۱ جلسه‌ی یازدهم، دوشنبه

۱.۱ مرور حد

مثال ۱. نشان دهید که $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲} = ۰$

پاسخ. باید نشان دهیم که

$$\forall\epsilon>۰ \quad \exists\delta>۰ \quad \forall(x,y)\in D \quad \Big(۰<\sqrt{x^۲+y^۲}<\delta \to |\frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲}|<\epsilon\Big)$$

چرک‌نویس.

$$|\frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲}| = \frac{|x\sin(xy)|}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{|x\sin(xy)|}{x^۲+y^۲} \leq \frac{|x||xy|}{x^۲+y^۲} \leq \frac{\sqrt{x^۲}|x||y|}{x^۲+y^۲} \leqslant \frac{\cancel{\sqrt{x^۲+y^۲}}\cancel{\sqrt{x^۲+y^۲}}\sqrt{x^۲+y^۲}}{\cancel{x^۲+y^۲}} \leqslant \sqrt{x^۲+y^۲}$$

پس اگر $\delta<\epsilon$ آنگاه اگر $\sqrt{x^۲+y^۲}<\delta$ آنگاه:[۱]

$$|\frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲}| \leq \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta < \epsilon$$

□

مثال ۲. آیا تابع زیر در نقطه‌ی $(۰,۰)$ حد دارد؟

$$f(x,y) = \frac{x^۲y^۲}{x^۳+y^۳}$$

پاسخ. یک مسیر پیدا می‌کنیم که تابع روی آن حد ندارد.

[۱] در کلاس گفتم که نیاز به یک همسایگیِ $\delta_۱$ داریم که در آن نامساویِ $|\sin(xy)| \leq |xy|$ برقرار باشد؛ ولی همان طور که خودِ شما به درستی اشاره کردید، نیازی بدان نداریم.

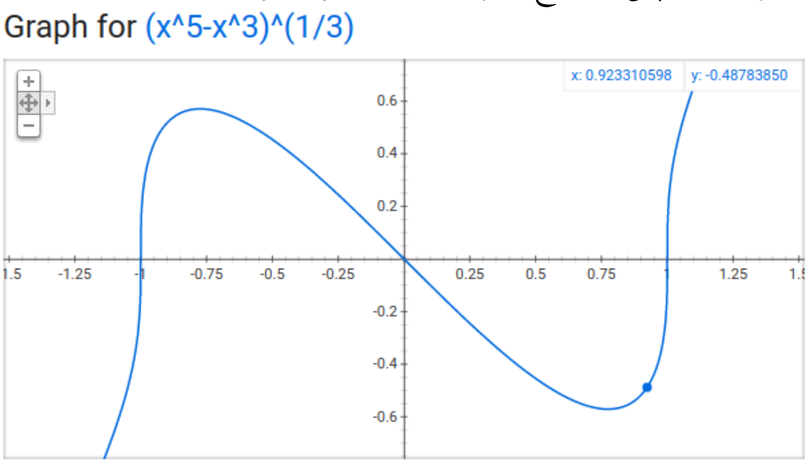
چرک نویس:

$$x^3 + y^3 = x^5 \Rightarrow y^3 = x^5 - x^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^5 - x^3}$$

اگر مسیر $y = \sqrt[3]{x^5 - x^3}$ را انتخاب کنیم، آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^5 - x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\big(x^3(x^2 - 1)\big)^{\frac{2}{3}}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}{x}$$

حد فوق وجود ندارد، پس حد تابع وجود ندارد. در زیر مسیر یادشده کشیده شده است:



$\square$

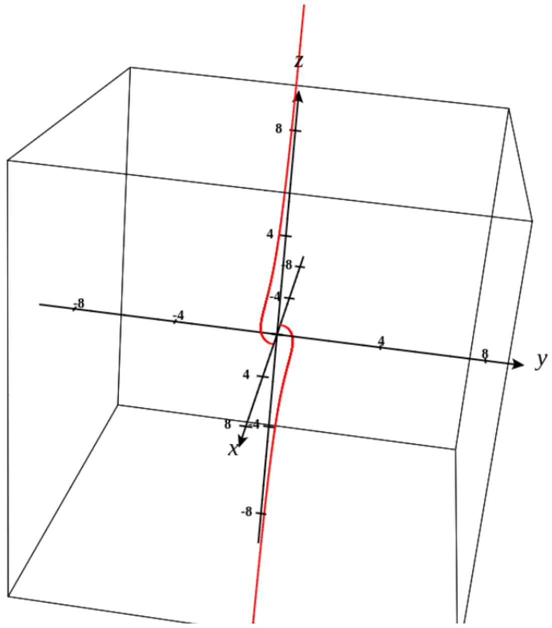
توجه کنید که خط به معادله‌ی $y = \sqrt[3]{x^5 - x^3}$ را در فضای دوبعدی می‌توان یک **تابع برداری** به صورت زیر تصور کرد:

