۱ جلسه‌ی چهاردهم، دوشنبه

۱.۱ دیفرانسیل‌پذیری

در جلسه‌ی قبل گفتیم که اگر

$$z = f(x,y)$$

یک تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه دیفرانسیل کلی آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy$$

مشاهده ۱. گفته‌ی بالا را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = dz$$

گفتیم که دیفرانسیل از لحاظ هندسی، تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد و ازاین رو تقریبی برای تابع به دست می‌دهد.

برای توابع زیر حول نقاط داده شده یک تقریب خطی بنویسید.

۱. تابع $x\ln(xy-۵)+۱$ حول نقطه‌ی $(۲,۳)$

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(xy-۵) + xy \times \frac{۱}{xy-۵} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(۲,۳) = \overset{۰}{\cancel{\ln(۱)}} + ۶ = ۶$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^{۲} \times \frac{۱}{xy-۵} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(۲,۳) = ۴$$

$$f(x,y) \approx f(x_۰,y_۰) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_۰,y_۰)\big(x-x_۰\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰,y_۰)\big(y-y_۰\big)$$

$$f(x,y) \approx ۱ + ۶(x-۲) + ۴(y-۳) = ۶x + ۴y - ۲۳$$

□

۲. تابع $f(x,y)=\sqrt{xy}$ حول نقطه‌ی $(۱,۴)$

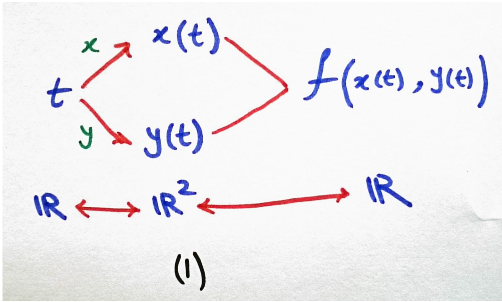
۳. تابع $f(x,y)=x^{۲}e^{y}$ حول نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$

۴. تابع $f(x,y)=y+\sin(\frac{x}{y})$ حول نقطه‌ی $(۰,۳)$

۲.۱ قاعده‌ی زنجیره‌ای

فرض کنید $z = f(x,y)$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر بر حسب x و y باشند. فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ نیز توابعی تک متغیره و دیفرانسیل‌پذیر باشند آنگاه z را می‌توان به عنوان یک تابع دیفرانسیل‌پذیر از t در نظر گرفت:

$$z(t) = f\big(x(t), y(t)\big) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$



داریم:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

پس:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

به بیان دیگر:

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t)$$

مثال ۲. اگر $z = x^۲y + ۳xy^۴$، و $x(t) = \sin ۲t$ و $y(t) = \cos t$ آنگاه $\frac{dz}{dt}$ را بیابید.

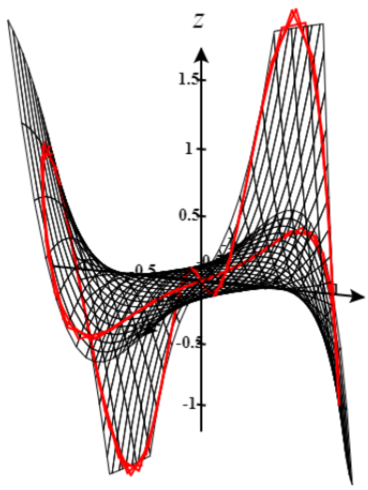
پاسخ.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

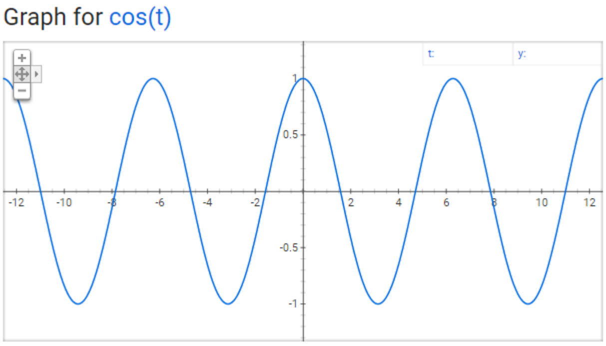
$$z'(t) = (۲yx + ۳y^۲)(۲\cos ۲t) + (x^۲ + ۱۲xy^۳)(-\sin t)$$

