۱ جلسه‌ی بیستم، دوشنبه، حل چند تمرین

تمرین ۱. فرض کنید $f(x,y) = y^2 - x^2$. آنگاه ∇f را رسم کنید.

پاسخ.

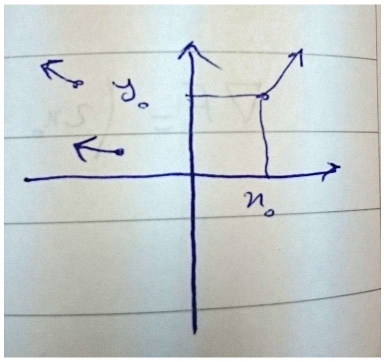
$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

$$\nabla f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

$$(x_0, y_0) \mapsto (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$$

$$\nabla(x_0, y_0) = (-2x_0, 2y_0)$$

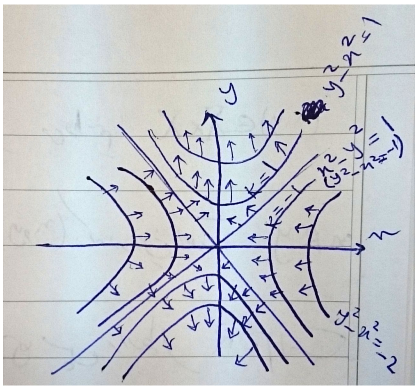
$$(x_0, y_0) \mapsto (-2x_0, 2y_0)$$



توجه ۲. $\nabla f(x_0, y_0)$ بر منحنی تراز $f(x,y) = k$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) عمود است (در صورتی که $f(x_0, y_0) = k$).
همچنین $\nabla f(x_0, y_0)$ در جهت افزایش تابع است.

توجه ۳. (در حالت سه‌متغیره) اگر $\omega = f(x,y,z)$ آنگاه $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ بر هر رویه‌ی تراز $F(x,y,z) = k$ که از (x_0, y_0, z_0) بگذرد در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) عمود است.

بنا به توجه‌های بالا، شکل مورد نظرِ سوال، به صورت زیر است:



$\square$

تمرین ۴. در کدام نقطه روی بیضی‌وار $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ صفحه‌ی مماس با صفحه‌ی $x + 2y + z = 1$ موازی است؟

پاسخ. بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر بیضی‌وار $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) برابر است با

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 4z_0)$$

هدف ۵. یافتن نقاطی مانند (x_0, y_0, z_0) روی بیضی‌وار مورد نظر به طوری که $(1, 2, 1) || (2x_0, 2y_0, 4z_0)$.

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \\ \frac{2x_0}{1} = \frac{2y_0}{2} = 4z_0 \end{cases}$$

حل معادله‌ی بالا و ادامه‌ی پاسخ سوال به عهده‌ی شما! □

تمرین ۶. نشان دهید که بیضی‌وار $3x^2+2y^2+z^2 = 9$ و کُره‌ی $x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+24=0$ در نقطه‌ی $(1,1,2)$ بر هم مماسند.

پاسخ.

$$F(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$$

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$$

کافی است نشان دهیم که در نقطه‌ی یادشده، $\nabla F(x_0,y_0,z_0) || \nabla G(x_0,y_0,z_0)$

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) = (6x_0, 4y_0, 2z_0)$$

$$\nabla G(x_0,y_0,z_0) = (2x_0-8, 2y_0-6, 2z_0-8)$$

$$\frac{6x_0}{2x_0-8} = \frac{4y_0}{2y_0-6} = \frac{2z_0}{2z_0-8} \quad (*)$$

کافی است بررسی کنیم که نقطه‌ی $(1,1,2)$ در $(*)$ صدق می‌کند. (بررسی کنید). □

تمرین ۷. نشان دهید که صفحات مماس بر مخروطِ $x^2+y^2=z^2$ همه از مبدأ مختصات می‌گذرند.

پاسخ. معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) دارای معادله‌ی زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0) = 0$$

$$2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) - 2z_0(z-z_0) = 0$$

کافی است نشان دهیم نقطه‌ی $(0,0,0)$ در معادله‌ی صفحه‌ی مماس صدق می‌کند (ادامه با شما!) □

تمرین ۸. نشان دهید که هر خط عمود بر کُره‌ی $x^2+y^2+z^2=r^2$ از مبدأ مختصات می‌گذرد.

