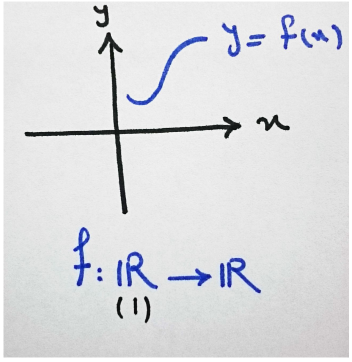
۱ جلسه‌ی اول

در درس ریاضی ۱ با **حساب دیفرانسیل و انتگرالِ** توابع تک متغیره آشنا شدیم. یک تابعِ تک‌متغیره‌ی $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را می‌توان به دو طریق **هندسی** و **جبری** مطالعه کرد.



مطالعه‌ی هندسی این تابع یعنی رسم نمودار آن. مطالعه‌ی جبری تابع یعنی محاسبه‌ی مشتق آن، یافتن نقاط بحرانی و بررسی علامت مشتق. در ریاضی ۱ دیدیم که میان ویژگی‌های مشتق تابع و شکل هندسی آن رابطه وجود دارد. یعنی می‌توان شکل تابع را تنها با مطالعه‌ی جبری مشتقات آن حدس زد.

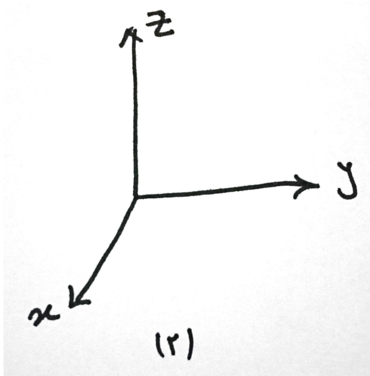
در درس ریاضی ۲ به حساب دیفرانسیل و انتگرال **توابع چندمتغیره** می‌پردازیم. هدف ما از این درس گذار از فضای دو بُعدیِ $\mathbf{R}^۲$ به فضاهای با ابعاد بالاتر است، مانند $\mathbf{R}^n$ برای $n > ۲$. منظورمان از توابع چندمتغیره، توابعی است مانند

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \quad n, m > ۰$$

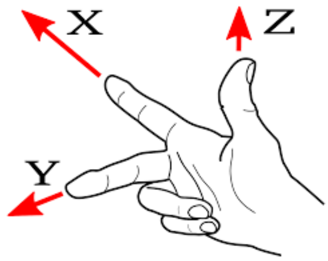
$$(x_۱, \dots, x_n) \mapsto (y_۱, \dots, y_m)$$

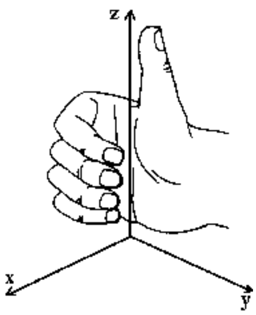
از میان این توابع، به طور خاص به توابع $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ و $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^۲$ علاقه‌مند خواهیم بود؛ زیرا این توابع را می‌توان در فضای سه‌بعدی تجسم کرد. فضای سه‌بعدی برای مطالعه‌ی فیزیکی حرکت بسیاری از اجسام در فضا، مناسب است.

فضای سه بُعدی $\mathbf{R}^۳$ توسط سه محورِ x، y و z ساخته شده است.



برای تعیین ترتیب این محورها از قاعده‌ی دست راست استفاده می‌کنیم:





در این درس، نخست با نحوه‌ی رسم برخی توابع در $\mathbf{R}^۳$ آشنا خواهیم شد و سپس مفهوم مشتق‌پذیری را به توابع $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ تعمیم خواهیم داد.

سوال ۱. فرض کنید $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ یک تابع باشد و $(a, b) \in \mathbf{R}^۲$ نقطه‌ای دلخواه باشد. پیشنهاد شما برای تعریف مشتق این تابع در نقطه‌ی یادشده چیست؟

در درس ریاضی ۱ دیدیم که توابع دیفرانسیل‌پذیرِ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ، توابعی هستند که رفتار آنها در نزدیکی نقاط را می‌توان با استفاده از رفتار خطوط مماس تخمین زد. در ریاضی ۲ خواهیم دید که در واقع مطالعه‌ی مشتق یک تابع $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ یعنی تخمین زدن این توابع توسط صفحات مماس و مطالعه‌ی تغییرات صفحات مماس. در این درس نیز با استفاده از مطالعه‌ی مشتق، شکل هندسی یک

