۱ جلسه‌ی هفدهم، دوشنبه

۲ حل چند تمرین

تمرین ۱. تابع f را همگن از درجه‌ی n می خوانیم هرگاه f مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد و

$$\forall t \quad f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

الف) نشان دهید که تابع زیر همگن از درجه ی ۳ است.

$$f(x,y)=x^۲y+۲xy^۲+۵y^۳$$

پاسخ.

$$f(x,y)=x^۲y+۲xy^۲+۵y^۳$$

$$f(tx,ty)=t^۳(x^۲y+۲xy^۲+۵y^۳)$$

$$f(tx,ty)=t^۳f(x,y)$$

□

ب) اگر f همگن از درجه ی n باشد ، نشان دهید که

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$$

پاسخ. از آنجا که f همگن است داریم:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

پس، بنا به قاعده‌ی زنجیره‌ای:

$$\frac{\partial f}{\partial \text{مولفه‌ی‌اول}}\frac{\partial \text{مولفه‌ی‌اول}}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \text{مولفه‌ی‌دوم}}\frac{\partial \text{مولفه‌ی‌دوم}}{\partial t}=nt^{n-۱}f(x,y)$$

پس:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\times x+\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\times y=nt^{n-۱}f(x,y)$$

برای رسیدن به معادله‌ی حکم سوال، تغییر متغیر زیر را در نظربگیرید:

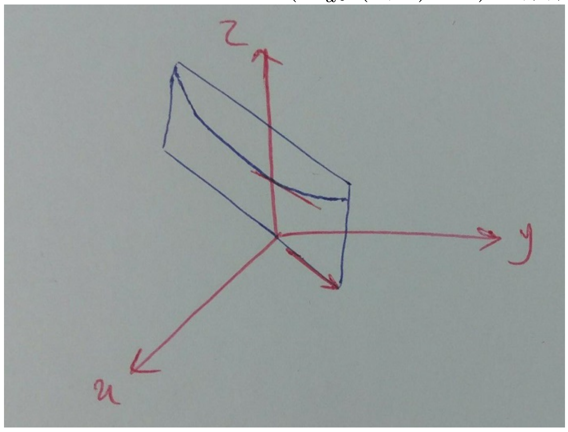
$$\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\times\frac{u}{t}+\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\times\frac{v}{t}=nt^{n-۱}f(\frac{u}{t},\frac{v}{t})$$

در t ضرب می کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\times u+\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\times v=nt^{n-۱}f(\frac{u}{t},\frac{v}{t})=nf(t\times\frac{u}{t},t\times\frac{v}{t})=nf(u,v)$$

و حکم در اینجا ثابت می‌شود. □

تمرین ۲. اگر $f(x,y)=xe^{۲y}$ مشتقات جزئی مرتبه ی دوم پیوسته داشته باشد، مشتق سوئی دوم این تابع را در جهت بردار $(۴,۶)$ بیابید. $(D_u^۲ f(۴,۶)=?)$



> **توجه ۳.** فرض کنید $f(x,y)$ و $u=(a,b)$ داریم:
>
> $$D_u f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}a+\frac{\partial f}{\partial y}b$$
>
> $$D_u^۲ f(x,y)=D_u[\frac{\partial f}{\partial x}a+\frac{\partial f}{\partial y}b]=D_u(\frac{\partial f}{\partial x}a)+D_u(\frac{\partial f}{\partial y}b)=$$
> $$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}a^۲+\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}ab+\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}ab+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}b^۲=$$
> $$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}a^۲+۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}ab+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}b^۲$$
>
> توجه کنید که در قسمت آخر از این فرض استفاده کرده‌ایم که مشتقات جزئی دوم تابع مورد نظر پیوسته‌اند.

با استفاده از توجه بالا تمرین را حل کنید. توجه کنید که باید بردار داده شده را تبدیل به یک بردار یکه کنید.

