۱ جلسه‌ی سی و چهارم

۱.۱ ادامه‌ی مختصات کُروی

مثال ۱. حجم جسمی را بیابید که بالای مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و زیر کُره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = z$ واقع شده است.

پاسخ.

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = z \Rightarrow x^۲ + y^۲ + z^۲ - z = ۰$$

یادآوری ۲.

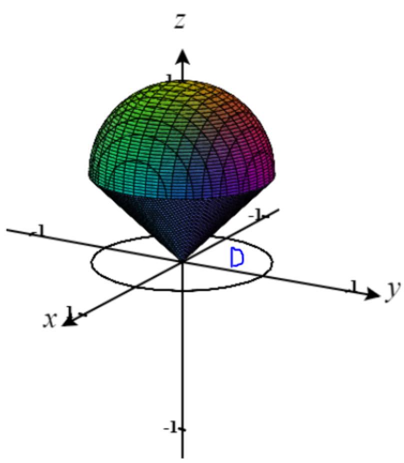
$$z^۲ + az = (z + \frac{a}{۲})^۲ - \frac{a^۲}{۴}$$

$$x^۲ + y^۲ + (z - \frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}$$

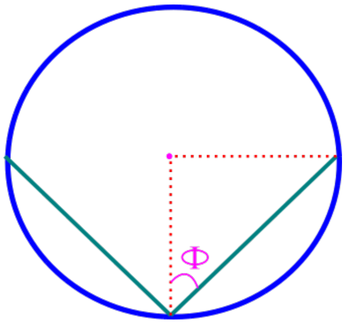
حجم ناحیه‌ی بین مخروط و کره برابر است با

$$\iiint_E dv$$

$$E = \begin{cases} \sqrt{x^۲ + y^۲} \leqslant z \leqslant \text{کُره} \\ (x, y) \in D \ \text{ناحیه‌ی} \end{cases}$$



$$\tan\phi = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۱ \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{۴}$$



معادله‌ی کره را در مختصات کروی به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = z \Rightarrow \rho^۲ = \rho\cos\phi \Rightarrow \rho = \cos\phi$$

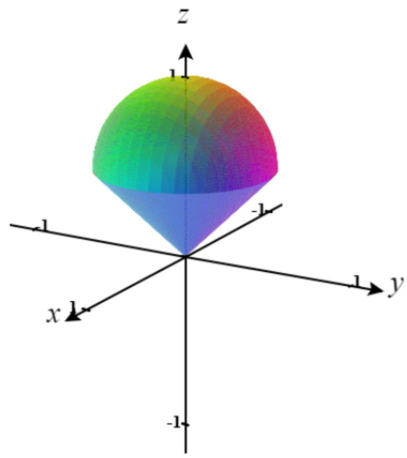
انتگرال مورد نظر ما در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۰}^{\cos\phi}\rho^{۲}\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\int_{۰}^{\cos\phi}\rho^{۲}\sin\phi d\rho=\sin\phi\frac{\rho^{۳}}{۳}|_{۰}^{\cos\phi}=\frac{\sin\phi\cos^{۳}\phi}{۳}$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin\phi\cos^{۳}\phi}{۳}d\phi=\frac{-\cos^{۴}\phi}{۴\times ۳}|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=-\frac{۱}{۱۲}+۱$$

$$\int_{۰}^{۲\pi}(-\frac{۱}{۱۲}+۱)d\theta=۲\pi(-\frac{۱}{۱۲}+۱)$$



$\square$

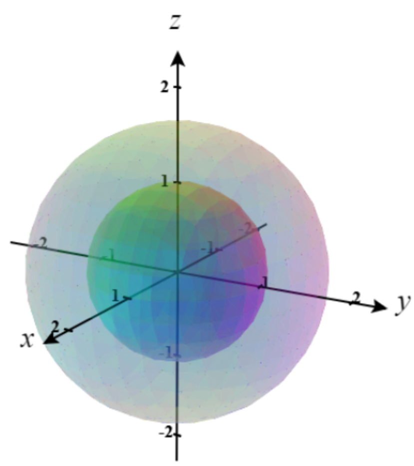
تمرین ۳. سعی کنید مثال بالا را در دستگاه‌های استوانه‌ای و مکعبی حل کنید.

