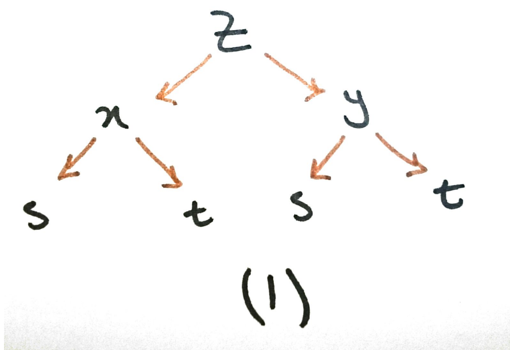
۱ نیم جلسه‌ی پانزدهم، چهارشنبه

۱.۱ ادامه‌ی قاعده‌ی زنجیره‌ای

برای به خاطر سپردن نحوه‌ی به کارگیری قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان از درخت زیر استفاده کرد:



مثلاً برای محاسبه‌ی مشتق جزئی بر حسبِ s باید تمام مسیرها از بالای درخت به سمت s طی شوند:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال ۱. فرض کنید $z = f(x, y)$ مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته داشته باشد و

$$x = r^{۲} + s^{۲}$$

$$y = ۲rs$$

آنگاه $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial^{۲} z}{\partial r^{۲}}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

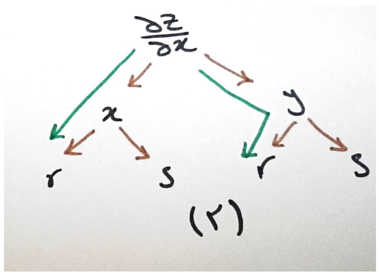
$$\frac{\partial z}{\partial r} = (\frac{\partial z}{\partial x})(۲r) + (\frac{\partial z}{\partial y})(۲s)$$

$$\frac{\partial^{۲} z}{\partial r^{۲}} = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial x}(۲r) + \frac{\partial z}{\partial y}(۲s)) =$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial x}۲r)}_{A} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial y}۲s)}_{B}$$

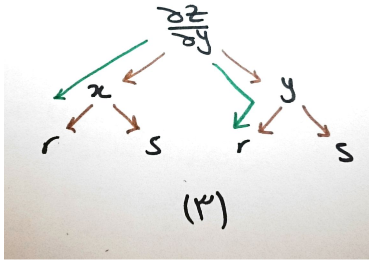
$$A = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial x})۲r + ۲\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) \times \frac{\partial y}{\partial r} + ۲\frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}} \times (۲r) + \frac{\partial^{۲} z}{\partial y \partial x} \times (۲s) + ۲\frac{\partial z}{\partial x}$$



$$B = ۲s \times \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial y}) = ۲s \times \left(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) \times \frac{\partial y}{\partial r}\right) =$$

$$۲s \times \left(\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} \times ۲r + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} \times ۲s\right)$$



□

مفهوم دیفرانسیل‌پذیری را می‌توان به توابع سه متغیره نیز تعمیم داد و قواعد دیفرانسیل‌پذیری و قاعده‌ی زنجیره‌ای برای توابع سه متغیره نیز درستند.

$$\omega = f(x, y, z) \quad \omega : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}$$

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz$$

مثال ۲. $\frac{\partial u}{\partial s}$ را محاسبه کنید.

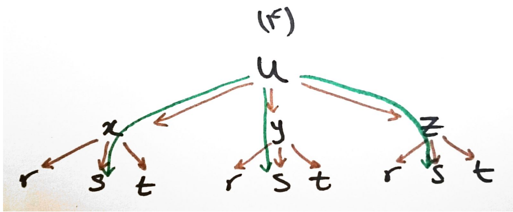
$$u = x^۴ y + y^۲ z^۳$$

$$x = rse^t$$

$$y = rs^۲ e^t$$

$$z = r^۲ s \sin t$$

پاسخ.



$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \dots$$

□

۲.۱ مشتق‌گیری ضمنی

فرض کنید که مقادیر y بر حسب x در طی یک معادله‌ی $F(x, y) = ۰$ به طور ضمنی داده شده باشد. چنین معادله‌ای را می‌توان معادله‌ی یک منحنی تراز برای رویه‌ی $z = f(x, y)$ فرض کرد.

توجه ۳. $z = f(x, y)$ رویه است ولی $f(x, y) = k$ که k یک عدد ثابت است، منحنی تراز رویه در ارتفاع k است.

