۱ نیم جلسه‌ی دوازدهم، چهارشنبه

پیش از آن که درس را شروع کنیم، لازم است در پاسخ به سوال یکی از دانشجویان مورد **یک روش اشتباه** برای محاسبه‌ی حد توضیحی بدهیم:

مثال ۱. ثابت کنید

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{y}{x^۲+۱} = ۰$$

پاسخ. چرک‌نویس.

$$|\frac{y}{x^۲+۱}| \leq \frac{\sqrt{y^۲}}{x^۲+۱} \leq \frac{\sqrt{y^۲+x^۲}}{x^۲+y^۲} = \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

پاسخ اشتباه برای سوال بالا:

بنا به محاسبات بالا باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{\delta} < \epsilon \to \delta > \frac{۱}{\epsilon}$$

مثلا اگر به ما $\epsilon = ۰/۰۵$ داده باشند داریم:

$$\delta > ۲۰!$$

پاسخ بالا درست نیست. توجه کنید که ما به دنبال یک δ هستیم به طوری که عبارت زیر درست باشد:

$$\sqrt{x^۲+y^۲} < \delta \to |f(x,y)| < \epsilon$$

بنا به محاسبات بالا اگر $\sqrt{x^۲+y^۲} < \delta$ آنگاه

$$|f(x,y)| \leq \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}} \geq \frac{۱}{\delta}$$

و از قسمت آخر عبارت بالا نمی‌توان بهره‌ی چندانی برد!

برای دیدن پاسخ درست این سوال به جلسات قبل مراجعه کنید. □

۱.۱ ادامه‌ی مشتقات جزئی

در جلسه‌ی قبل گفتیم برای یک تابع اتفاقیِ f دیدیم که $f_{xy} = f_{yx}$. در زیر قضیه‌ای آورده‌ایم که شرطی کافی برای رویداد بالا به دست می‌دهد:

قضیه ۲ (اویلر). فرض کنید تابع f در یک دیسک D به مرکز (a,b) تعریف شده باشد. اگر f_{xy} و f_{yx} هر دو در این دیسک پیوسته باشند آنگاه

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

قضیه‌ی بالا را چند بار به کارگیری قضیه‌ی مقدار میانگین ثابت می‌شود. اثبات آن جزو اهداف این درس نیست ولی در پایان جزوه‌ی این جلسه، اثبات آن را از کتاب استوارت برای دانشجوی علاقه‌مند گذاشته‌ایم.

تمرین ۳. در مثال‌های زیر بررسی کنید که آیا محاسبه‌ی f_{xy} آسان‌تر است یا f_{yx}؟

۱. $x \sin y + e^y$

۲. $x \ln(xy)$

۳. $\frac{۱}{x}$

مثال ۴ (مثال نقض برای قضیه‌ی بالا). در مثال زیر می‌بینیم که اگر شرایط قضیه‌ی بالا برقرار نباشند، آنگاه حکم آن نیز برقرار نیست. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۳y - xy^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

داریم

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{(۳x^۲y - y^۳)(x^۲+y^۲) - (x^۳y - xy^۳)(۲x)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

روش محاسبه‌ی $f_x(۰,۰)$:

$$f_x(۰,۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(۰+h,۰) - f(۰,۰)}{h} = ۰$$

$$f_{xy}(\cdot,\cdot) = \lim_{h\to \cdot} \frac{f_x(x_\cdot, y_\cdot + h) - f_x(x_\cdot, y_\cdot)}{h} = \lim_{h\to \cdot} \frac{f_x(\cdot, \cdot + h) - f_x(\cdot,\cdot)}{h}$$
$$= \lim_{h\to \cdot} \frac{(-h^{۳})(h^{۲})}{h^{۵}} = -۱$$

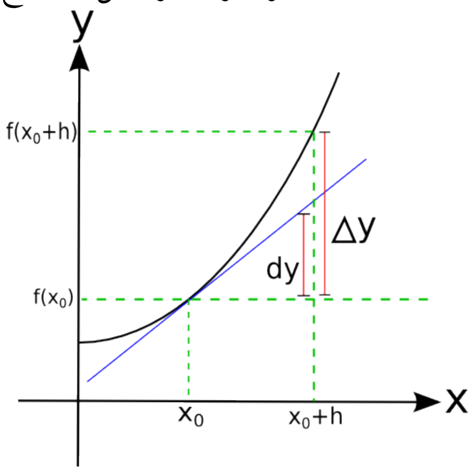
تمرین ۵. نشان دهید که $f_{yx}(\cdot,\cdot) = ۱$

پس در بالا $f_{yx}(\cdot,\cdot) = ۱$ و $f_{xy}(\cdot,\cdot) = -۱$.

