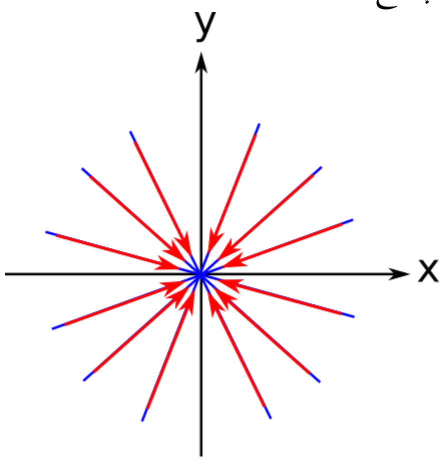
۱ نیم جلسه‌ی نهم، چهارشنبه

حل چند تمرین

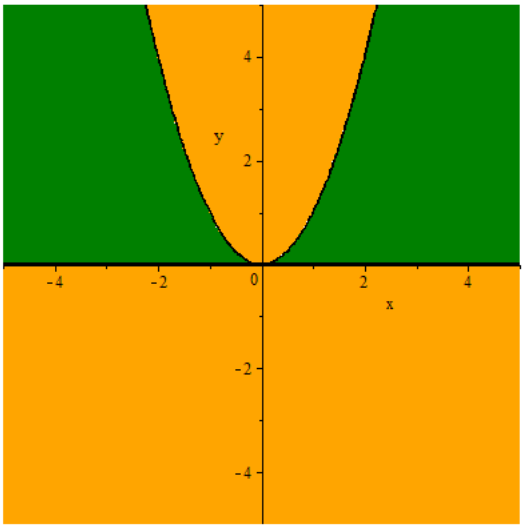
سوال ۱ (سوال دانشجویان). فرض کنیم تابع $f(x,y)$ در تمام مسیرهای $y=mx$ دارای حدِ برابرِ L باشد. آیا لزوماً حد تابع در نقطه‌ی $(۰,۰)$ برابر با L است ($\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)=L$)؟

پاسخ.

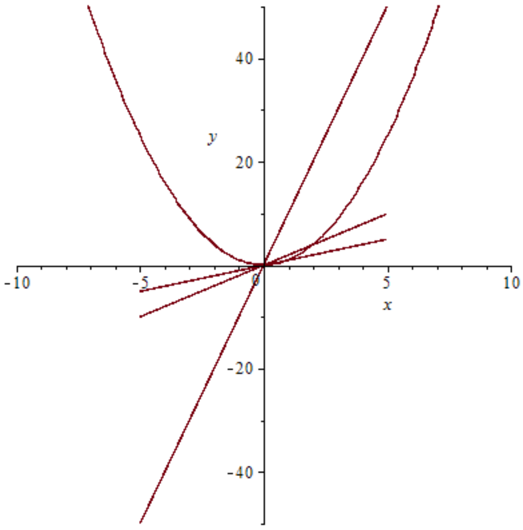


تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y)=\begin{cases} ۰ & y\leqslant ۰ \text{ یا } y\geqslant x^{۲} \\ ۱ & ۰<y<x^{۲} \end{cases}$$



ادعا می‌کنیم که روی تمام مسیرهای $y = mx$ در صفحه‌ی xy حد تابع در $(۰, ۰)$ برابر با ۰ است. یک خط دلخواهِ $y = mx$ را در نظر بگیرید (فرض کنیم $m > ۰$). اگر $۰ < x < m$ آنگاه $x^۲ < mx$. یعنی منحنیِ $y = mx$ در بازه‌ی $x \in (۰, m)$ بالاتر از منحنیِ $y = x^۲$ قرار می‌گیرد. پس مقدار تابع مورد نظر ما روی این منحنی برابر با ۰ است. پس حد تابع نیز روی این منحنی برابر با صفر است. برای x های کمتر از صفر نیز از آنجا که $y = mx < ۰$ دوباره مقدار تابع برابر با صفر است و حد تابع نیز صفر است. (منحنی‌های $y = mx$ را در حالتی که $m < ۰$ شما بررسی کنید).



حال ادعا می‌کنیم که حد تابع بالا در $(\text{۰},\text{۰})$ برابر با صفر نیست. می‌دانیم که

$$\lim_{(x,y)\to(\text{۰},\text{۰})} f(x,y)=\text{۰} \iff$$
$$\forall\epsilon>\text{۰}\quad \exists\delta(\epsilon)>\text{۰}\quad \forall(x,y)\quad \left(\text{۰}<\sqrt{x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}<\delta\to|f(x,y)|<\epsilon\right)$$

پس

$$\lim_{(x,y)\to(\text{۰},\text{۰})} f(x,y)\neq\text{۰} \iff$$
$$\exists\epsilon>\text{۰}\quad \forall\delta>\text{۰}\quad \exists(x,y)\quad \left(\text{۰}<\sqrt{x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}<\delta\wedge|f(x,y)|\geqslant\epsilon\right)$$

قرار دهید $\epsilon=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$. برای هر $\delta>\text{۰}$ نقطه‌ای مانند (x,y) در دایره‌ی به شعاع δ و مرکزِ $(\text{۰},\text{۰})$ پیدا می‌شود که در آن $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}<\text{۱}=f(x,y)$. □

تمرین ۲. نمودار تابع بالا را رسم کنید.