$$\overrightarrow{r}(t) = (t, \sqrt[3]{t^5 - t^3}).$$

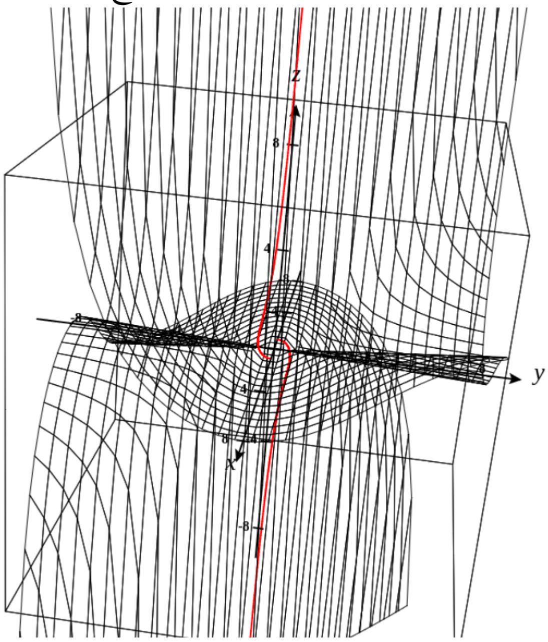
وقتی که روی منحنی فوق در صفحه‌ی xy حرکت کنیم، آنگاه، طبق محاسبات بالا، روی رویه، منحنی زیر ایجاد می‌شود:

$$\overrightarrow{r}(t) = (t, \sqrt[3]{t^5 - t^3}, \frac{(t^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}{t})$$

در زیر شکل این منحنی را کشیده‌ایم (از روی این شکل معلوم می‌شود که چرا تابع بالا حد ندارد):



در زیر رویه را به همراه منحنی بالا که روی آن واقع است می‌بینید:



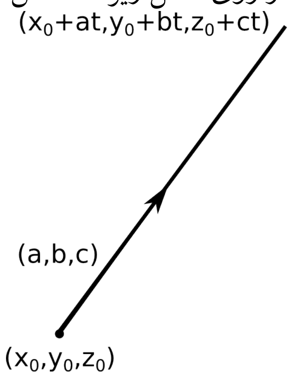
۲.۱ ادامه‌ی بحث مشتقات جزئی

یادآوری ۳. معادله‌ی پارامتری، معادله‌ای است که در آن رابطه‌ی میان x, y, z به طور مستقیم نوشته نشود، بلکه رابطه‌ی میان آنها توسط وابستگی آنها به یک پارامتر دیگر، مثلاً زمان بیان شود. یک نمونه

معادله‌ی پارامتری را در مثال بالا دیدید. به عنوان مثال دیگر، هر خط راست را می‌توان در فضای سه‌بعدی توسط یک معادله‌ی برداریِ به صورت زیر نوشت:

$$\overrightarrow{r}(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

از روی شکل زیر مشخص است که معادله‌ی بالا چگونه به دست آمده است:



پس

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

به بیان دیگر:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

بردارِ (a, b, c) را بردارِ جهت خط بالا می‌خوانیم.

توجه ۴. در واقع تابع برداریِ $\mathbf{r}(t)$ یک عدد می‌گیرد و یک بردار می‌دهد:

$$t \mapsto \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$$

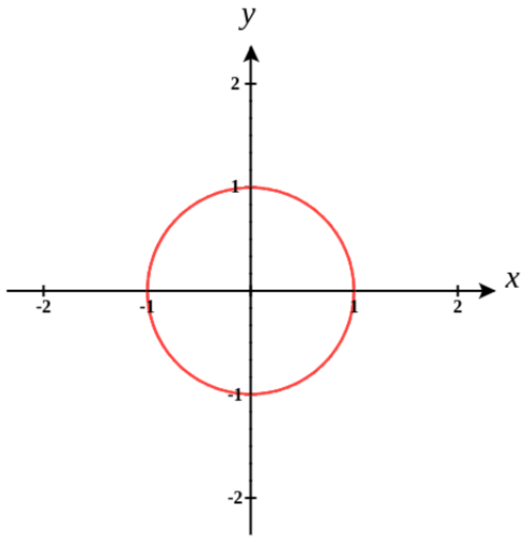
$$\Big(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct\Big)$$

هنگام رسم چنین تابعی، پارامترِ t را رسم نمی‌کنیم و فقط مقادیر برداری به دست آمده بر حسب آن را رسم می‌کنیم.

