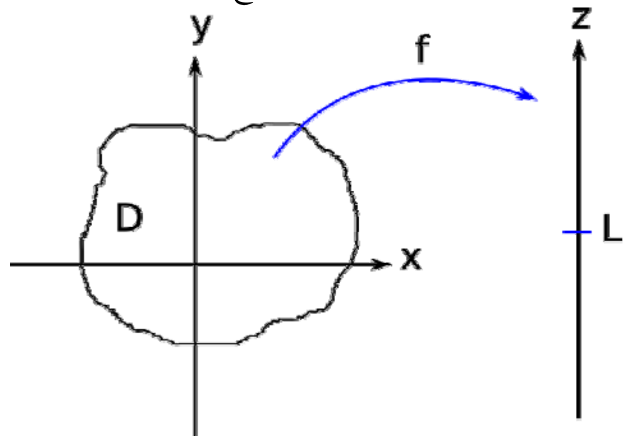
۹ جلسه‌ی هفتم، شنبه

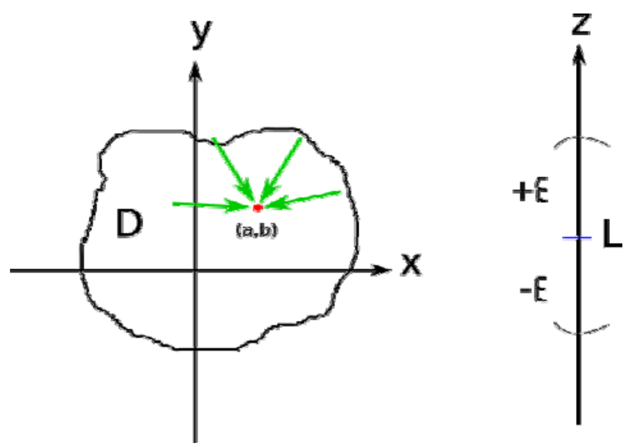
۱.۹ ادامه‌ی حد و پیوستگی

فرض کنید که $f:\mathbf{R}^{۲}\to\mathbf{R}$ یک تابع باشد،



می‌گوییم حدّ تابع f وقتی (x,y) به (a,b) میل می‌کند برابر است با L هرگاه مقادیر $f(x,y)$ به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک شوند، به شرطی که (x,y) به اندازه‌ی کافی به (a,b) نزدیک شده باشد:

$$\forall\epsilon>۰\quad\exists\delta(\epsilon)>۰\quad\left(\forall\ \overset{(x,y)\text{یا}}{x,y}\quad \left(\text{اگر فاصله‌ی } (x,y) \text{ از } (a,b) \text{ کمتر از } \delta(\epsilon) \text{ باشد}\right.\to|f(x,y)-L|<\epsilon\right)\right)$$

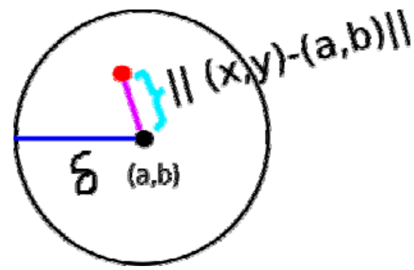


توجه ۷۹. وقتی می‌گوییم (x,y) به اندازه‌ی δ به (a,b) نزدیک است و می‌نویسیم:

$$\|(x,y)-(a,b)\| < \delta$$

یعنی

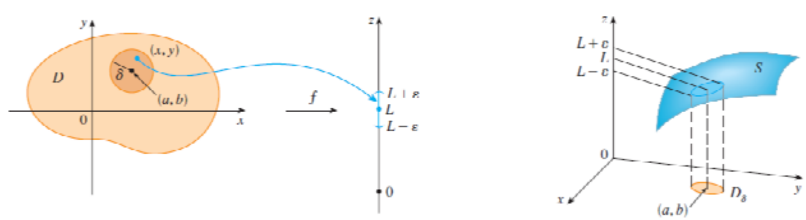
$$\sqrt{(x-a)^۲-(x-b)^۲} < \delta$$



پس تعریف حد در بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff$$
$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta(\epsilon) > ۰ \quad \forall (x,y) \in D(f) \quad \left(۰ < \sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲} < \delta(\epsilon) \to |f(x,y)-L| < \epsilon \right)$$

در واقع وقتی که نقاطِ (x,y) در دامنه به (a,b) نزدیک می‌شوند (یعنی در داخل دوایر با شعاع کم قرار می‌گیرند) مقادیر تابع به L نزدیک می‌شود (یعنی داخل بازه‌های کوچک به مرکز L قرار می‌گیرند). تصویر زیر از کتاب استوارت گرفته شده است:

