۱ نیم جلسه‌ی سی و نهم، چهارشنبه

در جلسه‌ی قبل با **انتگرالگیری از توابع عددی** روی رویه‌ها آشنا شدیم:

$$\iint_S f dS = \iint_{u,v} f(\overrightarrow{r}(u,v))|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| dudv$$

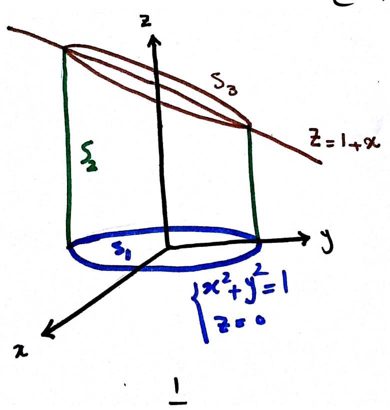
مثال ۱. $\iint_S zdS$ را بیابید که در آن S شامل سه رویه زیر است:

۱. از بغل، استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$

۲. از زیر، دیسک محدود به دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ در صفحه‌ی $z = ۰$

۳. از بالا، صفحه‌ی $z = ۱ + x$

پاسخ.



پارامتربندی $S_۲$:

$$r(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) \quad ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi, ۰ \leqslant z \leqslant ۱ + x = ۱ + \cos\theta$$

$$r_\theta(\theta, z) = (-\sin\theta, \cos\theta, ۰)$$

$$r_z(\theta, z) = (۰, ۰, ۱)$$

$$\overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(\cos\theta) + \overrightarrow{j}(\sin\theta) + ۰\overrightarrow{k}$$

$$|\overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_z| = ۱$$

$$\iint_{S_۲} fdS = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۱+\cos\theta} zdzd\theta = \dots$$

حال به سطح $S_۱$ می‌پردازیم. این سطح دارای معادله‌ی $z = ۰$ است. گفتیم که اگر سطحی با معادله‌ی $z = g(x,y)$ داده شده باشد، آنگاه $dS = \sqrt{g_x^۲ + g_y^۲ + ۱}dudv$.

$$\iint_{S_۱} fdS = \iint_{u,v} z \underbrace{|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|}_{\sqrt{۱+g_x^۲+g_y^۲}} dudv \iint_{S_۱} ۰ \times ۱dA = ۰$$

دقت کنید که در سطحِ S_1 مقدار z برابر با صفر است.

حال به سطح S_3 می‌پردازیم. این سطح هم دارای معادله‌ای به صورت $z = g(x,y)$ است.

$$S_3 : (x, y, \overbrace{1 + x}^{g(x,y)})$$

$$z = g(x,y) \to |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\iint_{S_3} z dS = \iint (1+x)\sqrt{2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+\cos\theta)\sqrt{2} r dr d\theta = \dots$$

□

یادآوری ۲. دوباره نحوه‌ی پارامتربندی رویه‌های به فرمِ $z = g(x,y)$ را یادآوری می‌کنم:

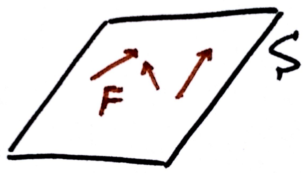
$$S : z = g(x,y)$$

$$S \text{ پارامتربندی رویه‌ی } : \overrightarrow{r}(x,y) = \big(x, y, g(x,y)\big)$$

$$|\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y| = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}$$

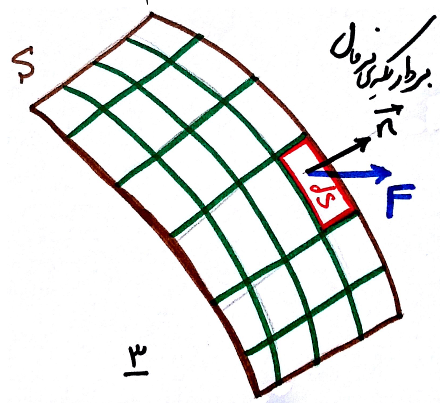
$$dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dA$$

۱.۱ انتگرالگیری از توابع برداری روی رویه‌ها



۲

فرض کنید S یک رویه‌ی جهتدار باشد. یعنی فرض کنید که این رویه، دارای پشت و روی مشخص باشد. برای مثال یک توپ پلاستیکی که از وسط دو نیم شده باشد. فرض کنید $F(x,y,z) = (P, Q, R)$ یک میدان برداری باشد.



۳

هدف ۳. محاسبه‌ی شار میدان F گذرنده از رویه‌ی S.

