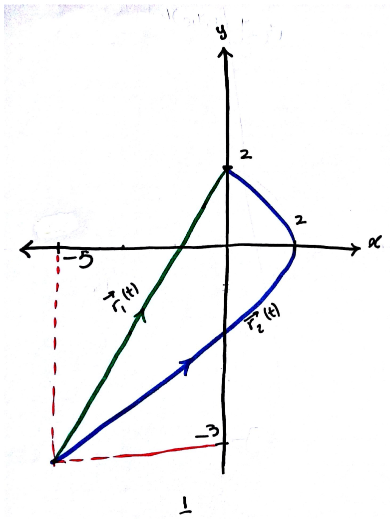
۱ جلسه‌ی سی و هفتم، شنبه، قضیه‌ی گرین

تمرین ۱. $\int_c y^۲dx + xdy$ را محاسبه کنید که در آن c شامل یک پاره خط از $(-۵,-۳)$ تا $(۰,۲)$ و سهمی $x = ۴ - y^۲$ از $(-۵,-۳)$ تا $(۰,۲)$ است.

پاسخ.

$$\int_c \square = \int_{c_۱} \square + \int_{c_۲} \square$$



$$\overrightarrow{r}_۱(t) : (-۵,-۳) + (۵,۵)t = (\underbrace{-۵+۵t}_{x(t)}, \underbrace{-۳+۵t}_{y(t)}) \quad ۰ \leqslant t \leqslant ۱$$

$$\int_{c_۱} y^۲dx + xdy = \underbrace{\int_{c_۱} y^۲dx}_{A} + \underbrace{\int_{c_۱} xdy}_{B}$$

$$x = -۵ + ۵t \Rightarrow dx = ۵dt$$

$$A = \int_{c_۱} y^۲dx = \int_۰^۱ (-۳+۵t)^۲ ۵dt = \frac{(-۳+۵t)}{۳}\Big|_۰^۱ = \dots$$

$$B = \int_{c_۱} xdy = \int_۰^۱ (-۵+۵t)۵dt = \dots$$

$$\overrightarrow{r}_۲(t) : (۴ - t^۲, t)$$

$$\int_{c_۲} y^۲dx + xdy = \int_{-۳}^{۲} (t^۲)(-۲t)dt + (۴ - t^۲)dt = \dots$$

حاصل انتگرال $\int_c y^۲dx + xdy$ برابر است با

$$\int_{c_۱} y^۲dx + xdy + \int_{c_۲} y^۲dx + xdy$$

تکمیل پاسخ بالا و انجام محاسبات را به عهده‌ی دانشجو می‌گذارم. $\square$

انتگرال سوال قبل دارای صورت برداری زیر است:

$$\int_c (\overset{\overset{P}{\uparrow}}{y^۲}, \overset{\overset{Q}{\uparrow}}{x}) \cdot dr$$

گفتیم که اگر اگر $Q_x = P_y$ میدا برداری پایستار است، پس در سوال قبل میدان برداری مورد نظر پایستار نیست.

یادآوری ۲. اگر $F=(P,Q,R)$ یک میدان برداری باشد و $\overrightarrow{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ آنگاه

$$\int_c F\cdot dr=\int_c Pdx+Qdy+Rdz$$

مثال ۳. $\int_c F\cdot dr$ را حساب کنید که در آن $F(x,y,z)=xy\overrightarrow{i}+yz\overrightarrow{j}+zx\overrightarrow{k}$ و

$$c=\overrightarrow{r}(t)=\begin{cases}x=t\\ y=t^{۲} \\ z=t^{۳}\end{cases}\qquad ۰\leqslant t\leqslant ۱.$$

پاسخ.

$$\int_c F\cdot dr=\int_c xydx+yzdy+zxdx=\int_۰^۱(t\times t^{۲})dt+\int_۰^۱(t^{۲}\times t^{۳})۲tdt+\int_۰^۱(t^{۳}\times t)۳t^{۲}dt=\dots$$

□

سوال ۴. ۱. تعیین کنید که آیا میدان $F(x,y)=\underbrace{(۳+۲xy)\overrightarrow{i}}_{P(x)}+\underbrace{(x^{۲}-۲y^{۲})\overrightarrow{j}}_{Q(x)}$ پایستار است؟

پاسخ.

$$Q_x=۲x\quad,\quad P_y=۲x\quad Q_x=P_y$$

بنابراین میدان F پایستار است. □

۲. یک تابع $f:\mathbf{R}^{۲}\to\mathbf{R}$ چنان بیابید که $\nabla f=F$.

