

Introducción a las Redes Neuronales Informadas por la Física

Taller teórico-práctico

David Ortiz-Puerta, Ph. D.

Escuela de Inginería Civil Biomédica
Universidad de Valparaíso
Millennium Institute for intelligent Healthcare Engineering, ihealth

Noviembre 12 al 14, 2025



Millennium Institute
for Intelligent
Healthcare Engineering

 PINNs-Workshop-Andean-Complex-Systems-School Public

 Pin  Watch 0

 main  1 Branch  0 Tags Go to file   Add file  Code

dortiz5 Fix formatting of activity links in README 1737835 · now 6 Commits

 notebooks	Add files via upload	7 minutes ago
 solutions	Add files via upload	7 minutes ago
 LICENSE	Add files via upload	3 days ago
 README.md	Fix formatting of activity links in README	now
 pinns-tutorial.yml	Add files via upload	3 days ago

 README  MIT license

Redes neuronales artificiales informadas por la física (PINNs)

Este repositorio contiene material para el taller sobre redes neuronales informadas por la física (PINNs) de la escuela andina de sistemas complejos

Motivación

En los últimos años, las redes neuronales profundas se han convertido en herramientas fundamentales para



Miércoles 12 (12:50–13:35)	Jueves 13 (15:55–16:40)	Viernes 14 (15:45–16:30)
Taller teórico	Taller práctico 1, problemas directos	Taller práctico 2, problemas inversos

Tabla de contenido

1. Motivación
2. Aprendizaje de máquinas: deep learning
3. Modelos físicos: problemas directos e inversos
4. Teorema de aproximación universal: un puente entre los modelos físicos y el aprendizaje máquinas
5. Redes neuronales informadas por la física
6. Pros y contras
7. Aplicaciones

Motivación

Motivación

Redes Neuronales Artificiales...
(Aprendizaje de máquinas)

... Informadas por la física
(Modelos matemáticos)

Motivación

Redes Neuronales Artificiales...
(Aprendizaje de máquinas)

... Informadas por la física
(Modelos matemáticos)

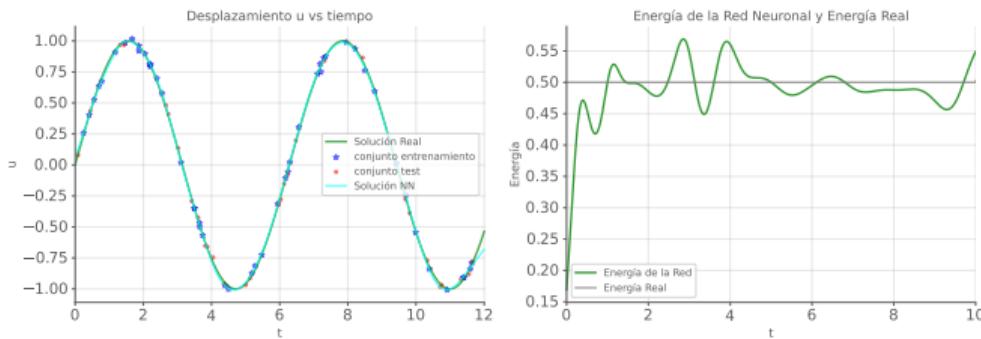
Scopus query: “Machine learning” \approx 3,197,354 documentos encontrados
Artículos publicados en el 2025: 365,569

Motivación

Redes Neuronales Artificiales...
(Aprendizaje de máquinas)

... Informadas por la física
(Modelos matemáticos)

Scopus query: “Machine learning” $\approx 3,197,354$ documentos encontrados
Artículos publicados en el 2025: 365,569