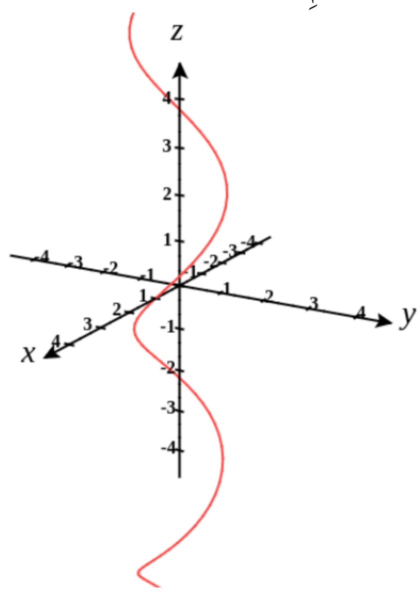
مثال ۵. منحنی فضائی $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ را رسم کنید.

توجه کنید که از آنجا که $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$، منحنی مورد نظر روی استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ واقع

شده است. منحنی $(\cos t, \sin t)$ نیز در دو بُعد به شکل زیر است.

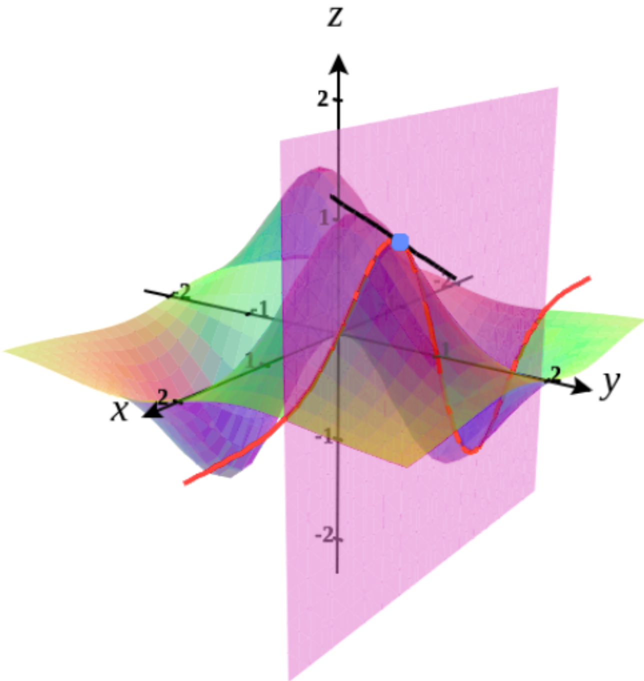


در زیر، خمِ $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ را رسم کرده‌ایم:



خم بالا به صورت مارپیچ دور استوانه می‌چرخد.

مثال ۶. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $y = y_\circ$ را در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ بنویسید.



پاسخ.
شیب خط مورد نظر برابر است با

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_\cdot, y_\cdot)$$

معادله‌ی خط:

$$\begin{cases} z - z_\cdot = \frac{\partial z}{\partial x}(x_\cdot, y_\cdot)(x - x_\cdot) \\ y = y_\cdot \end{cases}$$

معادله‌ی پارامتری خط:

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_\cdot \\ z = z_\cdot - \frac{\partial z}{\partial x}(x_\cdot, y_\cdot)x_\cdot + \frac{\partial z}{\partial x}(x_\cdot, y_\cdot)t \end{cases}$$

بردار مولد خط این مثال برابر است با

$$\left(۱, ۰, \frac{\partial z}{\partial x}(x_\cdot, y_\cdot)\right)$$

بیان دوم. در صفحه‌ی $y = y_۰$ منحنیِ $z = g(x) = f(x, y_۰)$ را داریم. معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $x_۰$ به صورت زیر است:

$$z - z_۰ = g'(x_۰)(x - x_۰)$$

که در آن $g'(x_۰)$ برابر است با

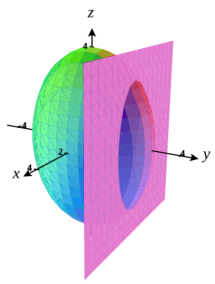
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_۰, y_۰)$$

□

تمرین ۷. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $x = x_۰$ را در نقطه‌ی $(x_۰, y_۰, z_۰)$ بنویسید.