تمرین ۶. نشان دهید که این مشاهده قضیه‌ی بالا را نقض نمی‌کند.

۲.۱ صفحه‌ی مماس

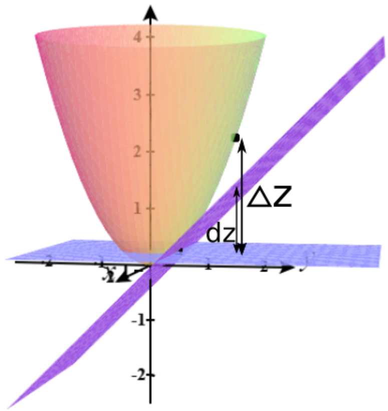
در جلسات آینده قرار است مفهوم دیفرانسیل کُلّی را برای یک تابع دو متغیره تعریف کنیم. این مفهوم ارتباط تنگاتنگی با مفهوم صفحه‌ی مماس دارد. این ارتباط، البته دور از انتظار نیست. زیرا در حالت تک‌متغیره نیز، دیفرانسیل یک تابع، تغییرات خط مماس بر منحنی را نشان می‌داد:



$$\Delta y \approx dy = f'(x_\cdot)h$$

$$y - y_\cdot \approx f'(x_\cdot)(x - x_\cdot)$$

در حالت دو متغیره، قرار است دیفرانسیل، نمایانگر تغییرات صفحه‌ی مماس باشد:



$$\Delta z \approx dz$$

در درسهای آینده، dz را تعریف خواهیم کرد. فعلاً در این جلسه به معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر یک رویه می‌پردازیم:

قضیه ۷. فرض کنید $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) به صورت زیر است.

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

مشاهده ۸. می‌دانیم معادله‌ی صفحه به صورت $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$ است که آن را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

توجه ۹. بنا به قضیه‌ی بالا، بردار نرمال صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی (x_0, y_0) برابر است با

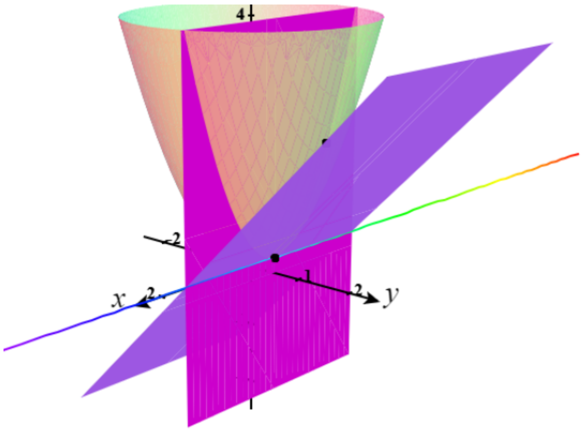
$$\big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\big)$$

اثبات قضیه. با توجه به مشاهده‌ی بالا می‌دانیم که معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

محاسبه‌ی A: قرار دهید $y = y_0$. اشتراک صفحه‌ی مماس با صفحه‌ی $y = y_0$ خط مماس بر منحنی ایجاد شده از اشتراک رویه با صفحه‌ی $y = y_0$ است. معادله‌ی خط مماس مورد نظر برابر است با

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$$



پس داریم

$$A = f_x(x_0, y_0)$$

به طور مشابه

$$B = f_y(x_0, y_0)$$

$\square$

توجه کنید که صفحه‌ی مماس بر یک رویه در نقطه‌ی (x_0, y_0) در واقع شامل خطوط مماس (در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0)) بر منحنی‌هائی است که از اشتراک رویه با صفحات گذرنده از نقطه‌ی $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ایجاد می‌شوند.

اثبات قضیه‌ی اویلر:

Clairaut's Theorem Suppose f is defined on a disk D that contains the point (a, b). If the functions f_{xy} and f_{yx} are both continuous on D, then $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

PROOF For small values of h, $h \neq 0$, consider the difference

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a + h, b)] - [f(a, b + h) - f(a, b)]$$

Notice that if we let $g(x) = f(x, b + h) - f(x, b)$, then

$$\Delta(h) = g(a + h) - g(a)$$

By the Mean Value Theorem, there is a number c between a and $a + h$ such that

$$g(a + h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b + h) - f_x(c, b)]$$

Applying the Mean Value Theorem again, this time to f_x, we get a number d between b and $b + h$ such that

$$f_x(c, b + h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Combining these equations, we obtain

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

If $h \to 0$, then $(c, d) \to (a, b)$, so the continuity of f_{xy} at (a, b) gives

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c, d) \to (a, b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Similarly, by writing

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a, b + h)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]$$

and using the Mean Value Theorem twice and the continuity of f_{yx} at (a, b), we obtain

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

It follows that $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. ■