پاسخ.

$$F(P,Q)=\nabla f=(f_x(x,y),f_y(x,y))$$

$$f_x(x,y)=۳+۲xy\Rightarrow f(x,y)=۳x+x^{۲}y+g(y)$$

$$f_y(x,y)=x^{۲}-۳y^{۲}$$

مشتق $f(x,y)=۳x+x^{۲}y+g(y)$ بر حسب y برابر است با

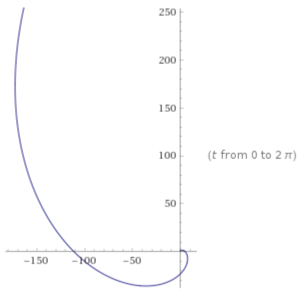
$$x^{۲}+g'(y)=x^{۲}-۳y^{۲}\Rightarrow g'(y)=-۳y^{۲}\Rightarrow g(y)=-y^{۳}+k$$

بنابراین

$$f(x,y)=۳x+x^{۲}y-y^{۳}+k$$

□

۳. حاصل $\int_c F \cdot dr$ را بیابید که در آن c توسط معادله‌ی برداری $\overrightarrow{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$ $۰ \leqslant t \leqslant \pi$ داده شده است.



پاسخ.

$$F(x,y) = (۳ + ۲xy)\overrightarrow{i} + (x^۲ - ۳y^۲)\overrightarrow{j}$$

$$\int_c F \cdot dr = \int_c P dx + Q dy = \int_۰^{\pi} ۳ + ۲e^t \sin t e^t \cos t d(e^t \sin t) dt + \dots$$

محاسبه‌ی انتگرال بالا بسی دشوار است اما می‌دانیم که

$$\int_c F \cdot dr = \int_c \nabla f \cdot dr = f(\text{نقطه‌ی انتهایی}) - f(\text{نقطه‌ی شروع})$$

$$f(x,y) = ۳x + x^۲ y - y^۳ + k$$

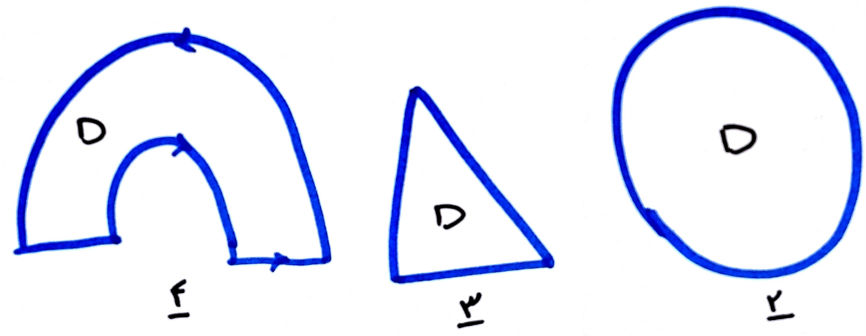
نقطه‌ی شروع c برابر است با $(۰, ۱)$ و نقطه‌ی پایان برابر است با $(۰, -e^{\pi})$.

$$\int_c F \cdot dr = f(۰, -e^{\pi}) - f(۰, ۱) = \dots$$

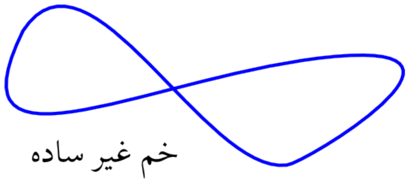
□

۱.۱ قضیه‌ی گرین

قضیه ۵ (قضیه‌ی گرین [1]). فرض کنید c یک خم بسته‌ی به طور قطعه‌ای هموار، ساده و جهتدار در جهت مثبت باشد و D ناحیه‌ی احاطه شده توسط c باشد. دقت کنید که ساده بودن یعنی این که خم مورد نظر خودش را تنها در نقطه‌ی انتهائی قطع کند. جهتدار بودن در جهت مثبت یعنی وقتی در جهت خم به روی حرکت کنیم، ناحیه‌ی احاطه شده توسط آن در سمت چپمان قرار گیرد. عکسهای ۲و۳و۴ نمونه‌های مطلوب برای اینگونه خمها هستند.



