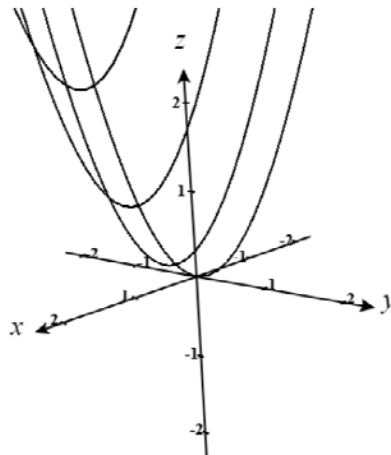


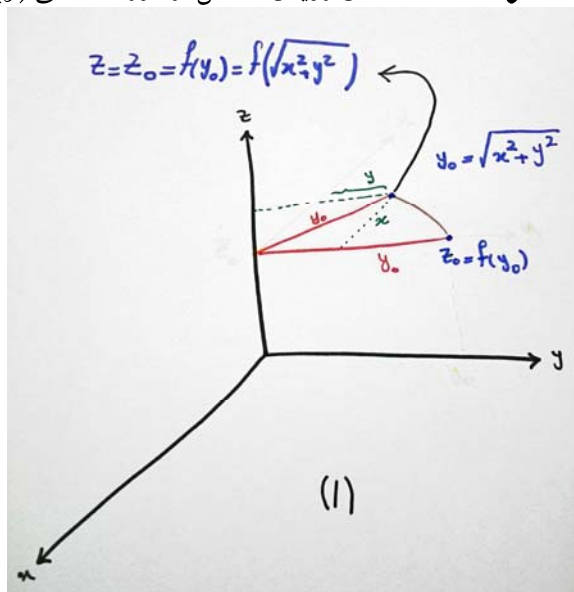
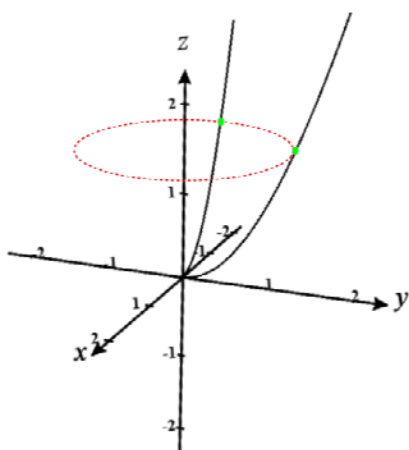
۳ نیم‌جلسه‌ی سوم، چهارشنبه

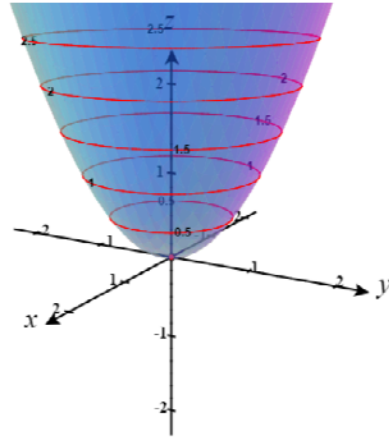
در پایان جلسه‌ی قبل گفتیم که رویه‌ی به معادله‌ی $z = x^2 + y^2$ را می‌توان مجموعه‌ی دوایری تصور کرد که شعاعشان با پیش رفتن در سوی محور z بیشتر و بیشتر می‌شود. این رویه را می‌توان همچنین مجموعه‌ی سهمی‌هایی نیز تصور کرد که هر چه بالاتر می‌روند باریکتر می‌شوند:



در زیر روش دیگری نیز برای نگاه کردن به رویه‌ی مورد نظر آورده‌ایم.

سوال ۳۰. معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $z = f(y)$ حول محور z را بنویسید.





با توجه به اشکال بالا (و توضیحاتی که در کلاس درس داده‌ایم) معادله‌ی رویه‌ی مورد نظر عبارت است از $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

