۱۸ نیم جلسه‌ی هجدهم، چهارشنبه (۹۶/۱۲/۱۶)[۱۲]

۱.۱۸ حل چند تمرین

تمرین ۱۷۷. فرض کنید $w = xy + yz + zx$ و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ و $z = r\theta$. آنگاه $\frac{\partial w}{\partial r}$ را در $r = ۲$ و $\theta = \frac{\pi}{۲}$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = (y+z)\cos\theta + (x+z)\sin\theta + (x+y)\theta$$

در نقطه‌ی $(r,\theta) = (۲, \frac{\pi}{۲})$ داریم

$$\frac{\partial w}{\partial r}(۲, \frac{\pi}{۲}) = (۲\sin\frac{\pi}{۲} + \pi)\cancelto{۰}{\cos(\frac{\pi}{۲})} + (۲\cancelto{۰}{\cos(\frac{\pi}{۲})} + \pi)\sin(\frac{\pi}{۲}) + (۲\cancelto{۰}{\cos(\frac{\pi}{۲})} + ۲\sin(\frac{\pi}{۲}))\frac{\pi}{۲}$$
$$= ۲\pi\sin(\frac{\pi}{۲}) = ۲\pi$$

□

تمرین ۱۷۸. گیریم که ضابطه‌ی ضمنی زیر میان x, y برقرار باشد.

$$y\cos x = x^۲ + y^۲$$

حاصل $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

پاسخ.

$$F(x,y) = y\cos x - x^۲ - y^۲ = ۰$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y\sin x - ۲x \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \cos x - ۲y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sin x + ۲x}{\cos x - ۲y}$$

□

تمرین ۱۷۹. فرض کنید که مقادیر x, y در رابطه‌ی زیر صدق کنند:

$$\tan^{-۱}(x^۲y) = x + xy^۲$$

حاصل $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه کنید.

[۱۲] از خانم شیرجزی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

توجه ۱۸۰.

$$۱)\quad F(x,y,z)=۰\Rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\times\cancelto{۱}{\frac{\partial x}{\partial x}}+\frac{\partial F}{\partial y}\times\cancelto{۰}{\frac{\partial y}{\partial x}}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=۰\Rightarrow\qquad\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$۲)\quad F(x,y)=۰\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

تمرین ۱۸۱. فرض کنید z تابعی از x و y باشد و $y^z+x\ln(y)=z^۲$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$F(x,y,z)=yz+x\ln y-z^۲=۰$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=y-۲z\quad,\quad\frac{\partial F}{\partial x}=\ln y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\ln y}{y-۲z}$$

□

تمرین ۱۸۲. فرض کنید
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$
نشان دهید که $\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)\neq\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰)$

پاسخ. در نقطه‌ی $(x,y)=(۰,۰)$ مشتق سوئی را باید با استفاده از تعریف محاسبه کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\lim_{h\to۰}\frac{f(۰+h,۰)-f(۰,۰)}{h}=۰$$

حال در نقاطِ $(x,y)\neq(۰,۰)$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(y(x^۲-y^۲)+۲x^۲y)(x^۲+y^۲)-۲x^۲y(x^۲-y^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

پس

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\frac{(y(x^۲-y^۲)+۲x^۲y)(x^۲+y^۲)-۲x^۲y(x^۲-y^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

پس:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(۰,۰)=\lim_{h\to۰}\frac{f_x(۰,۰+h)-f_x(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to۰}\frac{h(-h^۲)h^۲}{h^۵}=-۱$$

□

ادامه‌ی حل سوال به عهده‌ی شما.

۲.۱۸ ادامه‌ی درس (خم‌ها)

گفتیم که هر تابع برداری به صورت

$$\overrightarrow{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۳$$

یک خم را در فضا مشخص می‌کند.

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

مثال ۱۸۳. منحنی محل تلاقی استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $y + z = ۲$ را پارامتربندی کنید و معادله‌ی برداری آن را نیز بنویسید.

