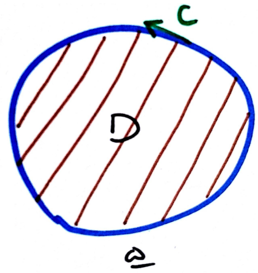
۱ جلسه‌ی چهل و یکم، دوشنبه، قضیه‌ی دیورژانس

در جلسات گذشته با قضایای گرین و استوکس آشنا شدیم. قضیه‌ی گرین به صورت زیر بود:

$$F = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

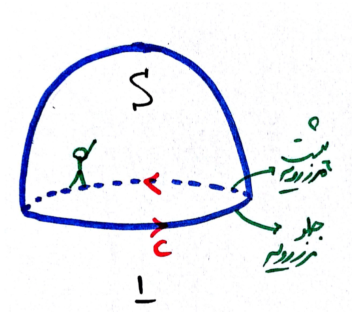
$$\oint_c F \cdot dr = \oint_c Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$



و قضیه‌ی استوکس به صورت زیر:

$$F = \Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)$$

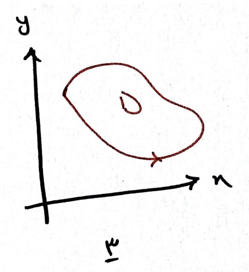
$$\oint_c F \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_S \mathrm{curl} F \cdot \overrightarrow{n} dS$$



توجه ۱. قضیه‌ی گرین در واقع حالت خاصی از قضیه‌ی استوکس است.

$$\overrightarrow{F} = \Big(P(x,y), Q(x,y)\Big)$$

یکه‌ی عمود $\overrightarrow{n} = (۰, ۰, ۱)$



بنا به قضیه‌ی استوکس:

$$\oint_c F \cdot dr = \int Pdx + Qdy = \iint_D \mathrm{curl} F \cdot \overrightarrow{n} dA$$

محاسبه‌ی $\text{curl}F$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & ۰ \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(۰) + \overrightarrow{j}(۰) + \overrightarrow{k}(Q_x - P_y)$$

جایگذاری در فرمول بالا:

$$\oint F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

در ادامه‌ی درس با قضیه‌ی دیورژانس آشنا می‌شویم. شهود پشت این قضیه به صورت زیراست. فرض کنید که جسمی کُرَوی در معرضِ میدان سرعت یک سیال گذاشته شود. شار گذرنده از سطح این جسم کروی، بستگی به میزان مایعِ احاطه شده در درون آن دارد. بنابراین یک انتگرال برداری روی یک سطح را باید بتوان با یک انتگرال عددی روی حجم درون آن محاسبه کرد.

۱.۱ قضیه‌ی دیورژانس

تعریف ۲. فرض کنید $F = \Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)$ یک میدان برداری باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\text{div}F := \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = P_x + Q_y + R_z$$

مثال ۳. فرض کنید $F = xz\overrightarrow{i} + xyz\overrightarrow{j} - y\overrightarrow{k}$ دیورژانس F را بدست آورید.

پاسخ.

$$\text{div}F = z + xz + ۰ = z + zx$$

□

توجه ۴. اگر $F = (P, Q, R)$ یک تابع برداری از $\mathbf{R}^۳$ به $\mathbf{R}^۳$ باشد آنگاه

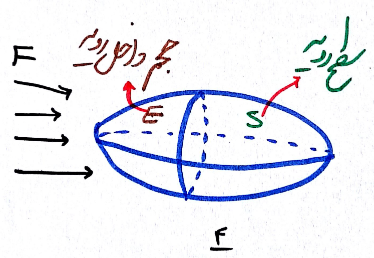
$$\text{curl}F : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}^۳$$

$$\text{div}F : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}$$

قضیه ۵ (دیورژانس)**.**

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{n} dS = \iiint_E \text{div}F dv$$

شکل زیر یک رویه‌ی بسته است.



