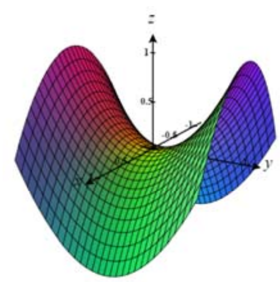
۵ جلسه‌ی پنجم، دوشنبه

پیش از ادامه‌ی دادن بحث توابع، دو نکته را درباره‌ی مباحث گذشته ذکر می‌کنیم.

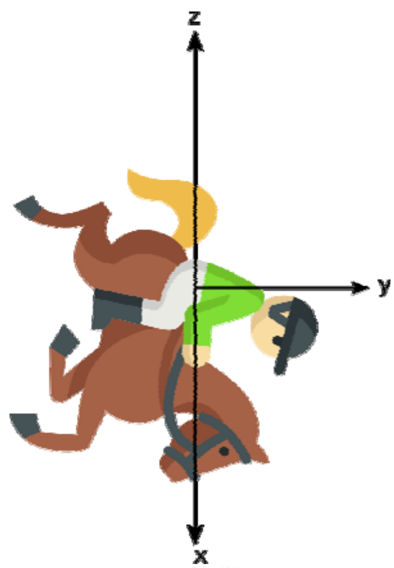
توجه ۵۶. برای رسم معادله‌ی $z = y^2 - x^2$ به نکته‌های زیر توجه کنید که

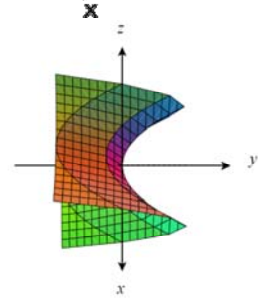
- سر سوارکار در راستای محور z باشد،
- جهت حرکت اسب در راستای محور y باشد.



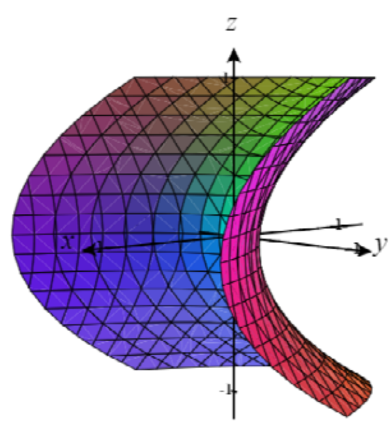
مثال ۵۷. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید:

۱. $y = x^2 - z^2$





۲. $x = y^{2} - z^{2}$



چند مثال نیز از بحث دوران حل می‌کنیم:

مثال ۵۸. معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $y = \sqrt{x}$ حول محور x را بنویسید، نوع رویه را مشخص کنید و آن را رسم کنید.

پاسخ. اگر داشته باشیم:

$$f(x,y) = y - \sqrt{x} = ۰$$

آنگاه از دوران $f(x,y)$ حول محور x معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

$$f(x, \pm\sqrt{y^۲ + z^۲}) = \pm\sqrt{y^۲ + z^۲} - \sqrt{x} = ۰$$

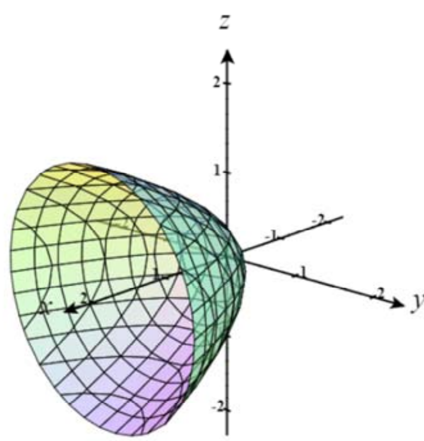
با توجه به معادله‌ی اولیه به دلیل آنکه $y > ۰$ است، مقادیر مثبت $\sqrt{y^۲ + z^۲}$ مدنظر ماست. در نتیجه داریم:

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^۲ + z^۲}$$

اگر دو طرف معادله را به توان ۲ برسانیم داریم:

$$x = y^۲ + z^۲$$

شکل حاصل سهمی‌وار است.



