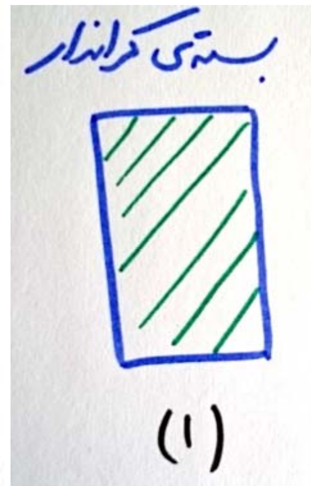
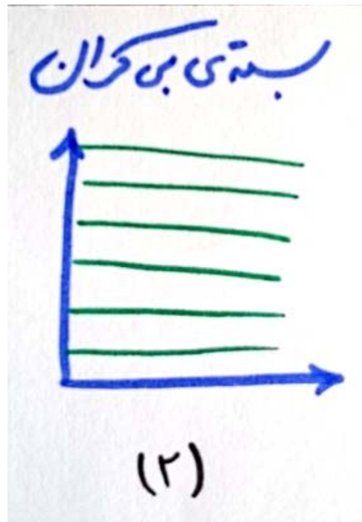
۲۳ نیم جلسه‌ی بیست و پنجم، چهارشنبه

۱.۲۳ اکسترمم‌های مطلق

گفتیم که اگر $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره‌ی پیوسته باشد که در یک مجموعه‌ی بسته‌ی کراندارِ D تعریف شده است آنگاه f در D دارای مینی‌موم و ماکزیمم مطلق است.



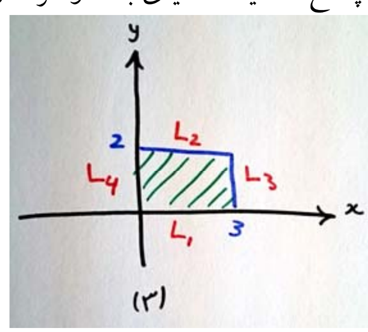


دستورالعمل:
مقادیر تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی با هم مقایسه کنید.

مثال ۲۲۵. اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ را در مجموعه‌ی D پیدا کنید.

$$D = \{(x,y) | 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$$

پاسخ. D یک ناحیه‌ی بسته و کراندار است. تابع f چند جمله‌ای و از این رو پیوسته است.



حال نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم. توجه کنید که نقاط بحرانی، روی مرزها نیستند، بلکه درون ناحیه‌ی داده شده هستند.

$$f_x(x,y) = 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$f_y(x,y) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

تنها نقطه‌ی بحرانی نقطه‌ی $(1,1)$ است. داریم:

$$f(1,1) = 1 - 2 + 2 = 1$$

مجموعه نقاط روی خطوط مرزهای دامنه را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم.

$$L_۱ = \{(x, ۰)|۰ \leqslant x \leqslant ۳\}, \quad L_۲ = \{(x, ۲)|۰ \leqslant x \leqslant ۳\}$$

$$L_۳ = \{(۳, y)|۰ \leqslant y \leqslant ۲\}, \quad L_۴ = \{(۰, y)|۰ \leqslant y \leqslant ۲\}$$

محاسبه‌ی مقادیر تابع در $L_۱$:

$$f(x, ۰) = x^۲ \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۲$$

این تابع در نقاط زیر اکسترمم دارد:

$$f(۰, ۰) = ۰, f(۳, ۰) = ۹$$

پس $(۰, ۰)$ مینی‌موم مطلق در $L_۱$ و $(۳, ۰)$ ماکزیمم مطلق در $L_۱$ است.
محاسبه‌ی مقادیر تابع در $L_۲$:

$$f(x, ۲) = x^۲ - ۴x + ۴ = (x - ۲)^۲ \quad x \in (۰, ۳)$$

$$f(۲, ۲) = ۴ \quad \text{ماکزیمم مطلق در مسیر } L_۲$$

$$f(۰, ۲) = ۴ \quad \text{مینی‌موم مطلق در مسیر } L_۲$$

محاسبه‌ی مقادیر تابع در $L_۳$:

$$f(۳, y) = ۹ - ۶y + ۲y = ۹ - ۴y \quad y \in [۰, ۲]$$

$$f(۳, ۲) = ۹ - ۸ = ۱, f(۳, ۰) = ۹$$

پس در مسیر $L_۳$ نقطه‌ی $f(۳, ۲)$ مینی‌موم مطلق و نقطه‌ی $f(۳, ۰)$ ماکزیمم مطلق است.
محاسبه‌ی مقادیر تابع در $L_۴$:

$$f(۰, y) = ۲y \quad y \in [۰, ۲]$$

$$f(۰, ۰) = ۰, f(۰, ۲) = ۴$$

پس در مسیر $L_۴$ نقطه‌ی $(۰, ۰)$ مینی‌موم مطلق و نقطه‌ی $(۰, ۲)$ ماکزیمم مطلق است. از مقایسه‌ی نقاط بدسته آمده نتیجه می‌گیریم که در نقاط $(۰, ۰)$ و $(۲, ۲)$ مینی‌موم رخ می‌دهد و مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است؛ همچنین در نقطه‌ی $(۳, ۰)$ ماکزیمم مطلق رخ داده است و مقدار تابع در این نقطه ۹ است. □