شرایط قضیه:

۱. جهت S به سمت بیرون از جسم احاطه شده توسط رویه است.

۲. اجزای F دارای مشتقات جزئی پیوسته‌اند. (در یک ناحیه‌ی باز شامل کل سیستم)

۳. رویه‌ی S به طور قطعه‌ای هموار (یعنی اجتماعی از رویه‌های هموار) و بسته است. (به بسته بودن این رویه دقت داشته باشید. این رویه در واقع یک جسم صلب را به طور کامل احاطه کرده است).

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\iiint_E \nabla\cdot F\,dv$$

مثال ۶. شار میدان $F(x,y,z)=z\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+x\overrightarrow{k}$ را از سطح کُره‌ی واحدِ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ بیابید.

پاسخ. راه اول. با محاسبه‌ی مستقیم

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

راه دوم. با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس

$$\mathrm{div}F=۱$$

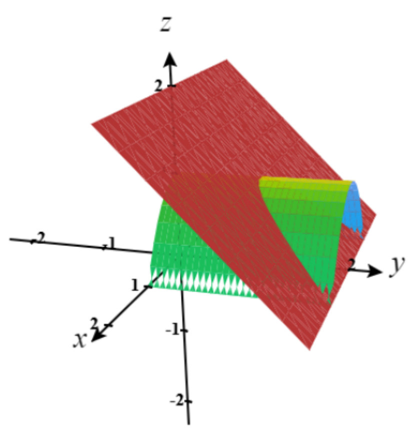
$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\iiint_E \mathrm{div}F\,dv=\underbrace{\iiint_E ۱\,dv}_{\text{حجم کُره}}=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

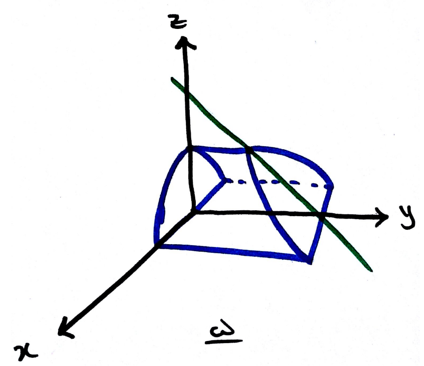
□

مثال ۷. فرض کنید $F(x,y,z)=xy\overrightarrow{i}+(y^۲+e^{xz^۲})\overrightarrow{j}+\sin(x,y)\overrightarrow{k}$ و فرض کنید S سطح احاطه کننده‌ی ناحیه‌ی محصور به استوانه‌ی $z=۱-x^۲$ و صفحات $z=۰$، $y=۰$ و $y+z-۲$ باشد. $\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$ را بیابید.

پاسخ.

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\iiint_E \mathrm{div}F\,dv$$
$$\mathrm{div}F=y+۲y+۰=۳y$$





$$E=\{-۱\leqslant x\leqslant ۱,۰\leqslant y\leqslant ۲-z,۰\leqslant z\leqslant ۱-x^۲\}$$

$$\iiint_E \mathrm{div}F\,dv=\int_{-۱}^{۱}\int_{۰}^{۱-x^۲}\int_{۰}^{۲-z}۳y\,dy\,dz\,dx$$

$$\int_{۰}^{۲-z} ۳y dy = \frac{۳}{۲}y^{۲}|_{۰}^{۲-z} = \frac{۳}{۲}(۲, z)^{۲} = \frac{۳}{۲}(۴ - ۲z + z^{۲})$$
$$\frac{۳}{۲}\int_{۰}^{۱-x^{۲}} (۴ - ۲z + z^{۲})dz = \frac{۳}{۲}(۴z - z^{۲} + \frac{z^{۳}}{۳})|_{۰}^{۱-x^{۲}} =$$
$$\frac{۳}{۲}(۴(۱ - x^{۲}) - (۱ - x^{۲})^{۲} + \frac{(۱ - x^{۲})^{۳}}{۳}) = ۶(۱ - x^{۲}) - \frac{۳(۱ - x^{۲})^{۲}}{۲} + \frac{(۱ - x^{۲})^{۳}}{۲}$$

