۱ جلسه‌ی چهلم، شنبه، قضیه‌ی استوکس

یادآوری ۱. گفتیم که اگر $r(u,v)$ یک رویه‌ی پارامتربندی شده باشد و F یک میدان برداری باشد، آنگاه

$$\iint_S F\cdot ndS = \iint_{u,v}(F\cdot r_u\times r_v)dudv$$

همچنین دیدیم که اگر رویه‌ی مورد نظر دارای معادله‌ی صریحِ $z=g(x,y)$ باشد و میدان مورد نظر به صورت $F=(P,Q,R)$ باشد، فرمول بالا به صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید:

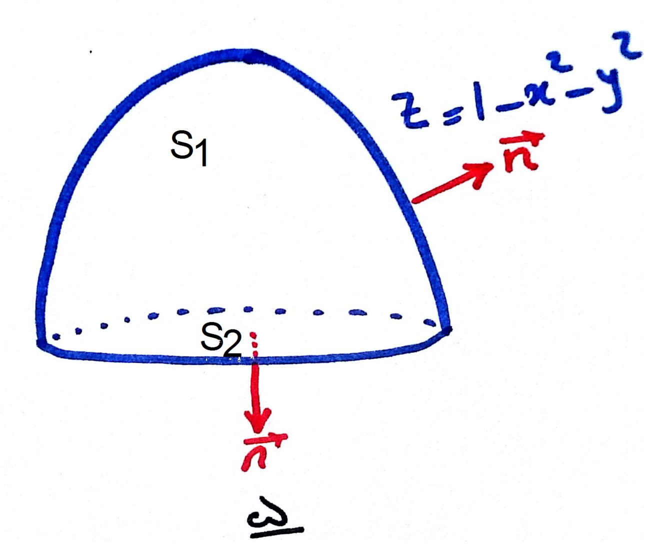
$$\iint_S F\cdot ndS = \iint_{(x,y)}(-Pg_x-Qg_y+R)dxdy$$

همچنین گفتیم که دو نمادِ $\iint F.ndS$, $\iint F.d\overrightarrow{S}$ هر دو برای یک معنی به کار می‌روند.

مثال ۲. انتگرال $\iint_S F\cdot\overrightarrow{dS}$ را بیابید که در آن S مرز ناحیه‌ی صُلبِ E باشد که توسط سهمی‌وارِ $z=۱-x^۲-y^۲$ و صفحه‌ی $z=۰$ احاطه شده است و

$$F(x,y,z)=y\overrightarrow{i}+x\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$$

پاسخ.



$$S_۱: z=۱-x^۲-y^۲$$

$$r_x\times r_y=(۲x,۲y,۱)$$

$$(x,y)\in x^۲+y^۲=۱ \text{ دایره‌ی}$$

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}dS=$$

$$\iint_{(x,y)\in x^۲+y^۲\leqslant ۱}(x,y,z)\cdot(۲x,۲y,۱)dxdy=\iint_{(x,y)\in x^۲+y^۲\leqslant ۱}(۲xy+۲xy+z)dxdy=$$

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۴r^۲\cos\theta\sin\theta+(۱-r^۲)rdrd\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۴r^۳\cos\theta\sin\theta drd\theta+\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱(۱-r^۲)rdrd\theta=$$

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin\theta}_{u} \underbrace{\cos\theta d\theta}_{du} \times \int_0^1 4r^3 dr + 2\pi \int_0^1 (r-r^3)dr =$$

$$(\frac{\sin^2\theta}{2})|_0^{2\pi} \times r^4|_0^1 + 2\pi(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4})|_0^1 = \pi$$

$$S_2 : z = 0$$

$$r_x \times r_y = (0, 0, 1)$$

چون جهت به سمت پایین است پس می‌نویسیم:

$$r_x \times r_y = (0, 0, -1)$$

دقت کنید که جهت پائین را به این علت در نظر گرفته‌ایم که جهتگیری کلی به سمت خارج از جسم احاطه‌شده باشد.

$$\iint_{(x,y)\in x^2+y^2\leqslant 1} (x,y,z)\cdot(0,0,-1)dxdy = \iint_{(x,y)\in x^2+y^2\leqslant 1} (\cancelto{0}{-z})dxdy = 0$$

$$\iint_S F\cdot dS = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \pi + 0 = \pi$$

$\square$

تمرین ۳. مثال بالا را با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس حل کنید (این تمرین را وقتی جلسه‌ی آخر درس تمام شد، حل کنید!)

توجه ۴. فرض کنید E یک میدان الکتریکی باشد. بنا به **قانون گاوس** بار احاطه شده در درون یک رویه‌ی بسته‌ی S برابر است با

$$Q = \epsilon_0 \iint_S E\cdot\overrightarrow{n}dS$$

که در آن

$$\epsilon_0 \simeq 8/8542 \times 10^{-12}$$

ضریب گذردهی خلأ است.