تمرین ۲۲۶. اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x, y) = xy^۲$ را در ناحیه‌ی D بیابید.

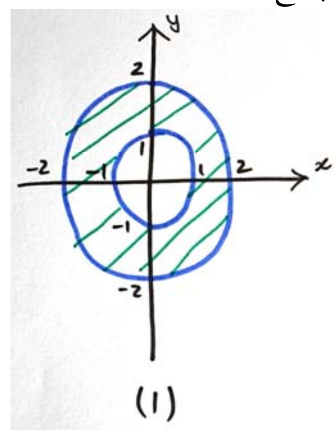
$$D = \{(x, y)|x \geqslant ۰, y \geqslant ۰, x^۲ + y^۲ \leqslant ۳\}$$

۲۴ جلسه‌ی بیست و ششم، شنبه

تمرین ۲۲۷. اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ را در ناحیه‌ی D بیابید.

$$D=\{(x,y)|۱\leqslant x^۲+y^۲\leqslant ۴\}$$

پاسخ.



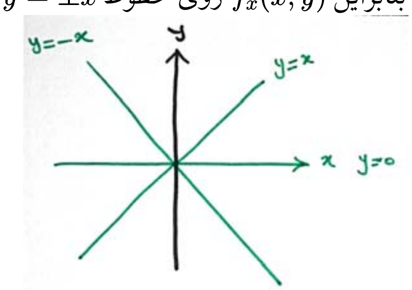
(۱)

ناحیه‌ی D بسته و کراندار است و تابع f در ناحیه‌ی D پیوسته است. بنابراین f در D دارای اکسترمم‌های مطلق است. حال می‌خواهیم نقاط بحرانی تابع $f(x,y)$ برای $(x,y)\in D$ را بیابیم.

$$f_x(x,y)=\frac{y^۲(x^۲+y^۲)-۲x(xy^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{x^۲y^۲+y^۴-۲x^۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{y^۴-x^۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}=۰$$

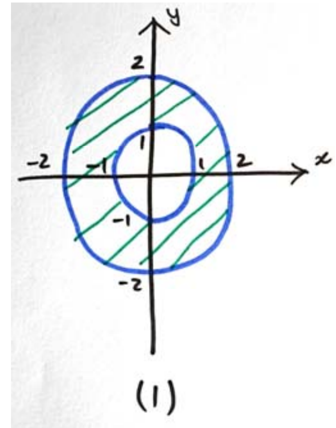
$$\Rightarrow y^۲(y^۲-x^۲)=۰$$

بنابراین $f_x(x,y)$ روی خطوط $y=\pm x$ و $y=۰$ برابر صفر است.



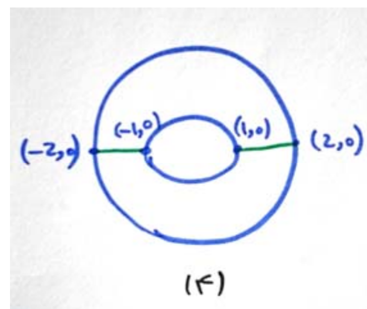
(۲)

$$f_y(x,y)=\frac{۲xy(x^۲+y^۲)-۲y(xy^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{۲x^۳y+۲xy^۳-۲xy^۳}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{۲x^۳y}{(x^۲+y^۲)^۲}=۰$$



روی خطوط $x=۰$ و $y=۰$ مقدار f_y صفر است. پس نقاط بحرانی تابع که از اشتراک این خطوط به دست می‌آیند به صورت زیرند:

$$D\cap\{(x,y)|y=۰\}$$



مقادیر تابع در نقاط بحرانی برابر صفر است. حال اکسترمم‌های تابع را روی مرزهای D بدست می‌آوریم.

$$L_۱=\{(x,y)|x^۲+y^۲=۱\}$$

مقادیر تابع $f(x,y)$ روی مرز $L_۱$ را توسط تابع تک متغیره‌ی g به صورت زیر پوشیده می‌شوند:

$$f(x,y)=\frac{xy^۲}{x^۲+y^۲}\overset{(x,y)\in L_۱}{\Rightarrow} g(x)=x(۱-x^۲)=x-x^۳\quad x\in[-۱,۱]$$