[1] Green's theorem

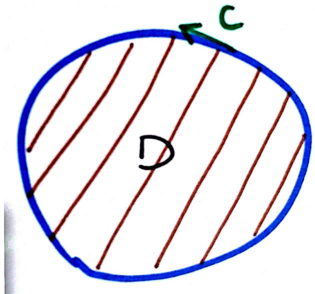


خم غیر ساده

فرض کنید P و Q مشتقات جزئی پیوسته در یک مجموعه‌ی باز شامل D داشته باشند. آنگاه

$$\oint_c \underbrace{Pdx + Qdy}_{F\cdot dr} = \iint_D (Q_x - P_y)dA$$

$$\underbrace{\int_c F \cdot dr}_{\text{انتگرال از یک تابع برداری روی خم مرزی}} = \underbrace{\iint_D \Big(Q_x(x,y) - P_x(x,y)\Big)dxdy}_{\text{انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ی احاطه شده توسط خم}}$$



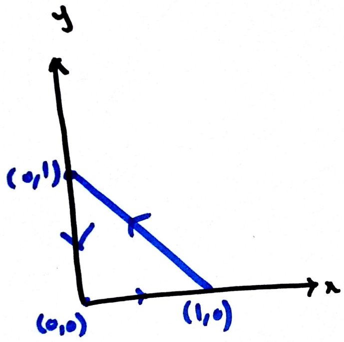
۵

توجه ۶. فرض کنید P, Q روی c صفر باشند، آنگاه

$$\iint (Q_x - P_y)dA = ۰$$

مثال ۷. انتگرال زیر را با توجه به مسیر کشیده شده بیابید.

$$\oint_c x^۴ dx + xydy$$



۶

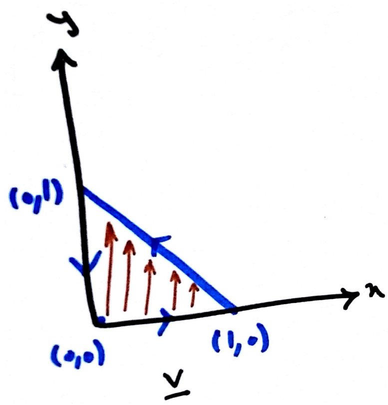
پاسخ.

$$P(x,y) = x^۴ \quad , \quad Q(x,y) = xy$$

$$P_y(x,y) = ۰, Q_x(x,y) = y$$

$$\int_c Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dA$$

$$\iint_D ydy = \int_۰^۱ \int_۰^{۱-x} ydydx$$



$$\int_۰^{۱-x} ydy = \frac{y^۲}{۲}|_۰^{۱-x} = \frac{(۱-x)^۲}{۲}$$

$$\int_۰^۱ \frac{(۱-x)^۲}{۲}dx = -\frac{(۱-x)^۳}{۶}|_۰^۱ = \frac{۱}{۶}$$

□

مثال ۸. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\oint_c (۳y - e^{\sin x})dx + (۷x + \sqrt{y^۴ + ۱})dy$$

$$c : x^۲ + y^۲ = ۹$$

$$P(x, y) = ۳y - e^{\sin x}$$

$$Q(x, y) = ۷x + \sqrt{y^۴ + ۱}$$

$$P_y(x, y) = ۳ \quad , \quad Q_x(x, y) = ۷$$

$$\oint Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dA$$

$$\iint_D ۴dA = ۴ \underbrace{\iint_D dA}_{\text{مساحت دایره}} =$$

$$۴\int_۰^{۲\pi} \int_۰^۳ rdrd\theta = ۴\pi \times ۳^۲$$

مثال ۹. فرض کنید $F(x, y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^۲ + y^۲}$ نشان دهید که روی هر منحنی ساده‌ی بسته در جهت مثبت که مبدأ را احاطه کند داریم:

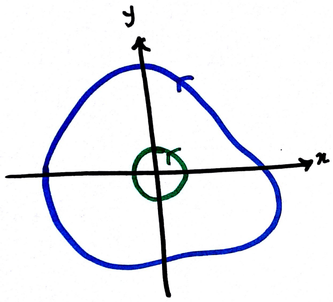
$$\int_c F \cdot dr = ۲\pi$$

پاسخ. دقت کنید که تابع تحت انتگرال در مبدأ تعریف نشده است. پس نمی‌توان روی هر منحنی دلخواه به راحتی از قضیه‌ی گرین استفاده کرد. منحنی دلخواه c را در نظر بگیرید که در شکل زیر به رنگ آبی نشان داده شده است. یک منحنی کوچکتر