تمرین ۴. آیا تابع زیر در مبدأ پیوسته است؟

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{xy} & xy\neq ۰\\ ۱ \quad xy=۰\end{cases}$$

پاسخ. ادعا می کنیم که تابع بالا در نقطه‌ی $(۰,۰)$ پیوسته است. باید نشان دهیم که:

$$\forall\epsilon>۰\exists\delta>۰\forall(x,y)(۰<\sqrt{x^۲+y^۲}<\delta\to|f(x,y)-۱|<\epsilon]$$

> **توجه ۵.** در نقاط نزدیک به صفر اگر تابع از ضابطه ی دوم پیروی کند، همواره داریم:
>
> $$|f(x,y)-۱|=|۱-۱|<\epsilon$$

پس تنها (x,y) هایی را در نظر می گیریم که $xy \neq 0$ داریم:

$$|\frac{\sin(xy)}{xy} - 1| = |\frac{\sin(xy) - xy}{xy}|$$

بسط تیلور:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

ادعا: برای هر $x > 0$ داریم:

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}$$

این ادعا را با روشهایی که در درس ریاضی ۱ فراگرفته‌اید ثابت کنید.

بنا به ادعای بالا:

$$\frac{|\sin(xy) - xy|}{|xy|} \leq \frac{|x^3y^3|}{36|xy|} \leq \frac{x^2y^2}{36}$$

اگر $\delta < \sqrt[4]{6\epsilon}$ آنگاه اگر $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ آنگاه:

$$|f(x,y) - 1| < \epsilon$$

□

تمرین ۶. فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

در این صورت $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ را بیابید.

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^2}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3(x^2+y^2) - 2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h} = ...$$

ادامه دادن راه حل بالا را به عهده‌ی شما نهاده‌ایم. □

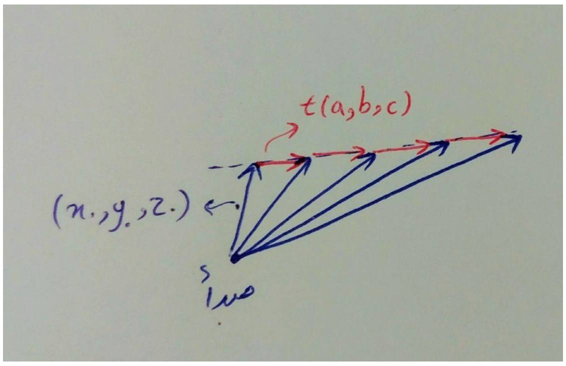
۱.۲ منحنی‌های فضایی

فرض کنید $\mathbf{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ یک تابع برداری باشد. چنین تابعی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

هر تابع به صورت بالا، یک «منحنی فضائی» را پارامتر بندی می‌کند. یک نمونه از منحنی‌های فضائی، خط مستقیم است:

$$\overrightarrow{r}(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) = (x_0, y_0, z_0) + t(a,b,c)$$

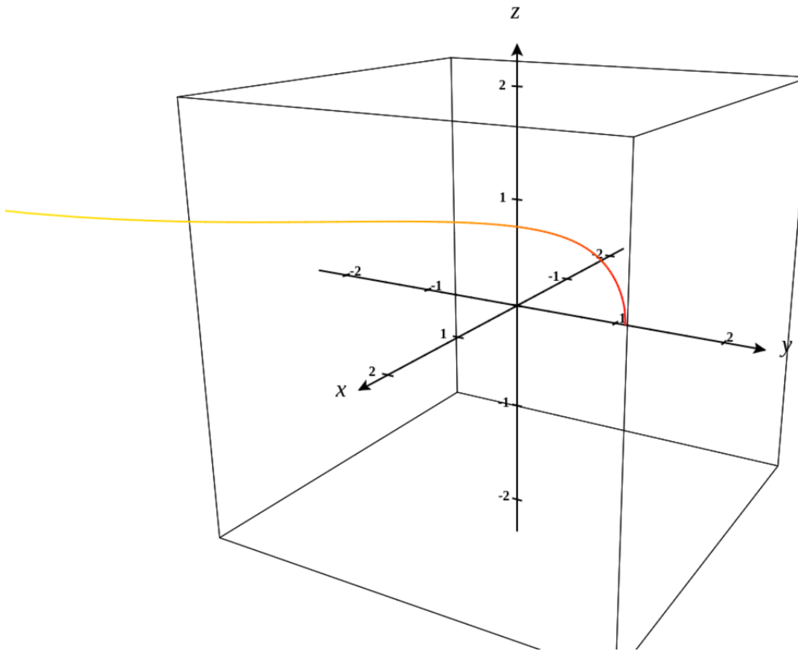


در زیر مثالهای دیگری از منحنی‌های فضائی آورده‌ایم:

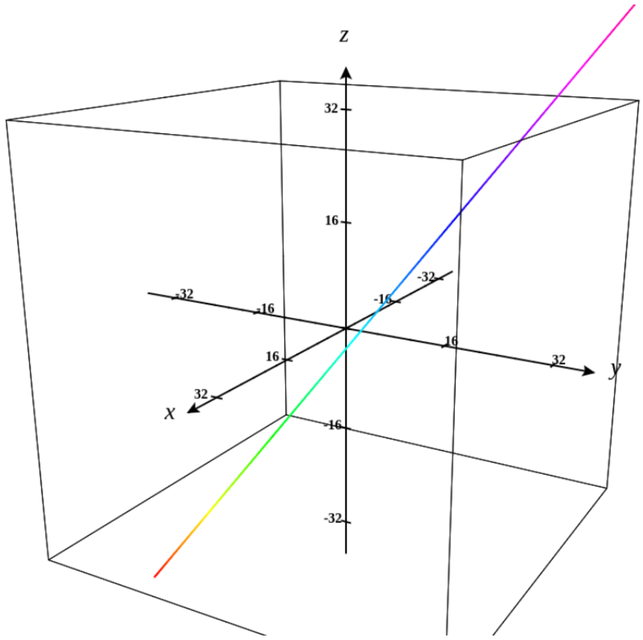
مثال ۷.

$$\overrightarrow{r}(t) = (t^{3}, \ln(3 - 2t), \sqrt{t})$$

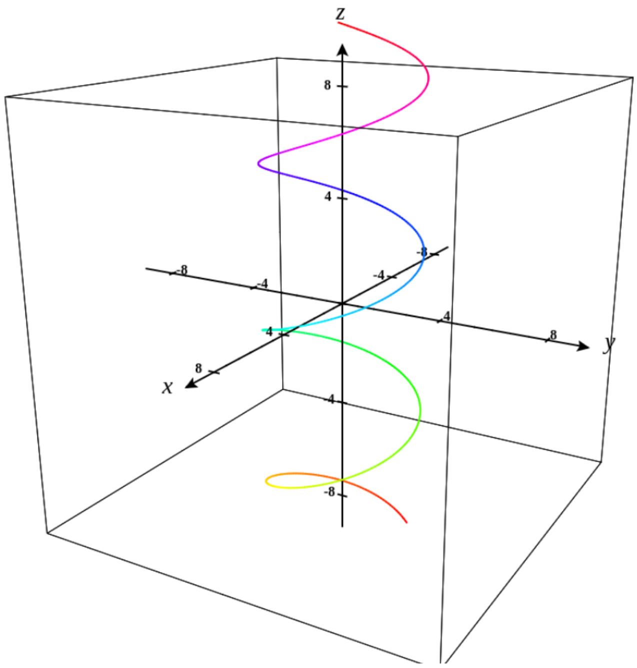
در زیر این منحنی را برای $0 \leq t \leq 10$ رسم کرده‌ایم:



$$\overrightarrow{r}(t) = (1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t)$$



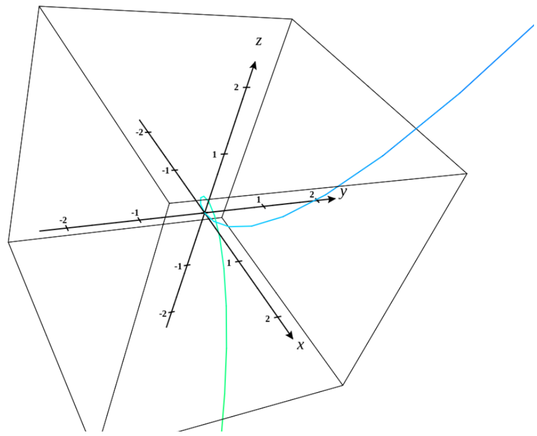
$$\overrightarrow{r}(t) = (۲\sin t, ۲\cos t, t)$$