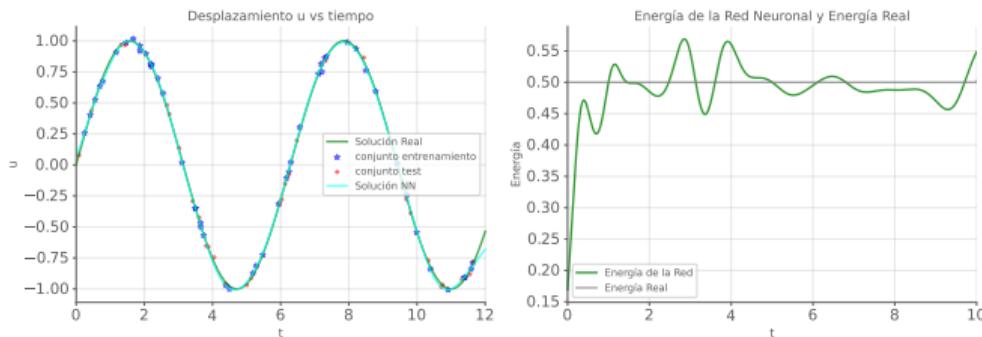
Oscilador armónico: $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2u = 0$, Energía total: $E_{total} = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}u^2 = 0.5$

Motivación

Redes Neuronales Artificiales...
(Aprendizaje de máquinas)

... Informadas por la física
(Modelos matemáticos)

Scopus query: “Machine learning” $\approx 3,197,354$ documentos encontrados
Artículos publicados en el 2025: 365,569



Oscilador armónico: $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0$, Energía total: $E_{total} = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 = 0.5$

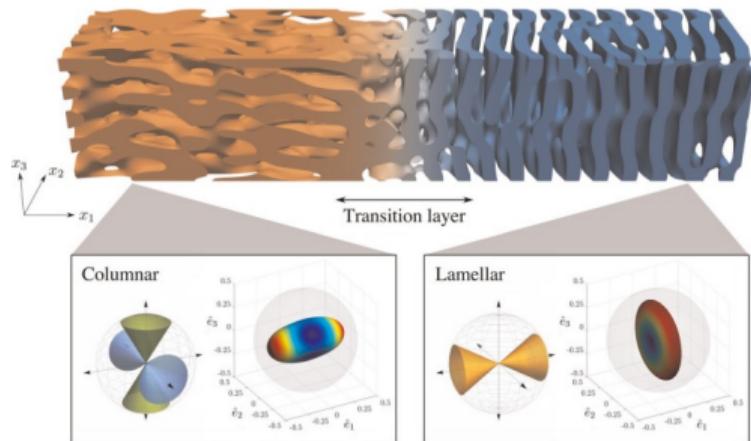
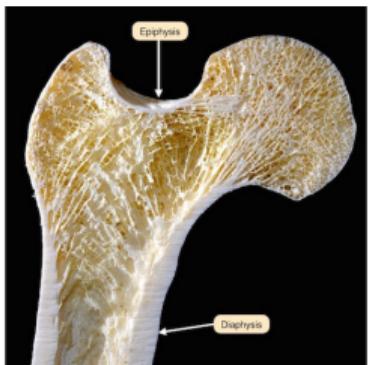
¡No siempre funcionan bien en modelos físicos!

Motivación

Redes Neuronales Artificiales...
(Aprendizaje de máquinas)

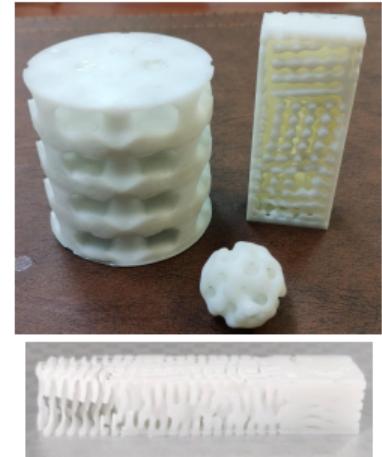
... Informadas por la física
(Modelos matemáticos)