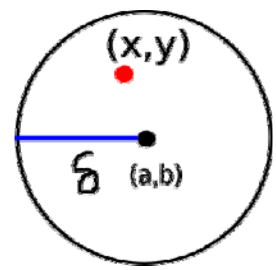


تمرین ۸۰. نشان دهید که

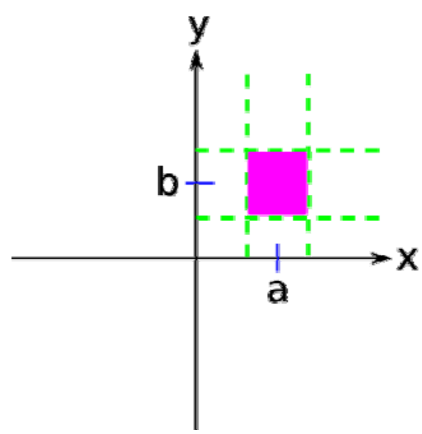
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff$$
$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta(\epsilon) > ۰ \quad \forall (x,y) \quad \Big((۰ < |x-a| < \delta) \wedge (۰ < |y-b| < \delta) \to |f(x,y)-L| < \epsilon \Big)$$

توجه کنید که تمرین بالا در واقع می‌گوید که می‌توان به جای دیسکهای با شعاع کمتر و کمتر در مستطیلهای با طول و عرض کوچکتر و کوچکتر به نقطه‌ی (a,b) نزدیک شد:

$$\sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲}<\delta :$$

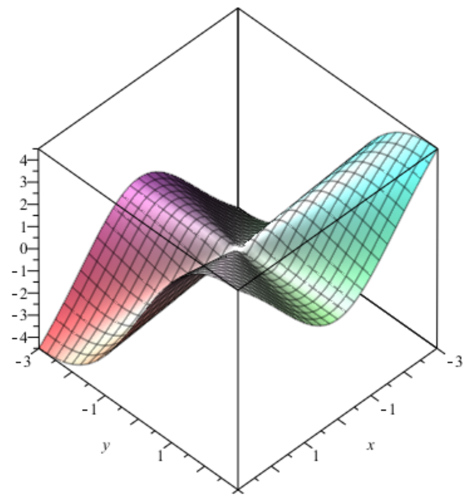


$$\begin{cases} |x-a|<\delta \\ |y-b|<\delta \end{cases} \quad :$$



مثال ۸۱. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{۳x^۲y}{x^۲+y^۲}=۰$$



پاسخ. فرض کنید $۰ < \epsilon$ را داشته باشیم، به دنبال δ هستیم به طوری که اگر $۰ < \sqrt{x^۲ + y^۲} < \epsilon$، آنگاه $|\frac{۳x^۲y}{x^۲+y^۲}| < \epsilon$

چرک‌نویس.

$$\frac{|۳x^۲y|}{x^۲ + y^۲} = \frac{۳x^۲\sqrt{y^۲}}{x^۲ + y^۲}$$

می‌دانیم که

$$x^۲ \leqslant x^۲ + y^۲$$

و

$$\sqrt{y^۲} \leqslant \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

پس داریم:

$$\frac{۳x^۲\sqrt{y^۲}}{x^۲ + y^۲} \leqslant \frac{۳\cancel{(x^۲ + y^۲)}\sqrt{x^۲ + y^۲}}{\cancel{x^۲ + y^۲}} = ۳\sqrt{x^۲ + y^۲} \quad *$$

کافی است که δ یک عدد مثبت دلخواه باشد به طوری که $\delta < \frac{\epsilon}{۳}$. آنگاه اگر $۰ < \sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta$ آنگاه

$$\frac{|۳x^۲y|}{x^۲ + y^۲} < ۳\sqrt{x^۲ + y^۲} \leqslant ۳\delta < ۳ \times \frac{\epsilon}{۳} = \epsilon$$

$\square$

مثال ۸۲. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$$

پاسخ. فرض کنیم $۰ < \epsilon$ داده شده باشد.

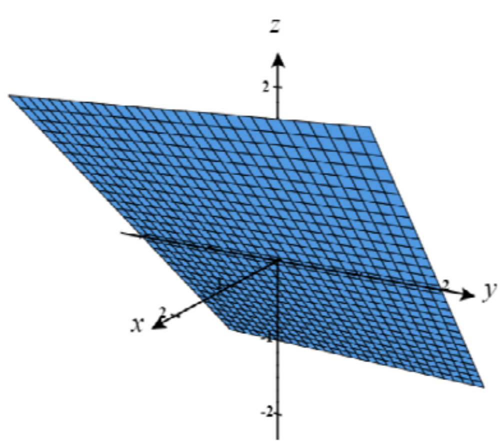
چرک‌نویس.

$$|f(x,y) - a| = |x - a|$$

$$|x - a| = \sqrt{|x-a|^{۲}} \leqslant \sqrt{(x-a)^{۲} + (y-b)^{۲}}$$

کافی است δ را یک عدد مثبت بگیریم به طوری که $\delta < \epsilon$. در این صورت اگر $۰ < \sqrt{(x-a)^{۲} + (y-b)^{۲}} < \delta$ آنگاه

$$|x - a| \leqslant \sqrt{(x-a)^{۲} + (y-b)^{۲}} < \delta < \epsilon$$



در زیر تابعِ $z = x$ را رسم کرده‌ایم.

