دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

خرداد ماه ۹۵ | **آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۲** | **مدت ۱۵۰ دقیقه**

---

۱. تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=3+x^2-y^2$ مفروض است.

الف) نقاط بحرانی f را بیابید و با به کار بردن آزمون مشتق دوم تعیین کنید f در این نقاط چه وضعیتی دارد.

ب) اکسترمم‌های مطلق f را بر ناحیه‌ی بسته و کراندار $R=\{(x,y); x^2+4y^2\le 4\}$ تعیین کنید. (۲۰ نمره)

---

۲. مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال $\iint_D \frac{x^2y}{1+x^2y^2}\,dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به خم‌های $xy=1$، $xy=4$ و خطوط $x=1$ و $x=4$ است. (۱۵ نمره)

---

۳. فرض کنید D قسمتی از ناحیه محصور توسط دایره‌ی $x^2+y^2=2x$ در ناحیه‌ی $y\ge x$ باشد.

الف) مطلوب است محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی D.

ب) اگر C قسمتی از دایره‌ی $x^2+y^2=2x$ از نقطه‌ی $A(1,1)$ به نقطه‌ی $O(0,0)$ در نیم صفحه‌ی $y\ge 0$ باشد مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$، که در آن $\mathbf{F}(x,y)=(x-y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}$.

ج) اگر C همان مسیر قسمت (ب) باشد مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C 3x^2e^y\,dx+(x^3e^y+1)\,dy$. (۳۵ نمره)

---

۴. فرض کنید T ناحیه‌ی محدود بین کره‌های $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ درون و روی مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ باشد.

الف) حجم ناحیه‌ی T را به دست آورید.

ب) اگر S رویه‌ی محصور کننده‌ی ناحیه‌ی T و $\mathbf{n}$ قائم یکه بر S رو به سمت خارج باشد مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+z^2e^y)\mathbf{i}+(y-x\sin(xz^2))\mathbf{j}+(z+\frac{y}{1+x^2})\mathbf{k}$. (۲۰ نمره)

---

۵. فرض کنید رویه‌ی S بخشی از نیم‌کره‌ی $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ محصور توسط استوانه‌ی $x^2+y^2=2y$ باشد.

الف) مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_S z\,d\sigma$.

ب) اگر $\mathbf{F}(x,y,z)=(-y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و C مرز رویه‌ی S باشد (در جهت مثبت نسبت به قائم بیرونی کره) مقدار $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را بیابید. (۲۰ نمره)

موفق باشید