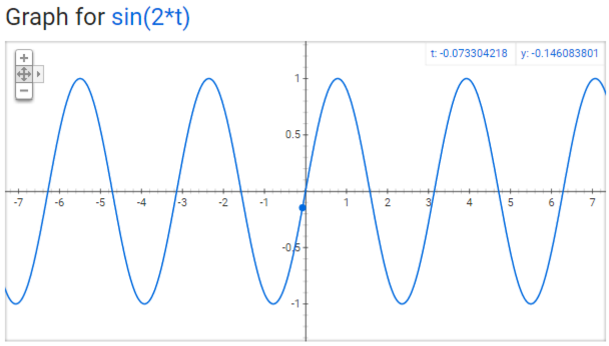
$$\Rightarrow z'(t) = (۲\sin ۲t\cos t + ۳\cos^۴ t)(۲\cos ۲t) + (\sin^۲ ۲t + ۱۲\sin ۲t + \cos^۳ t)(-\sin t)$$

در زیر منحنیِ $(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))$ کشیده شده است؛ واضح است که این منحنی، روی رویه واقع است:



در زیر گرافهای توابع $\sin(۲t), \cos(t)$ را کشیده‌ایم:

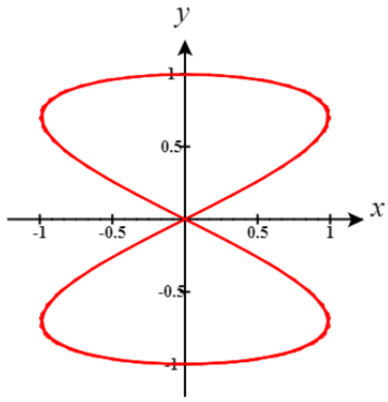




در زیر تابع برداریِ

$$\overrightarrow{r}(t) = \big(\sin ۲t, \cos t\big) \qquad ۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi$$

را رسم کرده‌ایم:



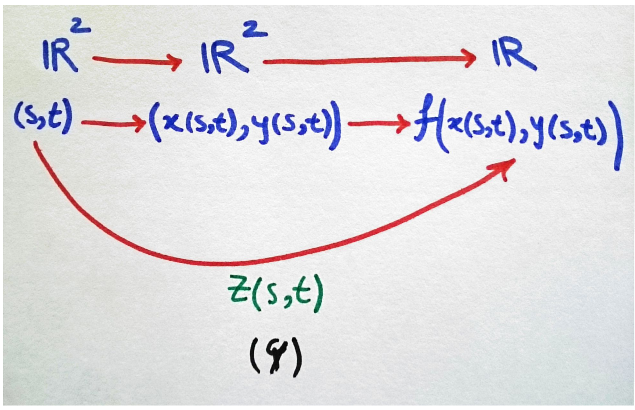
$\square$

۳.۱ قاعده‌ی زنجیره‌ای (حالت دوم)

فرض کنید $z = f(x, y)$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر بر حسب x و y باشد و $x(s, t)$ و $y(x, t)$ نیز توابعی دیفرانسیل‌پذیر بر حسب s و t باشند. آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$



تمرین ۳. ثابت کنید که

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}$$

راهنمایی ۴.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \Rightarrow$$

$$① \quad \frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$② \quad \frac{dz}{dy}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial z}{\partial y}$$

عبارت آمده در تمرین را بنویسید و طرفین ـ وسطین کنید.

توجه ۵. عبارت زیر نادرست است.

$$\frac{dy}{dx}\neq\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

مثال ۶. فرض کنید $z=e^x\sin y$، $x=st^2$ و $y=s^2t$. آنگاه $\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial t}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=(e^x\sin y)(t^2)+(e^x\cos y)(2st)=t^2e^{st^2}\sin(s^2t)+2ste^{st^2}\cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=(e^x\sin y)(2st)+(e^x\cos y)(s^2)=2ste^{st^2}\sin(s^2t)+s^2e^{st^2}\cos(s^2t)$$

□

مثال ۷. فرض کنید $z=f(x,y)$، $x=r^2+s^2$ و $y=2rs$. $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}(2r)+\frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$$

بقیه‌ی پاسخ در جلسه‌ی بعد. □