تابع را تخمین خواهیم زد. در اینجا علاوه بر مینی‌موم و ماکزیمم، نقطه‌ی زینی هم خواهیم داشت:

(۴)

رفع ابهام ۲. تجسم هندسیِ توابعِ $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ به صورت **رویه‌ها** است. یک رویه را می‌توانید به صورت یک پارچه تصور کنید که می‌تواند چین و چروک هم داشته باشد. اما توابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^۲$ به صورت **منحنی‌های فضائی** هستند. یک منحنی فضائی را می‌توانید یک نخ تصور کنید که در فضا به شکلی درآمده است. در زیر، یک رویه و یک منحنی فضائی برای مثال رسم کرده‌ایم. شکل اول، توسط تابع زیر تولید شده است:

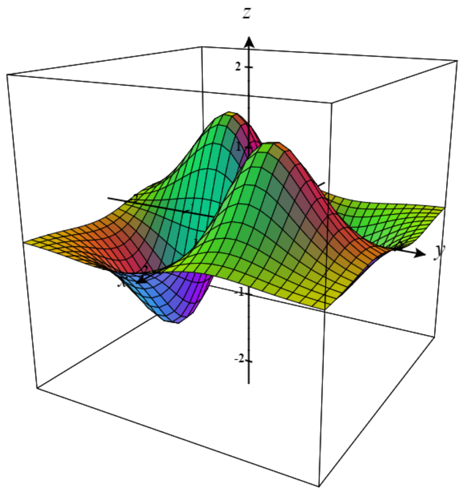
$$f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$$

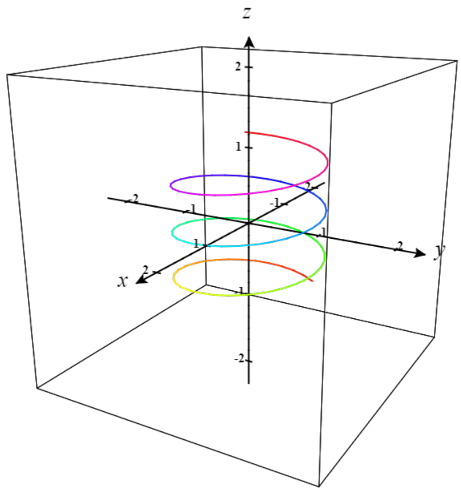
$$f(x, y) = \frac{۷xy}{e^{x^۲+y^۲}}$$

شکل دوم توسط تابع زیر تولید شده است:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^۲$$

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t), ۰/۱t)$$





برای آشنائی بیشتر با فضای سه‌بعدی، نخست با نحوه‌ی رسم فضای هندسی برخی معادلات آشنا می‌شویم:

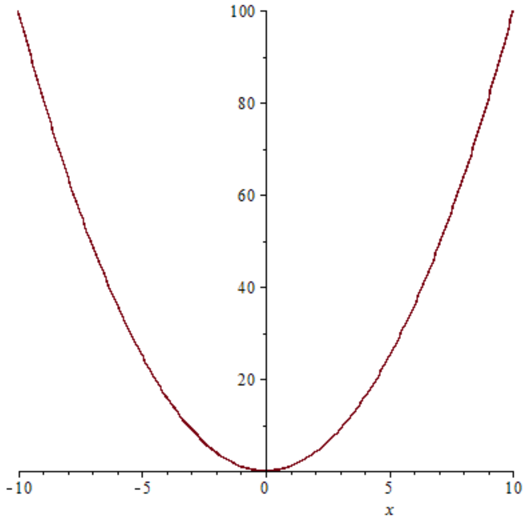
۱.۱ رسم استوانه‌ها

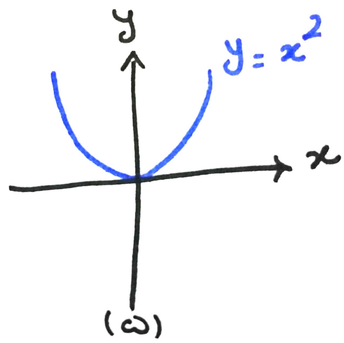
توجه کنید که در این بخش لزوماً به رسم **تابع‌ها** نخواهیم پرداخت. یعنی معادلاتی که آنها را رسم می‌کنیم، ممکن است لزوماً تابع نباشند.