□

۶ ادامه‌ی مبحث توابع

مثال ۵۹. دامنه‌ی توابع زیر را مشخص و رسم کنید:

۱. $f(x,y) = x\ln(y^۲ - x)$

پاسخ.

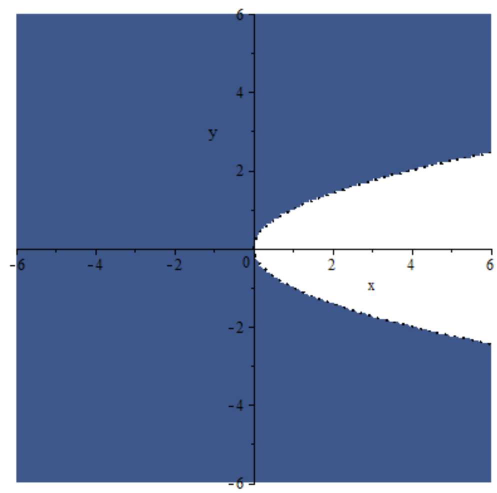
توجه ۶۰. معادله‌ی بالا را به شکل دیگری می‌توان نوشت:

$$z = x\ln(y^۲ - x)$$

در این معادله x و y متغیرهای مستقل هستند و z متغیر وابسته به متغیرهای x و y است.

بنا به دامنه‌ی تابع $\ln$ باید داشته باشیم:

$$y^۲ - x > ۰$$



برد تابع نیز $\mathbf{R}$ است. □

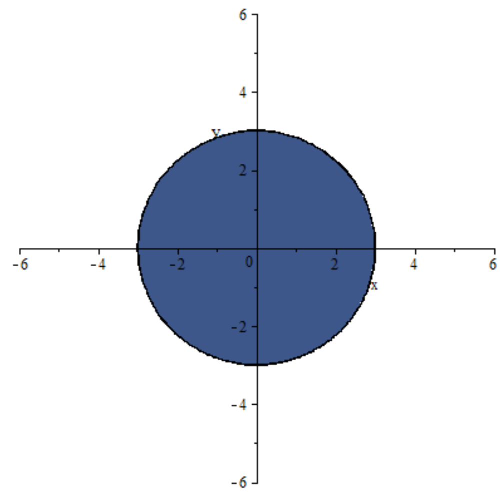
۲. $g(x,y) = \sqrt{۹ - x^۲ - y^۲}$

پاسخ.

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^۲ | ۹ - x^۲ - y^۲ \geqslant ۰\}$$

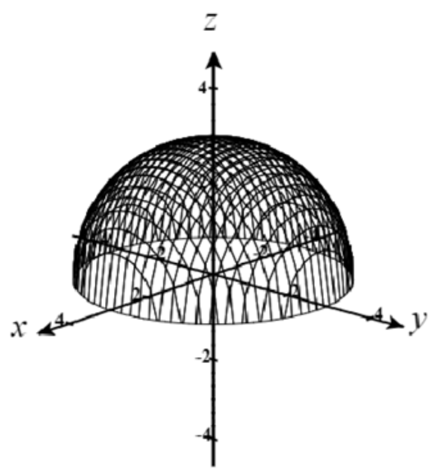
پس داریم:

$$D = \{(x,y) | x^۲ + y^۲ \leqslant ۹\}$$



$$Range(g) = [۰, ۳]$$

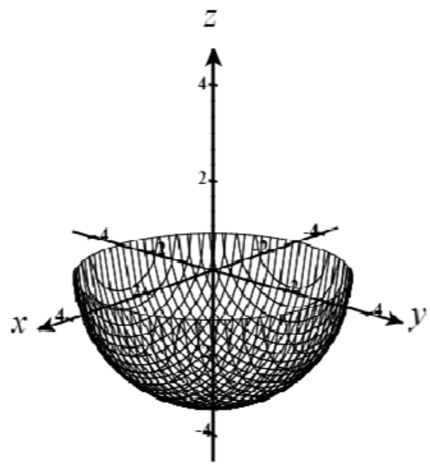
اگر بخواهیم تابع را رسم کنیم شکل آن به صورت زیر است:



توجه کنید که از آنجا که $z > ۰$ تنها بخش بالائی کره باید رسم شود (اگر داشته باشیم

$$z = -\sqrt{۹ - x^۲ - y^۲}$$

آنگاه شکل رویه به صورت زیر است:)



□

تعریف ۶۱. فرض کنید $f : \mathbf{R}^{۲} \to \mathbf{R}$ یک تابع باشد. مجموعه‌ی زیر را گراف تابع f می‌نامیم.

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^{۳} | (x, y) \in Dom(f), z = f(x, y)\}$$

مثال ۶۲. گراف تابع زیر را رسم کنید.

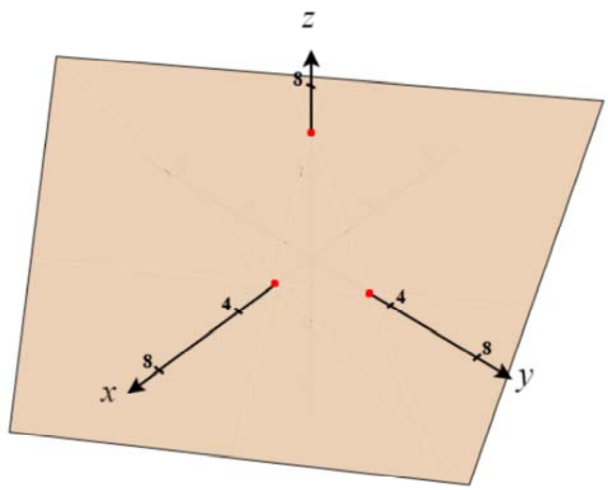
$$f(x, y) = ۶ - ۳x - ۲y$$

پاسخ.

یادآوری ۶۳. معادله‌ی $ax + by + cz = d$ معادله‌ی یک صفحه با بردار نرمالِ (a, b, c) است.

کافیست سه نقطه پیدا کنیم که در معادله‌ی $z = ۶ - ۳x - ۲y$ صدق کنند.

$$(۰, ۰, ۶) \quad (۰, ۳, ۰) \quad (۲, ۰, ۰)$$



$\square$

مثال ۶۴. دامنه و برد تابع زیر را مشخص کنید و گراف آن را رسم کنید:

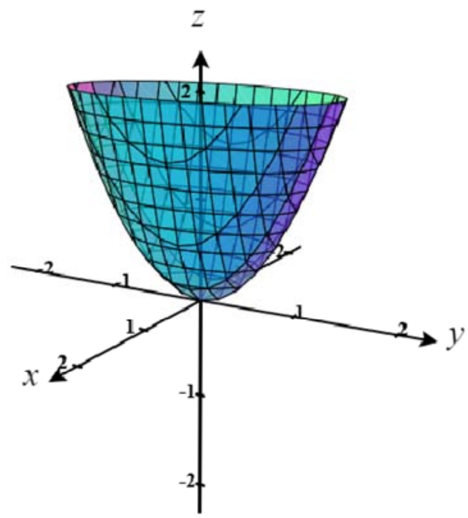
$$h(x,y) = ۴x^۲ + y^۲$$

پاسخ.