به طور کلی معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی به معادله‌ی ضمنی $f(z, y) = 0$ حول محور z عبارت است از

$$f(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

مثال ۳۱. رویه‌ی $z = x^2 + y^2$ از دوران منحنی $z = y^2$ (یا $z = x^2$) حول محور z ایجاد می‌شود؛ زیرا می‌توان نوشت:

$$z = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

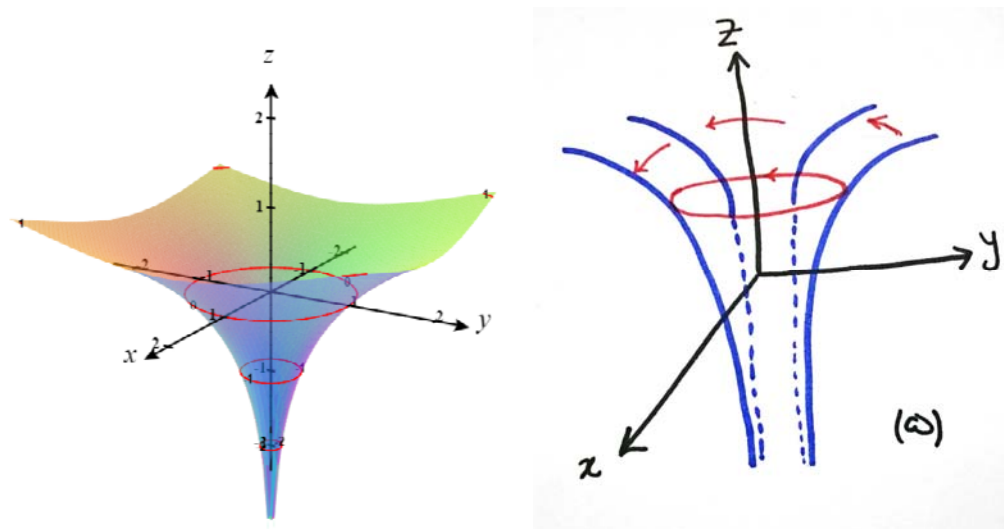
مثال ۳۲. رویه‌های زیر را رسم کنید.

$$1. \quad z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$$

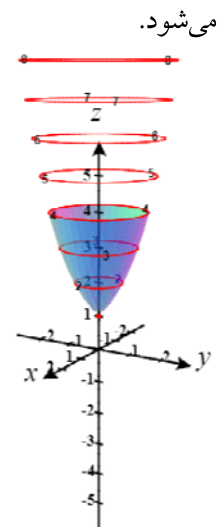
قرار دهید:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

بنا به آنچه گفته شد، رویه‌ی مورد نظر از دوران منحنی $z = \ln(y)$ حول محور z ایجاد می‌شود.



۲. $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ ؛ این رویه نیز از دوران منحنی $z = e^y$ (برای $y > 0$) حول محور z ایجاد می‌شود.



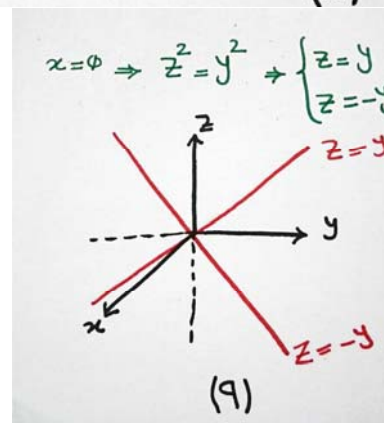
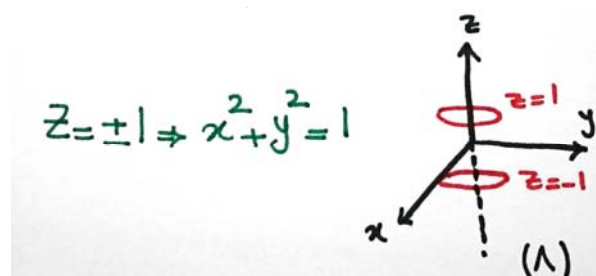
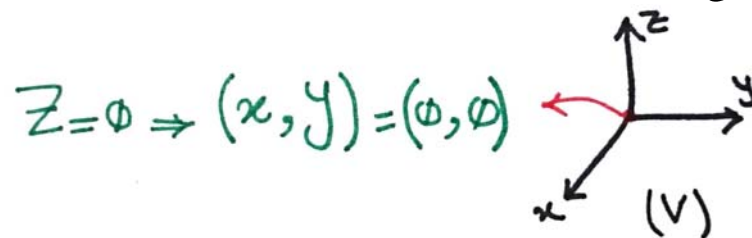
توجه ۳۳. از دوران منحنی $f(t_1, t_2) = 0$ حول محور t_1 به رویه‌ی $f(t_1, \pm\sqrt{t_2^2 + t_3^2}) = 0$ می‌رسیم؛ در این عبارت، برای $i \neq j$ داریم $t_i \neq t_j \in \{x, y, z\}$. این جمله را تفسیر کنید!