جهتدار در داخل آن به رنگ سبز رسم کرده‌ایم که آن را c_1 می‌نامیم. هدفمان نشان دادن این است که انتگرال برداری تابع مورد نظر، روی دو منحنی رسم شده با هم برابر است. برای این کار انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{c\cup(-c_1)} Pdx + Qdy$$

از آنجا که تابع F در ناحیه‌ی بین دو خم تعریف شده است و در این ناحیه در شرایط قضیه‌ی گرین صدق می‌کند، برای محاسبه‌ی انتگرال بالا از قضیه‌ی گرین، روی ناحیه‌ی بین خمها استفاده می‌کنیم:



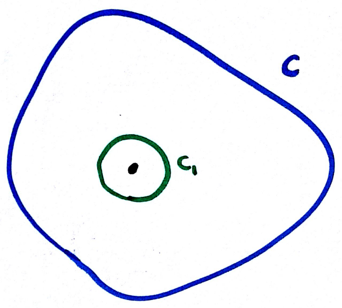
۸

$$Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow Q_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow P_y(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q_x = P_y \Rightarrow \int_{c\cup(-c_1)} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_c F\cdot dr = \int_{c_1} F\cdot dr$$



۹

توجه ۱۰. از آنچه در بالا گفتیم نتیجه می‌شود که برای هر خم c_1 و c_2 دلخواه شامل مبدأ

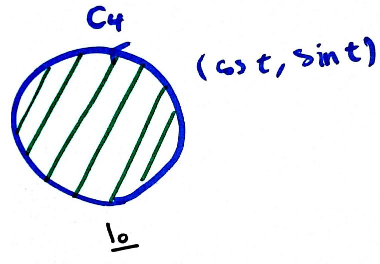
$$\int_{c_1} Fdr = \int_{c_2} Fdr$$

کافی است که یک خم c_3 کوچکتر از c_1, c_2 در نظر بگیریم. آنگاه بنا بر آنچه در بالا ثابت کردیم انتگرال روی هر دوی این خمها برابر با انتگرال روی c_3 است. حال از آنجا که انتگرال مورد نظر روی تمام خم‌ها با هم برابر است، برای دانستن مقدار این انتگرال، کافی است

$$\int_c F\cdot dr$$

را روی خم ساده‌ی $(\cos t, \sin t) 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ محاسبه کنیم.

دقت کنید که در اینجا نیز باز نمی‌توان از قضیه‌ی گرین استفاده کرد زیرا تابع در مبدأ تعریف نشده است. پس انتگرال مورد نظر را با استفاده از تعریف حساب می‌کنیم.



$$\int_{c_۴} F \cdot dr = \int_{c_۴} Pdx + Qdy = \int_{c_۴} \frac{-y}{x^۲ + y^۲} dx + \frac{x}{x^۲ + y^۲} dy =$$

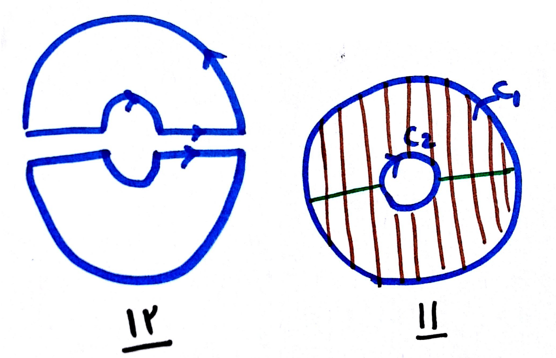
$$\int_۰^{۲\pi} -\sin t(-\sin t)dt + \cos t(\cos t)dt = \int_۰^{۲\pi} \sin^۲ tdt + \cos^۲ tdt = ۲\pi$$

□

در مثال بالا از قضیه‌ی گرین برای نواحی حفره‌دار استفاده کردیم:

تمرین ۱۱. نشان دهید قضیه‌ی گرین برای مقادیر دارای حفره مانند ناحیه‌ی زیر درست است (به جهت خمها توجه کنید)

$$\int_{c_۱ \cup c_۲} F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$



موضوعات جلسه‌ی بعد:

۱. انتگرال توابع عددی روی رویه

۲. انتگرال توابع برداری روی رویه (شار)