پاسخ. می‌خواهیم معادله ای مانند $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ برای خم به وجود آمده از تلاقی دو رویه بنویسیم.تصویر خم روی صفحه‌ی xy همان سطح مقطع استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ در صفحه‌ی xy است. پس می‌توان نوشت:

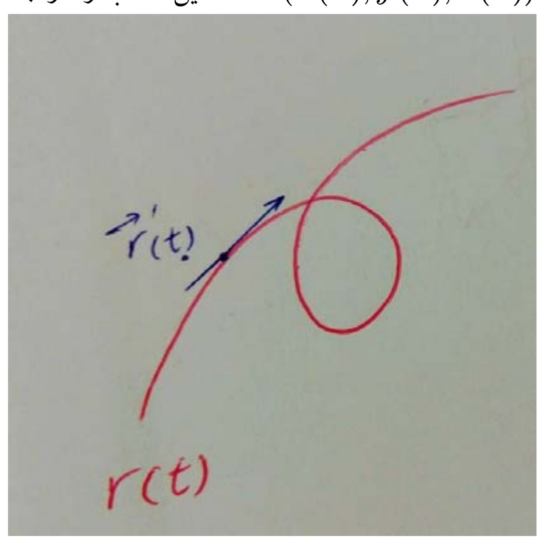
$$\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sin t, ۲ - \sin t)$$

□

مثال ۱۸۴. معادله‌ی $\frac{x^۲}{۲} + \frac{y^۲}{۴} = ۱$ را پارامتر بندی کنید.

$$\overrightarrow{r}(t) = (\sqrt{۲} \cos t, ۲ \sin t)$$

توجه ۱۸۵. اگر $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ آنگاه بردار مماس بر منحنی $r(t)$ در زمان $t_۰$ به صورت $\overrightarrow{r'}(t_۰) = (x'(t_۰), y'(t_۰), z'(t_۰))$ است. این مطلب را در جلسات آینده دوباره توضیح خواهیم داد.



۱۹ جلسه‌ی نوزدهم شنبه (۹۶/۱۲/۱۹) [۱۳]

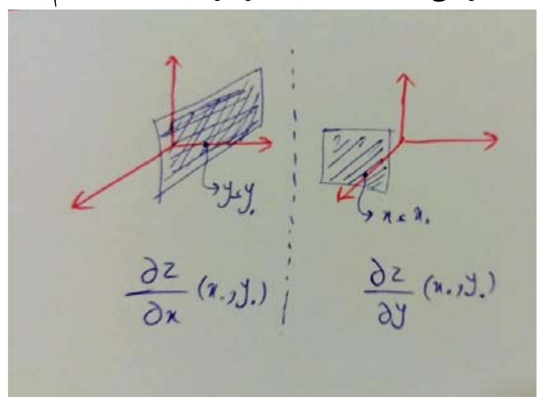
۱.۱۹ مرور درس های گذشته

گفتیم که منظور از یک **تابع دو متغیره**، تابعی مانند $z = f(x,y)$ است از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$.

مشتقات ضمنی:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

در صورتی که حدهای بالا موجود باشند. مفاهیم بالا را به صورت زیر تعبیر هندسی کردیم.



وجود $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ تضمین کننده‌ی دیفرانسیل پذیری و حتی پیوستگی نیست.

دیفرانسیل کلی تابع:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

گفتیم که دیفرانسیل کلی، از لحاظ هندسی، تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد. (با رسم تصویری، فرمول بالا را برای خود تعبیر کنید).

گرادیان:

$$\nabla f = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})$$

مشتق سوئی: نیز دیدیم که مشتق سوئی تابع در جهت بردارِ u به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D_u f = \overrightarrow{\nabla f}.\overrightarrow{u}$$

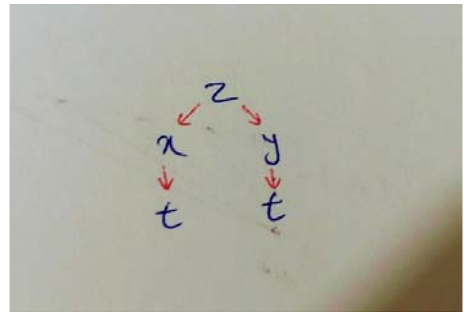
مشتق سوئي در جهت بردار گرادیان حداکثر می شود و حداکثر میزان تغییرات تابع در آن جهت برابر است با $|\nabla f|$ توجه کنید که اگر $z = f(h_1(x,y), h_2(x,y))$ آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial h_1}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(h_1(x,y))$$

در واقع مشتق ضمنی بر حسب x یعنی مشتق ضمنی بر حسب مؤلفه‌ی اولِ تابع.

