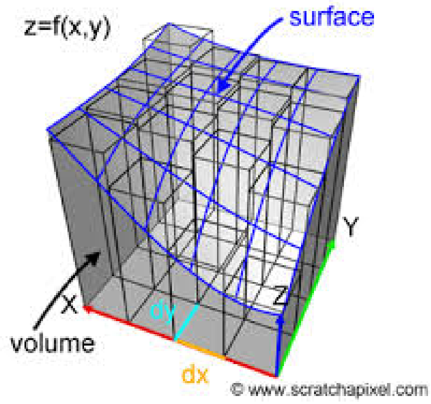
# ۱ جلسه‌ی بیست و هشتم

## ۱.۱ انتگرال دوگانه

در جلسات قبل گفتیم که جمعهای ریمانی در واقع تقریبی برای حجم یک ناحیه به دست می‌دهند و با حدگیری از آنها به انتگرال دوگانه می‌رسیم.

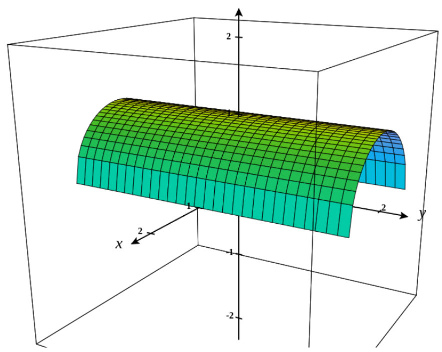
$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} f(x,y)_{i,j}\Delta A = \iint_R f(x,y)dA$$




**مثال ۱.** فرض کنید $R = \{(x,y)| -۱ \leqslant x \leqslant ۱, -۲ \leqslant y \leqslant ۲\}$. حاصل $\iint_R \sqrt{۱ - x^۲}dA$ را محاسبه کنید.

*پاسخ.* بنابر آنچه گفته شد، کافی است حجم ناحیه‌ی زیر رویه‌ی $z = \sqrt{۱ - x^۲}$ و بالای $\mathbf{R}$ را محاسبه کنیم. حجم نیم استوانه برابر است با

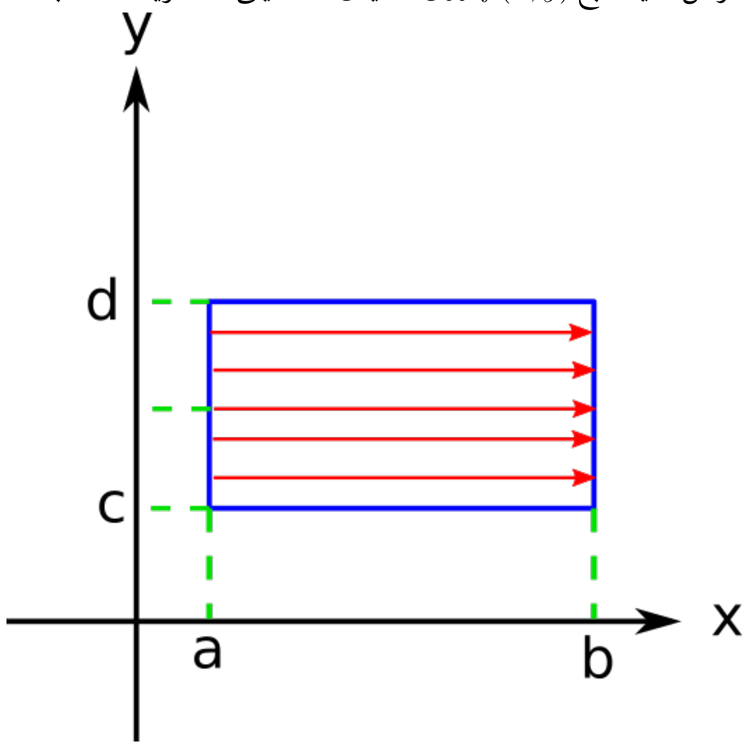
$$\frac{۴\pi}{۲} = ۲\pi$$



□

### ۱.۱.۱ انتگرال جزئی

فرض کنید تابع $f(x,y)$ روی ناحیه‌ی مستطیلی $R$ تعریف شده باشد.