مثال ۴. انتگرال $\iiint_T\frac{۱}{\sqrt{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{۳}}}dv$ را محاسبه کنید که در آن که ناحیه‌ی بین دو کُره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ و $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=e$ است.

$$۰\leqslant\theta\leqslant ۲\pi$$

$$۰\leqslant\phi\leqslant\pi$$

$$۱\leqslant\rho\leqslant\sqrt{e}$$



تمرین ۵. حجم ناحیه‌ی محدود بین کُره‌های $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=z$ و $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴$ را بیابید.

۲.۱ انتگرالگیری از میدان‌های برداری روی مسیرهای خطی

توابع فصل قبل، توابعی مانند $f : \mathbf{R}^{۳} \to \mathbf{R}$، بودند که به آنها توابع عددی می‌گویند. در فصل قبل آموختیم که چگونه از توابع عددی در نواحی مختلف انتگرالگیری کنیم.

تمرین ۶. در یک صفحه، با کشیدن شکل، انواع انتگرالگیری‌هائي را که تا اینجا آموخته‌ایم مرور کنید.

در ادامه‌ی درس قرار است با چند نوع دیگر از انتگرالگیری آشنا شویم که در فیزیک کاربردهای بی‌شماری دارند. هدف ما در ادامه‌ی درس، آشنا شدن با مفاهیم زیر است:

۱. انتگرال توابع عددی روی خط (منحنی) و روی رویه

۲. انتگرالگیری از توابع برداری روی خط و روی رویه

۳. رابطه‌ی انتگرالهای بالا با انتگرال دوگانه و سه‌گانه

بحث را با معرفی مفهوم میدانهای برداری شروع می‌کنیم.

۳.۱ میدان‌های برداری

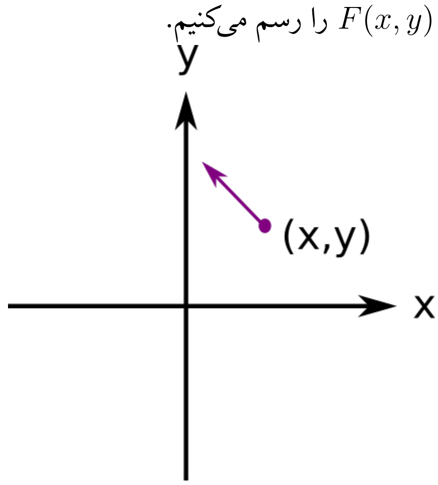
منظور از یک میدان برداری روی $\mathbf{R}^{۲}$ تابعی است از $\mathbf{R}^{۲}$ به $\mathbf{R}^{۲}$:

$$F : \mathbf{R}^{۲} \to \mathbf{R}$$

دقت کنید که یک تابع برداری مانند بالا، از دو تابع عددی تشکیل شده است:

$$F(x,y) = \Big(h(x,y), k(x,y)\Big)$$

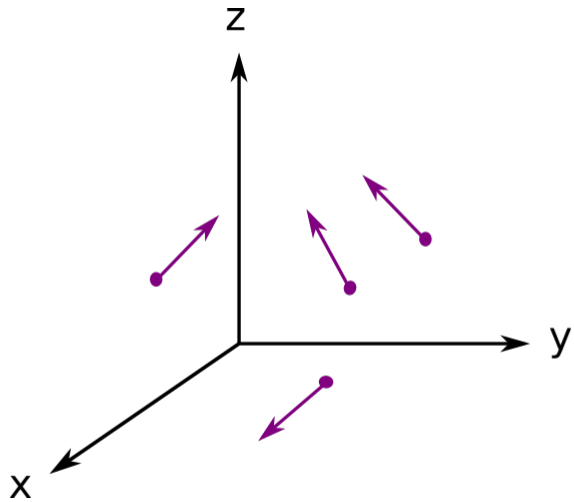
معمولاً دامنه و بردِ این توابع را در یک دستگاه به صورت همزمان می‌کشیم بدین‌صورت که با شروع از هر نقطه‌ی (x,y) بردارِ $F(x,y)$ را رسم می‌کنیم.