مثال ۸. بیضی‌وار $۴x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ = ۱۶$ صفحه‌ی $y = ۲$ را در یک بیضی قطع می‌کند. معادلات پارامتری خط مماس بر این بیضی را در نقطه‌ی $(۱, ۲, ۲)$ بنویسید. (بیضی مورد نظر را نیز رسم کنید.)

پاسخ.



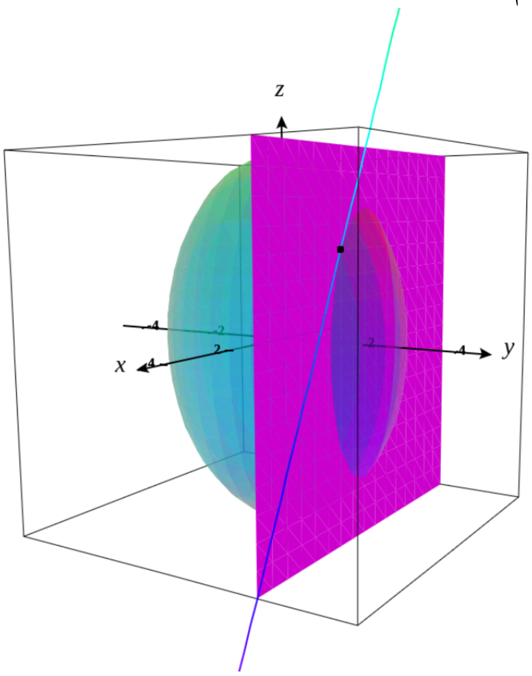
$$\begin{cases} z - z_۰ = \frac{\partial z}{\partial x}(۱, ۲)(x - ۱) \\ y = ۲ \end{cases}$$

برای محاسبه‌ی $\partial z / \partial x$ از دو طرف معادله‌ی $۴x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ = ۱۶$ بر حسب x مشتق می‌گیریم.

$$۸x + ۰ + ۲Z\frac{\partial z}{\partial x} = ۰ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(۱, ۲) = -۲$$

$$\begin{cases} z = ۴ - ۲t \\ y = ۲ \\ x = t \end{cases}$$

در زیر وضعیت بالا ترسیم شده است:



$\square$

مثال ۹. فرض کنید x و y مستقل از هم باشند و z به آنها وابسته باشد و داشته باشیم:

$$yz - \ln z = x + y$$

آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{۱}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = ۱ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(y - \frac{۱}{z}) = ۱ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۱}{y - \frac{۱}{z}}$$

$\square$

تمرین ۱۰. اگر داشته باشیم

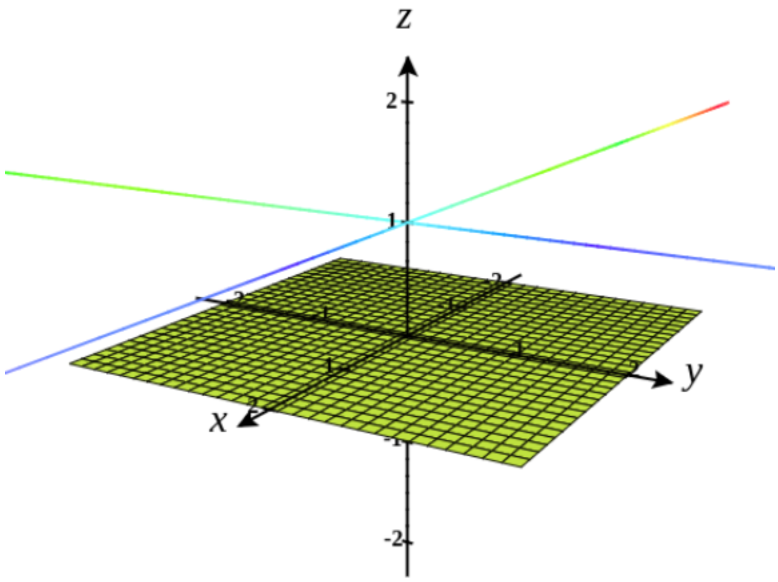
$$f(x,y) = x(x^۲ + y^۲)^{-\frac{۳}{۲}} e^{\sin(x^۲ y)}$$

آنگاه $f_x(۱,۰)$ را بیابید.

توجه ۱۱. در توابع تک متغیره (مثلاً تابع $y = f(x)$) دیدیم که اگر مشتق تابع در یک نقطه‌ی $x = x_۰$ موجود باشد، آنگاه تابع در آن نقطه پیوسته است. اما در توابع $z = f(x,y)$ ممکن است $\frac{\partial z}{\partial x}(x_۰,y_۰)$ و $\frac{\partial z}{\partial y}(x_۰,y_۰)$ هر دو موجود باشند ولی تابع در $(x_۰,y_۰)$ پیوسته نباشد.

