۲۹ جلسه‌ی بیست و نهم، شنبه

در جلسات قبل درباره‌ی قضیه ی فوبینی صحبت کردیم:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

یکی از مواهب این قضیه این است که گاهی تغییر ترتیب انتگرالگیری، انتگرالگیری را ساده‌تر می‌کند.

مثال ۲۵۸. $\iint_R y\sin(xy)dA$ را محاسبه کنید که در آن $R = [۱,۲]\times[۰,\pi]$. (ترتیب مناسب انتگرالگیری را خودتان تشخیص دهید).

پاسخ.

$$\int_۱^۲ \int_۰^\pi y\sin(xy)dydx = \int_۰^\pi \int_۱^۲ y\sin(xy)dxdy$$

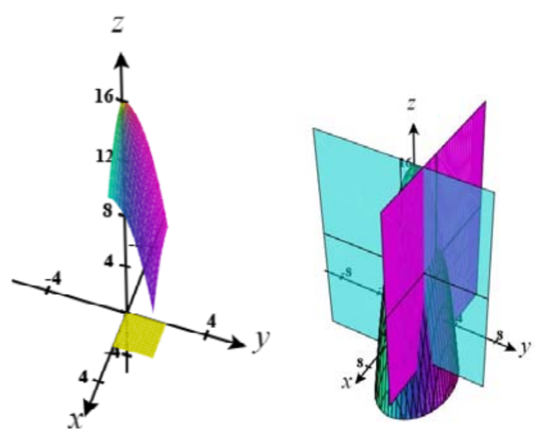
$$\int_۱^۲ y\sin(xy)dx = -\cos(xy)|_۱^۲ = -\cos(۲y)+\cos(y)$$

$$\int_۰^\pi (-\cos(۲y)+\cos(y))dy = \left(\frac{-\sin(۲y)}{۲}+\sin(y)\right)|_۰^\pi = ۰$$

□

مثال ۲۵۹. حجم جسمی را بیابید که توسط سهمی‌وار بیضوی $x^۲+۲y^۲+z=۱۶$ و صفحات $x=۲$ و $y=۲$ و صفحات مختصات احاطه شده است.

اثبات.



ناحیه‌ی انتگرالگیری برابر است با

$$D = \{(x,y)|۰\leqslant x\leqslant ۲, ۰\leqslant y\leqslant ۲\}$$

$$\int_۰^۲ \int_۰^۲ (۱۶-x^۲-۲y^۲)dydx$$

$$\int_۰^۲ (۱۶-x^۲-۲y^۲)dy = (۱۶y-yx^۲-\frac{۲}{۳}y^۳)|_۰^۲ = ۳۲-۲x^۲-\frac{۱۶}{۳}-۰ = \frac{۸۰}{۳}-۲x^۲$$

$$\int_{۰}^{۲}(\frac{۸۰}{۳}-۲x^{۲})dx=(\frac{۸۰}{۳}x-\frac{۲}{۳}x^{۳})|_{۰}^{۲}=\frac{۱۶۰}{۳}-\frac{۱۶}{۳}=\frac{۱۴۴}{۳}=۴۸$$

□

توجه ۲۶۰. حواستان باشد که انتگرال دوگانه، حاصلضرب دو تا انتگرال یگانه نیست:

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d}f(x,y)dydx\neq\int_{a}^{b}f(x,y)dx\times\int_{c}^{d}f(x,y)dy$$

توجه ۲۶۱. با این حال اگر f فقط تابعی از x و g فقط تابعی از y باشد داریم:

$$\int_{a}^{b}\underbrace{\int_{c}^{d}f(x)g(y)dy}_{A}\,dx$$

$$A=\int_{c}^{d}f(x)g(y)dy=f(x)\int_{c}^{d}g(y)dy$$

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d}f(x)g(y)dydx=\int_{a}^{b}Adx=\int_{a}^{b}f(x)\int_{c}^{d}g(y)dydx=\int_{a}^{b}f(x)dx\times\int_{c}^{d}g(y)dy$$

تمرین ۲۶۲. انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱. $\int_{۱}^{۴}\int_{۱}^{۲}(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})dydx$

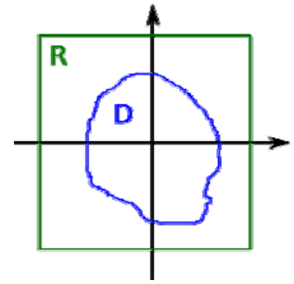
۲. $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}xy\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}dydx$

تمرین ۲۶۳. حجم جسمی را بیابید که توسط رویه‌ی $z=۱+x^{۲}ye^{y}$ و صفحات $\begin{cases}z=۰\\x=\pm۱\\y=۰\\y=۱\end{cases}$ احاطه شده است.

