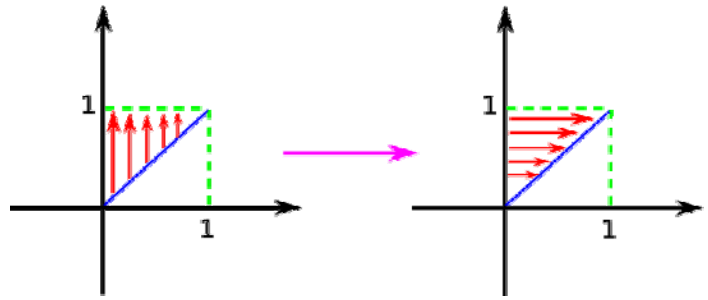
۳۰ جلسه‌ی سی‌اُم دوشنبه

مثال ۲۶۷. $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)dydx$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D = \{(x,y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\}$$



$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)dydx = \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2)dxdy$$

$$\int_0^y \sin(y^2)dx = x\sin(y^2)|_0^y = y\sin(y^2)$$

$$\int_0^1 y\sin(y^2)dy = \frac{-\cos(y^2)}{2}|_0^1 = \frac{-\cos(1)}{2} + \frac{1}{2}$$

□

۱.۳۰ ویژگی‌های انتگرال

۱. $\iint_D \Big(f(x,y) + g(x,y)\Big)dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$

۲. $\iint_D c \times f(x,y)dA = c \times \iint_D f(x,y)dA$

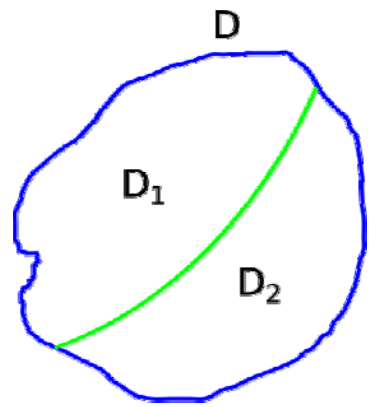
۳. اگر در ناحیه‌ی D داشته باشیم

$$f(x,y) \geqslant g(x,y)$$

آنگاه

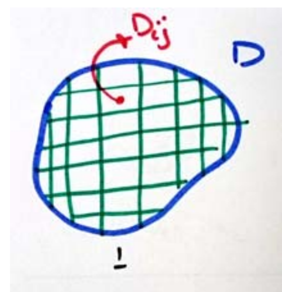
$$\iint_D f(x,y)dA \geqslant \iint_D g(x,y)dA$$

۴. $\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$



۵. مساحت ناحیه‌ی D برابر است با

$$\iint_D \underbrace{f(x,y)}_{=1} dA = \iint_D dA$$

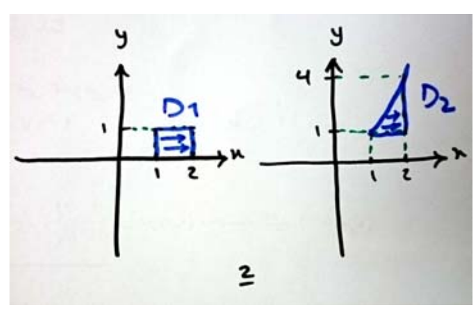


تمرین ۲۶۸. انتگرال مکرّرِ زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{y}{x^4} \sin(\frac{\pi x}{2}) dx dy + \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{x^4} \sin(\frac{\pi x}{2}) dx dy$$

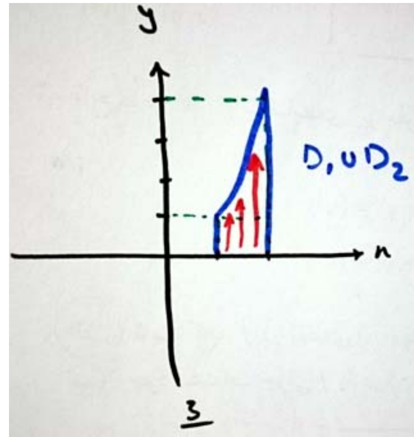
پاسخ.

$$\underbrace{\int_0^1 \int_1^2}_{D_1} \frac{y}{x^4} \sin(\frac{\pi x}{2}) dx dy + \underbrace{\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2}_{D_2} \frac{y}{x^4} \sin(\frac{\pi x}{2}) dx dy$$



اگر ناحیه‌ی D_1 و ناحیه‌ی D_2 اشتراک نداشته باشند آنگاه داریم

$$\iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA = \iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dA$$



بنا به شکل بالا ناحیه‌ی انتگرالگیری را به صورت زیر پارامتربندی می‌کنیم:

$$\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{x^{۲}} \frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dydx$$