برای تعیین اکسترمم‌های تابع $g(x)$ در ناحیه‌ی $[-۱,۱]$ ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست می‌آوریم.

$$g'(x)=۰\Rightarrow ۱-۳x^۲=۰\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

مقادیر تابع در این نقاط به صورت زیر است.

$$g(x)=x-x^۳\begin{cases}x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{\sqrt{۳^۳}}\\ x=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow-\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳^۳}}\end{cases}$$

پس برای تابع $f(x,y)$ مقادیر زیر را داریم:

$$(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\pm\sqrt{۱-\frac{۱}{۳}})\Rightarrow f(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\pm\sqrt{۱-\frac{۱}{۳}})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}-(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۳$$

$$(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \pm\sqrt{۱-\frac{۱}{۳}}) \Rightarrow f(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \pm\sqrt{۱-\frac{۱}{۳}}) = -\frac{۱}{\sqrt{۳}} + (\frac{۱}{\sqrt{۳}})^{۳}$$

محاسبه‌ی g در نقاط مرزی:

$$g(۱) = ۰, g(-۱) = ۰$$

یعنی

$$f(۱,۰) = f(-۱,۰) = ۰.$$

حال به طور مشابه مقادیر تابع را روی مرز $L_۲$ محاسبه می‌کنیم.

$$L_۲ = \{(x,y) | x^۲ + y^۲ = ۴\}$$
$$f(x,y) = \frac{xy^۲}{x^۲+y^۲} \quad (x,y) \in L_۲$$
$$h(x) = \frac{x(۴-x^۲)}{۴} \quad x \in [-۲,۲]$$

روند بالا را برای تابع h نیز تکرار کنید. مقادیر تابع f را در نقاط بدست آمده با هم مقایسه کنید. ادامه با شما! اکسترمم‌های بدست آمده به صورت زیر خواهند بود:

$$\text{ماکزیمم مطلق} \; f(\frac{-۲}{\sqrt{۳}}, \pm\sqrt{۴-(\frac{۲}{\sqrt{۳}})^۲}) = ۰/۷۷$$
$$\text{مینی‌موم مطلق} \; f(\frac{۲}{\sqrt{۳}}, \pm\sqrt{۴-(\frac{۲}{\sqrt{۳}})^۲}) = -۰/۷۷$$

□

۱.۲۴ روش ضرایب لاگرانژ

در مثال قبل لازم بود که اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y)$ را روی ناحیه‌ی $L_۱ = \{(x,y) | x^۲ + y^۲ = ۱\}$ محاسبه کنیم. برای این کار از توابع تک متغیره استفاده کردیم. در این بخش، می‌خواهیم روشی کلی برای محاسبه‌ی اکسترممهای مطلق یک تابع، تحت یک قید ارائه کنیم. نخست روش مورد نظر را به صورت یک دستورالعمل بیان می‌کنیم و سپس برای این دستورالعمل توجیه‌های هندسی و جبری خواهیم آورد:

برای تعیین اکسترمم‌های مطلق $f(x,y)$ تحتِ قیدِ $g(x,y) = k$ از روش زیر استفاده می‌کنیم:

۱) دستگاه سه معادله با سه مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$$

۲) مقادیر اکسترمم مطلق تابع f دقیقاً در برخی از (x,y)های جواب معادله‌ی بالا رخ می‌دهد. مقادیر تابع را در این نقاط با هم مقایسه می‌کنیم.

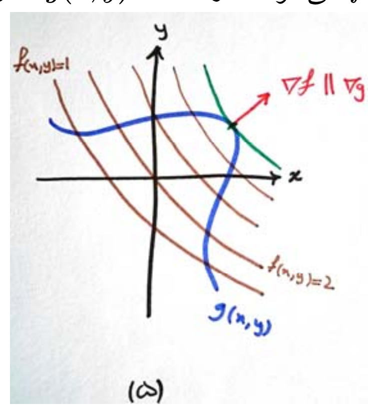
به بیان دیگر دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \to \text{گرادیان } f \text{ با گرادیان } g \text{ موازی شود.} \\ g(x,y) = k \end{cases}$$

