۱ جلسه‌ی شانزدهم، شنبه

یادآوری ۱. گفتیم [1] که اگر تابع y تابعی دیفرانسیل‌پذیر بر حسب x باشد و معادله‌ی زیر برقرار باشد:

$$F(x,y) = ۰$$

آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

مثال ۲. فرض کنید y تابعی از x باشد و $x^۳ + y^۳ = ۶xy$؛ آنگاه $y'(x)$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$F(x,y) = x^۳ + y^۳ - ۶xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ۳x^۲ - ۶y \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = ۳y^۲ - ۶x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-۳x^۲ + ۶y}{۳y^۲ - ۶x}$$

□

تعمیم ۳. فرض کنید که z تابعی از x و y باشد و $w = F(x,y,z) = ۰$ آنگاه:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

پس

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z}$$

مثال ۴. $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید، با این فرض که

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ + ۶xyz - ۱ = ۰$$

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(۳x^۲ + ۶yz)}{۳z^۲ + ۶xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \dots$$

□

۱.۱ ادامه ی مشتق سویی

گفتیم که مشتق سوئی یک تابعِ دو متغیره‌ی $f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ در جهت بردارِ یکه‌ی $u = (a,b)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_u f(x_۰, y_۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x_۰ + ha, y_۰ + hb) - f(x_۰, y_۰)}{h}$$

[1] زحمت تایپ جزوه‌ی این جلسه را خانم شیرجزی کشیده‌اند.

گفتیم که از لحاظ هندسی، محاسبه‌ی مشتق سوئی در جهت بردار یاد شده، یعنی در نظر گرفتن اشتراک رویه با صفحه‌ی زیر:

$$\begin{cases} y - y_{۰} = \frac{b}{a}(x - x_{۰}) \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

و محاسبه‌ی شیب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در نقطه‌ی $(x_{۰}, y_{۰}, z_{۰})$. نیز گفتیم که در جهت دو بردار زیر، مشتقهای سوئی همان مشتقهای جزئی هستند:

$$i = (۱, ۰) \qquad D_i f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$j = (۰, ۱) \qquad D_j f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

قضیه ۵. فرض کنید $z = f(x, y)$ تابعی دیفرانسیل پذیر بر حسب x و y باشد. آنگاه مشتق f در جهت هر بردار یکه ی (a, b) موجود است و از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$u = (a, b) \qquad D_u f(x_{۰}, y_{۰}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{۰}, y_{۰})a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_{۰}, y_{۰})b$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_{۰}, y_{۰}), \frac{\partial f}{\partial y}(x_{۰}, y_{۰})\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) .(a, b)$$

اثبات. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$g(h) = f(x_{۰} + ah, y_{۰} + bh)$$

داریم

$$g'(۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{g(h) - g(۰)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x_{۰} + ah, y_{۰} + bh) - f(x_{۰}, y_{۰})}{h} = D_u f(x_{۰}, y_{۰})$$

اما از طرفی

$$g = f(x, y)$$

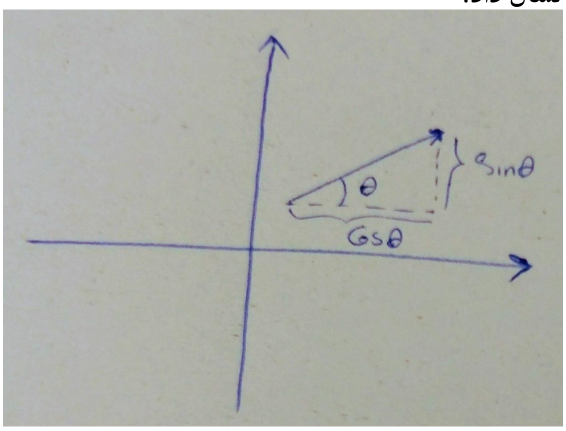
$$x = x_{۰} + ha \quad , \qquad y = y_{۰} + hb$$

پس

$$g'(۰) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{۰}, y_{۰}) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_{۰}, y_{۰})b$$