$$D(h) = \mathbf{R}^۲$$

$$range(h) = \mathbf{R}^{\geqslant ۰}$$

$$z = ۴x^۲ + y^۲ = (۲x)^۲ + y^۲$$



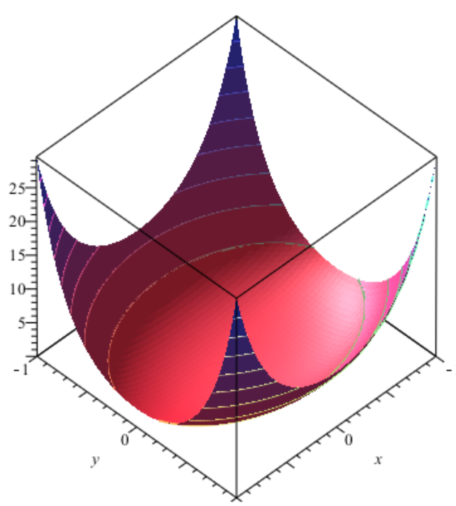
□

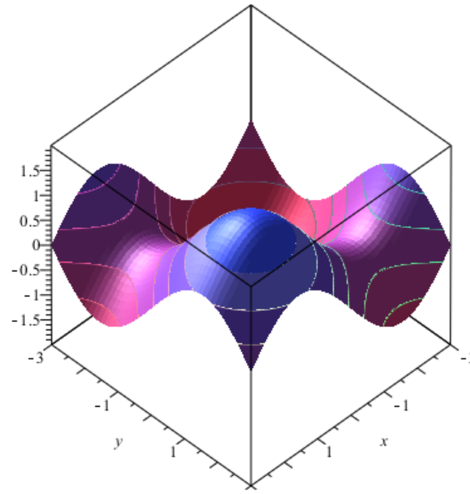
مثال ۶۵. حدس بزنید کدام شکل زیر مربوط به کدام معادله است:

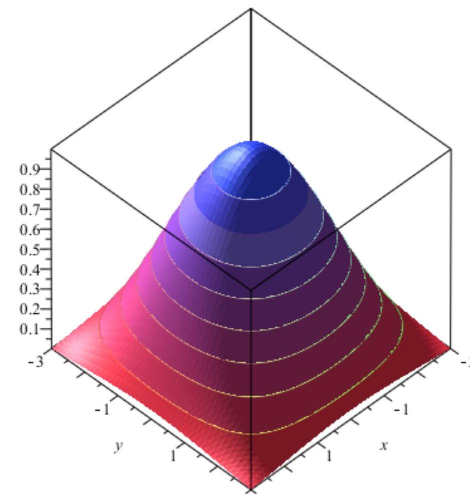
۱. $f(x,y) = (x^۲ + ۳y^۲)e^{-x^۲-y^۲}$

۲. $f(x,y) = \sin x + \sin y$

۳. $f(x,y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$

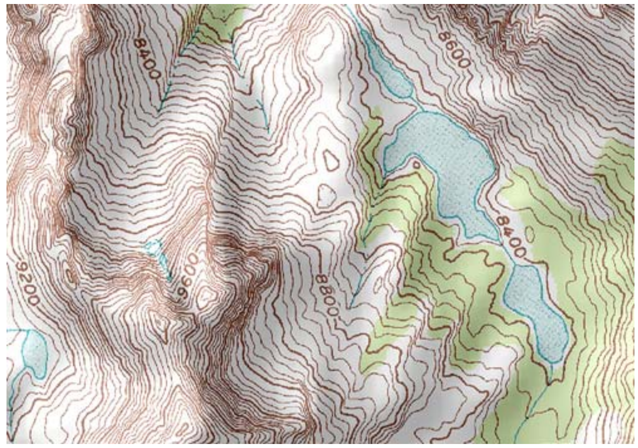






۷ منحنی‌های تراز

احتمالاً درباره‌ی نقشه‌های توپوگرافیک شنیده‌اید. در این نقشه‌ها، مشخص می‌کنند که عوارض روی زمین در ارتفاعهای مشخص به چه صورتند. در زیر یک نمونه از چنین نقشه‌هائی را گذاشته‌ایم:



فرض کنید $z = f(x,y)$ یک تابع باشد. به هر منحنیِ $f(x,y) = k$ در صفحه‌ی xy یک **منحنی تراز** برای تابع f گفته می‌شود. مجموعه‌ی منحنی‌های تراز یک تابع را به صورت همزمان در فضای دوبعدیِ xy رسم می‌کنند.