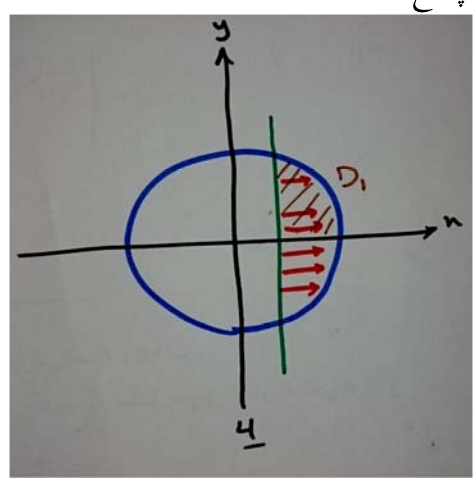
$$\int_{۰}^{x^{۲}} \frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dy = \frac{۱}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})\int_{۰}^{x^{۲}} ydy = \frac{۱}{۲x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})y^{۲}|_{۰}^{x^{۲}} = \frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi x}{۲})$$

$$\int_{۱}^{۲}\frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi x}{۲})dx = \dots$$

□

تمرین ۲۶۹. مساحت داخل دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۴$ و سمت راست خط $x=۱$ را حساب کنید.

پاسخ.



$$\iint_{D} dA = \left(\iint_{D_{۱}} dA\right)\times ۲$$

$$\iint_{D_{۱}} dA = \int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{\sqrt{۴-x^{۲}}} dydx$$

$$\int_{۰}^{\sqrt{۴-x^{۲}}} dy = y|_{۰}^{\sqrt{۴-x^{۲}}} = \sqrt{۴-x^{۲}}$$

$$\int_{۱}^{۲} \sqrt{۴ - x^۲}dx$$

$$x = ۲\sin\theta \Rightarrow dx = ۲\cos\theta d\theta$$

ادامه با شما. □

تمرین ۲۷۰. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

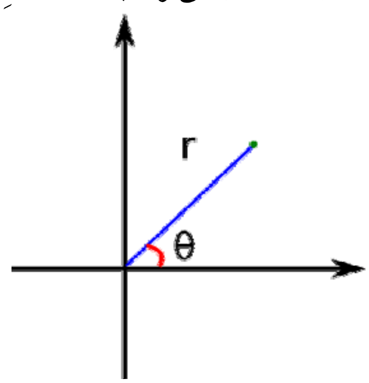
۱. $\int_۰^۲ \int_۰^{۴-x^۲} \frac{xe^{xy}}{۴-y} dydx$

۲. $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dA$

D ناحیه‌ی واقع بین خطوط $x + y = ۱$، $y = ۰$ و $x = ۰$ است.

۲.۳۰ انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

هر نقطه در صفحه را می‌توان با مختصاتِ قطبیِ (r, θ) نمایش داد. تبدیلهای لازم برای این تغییر مختصات به صورت زیرند:



$$(x, y) = (r, \theta)$$

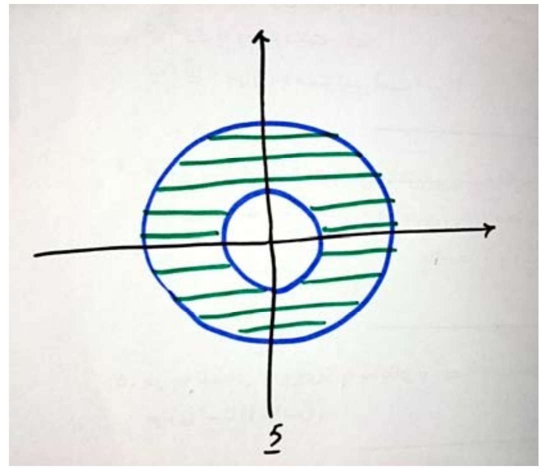
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

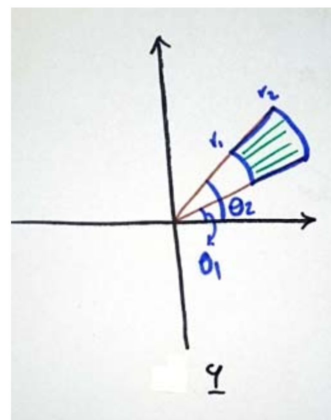
مجموعه‌ی زیر مثالی از یک **مستطیل قطبی** است.

$$D = \{(r, \theta) | ۱ \leqslant r \leqslant ۲, ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\}$$



به طور کلّی به مجموعه‌ای مانند مجموعه‌ی زیر، یک **مستطیل قطبی** گفته می‌شود.

$$D = \{(r,\theta) | r_{۱} \leqslant r \leqslant r_{۲}, \theta_{۱} \leqslant \theta \leqslant \theta_{۲}\}$$



قضیه ۲۷۱. فرض کنید D یک ناحیه‌ی دلخواه باشد.