تمرین ۳. نقاطی را که تابع زیر در آنها پیوسته است، مشخص کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{\text{۲}}y^{\text{۳}}}{\text{۲}x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}} & (x,y)\neq(\text{۰},\text{۰})\\ \text{۱} & (x,y)=(\text{۰},\text{۰})\end{cases}$$

پاسخ. از آنجا که توابع گویا در دامنه‌شان پیوسته‌اند، تابع مورد نظر در $(x,y)\neq(\text{۰},\text{۰})$ پیوسته است. حال باید بررسی کنیم که آیا

$$\lim_{(x,y)\to(\text{۰},\text{۰})} f(x,y)=\text{۱}?$$

اگر قرار باشد حد بالا برقرار باشد، روی همه‌ی مسیرها به سمت $(\text{۰},\text{۰})$ تابع باید به ۱ میل کند. روی مسیر $y=mx$ داریم:

$$f(x,mx)=\frac{x^{\text{۲}}(mx)}{\text{۲}x^{\text{۲}}+(mx)^{\text{۲}}}=\frac{mx^{\text{۳}}}{x^{\text{۲}}(m^{\text{۲}}+\text{۲})}=\frac{mx}{m^{\text{۲}}+\text{۲}}$$
$$\lim_{(x,y)\to(\text{۰},\text{۰})}\frac{mx}{m^{\text{۲}}+\text{۲}}=\text{۰}$$

بنابراین تابع در $(\text{۰},\text{۰})$ پیوسته نیست.

تمرین ۴. نشان دهید برای تابع تمرین قبل داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y) = ۰$$

باید نشان دهیم که

$$\forall\epsilon > ۰ \quad \exists\delta(\epsilon) > ۰ \quad \left(\forall(x,y) \quad ۰ < \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta \to |f(x,y)| < \epsilon\right)$$

فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد.

چرک‌نویس.

$$|\frac{x^۲y^۳}{۲x^۲+y^۲}| = \frac{x^۲|y^۳|}{x^۲+x^۲+y^۲}$$

حال برای آنکه کسری بزرگتر از کسر بالا بیابیم، مخرج را کوچک و صورت را بزرگ می‌کنیم.

$$\frac{x^۲|y^۳|}{x^۲+x^۲+y^۲} \leqslant \frac{(x^۲+y^۲)|y|y^۲}{x^۲+y^۲} \leqslant \sqrt{y^۲}(x^۲+y^۲) \leqslant \sqrt{x^۲+y^۲}(x^۲+y^۲) < \epsilon$$

حال اگر δ هر عدد دلخواهی باشد به طوری که $۰ < \delta < \sqrt[۳]{\epsilon}$ آنگاه

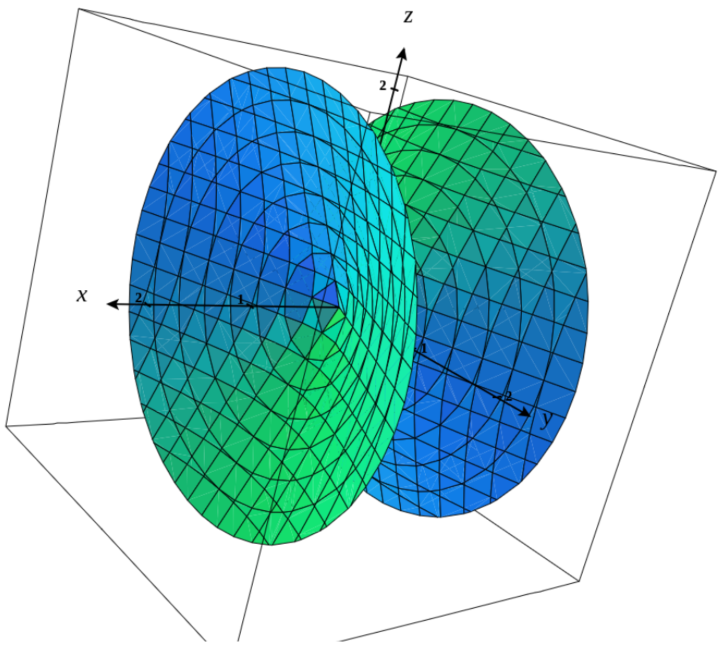
$$|f(x,y) - ۰| = |\frac{x^۲y^۳}{۲x^۲+y^۲}| \leqslant \sqrt{x^۲+y^۲}(x^۲+y^۲) \leqslant \delta^۳ < \epsilon$$

□

مثال ۵. مجموعه‌ی نقاطی را رسم کنید که فاصله‌ی آنها تا محور x دو برابر فاصله‌شان تا صفحه‌ی yz است.

پاسخ. هدفمان رسم مجموعه‌ی نقاط زیر است:

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^۳|\sqrt{y^۲+z^۲} = ۲|x|\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^۳|y^۲+z^۲ = ۴x^۲\}$$


z
2
x
2
1
1
2
y

□