فرض کنید که بدانیم که y تابعی از x است. پس داریم:

$$F\Big(x, \overset{=y}{f(x)}\Big) = ۰$$

داریم

$$dF = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}dx = -\frac{\partial F}{\partial y}dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{-F_x}{F_y}$$

قضیه ۴ (تابع ضمنی). فرض کنید F در یک دیسک شامل (a,b) تعریف شده باشد و $F(a,b)=0$ و $F_y(a,b)\neq 0$ و F_x و F_y روی آن دیسک پیوسته باشند. آنگاه از معادله‌ی $F(x,y)=0$ می‌توان y را به عنوان تابعی از x استخراج کرد و مشتق این تابع از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

تمرین ۵. فرض کنید که معادله‌ی

$$F(x,y,z)=0$$

مقادیرِ z را به طور ضمنی بر حسبِ x,y به دست دهد. آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

قضیه ۶ (قضیه‌ی تابع ضمنی برای توابع سه متغیره). فرض کنید که تابع سه‌متغیره‌ی F در یک کره‌ی شامل نقطه‌ی (a,b,c) تعریف شده باشد و F_x, F_y, F_z هر سه در این کره پیوسته باشند و $F(a,b,c)=0$ و $F_z(a,b,c)\neq 0$. آنگاه رابطه‌ی $F(x,y,z)=0$ متغیرِ z را به صورت تابعی دیفرانسیل‌پذیر از x,y در یک همسایگی نقطه‌ی (a,b,c) به دست می‌دهد و برای این تابع داریم:

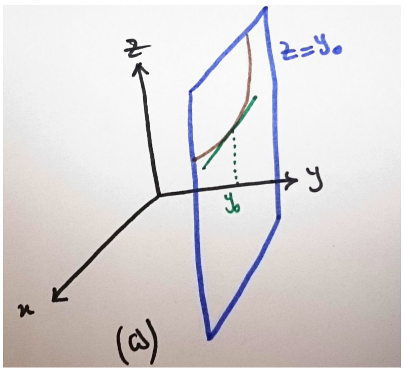
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

۳.۱ مشتقات سوئی

گفتیم که برای محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه‌ی $y=y_0$ کافی است از تابعِ زیر بر حسب x مشتق بگیریم:

$$z = f(x, y_0)$$

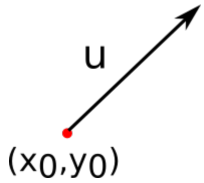
از لحاظ هندسی نیز عبارت بالا را به صورت زیر تحلیل کردیم:



مشتق مورد نظر از عبارت زیر به دست می‌آمد:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(x_0+h, y_0)}^{=f\left((x_0,y_0)+h(1,0)\right)} - f(x_0,y_0)}{h}$$

بنا به عبارتی که در آکولاد بالائی نوشته‌ایم، برای محاسبه‌ی مشتق جزئی بر حسب x از نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ در جهتِ بردارِ $(۱, ۰)$ به اندازه‌ی h دور شده‌ایم و تغییرات تابع را اندازه‌گیری کرده‌ایم:



در واقع از یک تابع داده شده می‌توان در جهت هر بردار دلخواهی مشتق گرفت:

فرض کنید $\vec{u} = (a, b)$ یک **بردار یکه** باشد. مشتق سویی تابع $f(x, y)$ در نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ در جهت بردار $\vec{u}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(x_۰ + ha, y_۰ + hb) - f(x_۰, y_۰)}{h} = D_{\vec{u}} f(x_۰, y_۰)$$

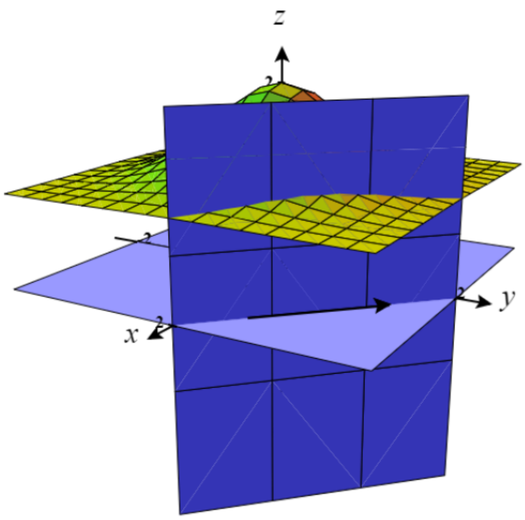
به طور خاص اگر $\vec{u} = (۱, ۰)$ آنگاه

$$D_{\vec{u}} f(x_۰, y_۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x_۰ + h, y_۰) - f(x_۰, y_۰)}{h} = f_x(x_۰, y_۰)$$

مشابهاً اگر $\vec{u} = (۰, ۱)$ آنگاه

$$D_{\vec{u}} f(x_۰, y_۰) = f_y(x_۰, y_۰)$$

مشتق سوئی در جهت بردارِ u را به صورت زیر تعبیر هندسی می‌کنیم: صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ در جهت بردار u و موازی محور z را رسم می‌کنیم و شیب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در اشتراک این صفحه با رویه را حساب می‌کنیم:



با استفاده از مشتقات سوئی می‌توانیم به بررسی این نکته بپردازیم که تابع ما در جهتهای مختلف، با چه نرخی تغییر می‌کند و در کدام جهت، سریعتر تغییر می‌کند.