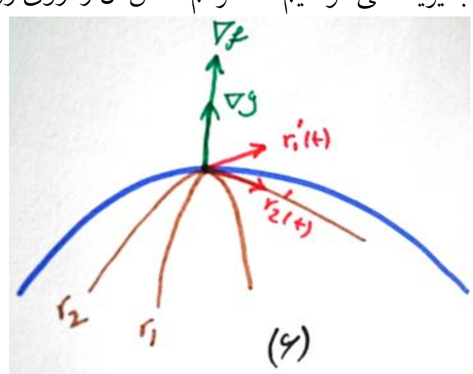
تعمیم ۲۲۸. برای تعیین اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y,z)$ تحت قید $g(x,y,z) = k$ دستگاه چهار معادله با چهار مجهول زیر را حل کرده مقادیر تابع را در (x,y,z)های بدست آمده با هم مقایسه می‌کنیم. حداکثر این مقادیر، ماکزیمم مطلق و حداقل آنها مینی‌موم مطلق خواهد شد.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = k \end{cases}$$

در شکل زیر توجیهی هندسی برای روش ضرایب لاگرانژ برای توابع دو متغیره آورده‌ایم. دقت کنید که در تقاطع با با نمودار تابعِ $g(x,y) = k$ تابع f زمانی حداکثر می‌شود که منحنی تراز آن بر g مماس شود؛ دقیقاً در جائی که f می‌خواهد از $g(x,y) = k$ خارج شود. در نقطه‌ای که ایندو بر هم مماسند، باید گرادیانها با هم موازی باشند.



بیایید برای توابع سه متغیره، روش ضرایب لاگرانژ را به طور دقیقتر توجیه کنیم. تابع سه متغیره‌ی $f(x,y,z)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم اکسترمم مطلق آن را روی رویه‌ی $g(x,y,z) = k$ محاسبه کنیم.



فرض کنید $\overrightarrow{r}(t)$ یک منحنی فضایی باشد به طوری که $\overrightarrow{r}(t_0) = p$ و p یک نقطه‌ی ماکزیمم مطلق برای تابع f باشد. پس تابع تک متغیره‌ی زیر از $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ در $t = t_0$ دارای ماکزیمم مطلق است.

$$t \overset{h}{\mapsto} f\big(\overrightarrow{r}(t)\big) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

تابع $h(t)$ در نقطه‌ی $t = t.$ دارای ماکزیمم مطلق است. پس $h'(t.) = ۰$. پس

$$\frac{\partial f\big(x(t), y(t), z(t)\big)}{\partial t}(t.) = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t) = ۰$$

پس در نقطه‌ی p داریم:

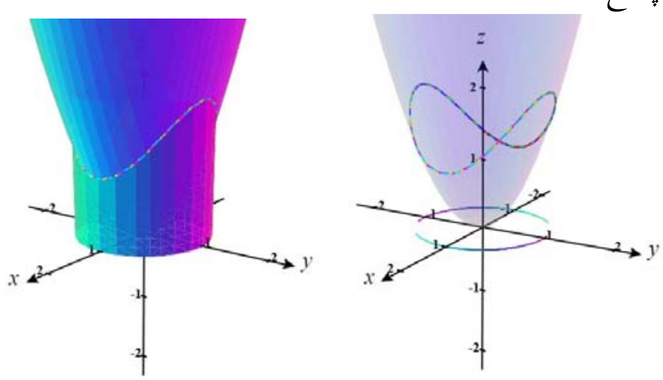
$$\overrightarrow{\nabla f} \cdot r'(t) = ۰ \Rightarrow \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) \perp r'(t.)$$

خلاصه ۲۲۹. ∇f بر تمام بردارهای $r'(t)$ برای منحنی‌های گذرنده از p عمود است. پس ∇f بر صفحه‌ی مماس بر g در نقطه‌ی p عمود است. از طرفی ∇g نیز در همان نقطه بر صفحه‌ی مماس عمود است. پس

$$\nabla f || \nabla g$$

مثال ۲۳۰. حداقل و حداکثر مقدار تابع $f(x,y) = x^۲ + ۲y^۲$ را روی دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ را تعیین کنید.

پاسخ.



$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = k \end{cases} = \begin{cases} ۲x = \lambda(۲x) \\ ۴y = \lambda(۲y) \\ x^۲ + y^۲ = ۱ \end{cases}$$

از معادله‌ی $۲x = \lambda(۲x)$ نتیجه می‌گیریم که یا $x \neq ۰$ و $\lambda = ۱$؛ یا $x = ۰$. از معادله‌ی $۴y = \lambda(۲y)$ و معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ و جواب‌های معادله‌ی قبلی نتیجه می‌گیریم که

$$(۱) \quad \lambda = ۱ \to y = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow (\pm ۱, ۰)$$

$$(۲) \quad x = ۰ \to y = \pm ۱ \Rightarrow (۰, \pm ۱)$$

پس مینی‌موم‌های مطلق تابع برابرند با

$$f(۱, ۰) = f(-۱, ۰) = ۱$$

و ماکزیمم‌های مطلق تابع برابرند با

$$f(۰/۱) = f(۰, -۱) = ۲$$

□