۱.۳ مخروطها

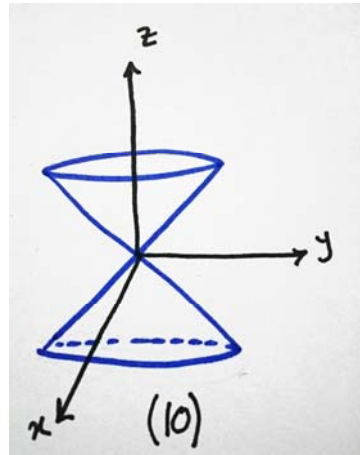
مثال ۳۴. رویه به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$z^2 = x^2 + y^2$$

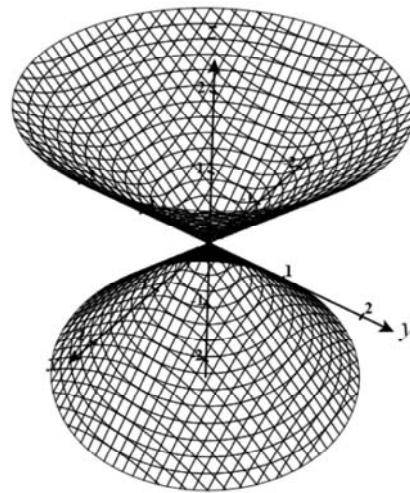
پاسخ. روش اول.



حاصل تلفیق شکل‌های بالا به صورت زیر است:



رویه‌ی مورد نظر را با نرم‌افزارهای رایانه‌ای به صورت زیر کشیده‌ایم:



روش دوم. معادله‌ی مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت: $z^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$ بنابراین شکل مورد نظر از دوران منحنی $z^2 = y^2$ حول محور z ایجاد می‌شود؛ به بیان دیگر از دوران دو منحنی $z = \pm y$ حول محور z ایجاد می‌شود.

□

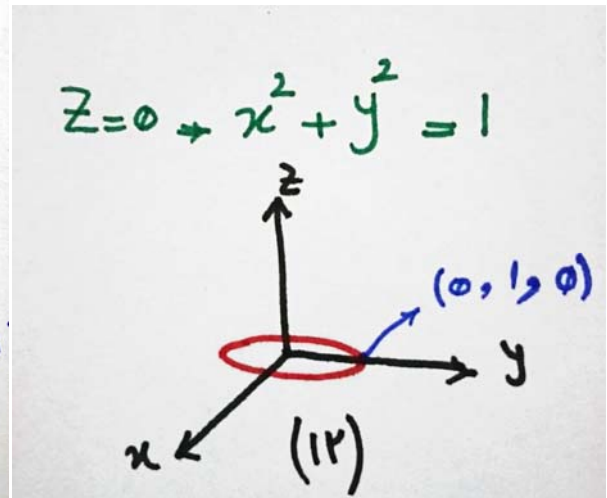
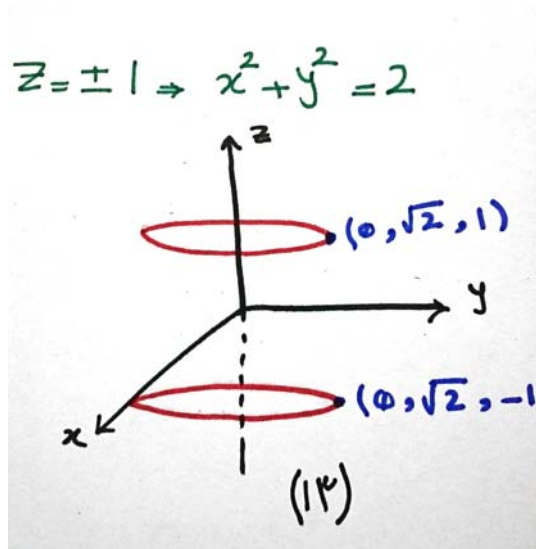
معادله‌ی کلی یک مخروط به صورت زیر است:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

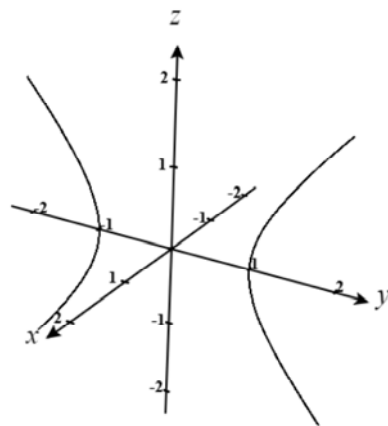
۲.۳ هذلولی وار یکپارچه

مثال ۳۵. رویه ی به معادله $z^2 + 1 = x^2 + y^2$ را رسم کنید.