$\square$

بطور مشابه می‌توان نشان داد که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$$

و

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} k = k$$

که در بالا k یک عدد ثابت است.

قضیه ۸۳. فرض کنید $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ و $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$ آنگاه: (فرض کرده‌ایم که دامنه‌ی f و g در یک دیسک به مرکز (a,b) مشترک باشند.)

۱. $\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M$

۲. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \times g(x,y) = L \times M$

۳. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} k \times f(x,y) = k \times L$

۴. اگر $M \neq ۰$ آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

۵. در صورتی که $L^{\frac{m}{n}}$ موجود باشد (یعنی یک عدد حقیقی باشد)، آنگاه:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \Big(f(x,y)\Big)^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$$

از ترکیب قضیه‌ی بالا با مثالهای قبل (درباره‌ی تابعهای ثابت، $z = x, z = y$) به این نتیجه می‌رسیم که توابع چند جمله‌ای دارای حد هستند. منظور از یک تابع چندجمله‌ای، تابعی است که از جمع تعدادی متناهی عبارت به صورتِ $ax^m y^n$ ایجاد شده است، مانندِ $۱۰ + x^۷ + ۵xy^۳$. همچنین توابع گویا در دامنه‌شان دارای حد هستند. منظور از یک تابع گویا، تابعی است که آن را به صورت خارج‌قسمت دو تابع چندجمله‌ای می‌توان نوشت.

مثال ۸۴. مقدار حدهای زیر را بدست آورید.

۱. $\lim_{(x,y)\to(۰,-۱)} \frac{x-xy+۳}{x^۲+۵xy-y^۳}$

پاسخ.

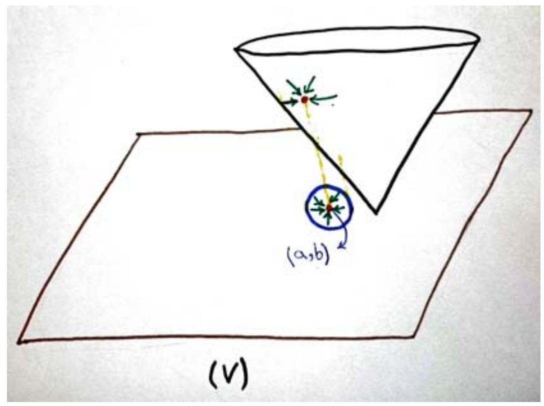
$$\lim_{(x,y)\to(۰,-۱)} \frac{x-xy+۳}{x^۲+۵xy-y^۳} = \frac{۳}{۱}$$

□

۲. $\lim_{(x,y)\to(۳,۴)} \sqrt{x^۲+y^۲}$

پاسخ.

$$\lim_{(x,y)\to(۳,۴)} \sqrt{x^۲+y^۲} = ۵$$



□

۳. $\lim_{(x,y)\to(\cdot,\cdot)} \frac{x^۲-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

پاسخ.

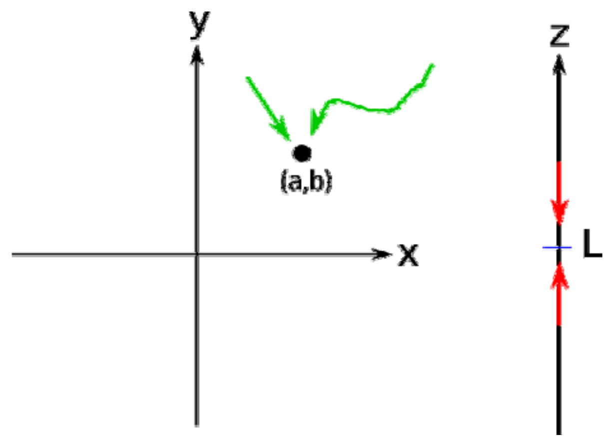
$$\lim_{(x,y)\to(\cdot,\cdot)} \frac{x^۲-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(\cdot,\cdot)} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(\cdot,\cdot)} x(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = \cdot$$

□

توجه ۸۵. تعریف وجود حد برای یک تابع ایجاب می کند که هرگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

آنگاه از هر مسیری که زوج مرتبهای (x,y) در دامنه به (a,b) نزدیک شوند، مقادیرِ $f(x,y)$ روی آن مسیر به L نزدیک می‌شود (شکل ۷ در بالا و شکل زیر را ببینید).



نتیجه ۸۶. اگر با میل کردن (x,y) به (a,b) در دو مسیر متفاوت به حد متفاوت برسیم، تابع مورد نظر ما حد ندارد.