توجه ۶۶. دو مفهوم متفاوت داریم:

۱. منحنی‌های تراز (که در بالا تعریفشان کردیم) [5]

۲. منحنی‌های هم‌مسیر [6] (منحنی‌هائی فضائی هستند که از اشتراکگیری صفحاتِ $z = k$ با نمودار تابعِ $z = f(x,y)$ ایجاد می‌شوند. تفاوت این منحنی‌ها با منحنی‌های تراز این است که این منحنی‌ها را در فضای $\mathbb{R}^3$ رسم می‌کنند).

مثال ۶۷. منحنی‌های تراز تابع $z = y^2 - x^2$ را به ازای $z = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ رسم کنید.

پاسخ.

$$z = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$$

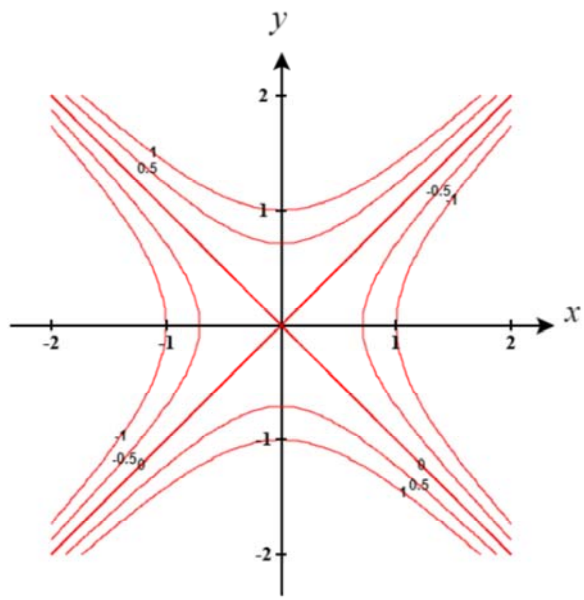
$$z = -1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

$$z = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (y-x)(y+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$

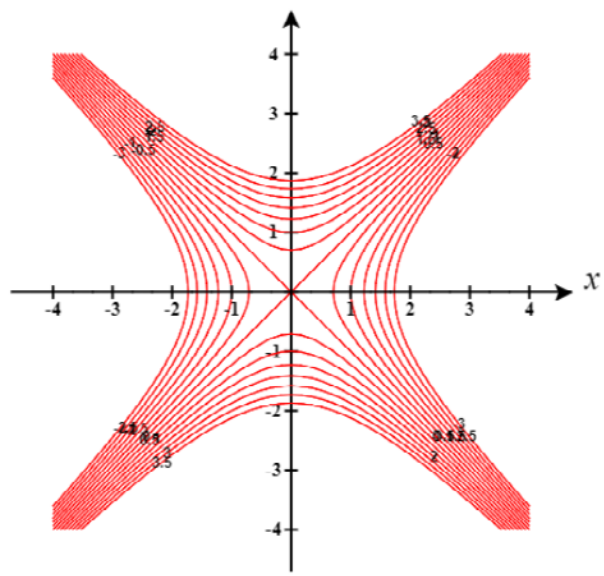
[5] level curves
[6] contour maps

$$z = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{y^۲}{\frac{۱}{۲}} - \frac{x^۲}{\frac{۱}{۲}} = ۱$$

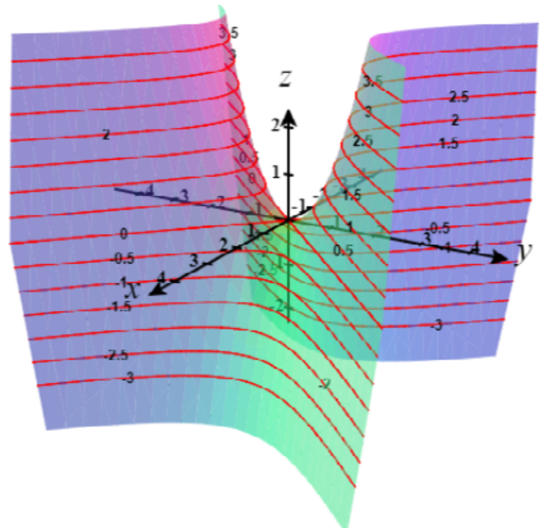
$$z = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۱}{۲}} - \frac{y^۲}{\frac{۱}{۲}} = ۱$$



