۱ جلسه‌ی سی‌وپنجم

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی میدانهای برداری (مانند توابع زیر) صحبت کنیم.

$$F : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$$

$$G : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}^۳$$

گفتیم که یک میدان برداری $F : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$ را پایستار می‌خوانیم هرگاه تابع عددی $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ موجود باشد که

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

در درسهای آینده محکی معرفی خواهیم کرد که به وسیله‌ی آن می‌توانیم پایستار بودن یک میدان برداری را تشخیص دهیم. پیش از آن نیاز به مقدماتی داریم. فعلاً بحث توابع برداری را رها می‌کنیم و به توابع عددی می‌پردازیم.

۱.۱ انتگرالگیری خطی از توابع عددی

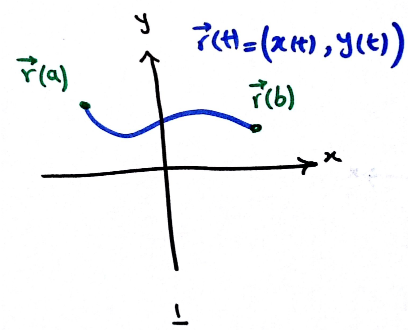
فرض کنید c یک خم هموار در $\mathbf{R}^۲$ باشد که با معادله‌ی برداری

$$\overrightarrow{r}(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$$

داده شده باشد. فرض می‌کنیم که

$$\forall t \in [a,b] \quad r'(t) \neq ۰$$

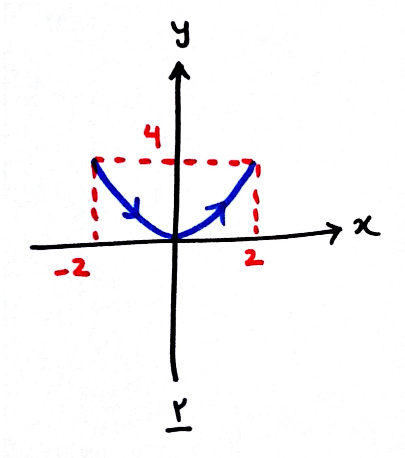
و $\overrightarrow{r}'(t)$ پیوسته باشد.



مثال ۱. منحنی $y = x^۲$ را به صورت یک خم نمایش دهید. $(-۲ \leqslant x \leqslant ۲)$.

پاسخ.

$$\overrightarrow{r}(t) = (t, t^۲) \quad -۲ \leqslant t \leqslant ۲$$

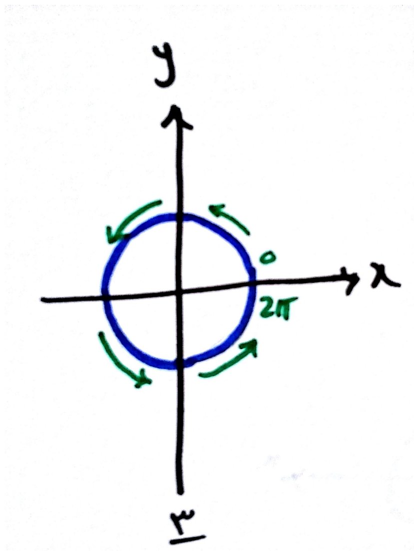


$\square$

مثال ۲. خمِ $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ را رسم کنید.

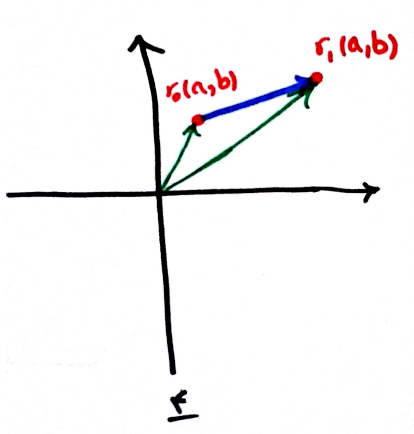
پاسخ.

$$x^2 + y^2 = \cos^t + \sin^2 t = 1$$



$\square$

مثال ۳. معادله‌ی برداری پاره‌خطی را بنویسید که نقطه‌ی A را به نقطه‌ی B وصل کند.



فرض کنید نقطه‌ی A دارای بردار مکانِ r_0 و نقطه‌ی B دارای بردار مکان r_1 باشد.