۱.۱ کِرْل

کلمه‌ی کِرْل [1] به معنی پیچش است. فرض کنید $F(x,y,z)$ یک میدان برداری باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\text{curl}F := \underbrace{\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)}_{\nabla} \times F$$

فرمول بالا تنها یک نمایش ساده‌تر برای فرمول دقیقی است که در ادامه درباره‌ی آن گفته‌ایم.
دقت کنید که

$$\text{curl}F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$$

[1] curl

خودْ یک میدان برداری است. اگر F میدان سرعت یک مایع باشد، آنگاه جهت $\mathrm{curl}F$ با استفاده از قانون دست راست تعیین می‌شود و اندازه‌ی $\mathrm{curl}F$ میزان تمایل این مایع را به چرخش حول یک نقطه نشان می‌دهد.
بیائید فرمول دقیق کرل را بنویسیم:

$$F=(P,Q,R)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$$

$$\mathrm{curl}F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\overrightarrow{i}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)+\overrightarrow{j}\Big(-\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial z}\Big)+\overrightarrow{k}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

توجه ۵. به دلایلی که بعداً خواهیم دید (قضیه‌ی استوکس) اگر F یک میدان برداری باشد آنگاه $\mathrm{curl}F(x,y,z)$ تمایل F به چرخش حول (x,y,z) را نشان می‌دهد. (نادقیق).

مثال ۶. فرض کنید $F=xz\overrightarrow{i}+xyz\overrightarrow{j}-y^{۲}\overrightarrow{k}$. آنگاه $\mathrm{curl}F$ را حساب کنید.

پاسخ.

$$\mathrm{curl}F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^{۲} \end{vmatrix}=\overrightarrow{i}(-۲y-xy)+\overrightarrow{j}(x)+\overrightarrow{k}(yz)$$

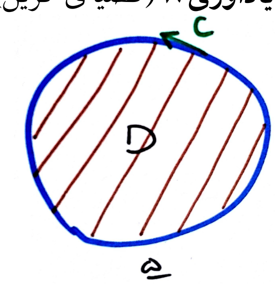
□

توجه ۷. (در صورتی که اجزاء میدانِ برداریِ F دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشند) میدان F پایستار است اگروتنهااگر $\mathrm{curl}F=(۰,۰,۰)$

اثبات. به آسانی می‌توان دید که اگر $F=(g_x,g_y,g_z)$ آنگاه $\nabla\times F=(۰,۰,۰)$ □

حال همه چیز برای بیان قضیه‌ی استوکس مهیا است. قضیه‌ی استوکس در واقع تعمیمی از قضیه‌ی گرین است. بیائید قضیه‌ی گرین را دوباره با هم مرور کنیم.

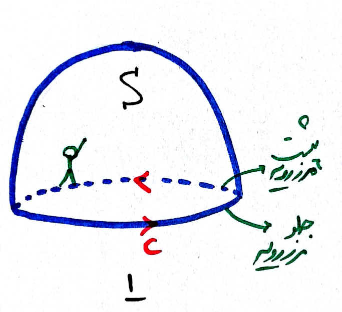
یادآوری ۸ (قضیه‌ی گرین).



$$F(x,y)=\Big(P(x,y),Q(x,y)\Big)$$

$$\oint_c F\cdot\overrightarrow{dr}=\oint_c Pdx+Qdy=\iint_D(Q_x-P_y)dxdy$$

۲.۱ قضیه‌ی استوکس



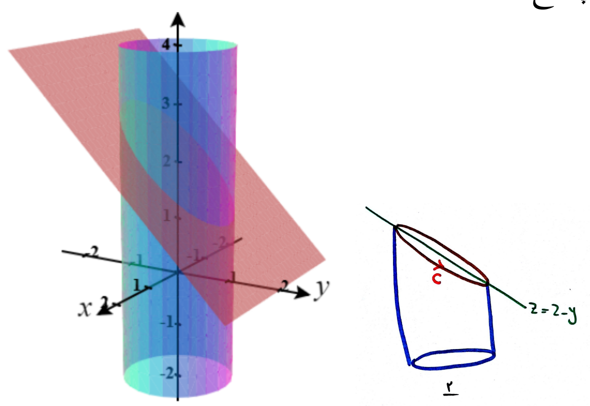
$$\int_c F\cdot dr=\iint_S \mathrm{curl}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

شرایط قضیه: اجزای F مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. S یک رویه‌ی جهتدار به طور قطعه‌ای هموار است (یعنی می‌تواند اجتماعی متناهی از رویه‌های هموار باشد). c منحنی ساده‌ی بسته در جهت مثبت است و در واقع مرز رویه است. جهت مثبا یعنی وقتی روی منحنی حرکت می‌کنیم و سرمان به سمت بردار نرمال رویه است، آنگاه رویه در سمت چپ ما قرار می‌گیرد.