پاسخ. معادله‌ی خط نرمال بر کره در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) به صورت زیر است.

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{x-x_0}{2x_0} = \frac{y-y_0}{2y_0} = \frac{z-z_0}{z_0}$$

حال نشان می‌دهیم که همه‌ی خطهای به معادله‌ی بالا از مبدأ می‌گذرند (یعنی مبدأ در معادله‌ی این خطها صدق می‌کند).

$$(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} \quad \checkmark$$

□

تمرین ۹. صفحه‌ی $y+z=۳$ استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۵$ را در یک بیضی قطع می‌کند. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر این بیضی را در صفحه‌ی یاد شده در نقطه‌ی $(۱,۲,۱)$ بنویسید.

پاسخ. راه حل اول:

توجه ۱۰. خط مورد نظر هم روی صفحه‌ی مماس بر استوانه در نقطه‌ی $(۱,۲,۱)$ واقع است و هم روی صفحه‌ی $y+z=۳$.

پس بردار خط مورد نظر بر بردارهای نرمال دو صفحه یاد شده عمود است. بردارِ نرمال صفحه‌ی اول برابر است با $(۰,۱,۱)$ و بردار نرمال صفحه‌ی مماس برابر است با

$$\nabla F(x_۰,y_۰,z_۰)|_{(۱,۲,۱)}=(۲x_۰,y_۰,۰)|_{(۱,۲,۱)}=(۲,۴,۰)$$

پس بردار خط مورد نظر برابر است با

$$(۰,۱,۱)\times(۲,۴,۰)=(a,b,c) \quad \text{(محاسبه به عهده‌ی شما)}$$

و معادله‌ی خط به صورت زیر است:

$$\frac{x-۱}{a}=\frac{y-۲}{b}=\frac{z-۱}{c}$$

پاسخ دوم. بیضی مورد نظر را به صورت زیر پارامتربندی می‌کنیم:

$$\overrightarrow{r}(t)=\left(\sqrt{۵}\cos t,\sqrt{۵}\sin t,۳-\sqrt{۵}\sin t\right)$$

نقطه‌ی $(۱,۲,۱)$ به ازای

$$t=\cos^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۵}})$$

حاصل می‌شود. جهت خط مماس برابر است با جهت بردار

$$\overrightarrow{r}'(t)=\dots$$

□

تمرین ۱۱. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر منحنیِ محل اشتراک سهمی‌وارِ $z=x^۲+y^۲$ و بیضی‌وارِ $۴x^۲+y^۲+z^۲=۹$ را در نقطه‌ی $(-۱,۱,۲)$ بنویسید.

پاسخ. خط مورد نظر هم بر صفحه‌ی مماس بر سهمی‌وار و هم بر صفحه‌ی مماس بر بیضی‌وار واقع است.

$$\overrightarrow{n_۱}=(-۲,۲,-۱) \quad \text{نرمال سهمی‌وار}$$

$$\overrightarrow{n_۲}=(-۸,۲,۴) \quad \text{نرمال بیضی‌وار}$$

بردار خط مورد نظر برابر است با

$$\overrightarrow{n_۱}\times\overrightarrow{n_۲}=(a,b,c) \quad \text{محاسبه به عهده‌ی شما}$$

معادله‌ی خط مورد نظر به صورت زیر است:

$$\frac{x+۱}{a}=\frac{y-۱}{b}=\frac{z-۲}{c}$$

(ادامه با شما!) □

مثال ۱۲. نشان دهید که تابع زیر در مبدأ پیوسته نیست.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{(x+y)^3} & x+y\neq 0\\ 0 & x+y=0\end{cases}$$

پاسخ. اگر تابع در مبدأ پیوسته باشد باید از هر مسیری که (x,y) به مبدأ میل می‌کند تابع به $f(0,0)$ میل کند. روی مسیر $(0,y)$ داریم:

$$f(0,y)=\frac{-1}{y^2}$$

$$\lim_{\begin{cases}(x,y)\to(0,0)\\ x=0\end{cases}} f(x,y)=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{-1}{y^2}=-\infty$$

پس تابع مورد نظر پیوسته نیست. □