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

دقت کنید که اِلمانِ سطح، در انتگرال بالا به صورت زیر تغییر کرده است:

$$dxdy \approx rdrd\theta$$

توجه کنید که از ضرب کردنِ dx در dy به عبارتِ $rdrd\theta$ نمی رسیم. ضرب بالا قواعد خاص خود را دارد که پرداختن بدانها در سطح این درس نمی‌گنجد. پس اگر بنویسیم

$$x = r\cos\theta \Rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta$$

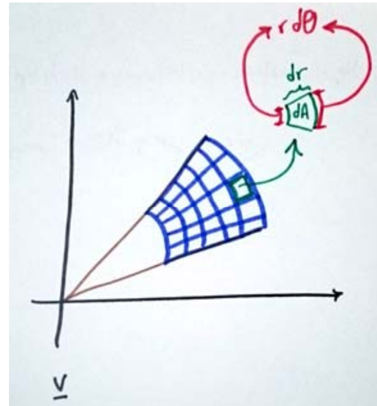
$$y = r\sin\theta \Rightarrow dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta$$

آنگاه

$$dxdy \neq rdrd\theta$$

هرچند قصد نداریم درباره‌ی ماهیت ضرب بالا توضیح دهیم، لازم است که فرمولِ $dxdy = rdrd\theta$ را توجیه کنیم.

توجیه اول. (توجیه نادقیق). عموماً در رویکرد مهندسی، مطابق شکل زیر، فرض کنیم که اِلِمان مساحت، تقریباً مستطیلی‌شکل است. این مستطیل دارای اضلاع به اندازه‌ی $rd\theta$ و dr است. پس

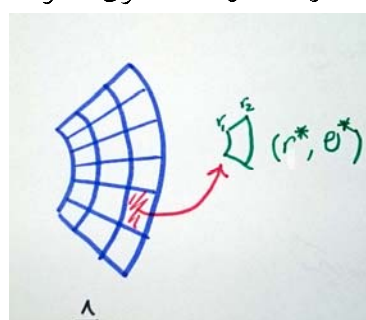


$$dA = dr(rd\theta) = rdrd\theta$$

توجیه دوم. برای محاسبه‌ی انتگرال در مختصات قطبی باید حاصل جمعی مانند زیر را محاسبه کنیم:

$$\sum_r \sum_\theta f\Big(x(r^*, \theta^*), y(r^*, \theta^*)\Big) dA$$

که در آن r^* و θ^* عناصری دلخواه هستند که از میان المانهای سطح انتخاب شده‌اند.



داریم

$$\Delta A = \frac{۱}{۲} r_۲^۲ \Delta\theta - \frac{۱}{۲} r_۱^۲ \Delta\theta$$

$$\Delta A = \frac{۱}{۲}(r_۲ - r_۱)(r_۲ + r_۱)\Delta\theta$$

می‌توانیم r^*, θ^* را نقاط وسطِ هر سطح کوچک در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} r^* = \frac{r_۱ - r_۲}{۲} \\ \theta^* = \frac{\theta_۱ + \theta_۲}{۲} \end{cases}$$

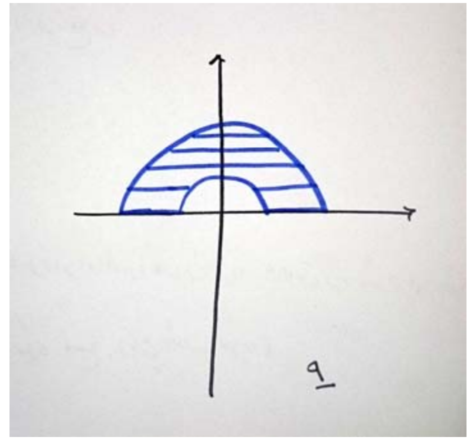
آنگاه داریم:

$$\Delta A = \Delta r(r^*)\Delta\theta = r^* \Delta r \Delta\theta$$

مثال ۲۷۲. $\iint_R (۳x + ۴y^۲) dA$ را محاسبه کنید که در آن R ناحیه‌ی محصور بین دوایر $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ = ۴$ و بالای محور مختصات است.

