۱ نیم جلسه‌ی سی و ششم، چهارشنبه

تمرین ۱. $\int_c y^۲dx + xdy$ را محاسبه کنید که در آن c اجتماع پاره خط از $(-۳, -۵)$ تا $(۰, ۲)$ و سهمی $x = ۴ - y^۲$ از $(-۳, -۵)$ تا $(۰, ۲)$ است.

توجه ۲. انتگرال یک **تابع عددی** روی یک خم، به جهت خم بستگی **ندارد**:

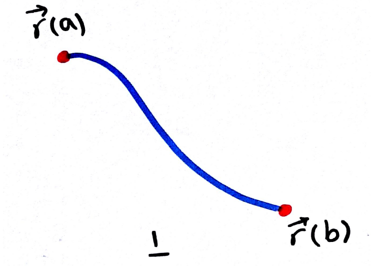
$$\int_c f\big(\overrightarrow{r}(t)\big)ds = \int_{-c} f\big(\overrightarrow{r}(t)\big)ds$$

یعنی انتگرال بالا از جهت منحنی مستقل است. اما انتگرال زیر از جهت منحنی مستقل **نیست**.

$$\int_c fdx = -\int_{-c} fdx$$

همین گفته برای انتگرالهای ختم شونده به dy و dz هم برقرار است.

علت این است که در انتگرال اول مقادیر تابع در ds ضرب می‌شوند که همواره مثبت است، اما در دومی، dx به جهت



بستگی دارد. به بیان دقیقتر:

$$c : \overrightarrow{r}(t) : a \leqslant t \leqslant b$$

$$f(x, y) : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$$

$$\int_c fds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

$$\int_{-c} fds = \int_b^a f\big(x(t), y(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

$$\int_c f\big(x, y\big)dx = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt$$

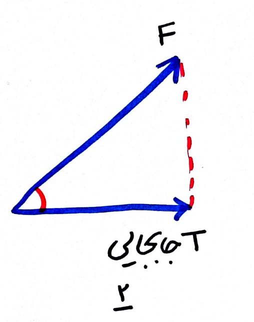
$$\int_{-c} f\big(x, y\big)dx = \int_b^a f\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt = -\int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt$$

پس با **انتگرالگیری از توابع عددی روی خم** آشنا شدیم. در ادامه با نحوه‌ی انتگرالگیری از **توابع برداری روی خمها** آشنا می‌شویم:

۱.۱ انتگرالگیری روی خط (روی خم) از توابع برداری

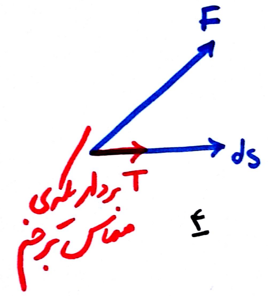
فرض کنید F یک بردار نیرو باشد و T بردار جابجایی باشد. می‌دانیم که کار برابر است با حاصل ضرب نیروی در جهت حرکت در میزان جابجائی.

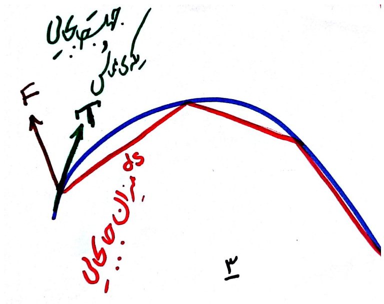
$$\text{کار} \quad w = |F|\cos\theta|T| = F \cdot T$$



حال فرض کنید که میدان نیروی F جسمی را روی منحنی c جابجا کند. هدفمان محاسبه‌ی کار انجام شده، طی این جابجائی است.

$$c : \overrightarrow{r}(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$$





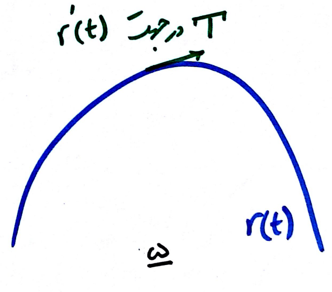
هدف ۳. محاسبه‌ی کار انجام شده.

منحنی مورد نظر را با طولهای ds تقسیم بندی می‌کنیم و فرض می‌کنیم که میزان جابجائی در هر قطعه برابر باشد با ds ولی جهت جابجائی برابر باشد با T، که منظور از T **بردارِ یکه‌ی** مماس بر منحنی است. برای محاسبه‌ی کل کار انجام شده باید تمام این کارهای کوچک را با هم جمع بزنیم:

$$\text{کار انجام شده توسط میدان } F \text{ در مسیر منحنی } c = \int_c (F \cdot \underbrace{T}_{\text{بردار یکه‌ی مماس}}) ds$$

حال بیائید فرمول بالا را بر حسب پارامتربندی منحنی بازنویسی کنیم؛ نخست توجه کنید که

$$\text{بردار یکه‌ی مماس} T = \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{|\overrightarrow{r}'(t)|}$$



همچنین:

$$ds = |\overrightarrow{r}'(t)| dt$$

پس:

$$\int_c (F\cdot T)ds = \int_a^b \frac{F\cdot \overrightarrow{r}'(t)}{|\overrightarrow{r}'(t)|}|\overrightarrow{r}'(t)|dt = \int_a^b F\cdot \overrightarrow{r}'(t)dt = \int_a^b F\cdot dr$$

به علامت ضرب داخلی در انتگرال بالا توجه کنید.

