۲۲ جلسه‌ی بیست و دوم، دوشنبه

تمرین ۲۱۸. فرض کنید $f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر معادله‌ی $f(z-۳x, z-۲y) = ۱$ ، z را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x و y مشخص کند، نشان دهید که

$$۲\frac{\partial z}{\partial x} + ۳\frac{\partial z}{\partial y} = ۶$$

یادآوری ۲۱۹. اگر معادله‌ی ضمنیِ $g(x,y,z) = ۰$، متغیرِ z را بر حسب متغیرهای x و y به دست بدهد، آنگاه بنا به قضیه‌ی مشتق تابع ضمنی داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

پاسخ. راه حل اول_

$$g(x,y,z) = f(\underbrace{z-۳x}_{u}, \underbrace{z-۲y}_{v}) - ۱ = ۰$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{-(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{-(\frac{\partial f}{\partial u}(-۳) + \frac{\partial f}{\partial v}(۰))}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{-(\frac{\partial f}{\partial v}(-۲))}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

$$۲\frac{\partial z}{\partial x} + ۳\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{۶(\frac{\partial f}{\partial u})}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}} + \frac{۶(\frac{\partial f}{\partial v})}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}} = ۶$$

راه حل دوم_

$$f(z-۳x, z-۲y) = ۱$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ۰ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = ۰ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(\frac{\partial z}{\partial x} - ۳) + \frac{\partial f}{\partial v}(\frac{\partial z}{\partial x}) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۳\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

به همین ترتیب داریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ۰$$

و مقدار $\frac{\partial z}{\partial y}$ را نیز به طریق بالا می‌توانیم محاسبه می‌کنیم (ادامه راه حل به عهده‌ی شما). □

۱.۲۲ نقاط بحرانی

یادآوری ۲۲۰ (توابع تک متغیره). فرض کنید که

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

یک تابع تک متغیره‌ی پیوسته باشد که

$$x \mapsto f(x).$$

گفتیم که نقاط بحرانی یک چنین تابعی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. نقاطی مانند $x_\circ$ به طوری که $f'(x_\circ) = \circ$. این نقاط نیز یا

(آ) مینی‌موم نسبی، یا

(ب) ماکزیمم نسبی، و یا

(ج) زینی (مانند نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ در $y = x^3$) هستند.

۲. نقاطی مانند $x_\circ$ به طوری که $f'(x_\circ)$ موجود نیست. این نقاط یا

(آ) مینی‌موم نسبی، یا

(ب) ماکزیمم نسبی، هستند و یا

(ج) هیچکدام نیستند.

در زیر مفهوم نقاط بحرانی را برای توابع دو متغیره توضیح داده‌ایم.

۱.۱.۲۲ نقاط بحرانیِ توابع دو متغیره

نقاط بحرانی:

۱. نوع اول نقاطی هستند که در آنها به طور همزمان

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) = \circ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ) = \circ \end{cases}$$

این نوع نقاط را نقاط ابستائی می‌خوانند. این نقاط یکی از حالات زیر را دارند:

(آ) مینی‌موم نسبی

(ب) ماکزیمم نسبی

(ج) زینی (مانند نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ در $z = y^3$ و $z = x^2 - y^2$)

۲. نوع دوم نقاطی هستند که در آنها یکی از $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا هر دو موجود نباشند. این نقاط یکی از وضعبتهای زیر را دارند:

(آ) مینی‌موم نسبی

(ب) ماکزیمم نسبی

(ج) هیچکدام

مثال ۲۲۱. نقاط بحرانی تابع $z = y^2 - x^2$ و نوع آنها را مشخص کنید.