۱.۲۹ انتگرالگیری در نواحی کلی

درباره‌ی انتگرالگیری در نواحی مستطیلی در جلسات پیش سخن گفتیم. فرض کنید D یک ناحیه‌ی دلخواه در $\mathbb{R}^{۲}$ باشد. تابع f را روی این ناحیه انتگرالپذیر می‌خوانیم هرگاه تابع F تعریف شده به صورت زیر، در ناحیه‌ای مستطیلی شامل D انتگرالپذیر باشد.

$$F(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & (x,y)\in D\\ ۰ & (x,y)\in R-D\end{cases}$$

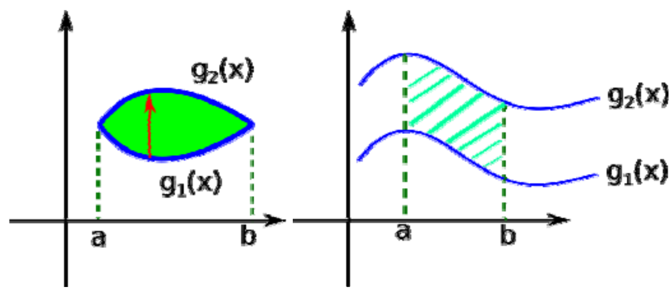


محاسبه‌ی انتگرال در نواحی کلی چندان آسان نیست؛ لیکن در نواحی خاصی می توان انتگرال را آسانتر حساب کرد. در زیر درباره‌ی این نواحی و نحوه‌ی انتگرالگیری در آنها سخن گفته‌ایم.

۱.۱.۲۹ نواحی نوع اول

نواحی به صورت زیر را نوع اول می‌خوانیم:

$$D = \{(x,y) | a \leqslant x \leqslant b, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$



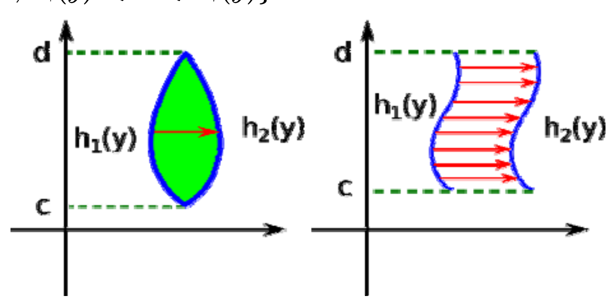
اگر D یک ناحیه‌ی نوع اول مانند بالا باشد داریم:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy}_{\text{تابعی از } x} dx$$

۲.۱.۲۹ نواحی نوع دوم

نواحی مانند D در زیر را نواحی نوع دوم می‌خوانیم:

$$D = \{(x,y) | c \leqslant x \leqslant d, h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$



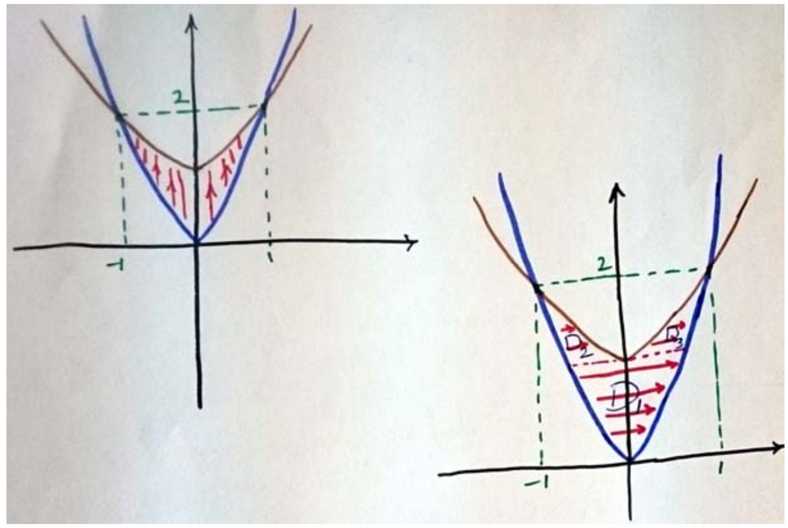
اگر D یک ناحیه‌ی نوع دوم باشد، آنگاه

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \underbrace{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx}_{\text{تابعی از } y} dy$$

مثال ۲۶۴. فرض کنید D ناحیه‌ی محصور بین سهمی‌های $y = ۲x^۲$ و $y = ۱ + x^۲$ باشد. آنگاه $\iint_D (x + ۲y)dA$ را محاسبه کنید.