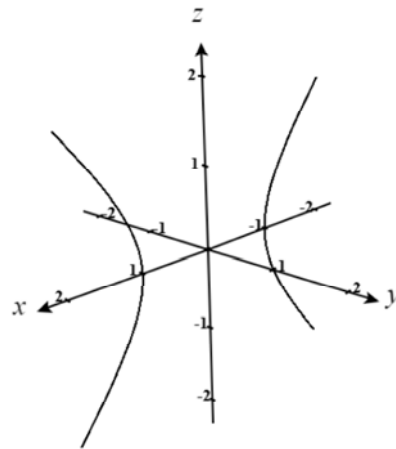
پاسخ.



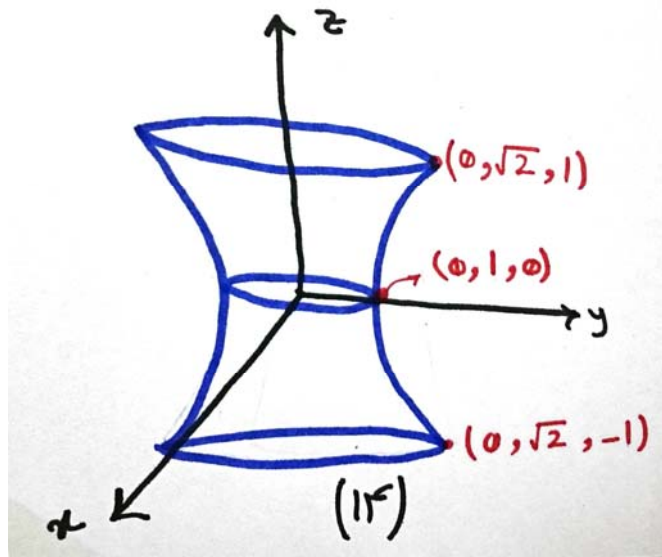
$$x = 0 \Rightarrow y^2 - z^2 = 1$$



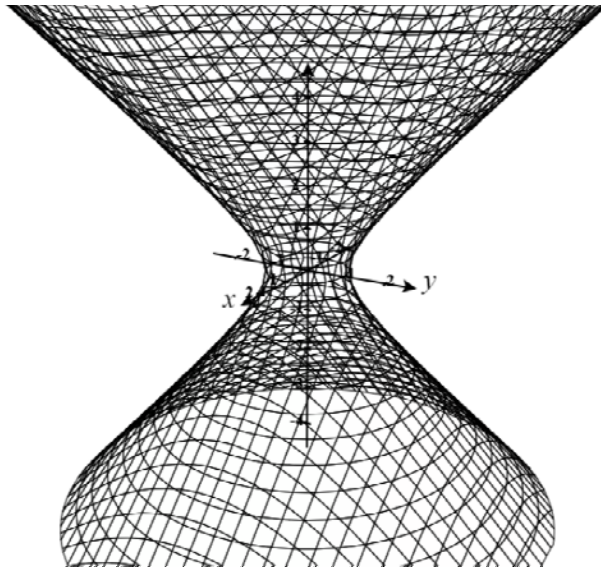
$$y = 0 \Rightarrow x^2 - z^2 = 1$$



نتیجه‌ی تلفیق چهار شکل بالا به صورت زیر است:



شکل نرم‌افزاری رویه نیز به صورت زیر است:



□

تمرین ۳۶. شکل بالا را با استفاده از دوران رسم کنید.

پاسخ.

$$z^2 + 1 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$$

پس رویه‌ی مورد نظر از دوران منحنی به معادله‌ی $z^2 + 1 = y^2$ (یا $z^2 + 1 = x^2$) حاصل می‌شود؛

□

به بیان دیگر از دوران یک هذلولی. به شکل حاصل هذلولوی یکپارچه^۲ می‌گویند.

معادله‌ی کلی هذلولوی یکپارچه به صورت زیر است:

$$\frac{z^2}{c^2} + 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

توجه ۳۷. (سوال یکی از دانشجویان) برای رسم معادله‌ی $z^2 + 2 = x^2 + y^2$ طرفین را بر ۲ تقسیم

می‌کنیم، تا به معادله‌ی استاندارد بالا برسیم.

$$\frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} + 1 = \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}$$

^۲Hyperboloid of one sheet