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}_0 + (\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_0)t \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

به بیان دیگر:

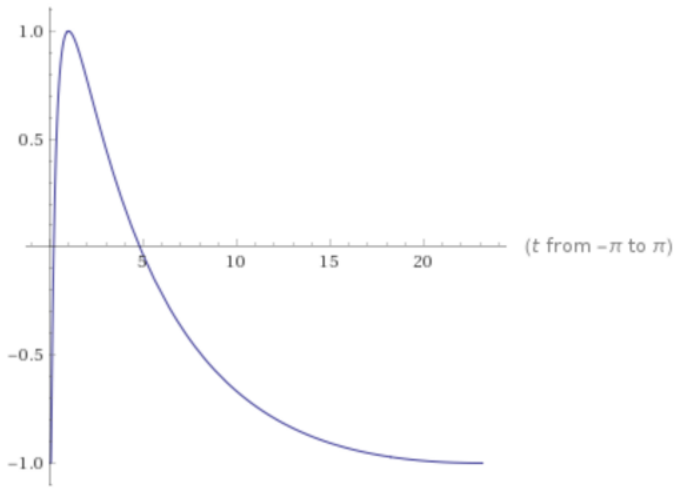
$$\overrightarrow{r}(t) = t\overrightarrow{r}_۱ + (۱-t)\overrightarrow{r}_۰ \quad ۰ \leqslant t \leqslant ۱$$

مثال ۴. خم‌های زیر را (با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای) رسم کنید.

۱. $(\cos t, ۲\sin t)$

۲. $(e^t, \cos t)$

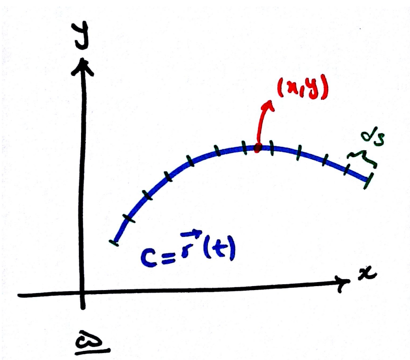
در زیر دومی را به عنوان نمونه رسم کرده‌ایم:



فرض کنید $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ یک تابع عددی باشد.

هدف ۵. تعریفِ

$$\int_c f ds$$



خم مورد نظر را به قطعاتی به طول Δs تقسیم می‌کنیم و از هر قطعه یک نقطه انتخاب می‌کنیم و حد زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\lim_{\Delta s \to ۰} \sum f(x,y)\Delta s$$

اگر حد بالا موجود باشد می‌نویسیم:

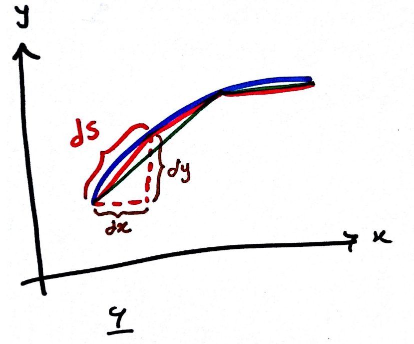
$$\int_c f(x,y)ds = \lim_{\Delta s \to ۰} \sum f(x,y)\Delta s$$

توجه ۶. طول خم برابر است با

$$\int_c ds$$

محاسبه‌ی ds

اندازه‌ی ds را وقتی تعداد قطعات زیاد باشند، می‌توان با طول پاره‌خطی که دو سرِ ds را به هم وصل می‌کند تخمین زد.



پس:

$$ds = \sqrt{(dx)^{۲} + (dy)^{۲}}$$

منحنی مورد نظر ما توسط معادله‌ی برداری $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$ داده شده است. پس

$$dx = x'(t)dt \quad dy = y'(t)dt$$

پس داریم:

$$ds = |\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

که در آن

$$\overrightarrow{r}'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$$

و

$$|\overrightarrow{r}'(t)| = \sqrt{\big(x'(t)\big)^{۲} + \big(y'(t)\big)^{۲}}$$

حال می‌توانیم همه چیز را در یک تعریف خلاصه کنیم:

تعریف ۷. فرض کنید خمِ c توسط معادله‌ی برداری $a \leqslant t \leqslant b \quad \overrightarrow{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ داده شده باشد و $f : \mathbf{R}^{۲} \to \mathbf{R}$ تابعی عددی باشد. داریم

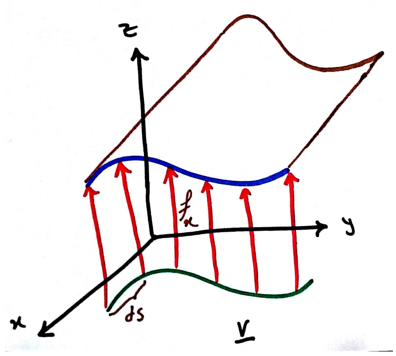
$$\int_c f(x,y)ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt = \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))|\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

توجه ۸. طول خم به معادله‌ی $a \leqslant t \leqslant b \quad \overrightarrow{r}(t)$ برابر است با

$$\int_c ds = \int_a^b |\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

دقت کنید که دامنه‌ی یک تابعِ $f : \mathbf{R}^{۲} \to \mathbf{R}^{۲}$ می‌تواند تمامِ $\mathbf{R}^{۲}$ باشد ولی در انتگرالگیری خطی ما به مقادیر تابع روی یک منحنی که در دامنه‌ی تابع واقع شده است توجه داریم.