تمرین ۹. نشان دهید که قضیه‌ی گرین از قضیه‌ی استوکس نتیجه می‌شود.

مثال ۱۰. حاصل $\int_c F\cdot dr$ را بیابید که در آن $F=(-y^۲,x,z^۲)$ و c منحنی محل اشتراک صفحه‌ی $y+z=۲$ و استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ است که با نگاه از بالا در جهت عکس عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

پاسخ.



پاسخ اول. بدون قضیه‌ی استوکس:

$$c:\overrightarrow{r}(t):(\cos t,\sin t,۲-\sin t)\quad ۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$$

$$F=(-y^۲,x,z^۲)$$

$$\int_c F\cdot dr=\int_۰^{۲\pi} Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$\int_۰^{۲\pi}(-\sin^۲ t)(-\sin t)dt+\cos t\cos t dt+(۲-\sin t)^۲(-\cos t)dt=\dots$$

پاسخ دوم. با استفاده از قضیه‌ی استوکس:

$$\int_c F\cdot dr=\iint_S \mathrm{curl}F\cdot n dS$$

که S را سطحی در نظر گرفته‌ایم که دور آن محل تماس استوانه با رویه است.

$$\mathrm{curl}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^۲ & x & z^۲ \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(۰) + \overrightarrow{j}(۰) + \overrightarrow{k}(۱ + ۲y)$$

$$S : z = ۲ - y$$

$$n = (۰, ۱, ۱)$$

$$\iint_{(x,y)\in x^۲+y^۲\leqslant ۱} (۰, ۰, ۱ + ۲y) \cdot (۰, ۱, ۱) dxdy = \int_۰^{۲\pi} \int_۰^۱ (۱ + ۲r \sin\theta) r dr d\theta = \dots$$

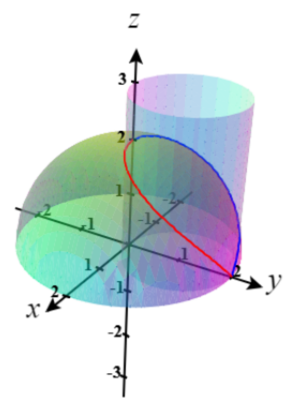
□

سوال ۱۱. فرض کنید رویه‌ی S بخشی از نیم کُره‌ی $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ باشد که توسط استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ محصور شده است.

آ. حاصلِ $\iint_S z dS$ را محاسبه کنید.

ب. اگر $F = (-y, x, z)$ و c مرز رویه‌ی بالا باشد (در جهت مثبت نسبت به قائم کره) آنگاه $\int_c F \cdot dr$ را بیابید.

پاسخ. آ.



$$\iint_S f dS = \iint_S f |r_u \times r_v| du dv$$

در اینجا ضابطه‌ی صریحی به صورت

$$z = g(x, y)$$

داریم. پس انتگرال بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$\iint_{(x,y)} f \sqrt{g_x^۲ + g_y^۲ + ۱} dxdy$$

$$g_x = \frac{-۲x}{۲\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}} \quad g_y = \frac{-۲y}{۲\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}$$

$$dS = \sqrt{g_x^۲ + g_y^۲ + ۱} dxdy = \sqrt{\frac{۴x^۲ + ۴y^۲}{۴(۴ - x^۲ - y^۲)} + ۱} dxdy =$$

$$\sqrt{\frac{x^۲+y^۲+۴-x^۲-y^۲}{(۴-x^۲-y^۲)}}dxdy = \sqrt{\frac{۴}{۴-x^۲-y^۲}}dxdy$$

$$\iint_{(x,y)} zdS = \iint \sqrt{۴-x^۲-y^۲}\sqrt{\frac{۴}{۴-x^۲-y^۲}}dxdy = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۲\sin\theta} ۲rdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} ۴\sin^۲\theta d\theta =$$

$$۴\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}d\theta = \dots$$

ب.

$$\int F\cdot dr = \iint_S \mathrm{curl}F\cdot\overrightarrow{n}dS$$

$$\mathrm{curl}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(۰)+\overrightarrow{j}(۰)+\overrightarrow{k}(۱+۱) = ۲\overrightarrow{k}$$

$$\iint \mathrm{curl}F\cdot ndS = \iint_S(-g_x,-g_y,۱)\cdot(۰,۰,۲)dS = \iint_S ۲dS = \dots$$

انتگرال بالا را در قسمت قبلی سوال حساب کرده‌ایم.

□