مثال ۱۲. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x,y)=\begin{cases} ۰ & xy\neq ۰\\ ۱ & xy=۰\end{cases}$$



نشان دهید که تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ پیوسته نیست، اما $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ هر دو موجودند.

توجه ۱۳. اگر $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ هر دو در یک دیسک به مرکز (a,b) پیوسته باشند آنگاه f در نقطه‌ی (a,b) پیوسته است. در درسهای آینده خواهیم دید که تحت شرایط ذکر شده، در واقع، تابع مورد نظر **دیفرانسیل‌پذیر** است.

تمرین ۱۴.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^{۳}y}{x^{۶}+y^{۶}} & \neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

نشان دهید که f_x و f_y در تمام نقاط موجودند و در $(۰,۰)$ پیوسته نیستند. نشان دهید که f در مبدأ پیوسته نیست.

۳.۱ مشتقات جزئی مراتب بالاتر برای تابع $z = f(x,y)$

گفتیم که اگر $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد، آنگاه $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ نیز توابعی دو متغیره هستند. پس می‌توان مشتقات جزئی آنها را نیز در نظر گرفت:

۱. $(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = f_{۱۱}$

۲. $(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = f_{۱۲}$ (به ترتیب نوشتن متغیرها توجه کنید)

۳. $(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = f_{۲۱}$

۴. $(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = f_{۲۲}$

مثال ۱۵. مشتقات f_{xy} و f_{yx} را در یک نقطه‌دلخواه (a,b) بیابید.

$$f(x,y) = x^۳ + x^۲y^۳ - ۲y^۲$$

پاسخ.

$$f_x = ۳x^۲ + ۲xy^۳ - ۰$$

$$f_y = ۳x^۲y^۲ - ۴y$$

$$f_{xy}(a,b) = ۶ab^۲ = f_{yx}$$

□

در مثال بالا مشاهده کردید که f_{xy} با f_{yx} برابر شد. هر چند این امر عجیب به نظر می‌رسد، ولی تحت شرایطی همواره برقرار است. در جلسه‌ی بعد در این باره صحبت خواهیم کرد.

۲ تمرین

تمرین ۱۶. نشان دهید که حدهای زیر موجود نیستند.

۱. $\lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \frac{xy+yz}{x^۲+y^۲+z^۲}$

۲. $\lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \frac{xy+yz^۲+xz^۲}{x^۲+y^۲+z^۲}$

تمرین ۱۷. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \frac{x^۲y^۲z^۲}{x^۲+y^۲+z^۲} = ۰$$

تمرین ۱۸. نشان دهید که تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sin x^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

تابعی پیوسته است.

تمرین ۱۹. حدهای زیر را محاسبه کنید:

۱. $\lim_{(x,y)\to(۱,۱),x\neq ۱} \frac{xy-y-۲x+۲}{x-۱}$

۲. $\lim_{(x,y)\to(۲,-۴),x\neq x^۲,y\neq -۴} \frac{y+۴}{x^۲y-xy+۴x^۲-۴x}$

۳. $\lim_{(x,y)\to(۴,۳),x\neq y+۱} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+۱}}{x-y-۱}$

تمرین ۲۰. $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را بیابید.

۱. $f(x,y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$

۲. $f(x,y) = (x^۲-۱)(y+۲)$

۳. $f(x,y) = \frac{۱}{x+y}$

۴. $f(x,y) = e^{xy}\ln y$

۵. $f(x,y) = \int_x^y g(t)dt$ که در آن $g(t)$ تابعی پیوسته است.

تمرین ۲۱. تمام مشتقات جزئی دوم را بیابید.

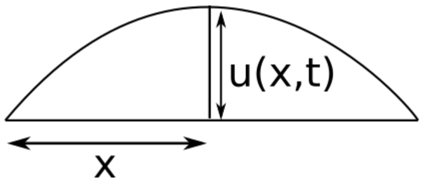
۱. $f(x,y) = x^۲y + \cos y + y\sin x$

۲. $h(x,y) = xe^y + y + ۱$

۳. $s(x,y) = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$

تمرین ۲۲. معادله‌ی موج به صورت کلی زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



در معادله‌ی بالا، ضریبِ a به جنس طناب بستگی دارد. نشان دهید که تابع $u(x,t) = \sin(x - at)$ در معادله‌ی موج صدق می‌کند.