مثال ۳. در **فضای دو بعدی** $\mathbf{R}^۲$ مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $y = x^۲$ را رسم کنید؛ یعنی

مجموعه‌ی زیر را در $\mathbf{R}^۲$ بکشید:

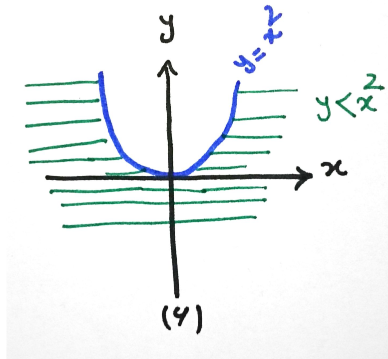
$$\{(x,y)\in \mathbf{R}^۲ | y = x^۲\}$$



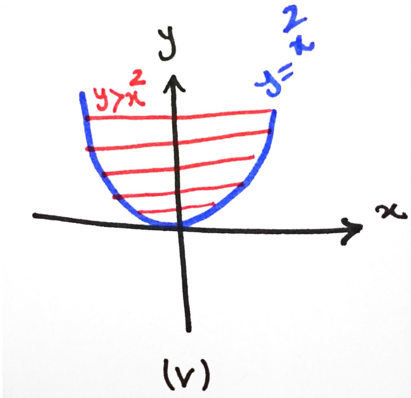


مثال ۴. در $\mathbf{R}^۲$ مجموعه‌های زیر را رسم کنید:

$$\{(x,y) | y < x^۲\}$$



$$\{(x,y) | y > x^۲\}$$

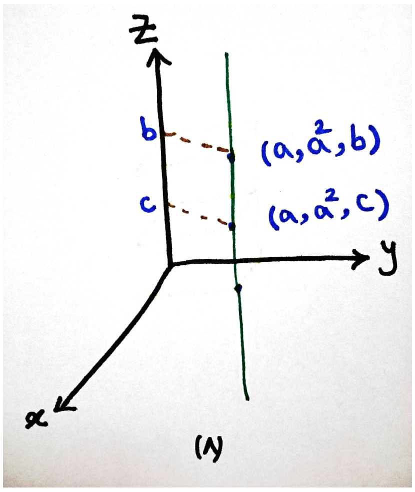


مثال ۵. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $y = x^۲$ را در فضای **سه بُعدی** رسم کنید.

پاسخ. می‌خواهیم مجموعه‌ی نقاط زیر را در $\mathbf{R}^۳$ رسم کنیم:

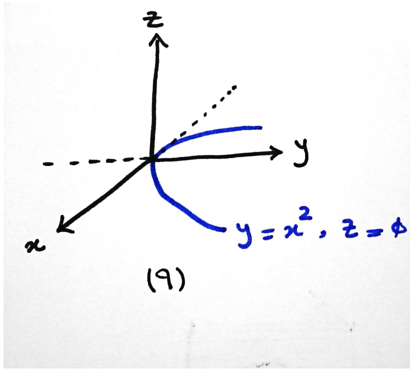
$$\{(x, y, z)|y = x^۲\}$$

مشاهده ۶. اگر نقطه‌ی $(a, a^۲, b)$ روی شکل مورد نظر واقع باشد، آنگاه هر نقطه‌ی دیگرِ $(a, a^۲, c)$ نیز روی همان شکل خواهد بود. به بیان دیگر اگر نقطه‌ی p روی شکل مورد نظر ما واقع شود، آنگاه هر خطی که از p بگذرد و با محور z موازی باشد نیز روی شکل واقع است.