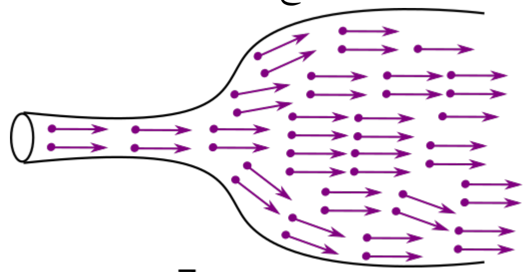
به طور مشابه منظور از یک میدان برداری روی $\mathbf{R}^{۳}$ تابعی است مانند تابع زیر:

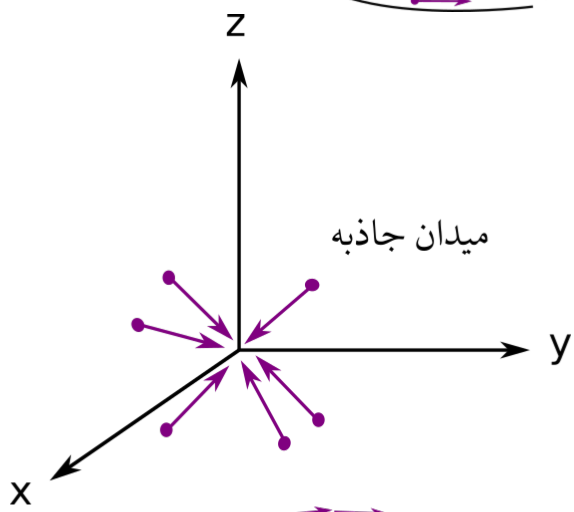
$$F : \mathbf{R}^{۳} \to \mathbf{R}^{۳}$$

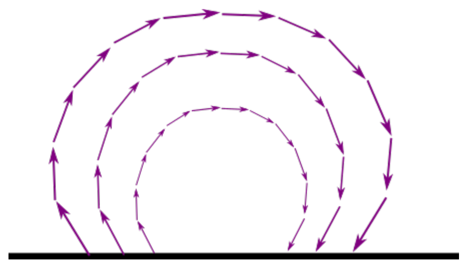
$$(x,y,z) \mapsto \Big(h(x,y,z), k(x,y,z), l(x,y,z)\Big)$$



میدان سرعت یک مایع در درون یک لوله، میدانهای جاذبه و مغناطیسی مثالهایی از میدانهای برداری هستند:







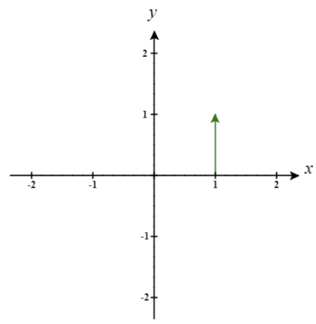
میدان مغناطیسی

مثال ۷. تابع برداری $F(x,y) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$ را رسم کنید.

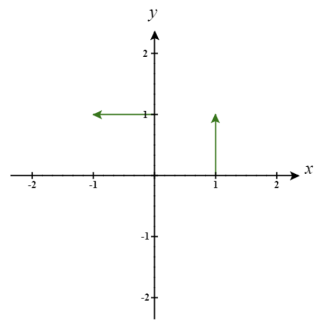
پاسخ.