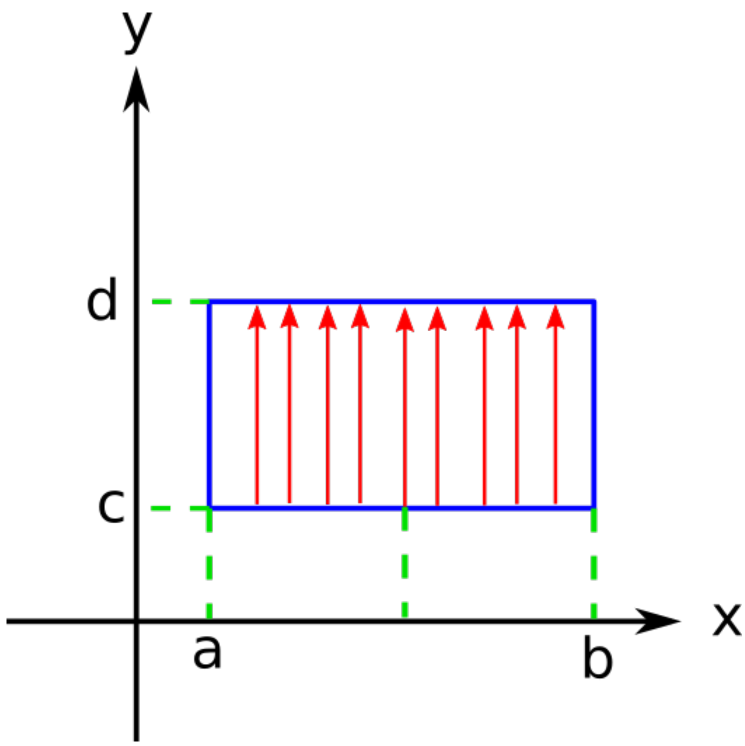



برای عدد دلخواه $y$ در بازه‌ی $[c,d]$ تعریف می‌کنیم:

$$h(y) = \int_a^b f(x,y)dx \rightarrow x \text{ انتگرال جزئی نسبت به }$$

عبارت بالا برای هر $y$ دلخواه قابل تعریف است. پس تابع زیر را داریم:

$$y \xrightarrow{h} \int_a^b f(x,y)dx$$




به طور مشابه برای $x$ دلخواه در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \int_c^d f(x,y)dy \to y \text{ انتگرال جزئی نسبت به }$$

**تعریف ۲.**

$$(*) \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx := \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx$$

بنا بر آنچه در بالا گفته شد، محاسبه‌ی انتگرال $(*)$ یعنی محاسبه‌ی

$$\int_a^b h(x)dx$$

**تعریف ۳.**

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy := \int_c^d \Big(\underbrace{\int_a^b f(x,y)dx}_{h(y)}\Big)dy$$

**تمرین ۴.** انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱. $\int_۰^۳ \int_۱^۲ x^۲ydydx$

*پاسخ.*

$$\int_۱^۲ x^۲ydy = x^۲\frac{y^۲}{۲}|_۱^۲ = ۲x^۲ - \frac{x^۲}{۲} = \frac{۳}{۲}x^۲$$

$$\int_۰^۳ \int_۱^۲ x^۲ydydx = \int_۰^۳ \frac{۳}{۲}x^۲dx = \frac{x^۳}{۲}|_۰^۳ = \frac{۲۷}{۲}$$

□

۲. $\int_۱^۲ \int_۰^۳ x^۲ydxdy$

*پاسخ.*

$$\int_{۰}^{۳} x^{۲} y dx = \frac{x^{۳}}{۳} y|_{۰}^{۳} = \frac{۲۷}{۳} y$$

$$\int_{۱}^{۲} \int_{۰}^{۳} x^{۲} y dx dy = \int_{۱}^{۲} \frac{۲۷}{۳} y dy = \frac{۲۷}{۳} \frac{y^{۲}}{۲}|_{۱}^{۲} = \frac{۲۷}{۲}$$

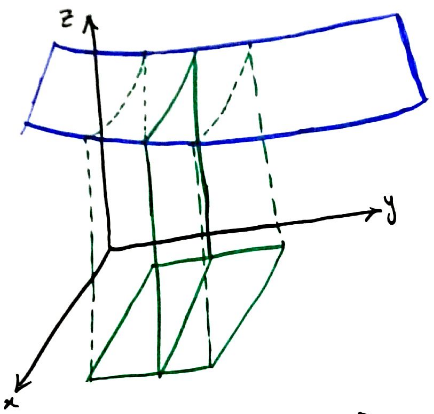
□

در بالا دیدیم که با تعویض ترتیب انتگرالگیری به جوابهای یکسانی رسیدیم. این امر تحت شرایط قضیه‌ی زیر همواره درست است:

**قضیه ۵** (فوبینی)**.** اگر تابع $f$ در ناحیه‌ی مستطیلی $R$ (یعنی $R = [a, b] \times [c, d]$ ) پیوسته باشد آنگاه

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

**<u>توجیه هندسی</u>**




توجیه هندسی
قضیه فوبینی