حاصل نهایی برابر است با

$$\int_{-۱}^{۱} \Big(۶(۱ - x^{۲}) - \frac{۳(۱ - x^{۲})^{۲}}{۲} + \frac{(۱ - x^{۲})^{۳}}{۲}\Big)dx = \ldots$$

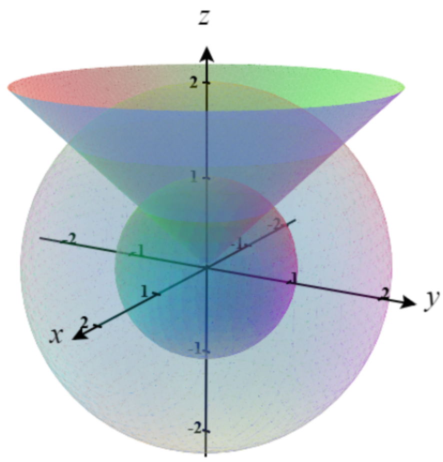
□

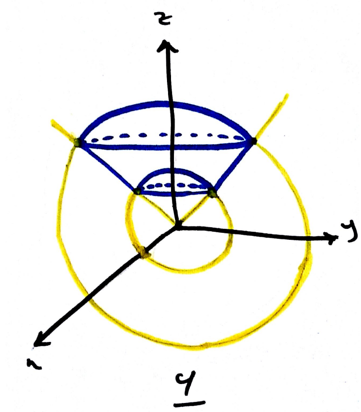
مثال ۸. فرض کنید T ناحیه‌ی محدود بین کُره‌های $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۱$ و $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۴$ و مخروط $z = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ باشد.

۱. حجم ناحیه‌ی T را بیابید.

۲. فرض کنید $F = \big(x + z^{۲}e^{y}, y - x\sin(xz^{۲}), z + \frac{y}{۱+x^{۲}}\big)$ آنگاه $\iint_S F \cdot ndS$ را بیابید که در آن S سطح احاطه کننده‌ی ناحیه‌ی بالاست.

پاسخ.





۱.

$$۱ \leqslant \rho \leqslant ۲ \quad ۰ \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{۴} \quad ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$$
$$\text{حجم } T = \iiint_E dv = \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۱}^{۲} \rho^{۲}\sin\phi d\rho d\phi d\theta =$$
$$\int_{۰}^{۲\pi} d\theta \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \sin\phi d\phi \int_{۱}^{۲} \rho^{۲}d\rho = ۲\pi(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲})\frac{۷}{۳}$$

۲.

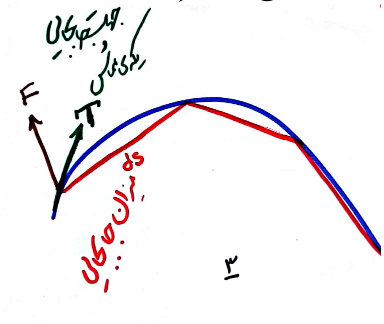
$$\mathrm{div}F = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$
$$\iint_S F \cdot \vec{n}dS = \iiint_T \mathrm{div}F dv = ۳ \times \text{حجم } T = ۱۴\pi(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

S سطح احاطه کننده‌ی T است.

□

۲.۱ مرور درس

۱. انتگرال تابع عددیِ $f(x,y,z)$ روی یک خم c به معادله‌ی $\overrightarrow{r}(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$.