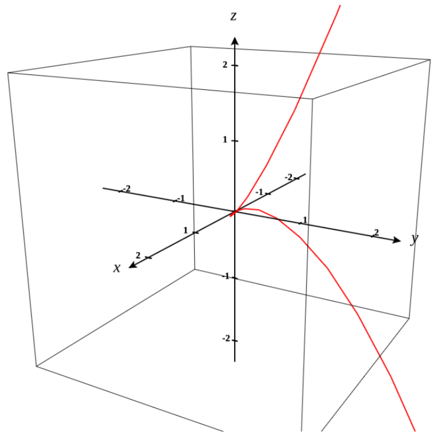


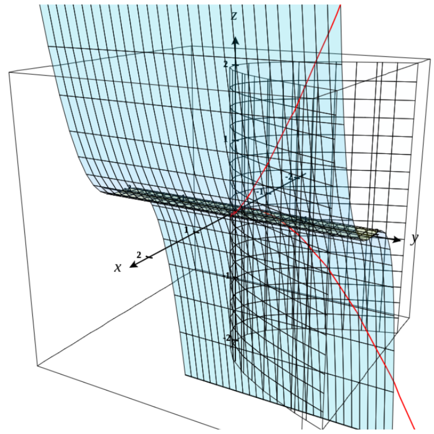
دقت کنید که منحنی بالا روی استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۴$ واقع است.

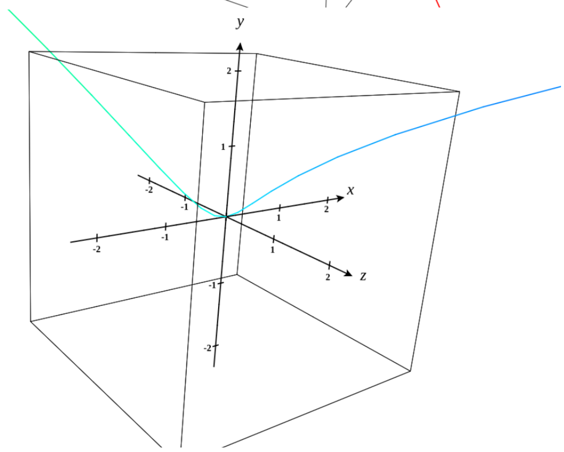
$$\overrightarrow{r}(t) = (t, t^۲, t^۳)$$

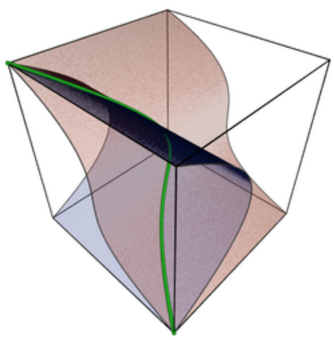
این منحنیِ فضائی، منحنیِ مکعبی پیچانده‌شده نام دارد و در واقع اشتراک رویه‌های زیر است:
$$\begin{cases} y = x^۲ \\ z = x^۳ \end{cases}$$

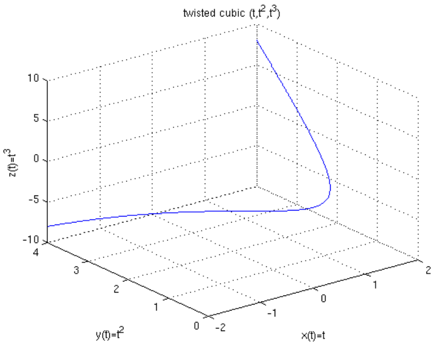

z
y
x


z
y
x


z
y
x


y
x
z




twisted cubic (t,t2,t3)
z(t)=t3
y(t)=t2
x(t)=t