□

توجه کنید که هر بردارِ یکه‌ی دوبعدیِ u را می‌توان با توجه به زاویه‌ای که با محور x می‌سازد به صورتِ $u = (\cos(\theta), \sin\theta)$ نشان داد:



در این صورت داریم:

$$D_u f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

مثال ۶. فرض کنید $f(x,y) = x^۳ - ۳xy + ۴y^۲$ و فرض کنید که u برداری باشد که با محورِ x زاویه‌ی $\theta = \frac{\pi}{۶}$ می‌سازد. مشتق تابع را در جهت این بردار محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D_u f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\cos\frac{\pi}{۶}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin\frac{\pi}{۶}) = (۳x^۲ - ۳y)(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + (-۳x + ۸y)(\frac{۱}{۲})$$

□

در طی جلسات گذشته حتماً متوجه شده‌اید که بردارِ $(f_x(x,y), f_y(x,y))$ در تعاریف مربوط به مشتق ظاهر می‌شود. این **تابع برداری** شایسته‌ی نامی است:

تعریف ۷. فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد، تعریف می کنیم:

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\overrightarrow{j}$$

علامتِ ∇ نابلا خوانده می‌شود و نابلا کلمه‌ای یونانی به معنی سازِ «چنگ» است. تابع بالا را تابع گرادیان می‌خوانیم. توجه کنید که گرادیان یک تابع برداری است. یعنی هر نقطه از $\mathbb{R}^۲$ را به یک بردار در $\mathbb{R}^۲$ می‌برد.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$$
$$\nabla : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$$
$$\nabla(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$$

مثال ۸. اگر $f(x,y) = \sin x + e^{xy}$ آنگاه

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\overrightarrow{j} = (\cos x + ye^{xy})\overrightarrow{i} + (xe^{xy})\overrightarrow{j}$$

$$(x,y) \mapsto (\cos x + ye^{xy})\overrightarrow{i} + (xe^{xy})\overrightarrow{j}$$

توجه ۹. با استفاده از نماد نابلا می‌توان نوشت: (اگر $u = (a,b)$)

$$D_u f = \nabla f.\overrightarrow{u} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}).(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b$$

مثال ۱۰. مشتق تابع $f(x,y) = x^۲y^۳ - ۴y$ را در جهت بردار $\overrightarrow{v} = ۲\overrightarrow{i} + ۵\overrightarrow{j}$ و در نقطه‌ی $(۲, -۱)$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D_u f(x_۰, y_۰) = \nabla f(x_۰, y_۰).\overrightarrow{u}$$

$$\nabla f(x_۰, y_۰) = (۲xy^۳, ۳x^۲y^۲ - ۴)$$

$$\nabla f(۲,-۱)=(-۴,۸)$$
$$\overrightarrow{u_v}=\frac{\overrightarrow{v}}{||v||}=\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}\overrightarrow{i}+\frac{۵}{\sqrt{۲۹}}\overrightarrow{j}$$
$$D_{(\frac{۲}{\sqrt{۲۹}},\frac{۵}{\sqrt{۲۹}})}f(۲,-۱)=-۴\times\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}+۸\times\frac{۵}{\sqrt{۲۹}}$$

□

توجه ۱۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}$ تابعی سه متغیره باشد. آنگاه $\nabla f: R^۳\to R^۳$ دارای ضابطه‌ی زیر است:

$$(x,y,z)\mapsto(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z))$$

همچنین اگر $\overrightarrow{u}=(a,b,c)$ یک بردار یکه باشد، تعریف می کنیم:

$$D_u f=\nabla f.\overrightarrow{u}$$

مثال ۱۲. مشتق تابع $f(x,y,z)=x\sin(yz)$ را در جهت بردار $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}+۲\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ در نقطه ی $(۱,۳,۰)$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\nabla f(x_۰,y_۰,z_۰)=(\sin(y_۰z_۰),x_۰z_۰\cos(y_۰z_۰),x_۰y_۰\cos(y_۰z_۰))$$
$$\nabla f(۱,۳,۰)=(\sin(۰),۰\times\cos(۰),۳\times\cos(۰))=(۰,۰,۳)$$
$$\overrightarrow{u_v}=\frac{\overrightarrow{v}}{||v||}=\frac{\overrightarrow{i}+۲\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}}{\sqrt{۱+۴+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}\overrightarrow{i}+\frac{۲}{\sqrt{۶}}\overrightarrow{j}-\frac{۱}{\sqrt{۶}}\overrightarrow{k}$$
$$D_u f(۱,۳,۰)=(۰,۰,۳).(\frac{۱}{\sqrt{۶}},\frac{۲}{\sqrt{۶}},-\frac{۱}{\sqrt{۶}})=۰+۰-\frac{۳}{\sqrt{۶}}=-\frac{۳}{\sqrt{۶}}$$

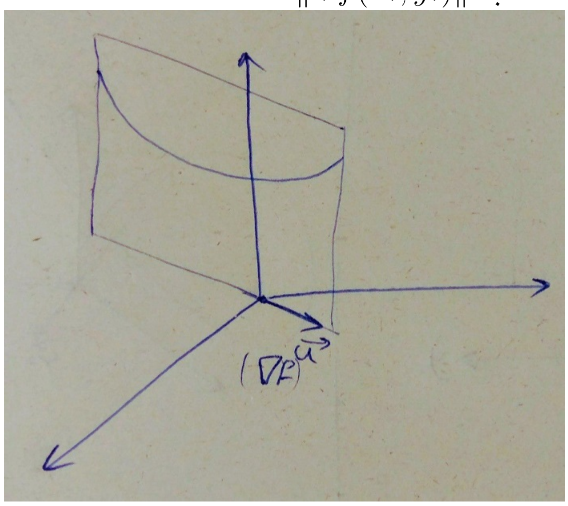
□

توجه ۱۳. فرض کنید f (دو متغیره یا سه متغیره) تابعی دیفرانسیل پذیر باشد. گفتیم که:

$$D_u f(x_۰,y_۰)=\nabla f(x_۰,y_۰).\overrightarrow{u}=||\nabla f(x_۰,y_۰)||.||\overrightarrow{u}||.\cos\theta$$

(θ زاویه ی بین و ∇f و $\overrightarrow{u}$ است.)

بنابراین حداکثر مقدار D_u زمانی روی می دهد که $\cos\theta=۱$؛ یعنی زمانی که $\overrightarrow{u}$ در جهت بردار گرادیان باشد؛ و این مقدار برابر است با: $||\nabla f(x_۰,y_۰)||$



مثال ۱۴.

الف) نرخ تغییرات تابع $f(x,y)=xe^y$ را وقتی از نقطه ی $(۲,۰)$ به سمت نقطه ی $(\frac{۱}{۲},۲)$ حرکت می کنیم، بیابید.

ب) در کدام جهت تابع حداکثر نرخ تغییرات را دارد و این مقدار چقدر است؟

پاسخ.

$$\overrightarrow{v}=(\frac{۱}{۲}-۲,۲-۰)=(-\frac{۳}{۲},۲)$$

$$\overrightarrow{u}=\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}=\frac{(\frac{-۳}{۲},۲)}{\sqrt{\frac{۹}{۴}+۴}}=\frac{(\frac{-۳}{۲},۲)}{\frac{۵}{۲}}=(\frac{-۳}{۵},\frac{۴}{۵})$$

$$\nabla f(x_{۰},y_{۰})=(e^{y_{۰}},x_{۰}e^{y_{۰}})$$

$$\nabla f(۲,۰)=(۱,۲)$$

$$D_u f(۲,۰)=\nabla f.\overrightarrow{u}=(۱,۲).(\frac{-۳}{۵},\frac{۴}{۵})=\frac{-۳}{۵}+\frac{۸}{۵}=\frac{۵}{۵}=۱$$

تابع در جهت بردار $(۱,۲)$ حداکثر نرخ تغییرات را دارد و این مقدار برابر است با: $\sqrt{۴+۱}$. □