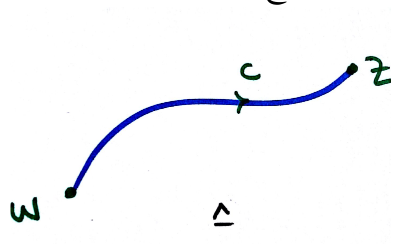
$$\int_c f ds = \int_c f\big(x(t), y(t), z(t)\big)|r'(t)|dt$$

$$ds = \sqrt{dx^۲ + dy^۲ + dz^۲}dt = |r'(t)|dt$$

۲. طول خم از نقطه‌ی $t = a$ تا $t = b$:

$$\int_c ds = \int_a^b |r'(t)|dt$$

۳. انتگرال تابع برداری $F(x,y,z) = (P,Q,R)$ روی خم $\overrightarrow{r}(t)$.



$$\int_c \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_c Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\int_a^b P\big(\overrightarrow{r}(t)\big)x'(t)dt + Q\big(\overrightarrow{r}(t)\big)y'(t)dt + R\big(\overrightarrow{r}(t)\big)z'(t)dt$$

۴. انتگرال تابع عددی روی رویه

$$S : r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$\iint_S f dS = \iint_{u,v} f\big(r(u,v)\big)|r_u \times r_v|dudv$$

$$dS = |r_u \times r_v|dudv$$

اگر معادله‌ی صریح رویه را داشته باشیم:

$$S : z = g(x,y)$$

$$dS = \sqrt{۱ + g_x^۲ + g_y^۲}$$

$$\iint_S f dS = \iint_{x,y} f\sqrt{۱ + g_x^۲ + g_y^۲}dxdy$$

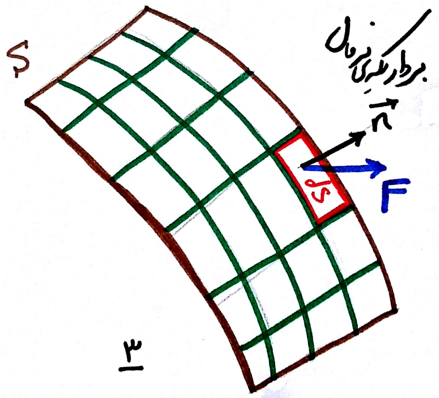
۵. مساحت یک رویه با معادله‌ی پارامتریِ $r(u,v)$:

$$\iint_S f dS = \iint_{u,v} |r_u \times r_v| du dv$$

۶. مساحت یک رویه با معادله‌ی صریحِ $z = g(x,y)$

$$\iint_S f dS = \iint_{x,y} \sqrt{۱ + g_x^۲ + g_y^۲}\, dx dy$$

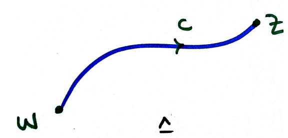
۷. انتگرال توابع برداری روی رویه



$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \begin{cases} r(u,v) \text{ رویه‌ی پارامتری } & \iint_{u,v} F.(r_u \times r_v) du dv \\ z = g(x,y) \text{ رویه‌ی } & \iint_{(x,y)} F \cdot (-g_x, -g_y, ۱) dx dy = \iint (-P g_x - Q g_y + R) dx dy \end{cases}$$

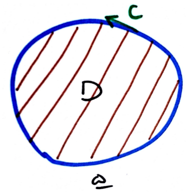
۸.

$$\int_c \nabla f \cdot dr = f(Z) - f(W)$$



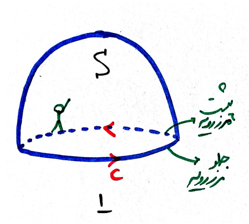
۹. (قضیه‌ی گرین)

$$\underbrace{\oint_c F \cdot dr}_{=\oint_c P dx + Q dy} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$



۱۰. (قضیه‌ی استوکس)

$$\oint_c F \cdot dr = \iint_S \text{curl} F \cdot \vec{n}\, dS$$



۱۱. (قضیه‌ی دیورژانس)

$$\iint_S F \cdot n dS = \iiint_E \mathrm{div} F dv$$