مشتق تابع مرکب:

[۱۳] تایپ شده توسط خانم شیرجزی



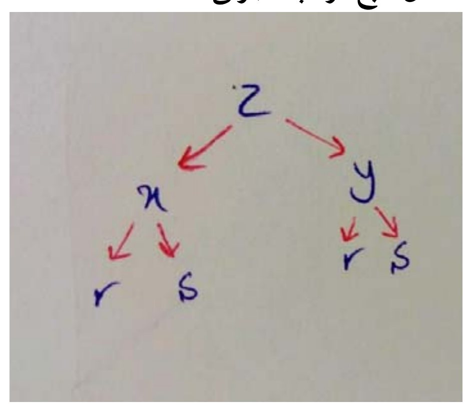
$$z = f(x, y)$$

$$y = h(t) \quad , \quad x = g(t)$$

$$z = f(g(t), h(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

مشتق تابع مرکب (جزئی):



$$z = f(x, y)$$

$$x = g_1(r, t) \quad y = g_2(r, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

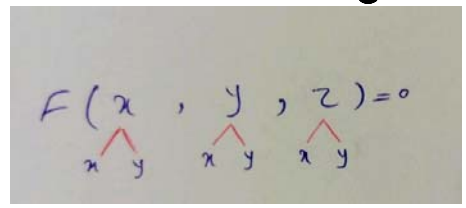
مشتق تابع ضمنی(دو متغیره):

اگر $z = F(x, y) = 0$ آنگاه:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

مشتق تابع ضمنی(سه متغیره):



اگر $w = F(x, y, z) = ۰$ آنگاه

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cancelto{۱}{\frac{\partial x}{\partial x}} + \frac{\partial F}{\partial y}\cancelto{۰}{\frac{\partial y}{\partial x}} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = ۰$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

تمرین ۱۸۶. اگر $\cos(xyz) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۱$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(xz\sin(xyz) + ۲y)}{-xy\sin(xyz) - ۲z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(zy\sin(xyz) + ۲x)}{-xy\sin(xyz) - ۲z}$$

□

تمرین ۱۸۷. فرض کنید که دما در هر نقطه توسط رابطه‌ی زیر داده شده باشد، در نقطه‌ی $(۱, ۱, -۲)$ در کدام جهت دما سریعتر افزایش می یابد؟

$$T(x, y, z) = \frac{۸۰}{۱ + x^۲ + y^۲ + z^۲}$$

پاسخ. هر تابعی در هر نقطه در جهت بردار گرادیان حداکثر نرخ افزایش را داراست.

$$\nabla T = \left(\frac{-۲x \times ۸۰}{(۱ + x^۲ + y^۲ + z^۲)^۲}, \frac{-۲y \times ۸۰}{(۱ + x^۲ + y^۲ + z^۲)^۲}, \frac{-۲z \times ۸۰}{(۱ + x^۲ + y^۲ + z^۲)^۲}\right)$$

$$\nabla T(۱, ۱, -۲) = \left(\frac{-۱۶۰}{۷^۲}, \frac{-۱۶۰}{۷^۲}, \frac{۳۲۰}{۷^۲}\right)$$

□

تمرین ۱۸۸. نرخ تغییرات تابع را در جهت بردار بالا محاسبه کنید. ($||\nabla T||$?)

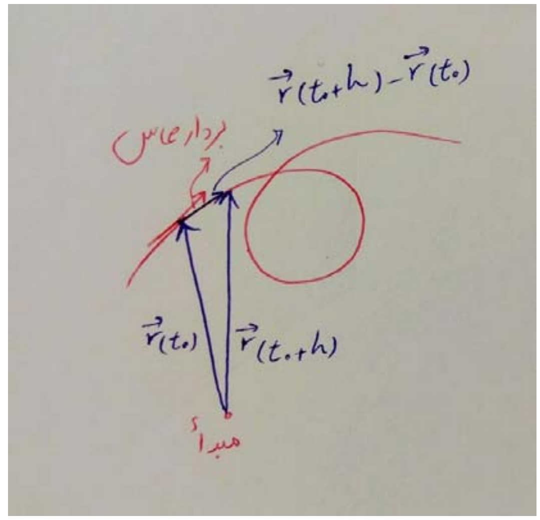
۲.۱۹ ادامه‌ی درس

فرض کنید

$$\overrightarrow{r}(t) : (f(t), g(t), h(t))$$

معادله‌ی برداری یک خم باشد. دقت کنید که در رسم خم‌ها، مؤلفه‌ی t را رسم نمی‌کنیم. حال در $t = t_۰$ تعریف می‌کنیم:

$$\overrightarrow{r'}(t_۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{\overrightarrow{r}(t_۰ + h) - \overrightarrow{r}(t_۰)}{h} = (f'(t), g'(t), h'(t))$$



همان طور که در تصویر بالا مشاهده می‌کنید، $r'(t_.)$ در واقع جهت بردار مماس بر خم را در نقطه‌ی $P = \overrightarrow{r}(t_.)$ مشخص می‌کند.

تمرین ۱۸۹. منحنی های زیر روی یک رویه‌ی S واقعند و از نقطه‌ی $(۲, ۱, ۳)$ واقع بر آن روی می گذرند. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه را در آن نقطه بنویسید.

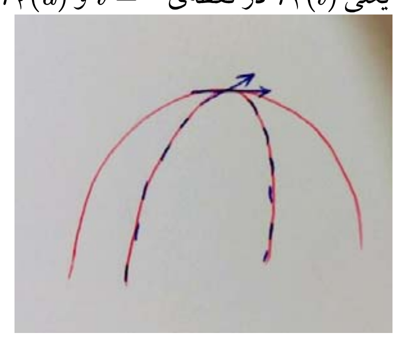
$$\overrightarrow{r_۱}(t) = (۲ + ۳t, ۱ + t^۲, ۳ - ۴t + t^۳)$$

$$\overrightarrow{r_۲}(u) = (۱ + u^۲, ۲u^۳ - ۱, ۲u + ۱)$$

پاسخ. نخست توجه کنید که

$$\overrightarrow{r_۱}(۰) = (۲, ۱, ۳) \quad , \quad \overrightarrow{r_۲}(۱) = (۲, ۱, ۳)$$

یعنی $\overrightarrow{r_۱}(t)$ در نقطه‌ی $t = ۰$ و $\overrightarrow{r_۲}(u)$ در نقطه‌ی $u = ۱$ به نقطه‌ی $(۲, ۱, ۳)$ می‌رسند:



$$\overrightarrow{r'_۱}(t) = (۳, ۲t, -۴ + ۲t) \quad \Longrightarrow \overrightarrow{r'_۱}(۰) = (۳, ۰, -۴)$$
$$\overrightarrow{r'_۲}(u) = (۲u, ۶u^۲, ۲) \Longrightarrow \overrightarrow{r'_۲}(۱) = (۲, ۶, ۲)$$

دو بردارِ $\overrightarrow{r'_۱}(۰), \overrightarrow{r'_۲}(۱)$ هر دو روی صفحه‌ی مماس مورد نظر واقعند. پس بردار نرمال صفحه‌ی مورد نظر از حاصلضرب

خارجی آنهاست:

$$\overrightarrow{n} = (۳, ۰, -۴) \times (۲, ۶, ۲) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۰ & -۴ \\ ۲ & ۶ & ۲ \end{vmatrix} = ۲۴\overrightarrow{i} - ۱۴\overrightarrow{j} + ۱۸\overrightarrow{k} = (۲۴, -۱۴, ۱۸)$$

پس معادله‌ی صفحه مورد نظر به صورت زیر است:

$$۲۴x - ۱۴y + ۱۸z = ۲۴ \times ۲ - ۱۴ \times ۱ + ۱۸ \times ۳ = ۸۸$$

که به صورت زیر ساده‌تر می‌شود:

$$\Longrightarrow ۲۴x - ۱۴y + ۱۸z - ۸۸ = ۰$$

□

۳.۱۹ صفحات مماس بر رویه های تراز

در درسهای گذشته دیدیم که اگر $z = f(x, y)$ یک تابع دومتغیره باشد (که یک رویه را مشخص می‌کند) آنگاه معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی $(x_۰, y_۰, z_۰)$ بر رویه‌ی یادشده به صورت زیر است:

$$z - z_۰ = f_x(x - x_۰) + f_y(y - y_۰)$$

در اینجا می‌خواهیم معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر یک رویه را پیدا کنیم که توسط یک معادله‌ی ضمنی به صورتِ $F(x, y, z) = ۰$ داده شده باشد.