<u>توجیه هندسی.</u>



توجه ۹. یک خم مشخص را شاید بتوان به گونه‌های مختلفی پارامتر بندی کرد. برای مثال یک دایره را در زیر به دو صورت پارامتربندی کرده‌ایم.

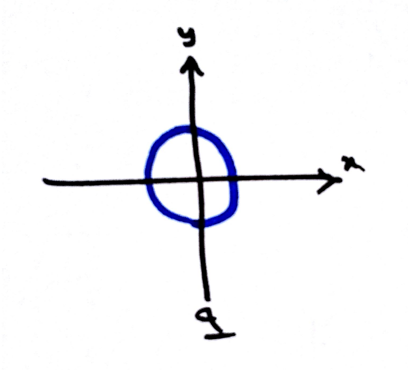
$$c:\ \overrightarrow{r}(t)=(\cos t,\sin t)\qquad ۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$$

$$c:\ \overrightarrow{h}(t)=(\cos ۲t,\sin ۲t)\qquad ۰\leqslant t\leqslant \pi$$

حاصل انتگرال از یک تابع عددی به نوع پارامتر بندی خم بستگی ندارد:

$$\int_c f(x,y)ds=\int_۰^{۲\pi} f\big(\overrightarrow{r}(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt=\int_۰^{\pi} f\big(\overrightarrow{h}(t)\big)|\overrightarrow{h}'(t)|dt$$

دقت کنید که فرق دو پارامتربندی بالا این است که در دومی خم سریعتر پیموده می‌شود.



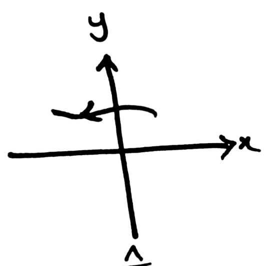
توجه ۱۰. طول خم نیز مستقل از نوع پارامتربندی آن است.

توجه ۱۱. انتگرال یک تابع عددی روی یک خم به جهت خم بستگی ندارد:

$$c:\ \overrightarrow{r}(t)$$

$$-c:\ \overrightarrow{h}(t)$$

$$\int_c f(x,y)ds=\int_{-c} f(x,y)ds$$



تعمیم ۱۲ (سه بُعدی)**.** فرض کنید $f:\mathbf{R}^{۳}\to\mathbf{R}$ یک تابع عددی باشد و c یک خم هموار با معادله‌ی برداری

$$\overrightarrow{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)\quad a\leqslant t\leqslant b$$

باشد آنگاه

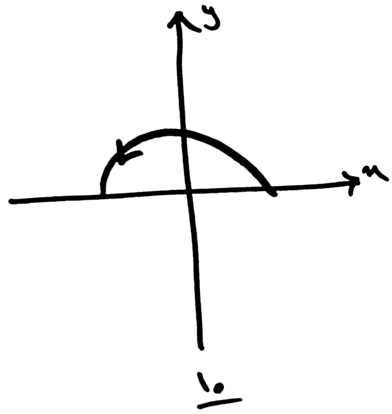
$$\int_c f(x,y)ds=\int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt=\int_a^b f\big(\overrightarrow{r}(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

$$ds=|\overrightarrow{r}'(t)|dt=\sqrt{\big(x'(t)\big)^{۲}+\big(y'(t)\big)^{۲}+\big(z'(t)\big)^{۲}}dt$$

مثال ۱۳. $\int_c(۲+x^{۲}y)ds$ را محاسبه کنید که در آن c نیمه‌ی بالائی دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۱$ است.