نقشه‌ی کاملتر منحنی‌های تراز تابع بالا به صورت زیر است:



در زیر منحنی‌های هم‌مسیر با تابع بالا را رسم کرده‌ایم:



□

مثال ۶۸. منحنی‌های تراز تابع زیر را رسم کنید.

$$z = \frac{-۳y}{x^۲ + y^۲ + ۱}$$

پاسخ.

$$z = ۰ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow \text{محور x}$$

$$z = ۱ \Rightarrow x^۲ + (y + \frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۵}{۴}$$

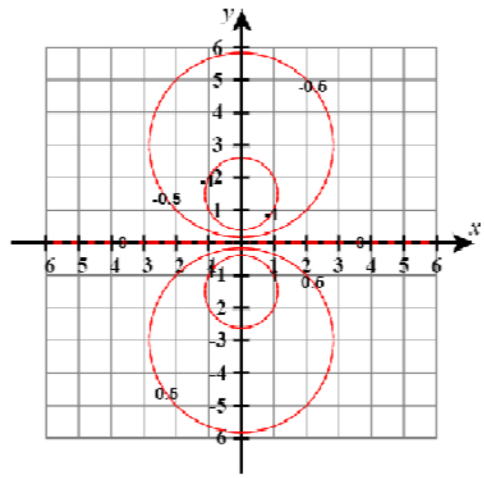
$$z = -۱ \Rightarrow x^۲ + (y - \frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۵}{۴}$$

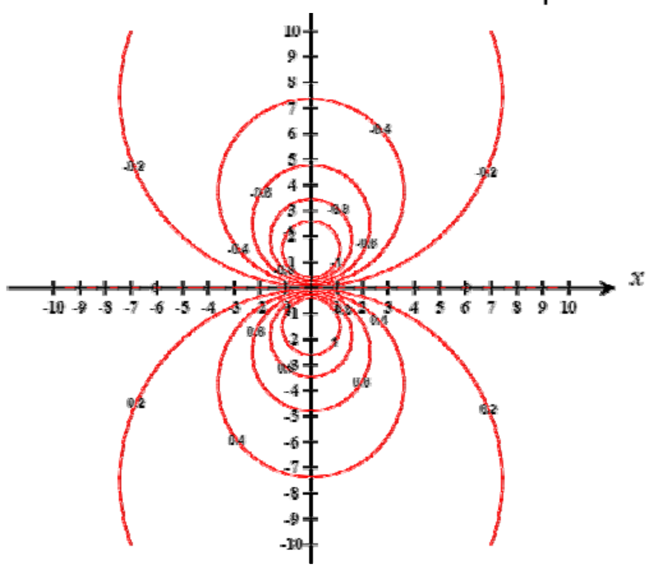
$$z = ۲ \Rightarrow x^۲ + (y + \frac{۳}{۴})^۲ - \frac{۹}{۱۶} + ۱ = ۰$$