پاسخ.

$$z = f(x,y) = y^۲ - x^۲ \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial x} = -۲x, \frac{\partial f}{\partial y} = ۲y$$

در نقطه‌ی $(۰,۰)$ داریم:

$$\nabla f(۰,۰) = (۰,۰)$$

در مسیر $(۰, y^۲)$ روی رویه نقطه‌ی $(۰,۰)$ یک مینی‌موم نسبی است.

$$(۰,y) \mapsto (۰,y^۲)$$

در مسیر $(-x^۲,۰)$ نقطه‌ی $(۰,۰)$ یک ماکزیمم نسبی است.

$$(x,۰) \mapsto (-x^۲,۰)$$

پس $(۰,۰)$ مینی‌موم و ماکزیمم نسبی است. یعنی نقطه‌ی $(۰,۰)$ زینی است. □

۲.۲۲ محک مشتق دوم برای تعیین اکسترمم‌ها و نقاط زینی

فرض کنید مشتقات دوم تابع $f(x,y)$ روی یک دیسک به مرکز (a,b) پیوسته باشند و

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = ۰$$

بنویسید:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} (a,b) = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^۲(a,b)$$

آنگاه وضعیت زیر را داریم:

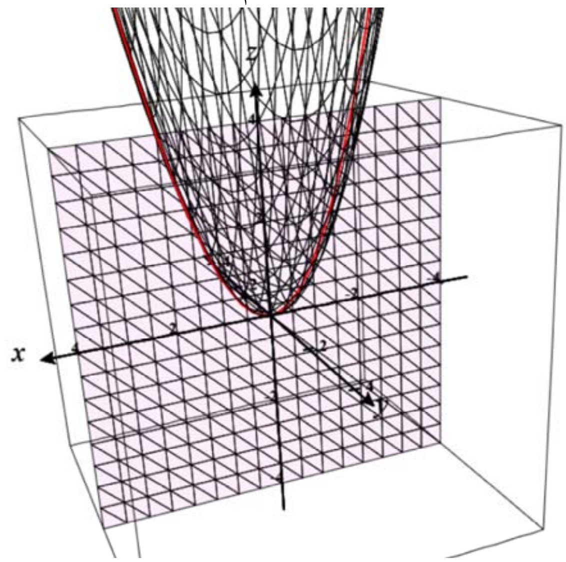
$$\begin{cases} D > ۰ \begin{cases} f_{xx}(a,b) > ۰ \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a,b) \text{ یک مینی‌موم نسبی است.} \\ f_{xx}(a,b) < ۰ \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a,b) \text{ یک ماکزیمم نسبی است.} \end{cases} \\ D < ۰ \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a,b) \text{ یک نقطه‌ی زینی است.} \\ D = ۰ \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a,b) \text{ ممکن است مینی‌موم نسبی، ماکزیمم نسبی یا زینی باشد.} \end{cases}$$

ایده‌ی اثبات. اگر $u = (h,k)$ یک بردار یکه‌ی دلخواه باشد آنگاه مشتق دوم در جهت این بردار، نشان دهنده‌ی تقعر منحنی‌ای است که همزمان روی رویه و صفحه‌ی گذرنده از این بردار قرار دارد. اگر تقعر تمام این نوع منحنی‌های رو به بالا باشد، نقطه‌ی (a,b) یک مینی‌موم نسبی است.

$$D^۲_{u=(h,k)} f(a,b) > ۰$$

$$\begin{aligned} D^۲_{(h,k)}(a,b) &= f_{xx}h^۲ + ۲f_{xy}hk + f_{yy}k^۲ \\ &= f_{xx}(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k)^۲ + \frac{k^۲}{f_{xx}}(\underbrace{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^۲}_{D}) \end{aligned}$$

در عبارت بالا f_{xx} و قسمتی که D نام گذاری شده است تعیین کننده‌ی نوع نقاط بحرانی هستند.



□

مثال ۲۲۲. اکسترمم‌ها و نقاط زینی تابع $f(x,y) = y^{۲} - x^{۲}$ را مشخص کنید.

پاسخ. تعیین نقاط بحرانی:

$$f_x = -۲x \Rightarrow (x = ۰ \Rightarrow f_x = ۰)$$

$$f_y = ۲y \Rightarrow (y = ۰ \Rightarrow f_y = ۰)$$

پس نقطه‌ی $(۰,۰)$ یک نقطه‌ی بحرانی است.

$$f_{xx}(x,y) = -۲ \Rightarrow f_{xx}(۰,۰) = -۲$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = ۰$$

$$f_{yy}(x,y) = ۲ \Rightarrow f_{yy}(۰,۰) = ۲$$

$$D(۰,۰) = \begin{vmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = -۴ < ۰$$

پس نقطه‌ی $(۰,۰)$ یک نقطه‌ی زینی است. □

مثال ۲۲۳. اکسترمم‌ها و نقاط زینی تابع $z = y^{۳}$ را تعیین کنید.