فرمول بالا را می‌توان به صورت گسترده‌ی زیر نیز نوشت: فرض کنید $F = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ و $\overrightarrow{r}'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$ آنگاه

$$\int_a^b F\cdot dr = \int_c P \underbrace{dx}_{x'(t)dt} + Q \underbrace{dy}_{y'(t)dt}$$

در تمرین ابتدای همین جلسه، نحوه‌ی محاسبه‌ی انتگرال سمت راست بالا را دیده‌اید.

خلاصه ۴.

$$F = \Big(P(x,y), Q(x,y)\Big) \text{میدان برداری}$$

$$c : \overrightarrow{r}(t) \quad a \leqslant t \leqslant b \ \text{خم}$$

$$\int_c F\cdot T ds = \int_c F\cdot dr = \int_c P dx + Q dy$$

مثال ۵. کار انجام شده توسط میدان نیروی

$$F(x,y) = x^{۲}\overrightarrow{i} - xy\overrightarrow{j}$$

که ذره‌ای را روی دایره‌ی

$$(\cos t, \sin t) \quad ۰ \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{۲}$$

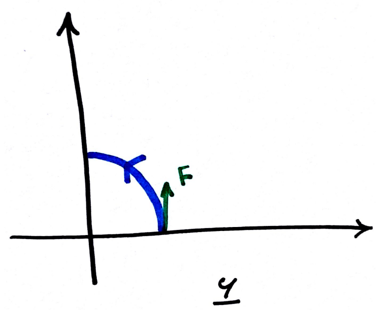
جابجا می‌کند، بیابید.

پاسخ.

$$P(x,y) = x^{۲}$$

$$Q(x,y) = -xy$$

$$\overrightarrow{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (\cos t, \sin t)$$



$$dx = x'(t)dt = -\sin t dt$$

$$dy = y'(t)dt = \cos t dt$$

$$\int_c P dx = \int_c x^۲ dx = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲(t)\big(\sin t\big)dt = \text{محاسبه‌به‌عهده‌ی‌شما} = A$$

$$\int_c Q dy = \int_c -xy dy = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (-\cos t)(\sin t)(\cos t)dt = B$$

$$\int_c F \cdot dr = A + B$$

□

توجه ۶. برای توابع برداری روی $\mathbf{R}^۳$ نیز به طور مشابه عمل می‌کنیم:

$$\int_c F.dr = \int_c P dx + Q dy$$

$$\int_c F.dr = \int_c P dx + Q dy + R dz \quad F = (P, Q, R)$$

یادآوری ۷. در ریاضی ۱ دیده‌اید که:

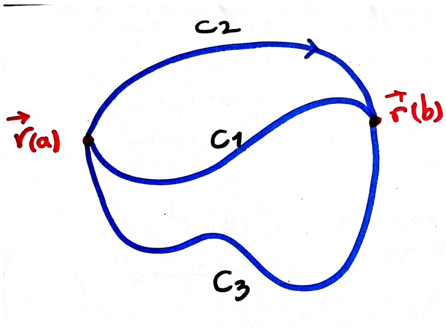
$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

از فرمول بالا نتیجه می‌شود که:

$$c : \overrightarrow{r}(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$$

$$\int_c \nabla f \cdot dr = \int_c f_x dx + f_y dy + f_z dz = f\big(\overrightarrow{r}(b)\big) - f\big(\overrightarrow{r}(a)\big)$$

$$= f\big(\text{نقطه‌ی‌انتهائی‌خم}\big) - f\big(\text{نقطه‌ی‌ابتدائی‌خم}\big)$$



۷

پس به نتیجه‌ی جالب زیر می‌رسیم:

توجه ۸. اگر f یک میدان برداری پایستار باشد آنگاه $\int_c F \cdot dr$ تنها به نقاط ابتدائی و انتهایی c بستگی دارد و انتگرال فوق روی مسیرهای بسته صفر است.

۸

انتگرال توابع برداری پیوستار از مسیر مستقل است (فقط به ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد). همچنین انتگرال توابع پیوستار روی مسیرهای بسته برابر با صفر است.

حال از کجا می‌توانیم تشخیص دهیم که یک میدان برداری داده شده پیوستار است یا خیر؟
فرض کنید $F=(P,Q)$ یک میدان برداری پایستار باشد.

$$\exists \underbrace{f}_{\text{تابع عددی}} \quad P=f_x \quad Q=f_y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f_{xy}=f_{yx}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

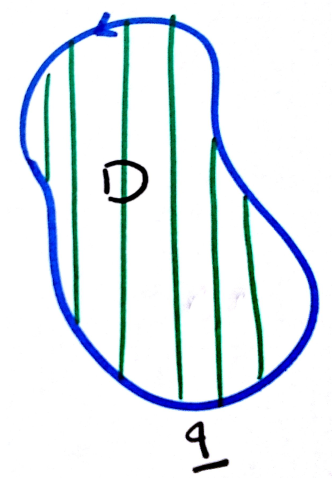
در واقع تحت شرایطی مشخص،[1] میدان برداری $F=\Big(P(x,y),Q(x,y)\Big)$ پایستار است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

در جلسه‌ی آینده خواهیم دید که گاهی می‌توان انتگرال یک تابع برداری روی یک مسیر را با استفاده از یک انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ی احاطه شده توسط آن مسیر حساب کرد.

۲.۱ قضیه‌ی گرین

در جلسه‌ی آینده درباره‌ی قضیه‌ی گرین صحبت خواهیم کرد:



$$F=(P,Q)$$

انتگرال روی مسیر بسته‌ی c برابر است با

$$\oint_c F\cdot dr=\iint_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dA$$

[1] تابع برداری مورد نظر روی یک ناحیه‌ی همبند ساده تعریف شده باشد و در این ناحیه، P,Q دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشند.