۲۱ جلسه‌ی بیست و یکم، شنبه

یادآوری ۲۰۵. بردار نرمال (عمود بر) رویه‌ی به معادله‌ی $f(x,y,z)=0$ در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) به صورت زیر است

$$\mathrm{n}=(f_x(x_0,y_0,z_0),f_y(x_0,y_0,z_0),f_z(x_0,y_0,z_0))$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) به صورت زیر است:

$$f_x(x_0,y_0,z_0)\big(x-x_0\big)+f_y(x_0,y_0,z_0)\big(y-y_0\big)+f_z(x_0,y_0,z_0)\big(z-z_0\big)=0$$

به طور خاص بردار نرمال رویه‌ی $z=f(x,y)$ در نقطه‌ی (x_0,y_0) به صورت زیر است

$$(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$$

دقت کنید که مؤلفه‌ی آخر مثبت است و این بدان جهت است که بردار گرادیان در جهت افزایش تابع است. نیز معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی یادشده به صورت زیر است:

$$f_x(x_0,y_0)\big(x-x_0\big)+f_y(x_0,y_0)\big(y-y_0\big)=z-z_0$$

گفتیم که اگر $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد، چند جمله‌ای تیلور درجه‌ی اول آن (تقریب خطی آن) حول نقطه‌ی $(x,y)=(a,b)$ به صورت زیر است:

$$f(x,y)\approx P_1(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)\big(x-a\big)+f_y(a,b)\big(y-b\big)$$

معادله‌ی بالا در واقع از فرمول دیفرانسیل کلی به دست آمده است:

$$\Delta z\approx dz=f_xdx+f_ydy$$

چندجمله‌ی تیلور درجه‌ی اول را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$P_1(x,y)=f(a,b)+\Big(f_x(a,b),f_y(a,b)\Big)\begin{bmatrix}x-a\\y-b\end{bmatrix}$$

اگر قرار دهیم:

$$f'(a,b)=\Big(f_x(a,b),f_y(a,b)\Big)$$

شباهت معادله‌ی بالا به حالت تک‌متغیره‌ی زیر آشکار می‌شود:

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$$

چند جمله‌ای تیلور در توابع تک متغیره

درجه‌ی اول

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\big(x-a\big)$$

درجه‌ی دوم

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\big(x-a\big) + \frac{f''(a)}{۲!}\big(x-a\big)^{۲}$$

درجه‌ی سوم

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\big(x-a\big) + \frac{f''(a)}{۲!}\big(x-a\big)^{۲} + \frac{f'''(a)}{۳!}\big(x-a\big)^{۳}$$

بسط تیلور

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

چند جمله‌ای تیلور در توابع دو متغیره

درجه‌ی دوم

$$z = f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)\big(x-a\big) + f_y(a,b)\big(y-b\big) +$$
$$\frac{۱}{۲} f_{xx}(a,b)\big(x-a\big)^{۲} + f_{xy}(a,b)\big(x-a\big)\big(y-b\big) + \frac{۱}{۲} f_{yy}(a,b)\big(y-b\big)^{۲}$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$f(x,y) \approx \underbrace{P_{۲}(x,y)}_{\text{تیلور درجه‌ی دوم}} = f(a,b) + \begin{bmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} +$$

$$\frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} x-a & y-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

احتمالاً تا اینجا توجه کرده‌اید که مشتقات توابع چندمتغیره، در واقع **توابعی ماتریسی** هستند.[15]

دو متغیره $\mathbf{R}^{۲} \to \mathbf{R}$	تک متغیره $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$f(x_۰, y_۰)$	$f(x_۰)$
$\begin{bmatrix} f_x(x_۰,y_۰) & f_y(x_۰,y_۰) \end{bmatrix}$	$f'(x_۰)$
$\begin{bmatrix} f_{xx}(x_۰,y_۰) & f_{xy}(x_۰,y_۰) \\ f_{yx}(x_۰,y_۰) & f_{yy}(x_۰,y_۰) \end{bmatrix}$	$f''(x_۰)$

[15] این مطلب را در ریاضیات سطوح بالاتر خواهید آموخت. دانشجویان رشته‌ی ریاضی در درس هندسه‌ی دیفرانسیل یا آنالیز ۳ با این مطالب آشنا خواهند شد.

تمرین ۲۰۶. چند جمله‌ای تیلور درجه‌ی دوم را برای تابع $f(x,y)=e^{-(x^{۲}+y^{۲})}$ حول نقطه‌ی $(۰,۰)$ بنویسید.

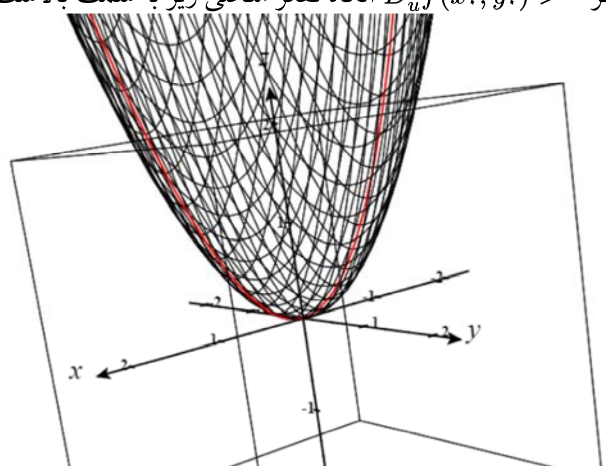
آخرین نکته‌ای که یادآوری می‌کنم این است که مشتق تابع $z=f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x.,y.)$ در جهت بردار یکه‌ی $u=(a,b)$ به صورت زیر است:

$$D_uf(x.,y.)=f_x(x.,y.)a+f_y(x.,y.)b$$

مشتق سوئی در واقع شیب خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویه‌ی مورد نظر با صفحه‌ای است که روی بردارِ (a,b) به موازات محور z رسم شده است. تقعّرِ این منحنی را می‌توان با استفاده از مشتق سوئی دوم بررسی کرد:

$$D_u^{۲}f(x.,y.)=f_{xx}(x.,y.)a^{۲}+f_{yy}(x.,y.)b^{۲}+۲f_{xy}(x.,y.)ab$$

اگر $D_u^{۲}f(x.,y.)>۰$ آنگاه تقعر منحنی زیر به سمت بالاست:



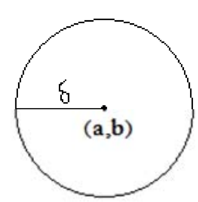
۱.۲۱ یافتن اکسترمم‌های توابع دو متغیره

یادآوری ۲۰۷ (توابع تک متغیره). فرض کنید $f(x)$ یک تابع تک متغیره باشد که در سرتاسر $\mathbf{R}$ تعریف شده است. اگر این تابع در یک نقطه‌ی $x=a$ اکسترمم نسبی داشته باشد و در این نقطه مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f'(a)=۰$. (محک مشتق اول). به نقطه‌ای که در آن مشتق موجود نباشد یا صفر باشد، یک نقطه‌ی بحرانی می‌گفتیم و آموختیم که اکسترممها در نقاط بحرانی رخ می‌دهند. در **محک مشتق دوم** نیز آموختیم که در نقطه‌ی بحرانی $x=a$ اگر $f''(a)>۰$ آنگاه تقعر به سمت بالاست (مینیمم نسبی) و اگر $f''(a)<۰$ آنگاه تقعر به سمت پایین (ماکزیمم نسبی) است.

در ادامه‌ی این درس، متناظرِ مطالب بالا را برای توابع دومتغیره بیان خواهیم کرد.

تعریف ۲۰۸. منظور از یک همسایگی باز به شعاع δ از نقطه‌ی (a,b) مجموعه‌ی زیر است

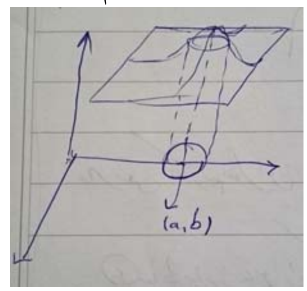
$$B_\delta(a,b)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^{۲}|\sqrt{(x-a)^{۲}+(y-b)^{۲}}<\delta\}$$



تعریف ۲۰۹. تابع $z = f(x,y)$ در نقطه‌ی $(a,b) \in \mathbf{R}^۲$ دارای **ماکزیمم نسبی** است هرگاه $\delta > ۰$ موجود باشد به طوری که

$$\forall (x,y) \in B_\delta(a,b) \quad f(x,y) \leqslant f(a,b)$$

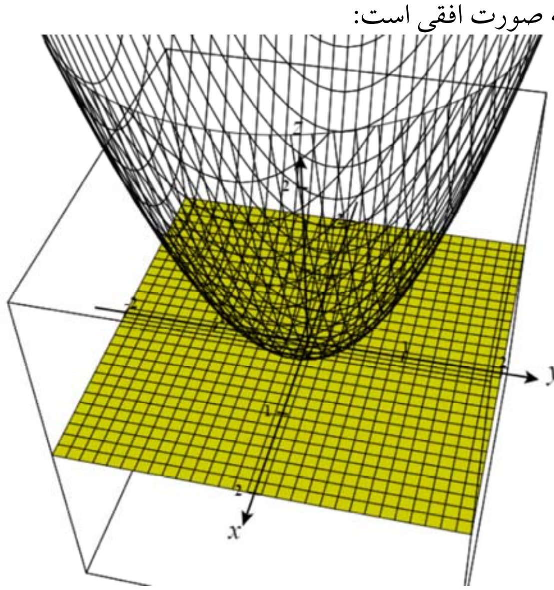
به طور مشابه مینیمم نسبی تعریف می‌شود.



تابع f در نقطه‌ی (a,b) ماکزیمم مطلق دارد هرگاه

$$\forall (x,y) \in Dom(f) \quad f(x,y) \leqslant f(a,b)$$

مشاهدات ۲۱۰. وقتی می‌گوئیم صفحه‌ی A به رویه‌ی $z = f(x,y)$ در نقطه‌ی (a,b) مماس است، یعنی در یک همسایگیِ $B_\delta(a,b)$ صفحه‌ی A رویه را تنها در یک نقطه قطع می‌کند. وقتی نقطه‌ای اکسترمم نسبی باشد، صفحه‌ی مماس در آن نقطه به صورت افقی است:



قضیه ۲۱۱. اگر تابع $z = f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ اکسترمم نسبی داشته باشد آنگاه اگر $f_x(x_۰, y_۰)$ و $f_y(x_۰, y_۰)$ موجود باشند داریم:

$$f_x(x_۰, y_۰) = f_y(x_۰, y_۰) = ۰$$

به بیان دیگر

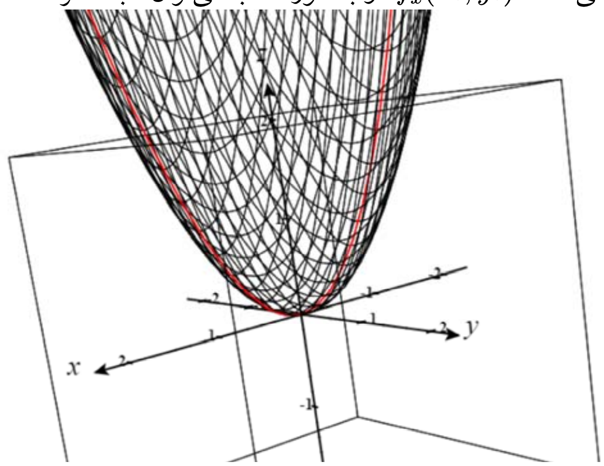
$$\nabla f(x_۰, y_۰) = (۰, ۰)$$

که تأییدکننده‌ی مشاهده‌ی بالاست که صفحه‌ی مماس در این نقاط افقی است.

اثبات. منحنی $z = f(x, y_0)$ روی رویه‌ی $z = f(x, y)$ واقع است. از آنجا که رویه در نقطه‌ی (x_0, y_0) اکسترمم دارد، این منحنی در نقطه‌ی $x = x_0$ دارای اکسترمم نسبی است. بنابراین

$$f'(x, y_0)|_{x=x_0} = 0$$

یعنی $f_x(x_0, y_0) = 0$؛ و به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که $f_y(x_0, y_0) = 0$.

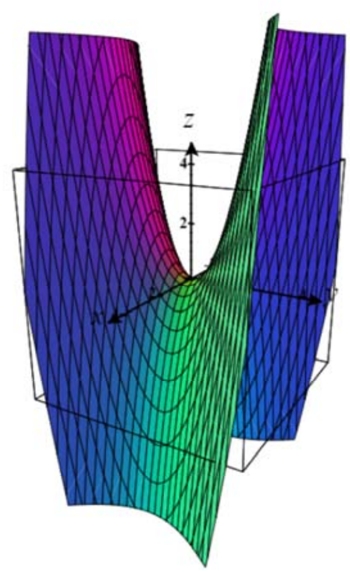


□

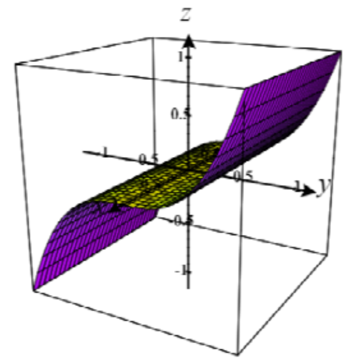
تعریف ۲۱۲. نقطه‌ی $(a, b) \in Dom(f)$ را یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع f می‌خوانیم هرگاه در آن $f_x = f_y = 0$ یا یکی از f_x یا f_y موجود نباشند.

توجه ۲۱۳. اکسترممها همواره در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتند، اما هر نقطه‌ی بحرانی لزوماً اکسترمم نیست.

مشاهدات ۲۱۴. در توابع دو متغیره، علاوه بر اکسترمم می‌توانیم وضعیت زینی داشته باشیم:



توجه کنید که نقطه‌ی بالا در یک جهت ماکزیمم است و در جهت دیگر مینی‌موم. **به طور کلی نقطه‌ی زینی، یک نقطه‌ی بحرانی است که در آن $f_x = f_y = 0$ و این نقطه نه مینی‌موم است و نه ماکزیمم.** پس در این نقطه، نمی‌توان صفحه‌ای بر رویه مماس کرد که رویه را در تنها در یک نقطه قطع کند. به نمودارِ $z = y^3$ در زیر دقت کنید. نقطه‌ی $(0, 0)$ نیز یک نقطه‌ی زینی است:



نتیجه ۲۱۵. اگر $(x_۰, y_۰)$ یک نقطه‌ی بحرانی باشد، دو حالت داریم:
حالت اول: $f_x(x_۰, y_۰) = f_y(x_۰, y_۰) = ۰$. در این حالت نقطه‌ی مورد نظر یا ماکزیمم نسبی است یا مینی‌موم نسبی است یا زینی. (به نقطه‌ای که در آن $f_x = f_y = ۰$ یک نقطه‌ی ایستائی گفته می‌شود).
حالت دوم. یکی از f_x یا f_y موجود نیستند. در این حالت یا مینی‌موم نسبی داریم یا ماکزیمم نسبی یا هیچکدام.

مثال ۲۱۶. اکسترمم‌های تابع زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

$$f(x,y) = x^{۲} + y^{۲} - ۲x - ۶y + ۱۴$$

پاسخ. ابتدا نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم.

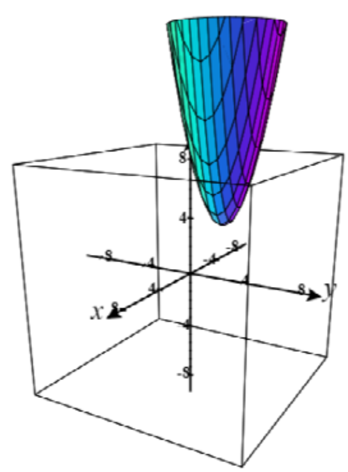
$$f_x = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$f_y = ۲y - ۶ = ۰ \Rightarrow y = ۳$$

پس نقطه‌ی $(۱, ۳)$ یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع بالا است. می‌توان نوشت:

$$f(x,y) = (x-۱)^{۲} + (y-۳)^{۲} + ۴$$

پس نقطه‌ی $(۱, ۳)$ نقطه‌ی مینی‌موم نسبی و مطلق تابع مورد نظر است:



□

مثال ۲۱۷. نخست دامنه، و سپس نقاط بحرانی تابع $f(x,y) = x \ln y$ را بیابید.