسه‌ی آینده دوباره توضیح خواهیم داد.