مثال ۲۲۴. اکسترمم‌های موضعی و نقاط زینی تابع زیر را تعیین کنید و طرحی تقریبی از آن رسم کنید.

$$f(x,y) = x^{۴} + y^{۴} - ۴xy + ۱$$

پاسخ.

$$f_x(x,y) = ۴x^{۳} - ۴y \Rightarrow f_x(x,y) = ۰ \Rightarrow y = x^{۳}$$

$$f_y(x,y) = ۴y^{۳} - ۴x \Rightarrow f_y(x,y) = ۰ \Rightarrow x = y^{۳}$$

با استفاده از دو معادله‌ی بالا داریم

$$x=(x^{۳})^{۳} \Rightarrow x^{۹}-x=۰ \Rightarrow x(x^{۸}-۱)=۰ \Rightarrow x=۰, x=۱, x=-۱$$

نقاط بحرانی تابع برابرند با

$$(۰,۰),(۱,۱),(-۱,-۱)$$

$$f_{xx}(x,y)=۱۲x^{۲} \Rightarrow f_{xx}(۰,۰)=۰, f_{xx}(۱,۱)=۱۲, f_{xx}(-۱,-۱)=۱۲$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-۴$$

$$f_{yy}(x,y)=۱۲y^{۲} \Rightarrow f_{yy}(۰,۰)=۰, f_{yy}(۱,۱)=۱۲, f_{yy}(-۱,-۱)=۱۲$$

نقطه‌ی $(۰,۰)$:

$$D(۰,۰)=\begin{vmatrix} ۰ & -۴ \\ -۴ & ۰ \end{vmatrix}=-۱۶<۰$$

پس نقطه‌ی $(۰,۰)$ نقطه‌ی زینی است.

نقطه‌ی $(۱,۱)$:

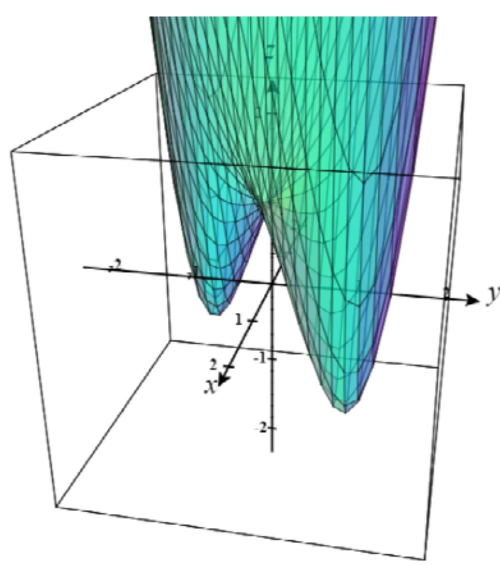
$$D(۱,۱)=\begin{vmatrix} ۱۲ & -۴ \\ -۴ & ۱۲ \end{vmatrix}=۱۴۴-۱۶>۰, f_{xx}(۱,۱)>۰$$

پس نقطه‌ی $(۱,۱)$ مینی‌موم نسبی است.

نقطه‌ی $(-۱,-۱)$:

$$D(-۱,-۱)=\begin{vmatrix} ۱۲ & -۴ \\ -۴ & ۱۲ \end{vmatrix}=۱۴۴-۱۶>۰, f_{xx}(-۱,-۱)>۰$$

پس نقطه‌ی $(-۱,-۱)$ مینی‌موم نسبی است.



□

توجه کنید که تابع بالا یک تابع پیوسته است که دو مینی‌موم موضعی دارد بی آنکه هیچ ماکزیمم موضعی داشته باشد. آیا چنین چیزی در توابع تک‌متغیره ممکن است؟