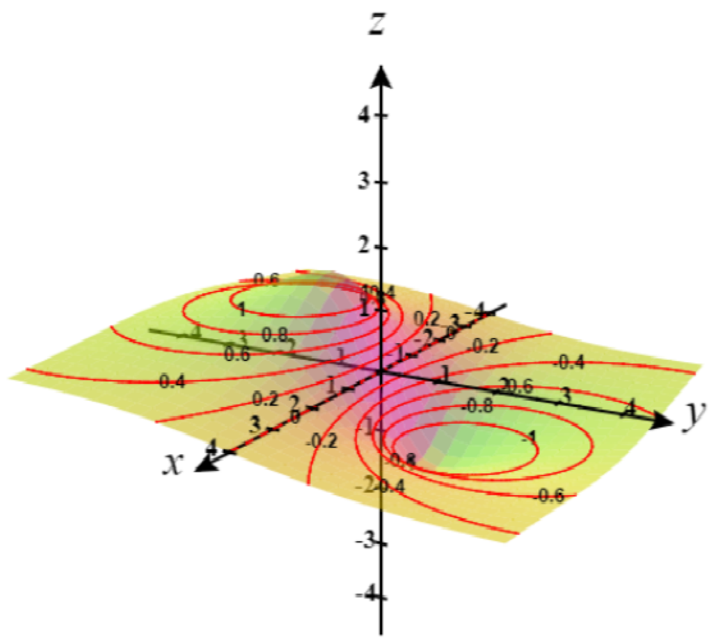
معادله‌ی بالا جوابی ندارد. پس در $z = ۲$ شکلی نداریم.

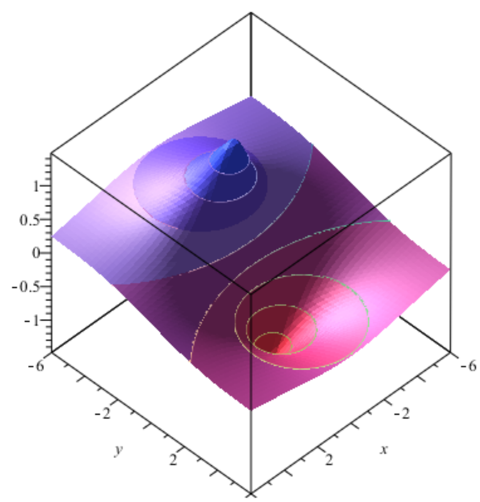
$$z = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۱ + ۶y = ۰ \Rightarrow x^۲ + (y + ۳)^۲ = ۸$$

$$z = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۱ + ۶y = ۰ \Rightarrow x^۲ + (y - ۳)^۲ = ۸$$


y
x
-0.6
-0.5
0.6
0.5


x





□

مثال ۶۹. منحنی‌های تراز تابع زیر را رسم کنید.

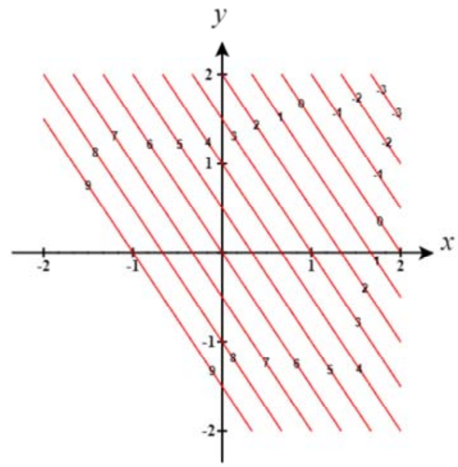
$$f(x, y) = ۶ - ۳x - ۲y$$

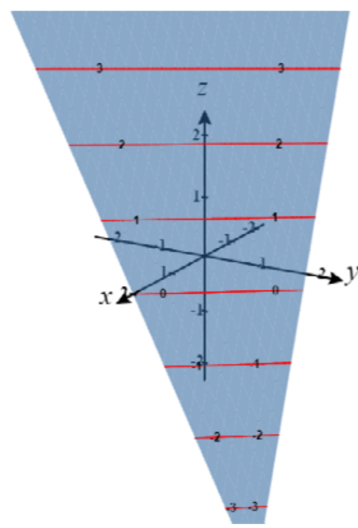
پاسخ.

$$z = ۱ \Rightarrow ۳x + ۲y = ۵$$

$$z = ۲ \Rightarrow ۳x + ۲y = ۴$$

$$z = ۳ \Rightarrow ۳x + ۲y = ۳$$





□