۲۷ جلسه‌ی بیست و هفتم، دوشنبه (۹۷/۲/۳)

۱.۲۷ ادامه‌ی روش ضرایب لاگرانژ

گفتیم که برای تعیین اکسترممهای مطلق تابع $f(x,y,z)$ تحت قید $g(x,y,z) = k$ باید دستگاه زیر با چهارمعادله با چهار مجهول x, y, z, λ را حل کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = k \end{cases}$$

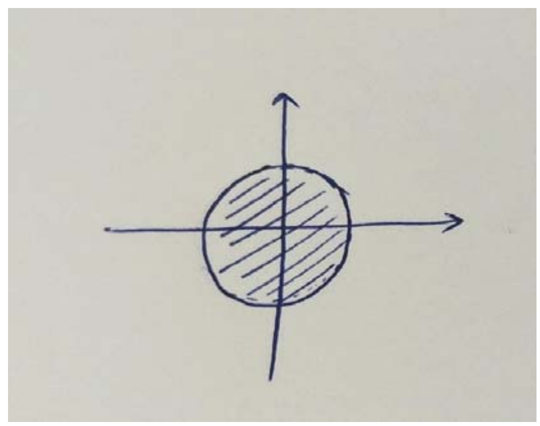
مثال ۲۴۳. ماکزیمم و مینیمم های مطلق تابع $f(x,y) = x^۲ + ۲y^۲$ را روی دیسک $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ بیابید.

پاسخ. مراحل پاسخ به صورت زیر هستند:

۱) تعیین نقاط بحرانی تابع در درون دیسکِ $x^۲ + y^۲ < ۱$. ۲) تعیین اکسترمم های مطلق تابع روی مرزِ $x^۲ + y^۲ = ۱$.

مرحله‌ی اول:

$$f_x(x,y) = ۲x \qquad f_y(x,y) = ۴y$$



پس نقطه‌ی $(۰,۰)$ نقطه ی بحرانی است.

$$f(۰,۰) = ۰$$

مرحله‌ی دوم: تعیین اکسترمم های تابع $f = x^۲ + ۲y^۲$ تحت قید $x^۲ + y^۲ = ۱$

$$\begin{cases} ۲x = ۲x\lambda \Rightarrow x = ۰ \quad or \quad \lambda = ۱ \\ ۴y = ۲y\lambda \\ x^۲ + y^۲ = ۱ \end{cases}$$

از معادله ی سوم:

$$x = ۰ \Rightarrow y = \pm ۱$$

نقاط: $(۰, \pm ۱) \quad (\pm ۱, ۰)$

$$\underbrace{f(۰,۰) = ۰}_{\text{مینی‌موم مطلق}} \qquad f(\pm ۱, ۰) = ۱ \qquad \underbrace{f(۰, \pm ۱) = ۲}_{\text{ماکزیمم مطلق}}$$

$\square$

مثال ۲۴۴. نقطه ای روی صفحه ی $x+۴y+۳z=۲$ پیدا کنید که تابع $f(x,y,z)=۲x^۲+۳y^۲+z^۲$ در آن نقطه دارای کمترین مقدار باشد.

پاسخ. استفاده از روش ضرایب لاگرانژ:

$$\begin{cases} ۱=\lambda(۴x)\to x=\frac{۱}{۴\lambda} \\ ۴=\lambda(۶y)\to y=\frac{۲}{۳\lambda} \\ ۳=\lambda(۲z)\to z=\frac{۳}{۲\lambda} \\ x+۴y+۳z=۲\to \frac{۱}{۴\lambda}+۴(\frac{۲}{۳\lambda})+۳(\frac{۳}{۲\lambda})=۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{۳+۳۲+۱۸}{۱۲\lambda}=\frac{۵۳}{۱۲\lambda}=۲$$

$$\longrightarrow \lambda=\frac{۵۳}{۲۴}\simeq ۲/۲$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۴\times ۲/۲} \quad y=\frac{۴}{۳\times ۲/۲} \quad z=\frac{۳}{۲\times ۲/۲}$$

$\square$

مثال ۲۴۵. حداکثر حجم یک جعبه ی مکعب مستطیلی بدون در را بیابید که با $۱۲m^۲$ مقوا ساخته شود.

راهنمایی: از روش ضرایب لاگرانژ با قید و تابع زیر استفاده کنید:

$$\begin{cases} ۲xy+۲yz+xz=۱۲ \\ V=xyz \end{cases}$$

مثال ۲۴۶. از بین مثلث ها، مثلثی رابیابید که مجموع سینوس زوایای آن حداکثر شود.