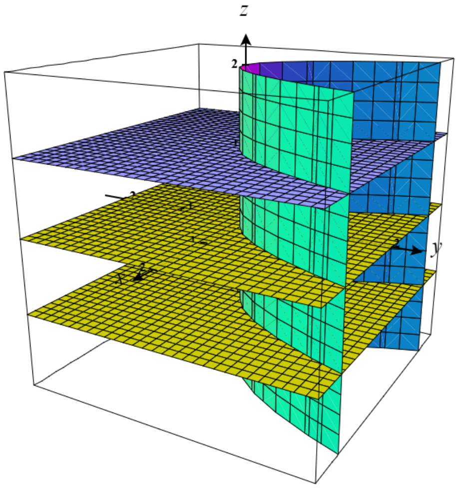
مشاهده ۷. تصویر شکل مورد نظر در صفحه‌ی xy به صورت زیر است:

$$\{(x, y, ۰)|y = x^۲\}$$

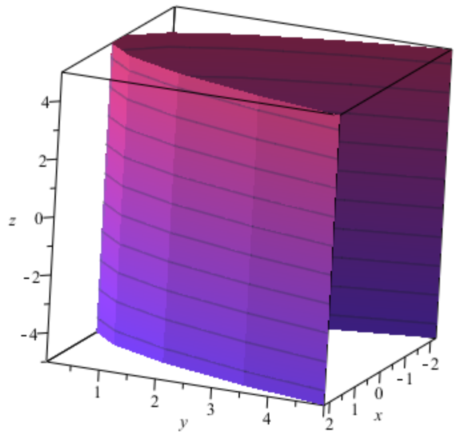


به بیان بهتر اشتراک شکل مورد نظر ما صفحه‌ی $z = ۰$ به صورت بالاست.

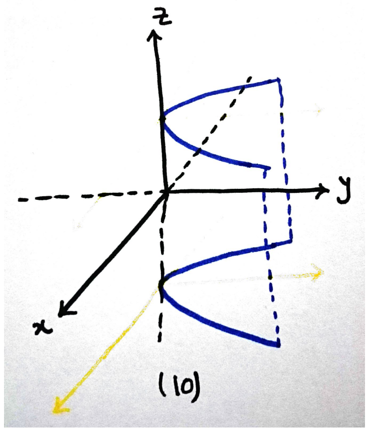
مشاهده ۸. اشتراک شکل مورد نظر ما با صفحات $z = ۰, z = \pm ۱$ به صورت زیر است:



در واقع در هر ارتفاعی یک بار منحنیِ $y = x^۲$ ایجاد شده است:

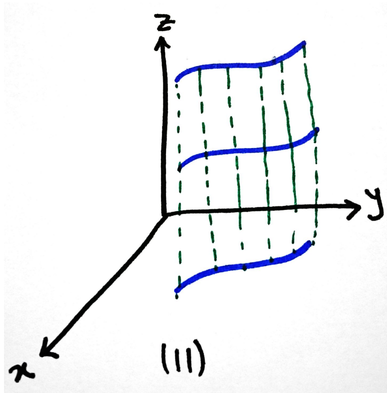


شکل بالا مثالی از یک **استوانه** است.

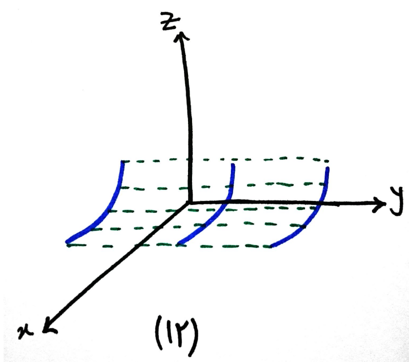


تعریف ۹. منظور از **استوانه** مجموعه‌ی همه‌ی خطوط موازی‌ای است که از یک منحنی دلخواه می‌گذرند.

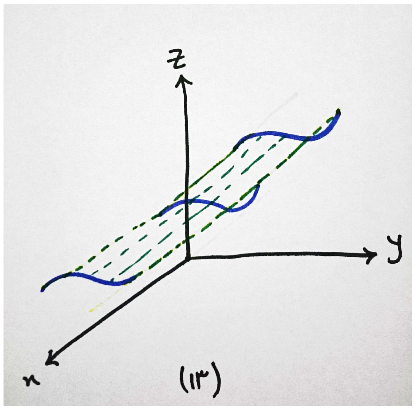
معادله‌ی $f(x,y)=۰$ یک استوانه موازی محور zها به دست می‌دهد.



به منحنیِ $f(x,y)=\text{۰}$ منحنیِ مولّد استوانه گفته می‌شود. به طور مشابه معادله‌ی $f(x,z)=\text{۰}$ یک استوانه موازی محور y بدست می‌هد.



همچنین معادله‌ی $f(y,z)=\text{۰}$ یک استوانه موازی محور x بدست می‌دهد.



□

مثال ۱۰. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $z = \sin x$ را رسم کنید.