$$F : \mathbf{R}^{۲} \to \mathbf{R}^{۲}$$

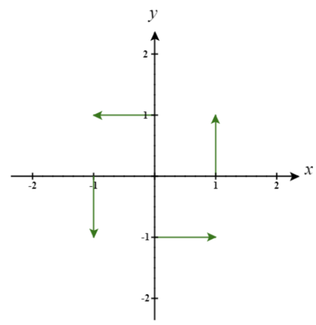
$$(۱, ۰) \to (۰, ۱)$$



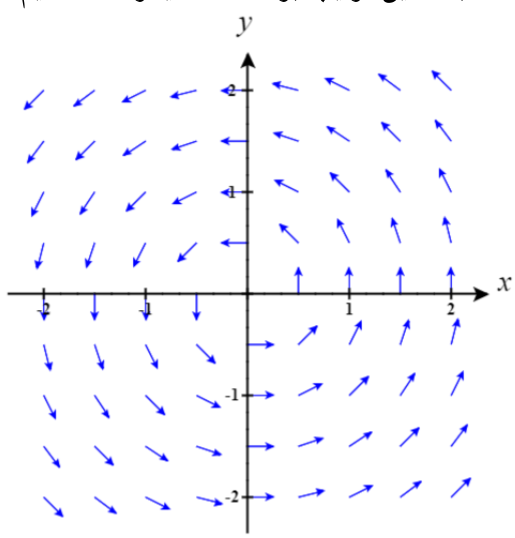
$$(۰,۱) \rightarrow (-۱,۰)$$



$$(-۱,۰) \rightarrow (۰,-۱) \quad \text{و} \quad (۰,-۱) \rightarrow (۱,۰)$$



و به همین ترتیب برای نقاط دیگر ادامه دهیم در نهایت شکل زیر حاصل می‌شود.



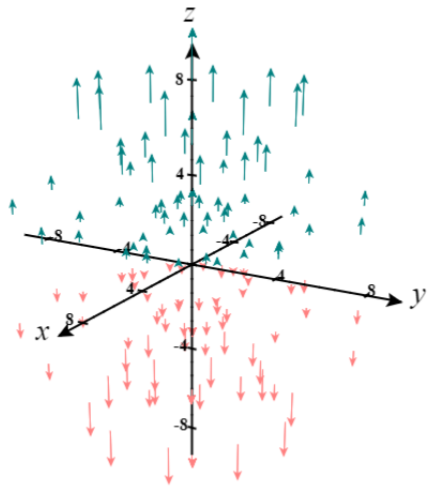
به طور دقیقتر اگر $\overrightarrow{r}(x, y)$ بردار مکان نقطه‌ی (x, y) باشد، آنگاه

$$(x, y) \cdot (-y, x) = -xy + xy = ۰ \Rightarrow \overrightarrow{r}(x, y) \perp \overrightarrow{F}(x, y)$$

یعنی میدان برداری مورد نظر همواره بر بردار مکان عمود است و بدینسان از بردارهای مماس بر دوایر ایجاد می‌شود. □

مثال ۸. میدان برداری $F(x, y, z) = z\overrightarrow{k}$ را رسم کنید.

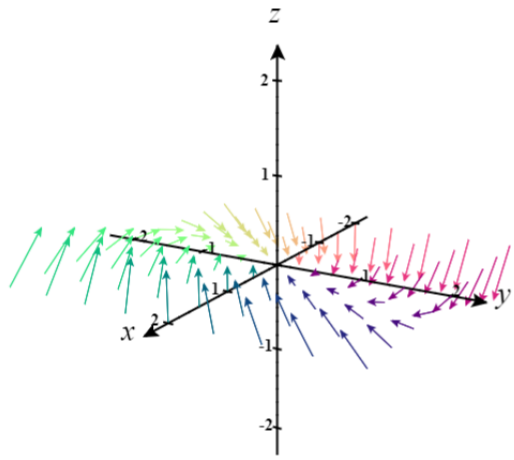
پاسخ.



□

مثال ۹. میدان برداری $F(x, y, z) = y\overrightarrow{i} - z\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$ را با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای رسم کنید.

پاسخ.



□

مثال ۱۰. اگر $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla F : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$$

$$(x, y) \mapsto \Big(f_x(x, y), f_y(x, y)\Big)$$

یک میدان برداری است. همچنین اگر $f : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}$ یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla f : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}^۳$$

$$(x, y, z) \mapsto \Big(f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\Big)$$

یک میدان برداری است.

