بسم خدا

انتگرال دوگانه

یادآوری از ریاضی ۱

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده باشد.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\frac{b-a}{n}$$

اگر $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = A$ وجود داشته باشد

می‌نویسیم

$$A=\int_a^b f(t)\,dt$$

Summe

قضیهٔ ۱ اساسی حساب

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b)-f(a)$$

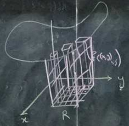
بسمه تعالی

انتگرال دوگانه

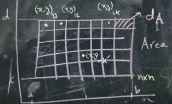
انتگرالگیری در نواحی مستطیلی

فرض کنید $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد که در ناحیه مستطیلی $R = [a,b]\times[c,d]$ تعریف شده باشد.

$$[a,b]\times[c,d] = \{(x,y) \mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$$



ناحیه R را به صورت زیر تقسیم بندی کنید. از هر قسمت یک نقطه انتخاب کنید.

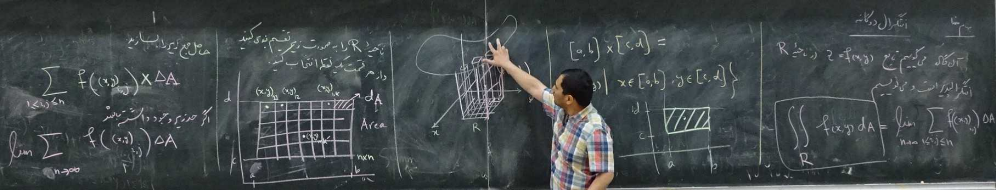


حاصل جمع زیر را بسازید

$$\sum_{1\le i,j\le n} f\big((x,y)_{ij}\big)\times \Delta A$$

اگر حد زیر وجود داشته باشد

$$\lim_{n\to\infty}\sum f\big((x,y)_{ij}\big)\,\Delta A$$



به نام خدا
انتگرال دوگانه
آن گاه می‌گوییم تابع $z = f(x,y)$ در ناحیه R
انتگرال‌پذیر است و می‌نویسیم
$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\le i,j\le n} f((x,y)_{ij}) \Delta A$
$[a,b] \times [c,d] =$
$y) \mid x\in[a,b], y\in[c,d]\}$
d
c
a
b
x
R
ناحیه R را به صورت زیر تقسیم‌بندی کنید
و از هر قسمت یک نقطه انتخاب کنید.
$(x,y)_{11}$
$(x,y)_{12}$
$(x,y)_{1k}$
dA
Area
$(x,y)_{mk}$
n×n
d
c
a
b
حاصل جمع زیر را بسازید
$\sum_{1\le i,j\le n} f((x,y)_{ij}) \times \Delta A$
اگر حد زیر وجود داشته باشد
$\lim_{n\to\infty} \sum f((x,y)_{ij}) \Delta A$

بسم خدا

انتگرال دوگانه

آن‌گاه می‌گوییم تابع $z=f(x,y)$ در ناحیه‌ی R

انتگرال‌پذیر است و می‌نویسیم

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA} = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\le i,j\le n} f\big((x,y)_{ij}\big)\,\Delta A$$

$\iint_R f(x,y)\,dA$

توجه

اگر $z=f(x,y)$ تابعی نامنفی روی ناحیه‌ی مستطیل R باشد آن‌گاه $\iint_R f(x,y)\,dA$

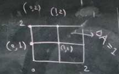
حجم ناحیه‌ی زیر رویه و بالای مستطیل را نشان می‌دهد.

مثال

حجم جسمی را که بالای مستطیل $[0,2]\times[0,2]$

و زیر سهمی‌وار بیضوی $z=16-2x^2-2y^2$

واقع شده است را تخمین بزنید.



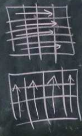
حجم ناحیه‌ی مورد نظر $\simeq f(0,1)(1)+f(1,1)(1)+$

$f(0,2)(1)+f(1,2)(1)$

اگر $x_0 \in [a,b]$ نقطه‌ی دلخواهی باشد به طریق به تعریف کنید:

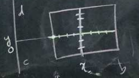
$$A(x_0)=\int_c^d f(x_0,y)\,dy$$

فرض کنید تابع $z=f(x,y)$ در ناحیه‌ی مستطیلی $R=[a,b]\times[c,d]$ تعریف شده باشد و y_0 یک عدد دلخواه در $[c,d]$ باشد. تعریف کنید:

$$A(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)\,dx$$

نحوه‌ی محاسبه‌ی $\iint_R f(x,y)\,dA$

R ← مستطیلی

انتگرال‌گیری جزئی

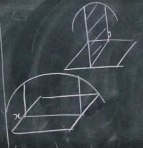


$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx =$$

$$\int_a^b \Bigg(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{تابع } x} \Bigg) \, dx$$

تعریف

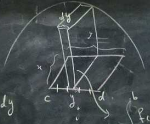
$$\int_{\underset{x}{\downarrow} a}^{b} \int_{\underset{y}{\downarrow} c}^{d} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \big(k(x) \big)\,dx$$



$$y \overset{h(y)}{\longmapsto} \int_a^b f(x,y)\,dx$$

$$x \overset{k(x)}{\longmapsto} \int_c^d f(x,y)\,dy$$

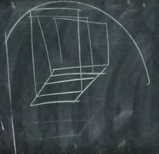
$$\int_c^d \left(\int f(x,y)\,dx \right) dy$$



$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

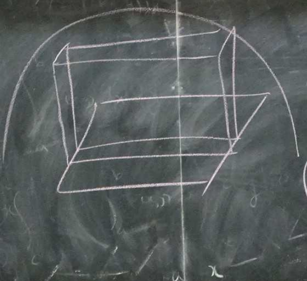
$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy :=$$

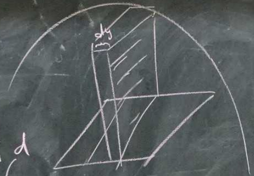
$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$



بنام خدا

قضیه (فوبینی)





$$\int_c^d \left(\int f(x,y)\, dx \right) dy$$

$$\int_{\substack{a\\x}}^{b} \int_{\substack{c\\y}}^{d} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{\substack{c\\y}}^{d} \int_{\substack{a\\x}}^{b} f(x,y)\, dx\, dy$$