پاسخ.

$$c:\overrightarrow{r}(t)=\big(\cos t,\sin t\big)\quad ۰\leqslant t\leqslant\pi$$



$$\overrightarrow{r}'(t)=\big(-\sin t,\cos t\big)$$

$$|\overrightarrow{r}'(t)|=\sqrt{\sin^{۲}t+\cos^{۲}t}=۱$$

$$\int_c f(x,y)ds=\int_۰^{\pi}(۲+\cos^{۲}t\sin t)\times ۱dt=۲\pi+\int_۰^{\pi}\underbrace{\cos^{۲}t}_{u}\underbrace{\sin tdt}_{-du}=۲\pi+\frac{-\cos^{۳}t}{۳}|_۰^{\pi}=$$

$$۲\pi-(-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳})=۲\pi+\frac{۲}{۳}$$

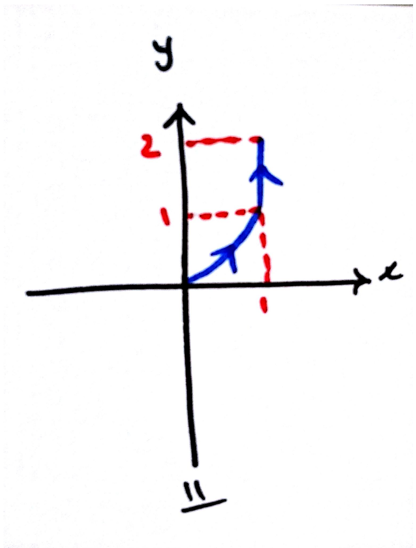
□

تمرین ۱۴. $\int_c ۲xds$ را حساب کنید که در آن $c=c_۱\cup c_۲$ و $c_۱$ سهمی $y=x^{۲}$ از نقطه‌ی $(۰,۰)$ تا نقطه‌ی $(۱,۱)$ است و $c_۲$ خطی عمودی از $(۱,۱)$ تا $(۱,۲)$ است.

پاسخ.

$$c_۱:\overrightarrow{r}_۱(t)=(t,t^{۲})\quad ۰\leqslant t\leqslant ۱$$

$$c_۲:\overrightarrow{r}_۲(t)=(۱,t)\quad ۱\leqslant t\leqslant ۲$$



$$\overrightarrow{r}'_1(t) = (1, 2t) \Rightarrow |\overrightarrow{r}'_1(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\overrightarrow{r}'_2(t) = (0, 1) \Rightarrow |\overrightarrow{r}'_2(t)| = \sqrt{0 + 1} = 1$$

توجه ۱۵. اگر c اجتماعی از خم‌های هموار $c_1, \ldots, c_n$ باشد آنگاه

$$\int_c f(x,y)ds = \int_{c_1} f(x,y)ds + \ldots + \int_{c_2} f(x,y)ds$$

$$\int_{c_1} 2xds = \int_0^1 2t(\sqrt{1+4t^2})dt$$

$$u = 1 + 4t^2 \Rightarrow du = 8tdt \Rightarrow \frac{du}{8} = tdt$$

$$\int_0^1 2t(\sqrt{1+4t^2})dt = 2\int_1^5 \sqrt{u}\frac{du}{8} = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3}}|_1^5 = \ldots$$

$$\int_{c_2} 2xds = \int_1^2 dt = 2 - 1 = 1$$

$$\int_c f(x,y)ds = \int_{c_1} f(x,y)ds + \int_{c_2} f(x,y)ds$$

□

۱.۱.۱ چند انتگرال دیگر وابسته به خم

تا اینجا با انتگرالگیری یک تابع عددی روی یک خم آشنا شدیم. دقت کنید که مقادیر تابع روی خم محاسبه می‌شدند و ds در پایان انتگرال نوشته می‌شد. در زیر چند نوع انتگرال دیگر را معرفی کرده‌ایم.

تعریف ۱۶. برای محاسبه‌ی

$$\int_c f(x,y)dx$$

روی خم

$$c : \overrightarrow{r}(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$$

که درآن

$$\overrightarrow{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_c f(x,y)dx = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt$$

به طور مشابه

$$\int_c f(x,y)dy = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)y'(t)dt$$

برای توابع $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ هم مطالب فوق را می‌توان تعمیم داد.

$$\int_c f(x,y,z)ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt = \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))|\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

$$\int_c f(x,y,z)dx = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t)dt$$

$$\int_c f(x,y,z)dy = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t)dt$$

$$\int_c f(x,y,z)dz = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)dt$$

خلاصه: در درس امروز با انتگرالهای $\int_c fds, \int_c fdx, \int_c fdy$ آشنا شدیم. دقت کنید که

$$\int_c fds = \int_{-c} fds$$

ولی

$$\int_c fdx = -\int_{-c} fdx$$

و

$$\int_c fdy = -\int_{-c} fdy$$

همچنین دیدیم که اگر منحنیِ c دارای یک معادله‌ی پارامتریِ $r(t)$ باشد انتگرالهای بالا را چگونه می‌توان محاسبه کرد.