به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان-دانشکده علوم ریاضی

۲۱ اردیبهشت ماه ۹۸ | کوئیز درس معادلات دیفرانسیل | مدت: ۵۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی : .... شماره‌ی دانشجویی : .... نام استاد : ....

---

۱. سوال اول (۱۳ نمره) معادله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y''+y=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 0 & x\ge 1 \end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$$

$$\mathcal{L}[y'']+\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[x(u_0(x)-u_1(x))]$$ ۲ نمره

$$s^2\mathcal{L}[y]+\mathcal{L}[y]=-\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[u_0(x)]-\mathcal{L}[u_1(x)]\right)$$ ۳ نمره

$$(s^2+1)\mathcal{L}[y]=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)+\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right)$$

$$(s^2+1)\mathcal{L}[y]=\frac{1}{s^2}+\frac{-se^{-s}-e^{-s}}{s^2}$$ ۲ نمره

$$\mathcal{L}[y]=\frac{1}{s^2(s^2+1)}+\frac{se^{-s}+e^{-s}}{s^2(s^2+1)}$$

۱ نمره

$$\mathcal{L}[y]=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}-\frac{se^{-s}}{s^2}+\frac{se^{-s}}{s^2+1}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s^2+1}$$

۱ نمره ۱ نمره ۱ نمره ۱ نمره ۱ نمره ۱ نمره

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-s}}{s^2+1}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right]$$

$$y=x-\sin x-u_1(x)+u_1(x)\cos(x-1)-u_1(x)(x-1)+u_1(x)\sin(x-1) \quad \blacksquare$$

نام و نام خانوادگی : .... شماره‌ی دانشجویی : .... نام استاد : ....

---

۲. سوال دوم (۷ نمره) الف) نشان دهید نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه عادی برای معادله زیر است.

ب) جواب عمومی معادله زیر را با استفاده از روش سریهای توانی حول نقطه $x_0 = 0$ به دست آورید.

$$y'' - 2xy = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

الف) ضریب y'' در نقطه $x_0 = 0$، صفر نیست و ضریب y نیز یک چندجمله‌ای است، بنابراین $x_0 = 0$ یک نقطه عادی است. ۱ نمره

ب)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=-3}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = 0$$

$$2a_2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+3)(n+2) a_{n+3} - 2a_n\right) x^{n+1} = 0$$

۳ نمره

$$\Rightarrow a_2 = 0, \qquad a_{n+3} = \frac{2a_n}{(n+3)(n+2)} \qquad n \geq 0$$

$$a_3 = \frac{2a_0}{6} = \frac{a_0}{3}, \qquad a_4 = \frac{2a_1}{4 \times 3} = \frac{a_1}{6}$$

$$a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{2a_3}{6 \times 5} = \frac{2a_0}{6 \times 5 \times 3} = \frac{a_0}{45}$$

$$a_7 = \frac{2a_4}{7 \times 6} = \frac{a_1}{7 \times 6 \times 3} = \frac{a_1}{126}$$

۴ نمره

(۱ نمره)

$$y = a_0\left(1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{45}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{126}x^7 + \cdots\right)$$