پاسخ.

$$D=\{(r,\theta)|۱\leqslant r\leqslant ۲, ۰\leqslant \theta\leqslant \pi\}$$



$$\iint_R (۳x+۴y^۲)dA=\int_۱^۲\int_۰^\pi (۳r\cos\theta+۴r^۲\sin^۲\theta)rd\theta dr=$$

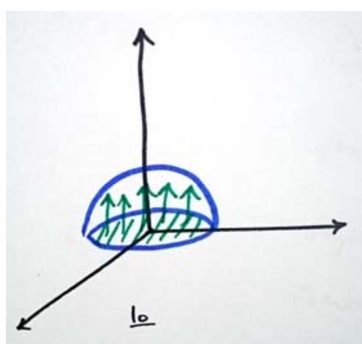
$$\int_۰^\pi\int_۱^۲ ۳r^۲\cos\theta drd\theta+\int_۰^\pi\int_۱^۲ ۴r^۳\sin^۲\theta drd\theta=$$

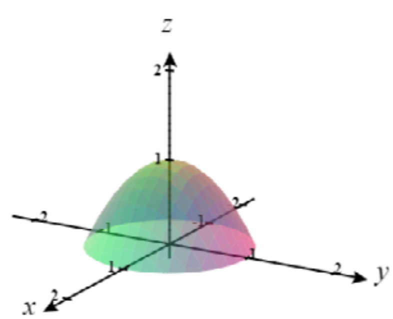
$$\int_۰^\pi \cos\theta d\theta\times\int_۱^۲ ۳r^۲dr+\int_۰^\pi \sin^۲\theta d\theta\times\int_۱^۲ ۴r^۳dr=\dots$$

برای محاسبه‌ی انتگرال $\int_۰^\pi \sin^۲\theta d\theta$ کافیست که $\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}$ را با $\sin^۲\theta$ جایگزین کنید. □

مثال ۲۷۳. حجم جسمی را بیابید که توسط صفحه‌ی $z=۰$ و سهمی‌وار $z=۱-x^۲-y^۲$ احاطه شده است.

پاسخ.



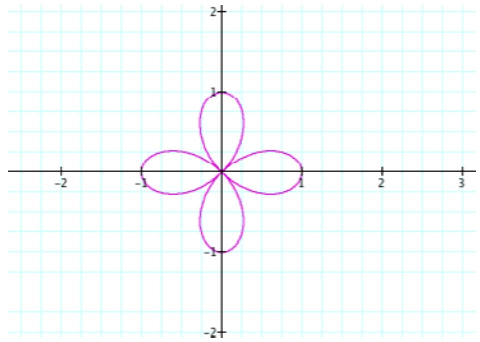
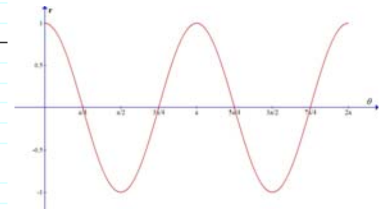


$$\iint_D f(x,y)dA=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱(۱-r^۲)rdrd\theta=\dots$$

□

مثال ۲۷۴. مساحت محدود به گلِ رُزِ چهار برگ $r=\cos ۲\theta$ را حساب کنید.

پاسخ.

مساحت کل برابر است با چهار برابر مساحت قسمت یکی از گلبرگها:

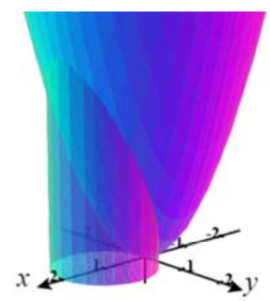
$$۴ \times \iint_D dA = ۴ \times \int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \int_{۰}^{\cos ۲\theta} r dr d\theta = \frac{\pi}{۸}$$

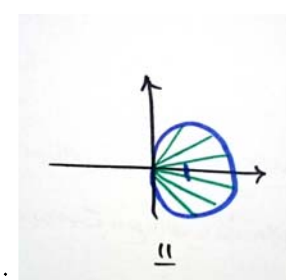
□

مثال ۲۷۵. حجم جسمی را بیابید که زیر سهمی‌وار $z = x^۲ + y^۲$ و بالای صفحه‌ی xy و داخل استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ واقع شده است.

پاسخ.

$$x^۲ - ۲x + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ + y^۲ = ۴$$





ناجیه‌ی انتگرالگیری را به صورت زیر پارامتربندی می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{۲} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{۲}$$

$$۰ \leqslant r \leqslant ۲\cos\theta$$

دقت کنید که معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ به صورت $r^۲ = ۲r\cos\theta$ و از آنجا به صورت $r = ۲\cos(\theta)$ در آمده است و تابعِ $z = x^۲ + y^۲$ به صورتِ $r^۲$ نوشته شده است.

$$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{۰}^{۲\cos\theta} (r^۲) r dr d\theta$$

□