راهنمایی: $f(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳)=\sin\theta_۱+\sin\theta_۲+\sin\theta_۳$ تحت قید $\theta_۱+\theta_۲+\theta_۳=\pi$

مثال ۲۴۷. سه عدد بیابید که حاصل جمع آنها ۱۲۰۰ و حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

مثال ۲۴۸. سه عدد بیابید که حاصل ضرب آنها n شود و مجموع مربعات آنها حداکثر شود .

راهنمایی:

$$\begin{cases} f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲ \\ xyz=n \end{cases}$$

مثال ۲۴۹. اکسترمم های توابع زیر را تحت قید داده شده بیابید.

الف)

$$\begin{cases} f(x,y,z)=x+y+z \\ g(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲-۳=۰ \end{cases}$$

ب)

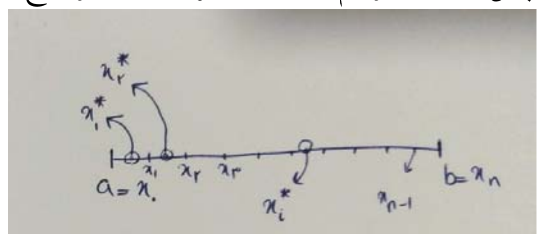
$$\begin{cases} f(x,y,z)=x^۲+\gamma y^۲ \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=۱ \end{cases}$$

مثال ۲۵۰. نقاطی روی بیضی $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ پیدا کنید که فاصله ی آنها تا مبدأ حداقل باشد.

پاسخ. کافی است مینیموم مطلق تابع $x^2 + y^2 + z^2$ را تحت قید $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ بیابیم. (روش ضرایب لاگرانژ) □

۲.۲۷ انتگرال دوگانه

پیش از آنکه بخواهم دربارهی انتگرال دوگانه توضیح دهم، لازم میدانم مفاهیمی ضروری را از درس ریاضی ۱ یادآوری کنم.



فرض کنید $f(x)$ یک تابع تک متغیره باشد که روی بازهی بستهی $[a,b]$ تعریف شده است. این بازه را به n قسمت با طولهای مساوی تقسیم کنید. طول هر قسمت برابر خواهد بود با:

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x$$

از بازهی i ام عنصرِ x_i^* را انتخاب کنید و **جمع ریمانی** زیر را بسازید.

$$\Sigma_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

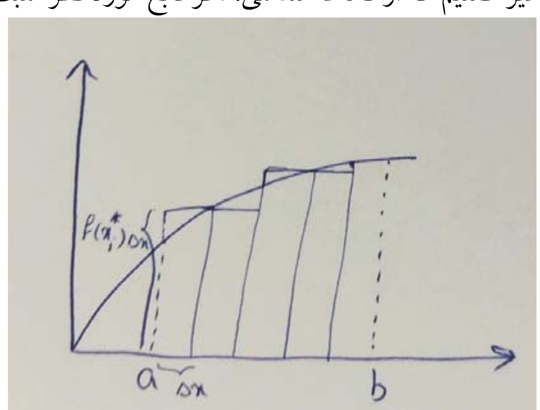
حال اگر تعداد بازهها در این تقسیم بندی را زیاد کنیم، میتوانیم به حد زیر میرسیم:

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

اگر حاصل حد بالا موجود باشد، تابع f را در $[a,b]$ **انتگرال پذیر** می خوانیم و می نویسیم:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \Sigma_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

نیز گفتیم که از لحاظ هندسی، اگر تابع مورد نظر مثبت باشد، حد بالا در واقع مساحت زیر منحنی تابع را نشان میدهد.



عموماً برای محاسبهی انتگرال از قضیهی اساسی استفاده میکردیم. بنا به این قضیه، مفهوم انتگرالگیری به نوعی دوگان

مفهوم مشتق‌گیری است.

قضیه ی اساسی حسابان:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

به بیان دیگر اگر تابع F را به صورت زیر تعریف کنیم

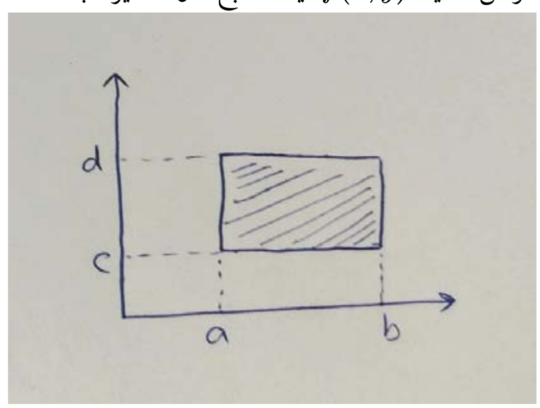
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