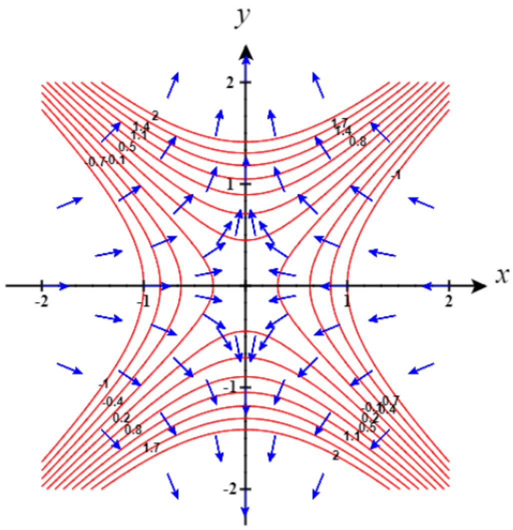
مثال ۱۱. فرض کنید $f(x, y) = y^۲ - x^۲$. میدان برداری ∇f را رسم کنید.

پاسخ.

$$\nabla f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$$

$$(x, y) \mapsto (-۲x, ۲y)$$

قبلا گفته‌ایم که میدان گرادیان بر منحنی‌های تراز عمود است و در جهت افزایش تابع است:



□

برخی میدانهای برداری، برابر با گرادیان توابع عددی هستند:

تعریف ۱۲. فرض کنید F یک میدان برداری دلخواه روی $\mathbf{R}^۳$ باشد. میدان F را **پایستار** می‌خوانیم هرگاه تابع $f : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}$ موجود باشد به طوری که

$$\begin{array}{ccc} F & = & \nabla f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}^۳ & & \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}^۳ \end{array}$$

$$f : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}$$

میدانهای پایستار روی فضای دو بعدی نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

در درسهای آینده روشهایی معرفی خواهیم کرد که با استفاده از آنها به راحتی می‌توان تشخیص داد که یک میدان داده شده پایستار است یا خیر. همچنین خواهیم دید که **انتگرالهای میدانهای پایستار، از مسیر مستقلند.**
بحث میدانهای برداری را فعلاً رها می‌کنیم ولی به زودی به آن بازخواهیم گشت.

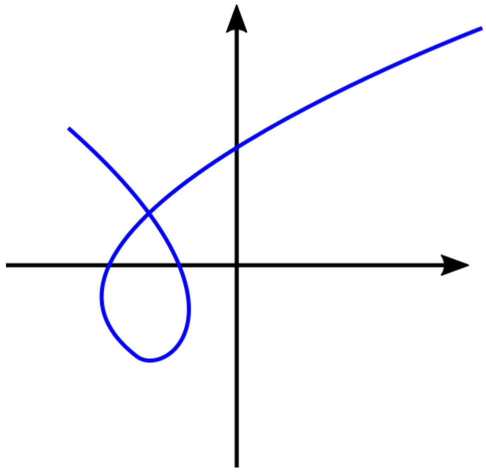
۴.۱ انتگرالگیری خطی از توابع عددی

فرض کنید $f(x,y)$ تابعی عددی از $\mathbf{R}^۲$ به $\mathbf{R}$ باشد.

$$f:\mathbf{R}^۲\to\mathbf{R}$$

فرض کنید $C:\overrightarrow{r}(t)$ یک خم هموار در $\mathbf{R}^۲$ باشد. منظور از هموار این است که $\overrightarrow{r}'(t)$ پیوسته باشد و $|\overrightarrow{r}'(t)|\neq ۰\quad \forall t$.
صفر نبودن مشتق بدین معنی است که در حین پیمودن مسیر خم، سرعت صفر نمی‌شود، یعنی خم بی هیچ توقفی طی می‌شود.

$$\overrightarrow{r}(t)=\big(x(t),y(t)\big)$$



در جلسه‌ی آینده روش انتگرالگیری از تابع f روی مسیر خم C را فراخواهیم گرفت و با انتگرال زیر آشنا خواهیم شد:

$$\int_c f(x,y)ds$$