فرض کنید $w = F(x, y, z)$ تابعی سه متغیره باشد. همان طور که در درسهای پیشین دیدیم، هر معادله به صورت $F(x, y, z) = k$ یک **رویه‌ی تراز** از این تابع را بدست می دهد. پس فرض کنید $F(x, y, z) = k$ یک رویه تراز باشد و $\overrightarrow{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ یک خم واقع بر این رویه باشد. از آنجا که $\overrightarrow{r}(t)$ روی رویه‌ی $F(x, y, z) = k$ واقع شده است، داریم:

$$F(f(t), g(t), h(t)) = k$$

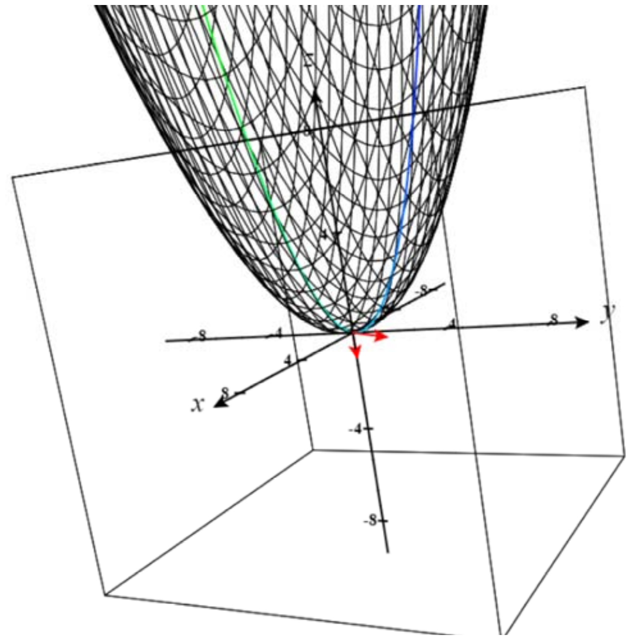
از عبارت بالا بر حسب t مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial F}{\partial x} f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} g'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} h'(t) = ۰$$

پس در هر نقطه‌ی $P = r(t_۰)$ داریم:

$$\overrightarrow{\nabla F}(p).\overrightarrow{r'}(t_۰) = ۰ \Rightarrow \overrightarrow{\nabla F}(p) \perp \overrightarrow{r'}(t_۰)$$

بنابراین برای هر منحنی $\overrightarrow{r}(t)$ بردار $\nabla F(p)$ بر $\overrightarrow{r}(t)$ در نقطه ی p عمود است. پس $\nabla F(p)$ بر صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $F(x, y, z) = k$ در نقطه‌ی p عمود است.



نتیجه ۱۹۰. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $F(x,y,z)=k$ در نقطه‌ی $p=(x.,y.,z.)$ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p)(x-x.)+\frac{\partial F}{\partial y}(p)(y-y.)+\frac{\partial F}{\partial z}(p)(z-z.)=۰$$

بطور خاص اگر $z=f(x,y)$ آنگاه می توان نوشت:

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=۰$$

پس معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$-f_x(x-x.)-f_y(y-y.)+۱(z-z.)=۰$$

یعنی:

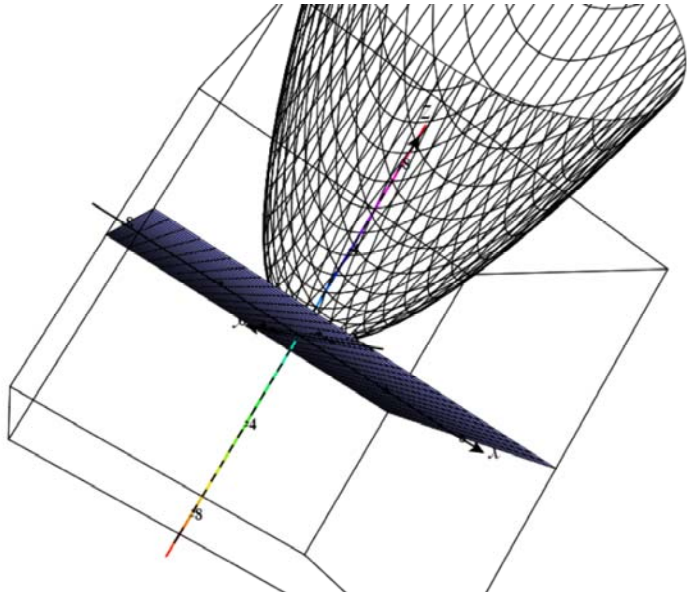
$$z-z.=f_x(x-x.)+f_y(y-y.)$$

و این بر آنچه قبلاً ثابت کرده‌ایم نیز مطابقت دارد.

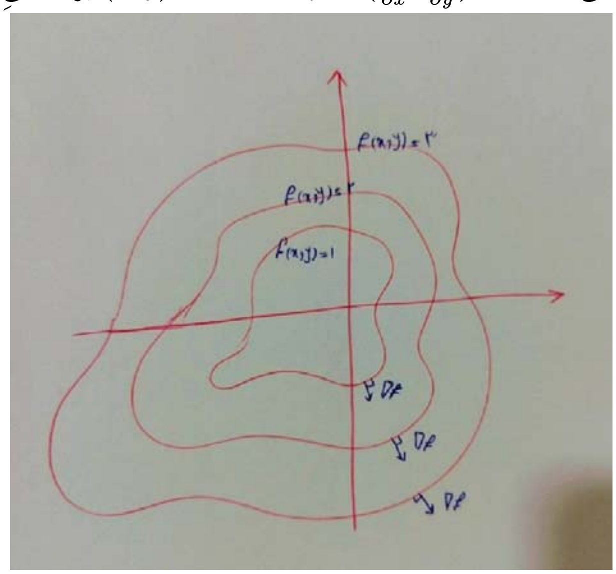
تعریف ۱۹۱. به خطی که در جهت عمود بر یک رویه از نقطه‌ی p بگذرد، **خط نرمال** بر آن رویه گفته می‌شود.

پس اگر $F(x,y,z)=۰$ معادله‌ی رویه‌ی مورد نظر باشد، معادله‌ی خط نرمال آن در نقطه‌ی p به صورت زیر است:

$$\frac{x-x.}{\frac{\partial F}{\partial x}(p)}=\frac{y-y.}{\frac{\partial F}{\partial y}(p)}=\frac{z-z.}{\frac{\partial F}{\partial z}(p)}$$



توجه کنید که به طور مشابه اگر $F(x,y) = k$ یک معادله‌ی دو متغیره باشد (که یک منحنی تراز از یک رویه را نشان می‌دهد) آنگاه $\nabla f = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$ در نقطه‌ی (x,y) بر منحنیِ $F(x,y) = k$ عمود است:



از طرفی گفتیم که ∇ در هر نقطه، جهتی را نشان می‌دهد که تابع در آن جهت سریعتر افزایش می‌یابد. در واقع اگر نقشه‌ی توپوگرافیک یک کوه را داشته باشیم (فرض کنیم به صورت بالا)، آنگاه با استفاده از بردار گرادیان می‌توانیم پرشیبترین مسیر میان دو ارتفاع مشخص را پیدا کنیم. این مسیر بر تمام منحنی‌های $f(x,y) = k$ عمود است.

مثال ۱۹۲. معادلات صفحه‌ی مماس و خط نرمال را بر بیضی‌وار $\frac{x^۲}{۴} + y^۲ + \frac{z^۲}{۹} = ۳$ در نقطه‌ی $(۲, ۱, -۳)$ بنویسید.

پاسخ. صفحه‌ی مماس:

$$F_x(x - x.) = F_y(y - y.) + F_z(z - z.) = ۰$$

$$\frac{x.}{۲}(x - x.) + ۲y.(y - y.) + \frac{۲z.}{۹} = ۰$$

$$(x - ۲) + ۲(y - ۱) - \frac{۶}{۹}(z + ۳) = ۰$$

خط نرمال:

$$\frac{x-۲}{۱}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z+۳}{-\frac{۶}{۹}}$$

$\square$