آنگاه

$$F'(x) = f(x)$$

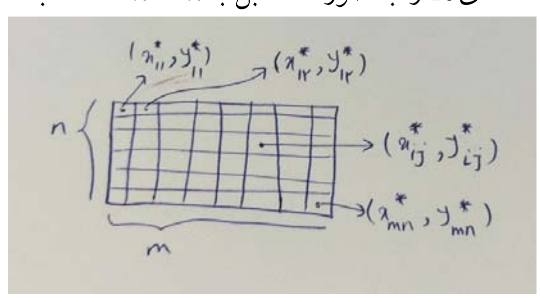
۳.۲۷ جمع‌های ریمانی دوگانه

فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد که روی ناحیه ی مستطیلی R به صورت زیر تعریف شده باشد.



$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

دامنه ی R را به صورت مقابل به $n \times n$ قسمت با مساحتهای مساویِ ΔA تقسیم بندی می کنیم.



از هرکدام از مستطیل های ایجاد شده نقطه ای به دلخواه، مثلاً نقطه‌ی (x^*_{ij}, y^*_{ij}) را، انتخاب می کنیم و **جمع ریمانی** را می سازیم:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{ij=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \Delta A$$

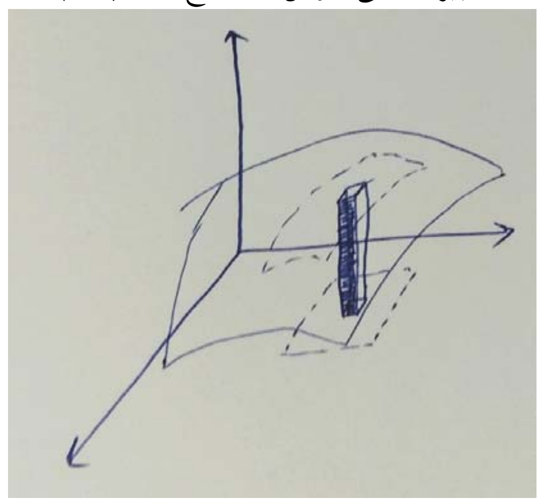
تعریف ۲۵۱. تابع f را در ناحیه ی مستطیلی R انتگرال پذیر می خوانیم هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} \sum_{i=۱}^{m} \sum_{ij=۱}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

و در این صورت می نویسیم:

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m\to\infty, n\to\infty} \sum_{i=۱}^{m} \sum_{ij=۱}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

تعبیر هندسی: فرض کنید تابع $f(x,y) \geqslant ۰$ روی ناحیه ی مستطیلی R تعریف شده باشد.

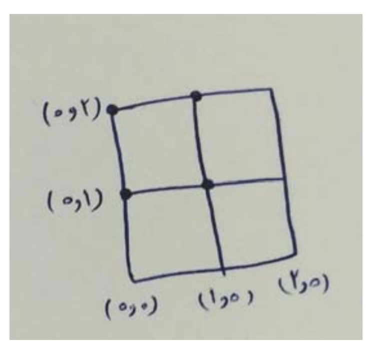


عبارت

$$f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$$

حجم یک مکعب مستطیل را نشان می‌دهد که مقطع آن ΔA است. حاصل جمع حجم این مکعب مستطیلها در واقع تقریبی برای حجم جسم واقع شده بر زیر رویه‌ی $z = f(x,y)$ و بالای ناحیه‌ی مستطیلِ R است. بنابراین $\iint_R f(x,y)dA$ بیانگر حجم ناحیه‌ی زیر رویه‌ی $f(x,y)$ و بالای مستطیل R است.

مثال ۲۵۲. حجم جسمی را که بالای مستطیل $R = [۰,۲] \times [۰,۲]$ و زیر سهمی وار بیضوی $z = ۱۶ - x^۲ - ۲y^۲$ واقع شده است ، تقریب بزنید



پاسخ.

$$f(۰,۲) = ۸ \qquad f(۰,۱) = ۱۴$$

$$f(۱,۲) = ۷ \qquad f(۱,۱) = ۱۳ \qquad \Delta A = ۱$$

$۴۲ = (۱۳ + ۱۴ + ۷ + ۸)۱ \approx$ حجم مورد نظر [۱۶] $\square$

[۱۶] زحمت تایپ جزوه‌ی این جلسه را خانم شیرجزی کشیده‌اند.