پاسخ. ابتدا ناحیه‌ی انتگرالگیری را ترسیم می‌کنیم.

$$۱ + x^۲ = ۲x^۲ \Rightarrow x = \pm ۱$$



D را می‌توان یک ناحیه ی نوع اول در نظر گرفت و به صورت زیر انتگرالگیری کرد:

$$\iint_D (x + ۲y)dA = \int_{-۱}^{۱} \int_{۲x^۲}^{۱+x^۲} (x + ۲y)dydx$$

$$\int_{۲x^۲}^{۱+x^۲} (x + ۲y)dy = xy|_{۲x^۲}^{۱+x^۲} + y^۲|_{۲x^۲}^{۱+x^۲} = x(۱ + x^۲ - ۲x^۲) + (۱ + x^۲)^۲ - ۴x^۴ =$$
$$-۳x^۴ - x^۳ + ۲x^۲ + x + ۱$$

$$\int_{-۱}^{۱} (-۳x^۴ - x^۳ + ۲x^۲ + x + ۱)dx = (\frac{-۳}{۵}x^۵ - \frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۲}{۳}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ + x)|_{-۱}^{۱} = \frac{۴۷}{۱۵}$$

D را می‌توان اجتماعی از نواحی نوع دوم در نظر گرفت و همین سوال را به صورت زیر حل کرد:

$$y = ۲x^۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y}{۲}}$$

$$\iint_{D_۱} (x + ۲y)dA = \int_{۰}^{۱} \int_{-\sqrt{\frac{y}{۲}}}^{\sqrt{\frac{y}{۲}}} (x + ۲y)dxdy$$

$$\int_{-\sqrt{\frac{y}{۲}}}^{\sqrt{\frac{y}{۲}}} (x + ۲y)dx = (\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲yx)|_{-\sqrt{\frac{y}{۲}}}^{\sqrt{\frac{y}{۲}}} = ۴\sqrt{\frac{y}{۲}}y$$

$$\int_{۰}^{۱} (\frac{۴}{\sqrt{۲}}\sqrt{y^۳})dy = \frac{۴}{\sqrt{۲}}\sqrt{y^۵}|_{۰}^{۱} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۵}$$

$$\iint_{D_۲} (x + ۲y)dA = \int_{۱}^{۲} \int_{-\sqrt{\frac{y}{۲}}}^{-\sqrt{y-۱}} (x + ۲y)dxdy = \dots$$

$$\iint_{D_3}(x+2y)dA=\int_1^2\int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}}(x+2y)dxdy=\dots$$

□

مثال ۲۶۵. حجم جسمی را محاسبه کنید که زیر سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ و بالای ناحیه‌ی محصور شده توسط خطوط $y=2x$ و $y=x^2$ واقع شده است.

پاسخ.

$$x^2=2x\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad x=2$$

بر اساس ناحیه‌ی نوع دوم:

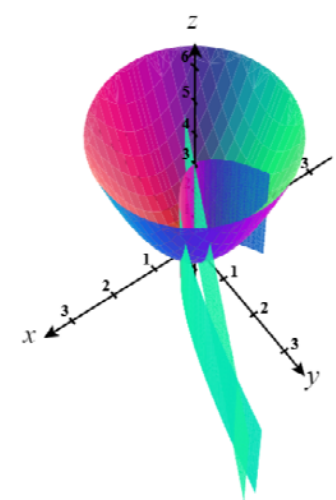
$$\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)dxdy$$

بر اساس ناحیه‌ی نوع اول:

$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)dydx$$

$$\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)dy=(x^2y+\frac{y^3}{3})|_{x^2}^{2x}=2x^3+\frac{8}{3}x^3-x^4-\frac{x^6}{3}=\frac{14}{3}x^3-x^4-\frac{x^6}{3}$$

$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)dydx=\int_0^2(\frac{14}{3}x^3-x^4-\frac{x^6}{3})dx=\left(\frac{14}{12}x^4-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right)|_0^2$$



□

توجه ۲۶۶. هیچ نیازی نیست که هر سوالی را هم با در نظر گرفتن نواحی نوع اول و هم با در نظر گرفتن نواحی نوع دوم حل کنید. در مثالهای بالا تنها با اهداف آموزشی این کار را انجام داده‌ایم. در واقع، باید بتوانید نوعی از ناحیه را انتخاب کنید که شما را راحتتر به پاسخ انتگرال برساند.