دقت کنید که شار گذرنده از واحد سطح به صورت زیر محاسبه می‌شود (منظور از واحد سطح، سحطی به مساحت ۱ است):

$$F \cdot \overrightarrow{n}$$

در بالا منظور از $\overrightarrow{n}$ بردار یکه‌ی عمود است. پس شار گذرنده از سطح کوچکِ dS برابر است با

$$(F \cdot \overrightarrow{n})dS.$$

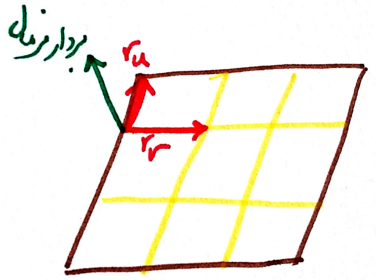
پس برای محاسبه شار گذرنده از سطحِ S باید تمام این شارهای کوچک را با هم جمع کنیم. تعریف می‌کنیم:

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S (F \cdot \overrightarrow{n}) \overset{\text{مقدار عددی}}{\overset{\uparrow}{dS}}$$

فرض کنید رویه‌ی S با معادله‌ی زیر داده شده باشد.

$$r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$\text{یکه}\ \overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v}{|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|}$$



۴

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{(u,v)} \overrightarrow{F} \cdot \frac{\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v}{|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|} |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| dudv = \iint_{(u,v)} F \cdot (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v) dudv$$

توجه ۴. برای انتگرالگیری از توابع برداری روی یک رویه، نخست یک جهت مشخص را برای رویه انتخاب می‌کنیم و سپس نسبت به آن جهت، شار گذرنده از رویه را حساب می‌کنیم. منظور، جهتی است که روی رویه به صورت پیوسته عوض شود و به صورت ناگهانی تغییر نکند. وقتی از فرمولِ $n = r_u \times r_v$ استفاده می‌کنیم، این فرمول، به صورت خود به خود یک جهت مشخص را برای رویه به دست می‌دهد، زیرا فرض کرده‌ایم که توابع r_u, r_v پیوسته‌اند.

مثال ۵. شار میدان $F(x,y,z) = z\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$ را از سطح کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ بیابید.

پاسخ.

$$\overrightarrow{r}(\theta,\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

$$r_\theta \times r_\phi = (\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi)$$

$$\iint_S (z,y,x) \cdot (\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi) d\phi d\theta =$$

$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}(\cos\phi, \sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta)\cdot(\sin^{۲}\phi\cos\theta, \sin^{۲}\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi)d\phi d\theta =$$

$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}(\sin^{۲}\phi\cos\theta\cos\phi) + (\sin^{۳}\phi\sin^{۲}\theta) + (\sin^{۲}\phi\cos\theta\cos\phi)d\phi d\theta =$$

$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin^{۲}\phi\cos\theta\cos\phi d\phi d\theta = \cancelto{۰}{\int_{۰}^{۲\pi}\cos\theta d\theta} \times \int_{۰}^{\pi}\underbrace{\sin^{۲}\phi}_{u^{۲}}\underbrace{\cos\phi d\phi}_{du}$$

محاسبه‌ی انتگرالهای سوال بالا به عهده‌ی شما.

توجه ۶. برای ادامه‌ی حل سوال بالا، از درس ریاضی ۱ نحوه‌ی محاسبه‌ی دو انتگرال را یادآوری می‌کنم

$$\int \sin^{۳}\phi d\phi = \int \sin^{۲}\phi\sin\phi d\phi = \int(۱-\cos^{۲}\phi)\sin\phi = \int -(۱-u^{۲})du = \dots$$

$$\int \sin^{۲} x dx = \int \frac{(۱-\cos(۲x)}{۲})dx = \dots$$

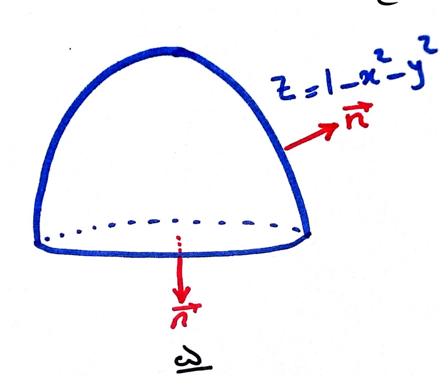
$$\int \cos^{۲} x dx = \int \frac{(۱+\cos(۲x)}{۲})dx = \dots$$

□

مثال ۷. انتگرال $\iint_S F\cdot\overrightarrow{dS}$ را بیابید که در آن S مرز ناحیه‌ی صلب E باشد که توسط سهمی‌وار $z = ۱ - x^{۲} - y^{۲}$ و صفحه‌ی $z = ۰$ احاطه شده است.

$$F(x,y,z) = y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

پاسخ.



توجه ۸. فرض کنید $F = (P,Q,R)$. اگر $S : z = g(x,y)$ آنگاه

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{(x,y)}(-Pg_x - Qg_y + R)dxdy$$

$$r_u \times r_v = (-g_x, -g_y, ۱)$$

□

در این جلسه با انتگرال زیر آشنا شدیم:

$$\iint_S F.ndS = \iint F.\overrightarrow{dS}$$

به هر دو نمادگذاری بالا دقت داشته باشید. در طی این چند جلسه‌ی آخر با انتگرال‌های زیر آشنا شده‌ایم. تعریف هر یک را برای خود مرور کنید:

$$\int_c fdr \quad \int_c F.dr$$

$$\iint_S fdS \quad \iint_S F.ndS$$

نامهای این انتگرالها بدین صورت هستند: تابع عددی روی خم، تابع برداری روی خم، تابع عددی روی رویه، تابع برداری روی رویه.