Prótesis personalizadas → Diseño computacional → impresión 3D



Trabéculas del fémur

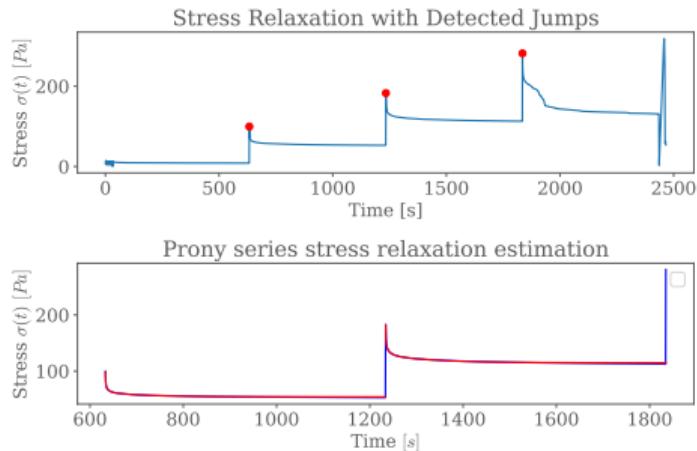
Propiedades anisotrópicas del espinodoide,
Kumar et al. , 2020



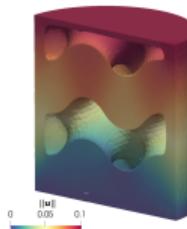
Motivación

Diseño computacional → ¿Qué modelo matemático utilizar?

Relajación de tensiones en ensayos uniaxiales



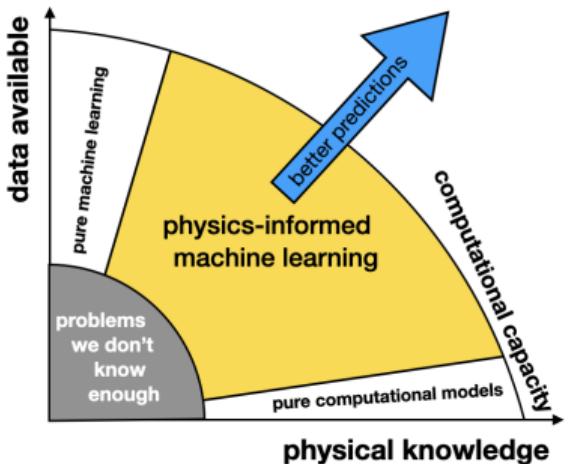
$$\min_{u \in V} \underbrace{\int_{\Omega} \psi(u) dx}_{?} - \int_{\Omega} B \cdot u \, dx - \int_{\partial\Omega} T \cdot u \, ds \rightarrow 0$$



¡Integrar observaciones puede ser desafiante!

Motivación

¿Como podemos sacar provecho de lo mejor de ambas áreas?



Al integrar ambas áreas:

- Interpretabilidad
- Generalización
- Menos datos de entrenamiento

Imagen tomada de "*Introduction to physics-informed neural networks*" (Francisco Sahli)

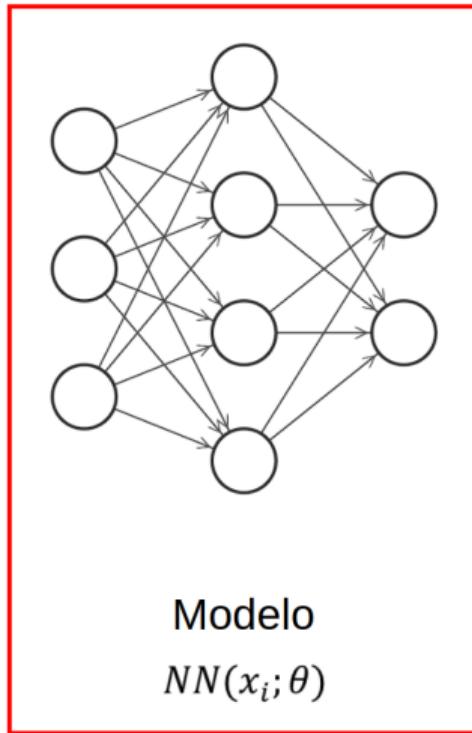
Aprendizaje de máquinas: deep learning

Aprendizaje de máquinas



Imagen tomada de internet

Entrada x_i

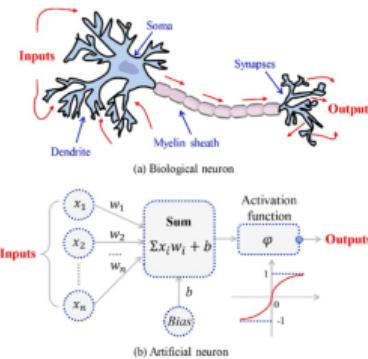
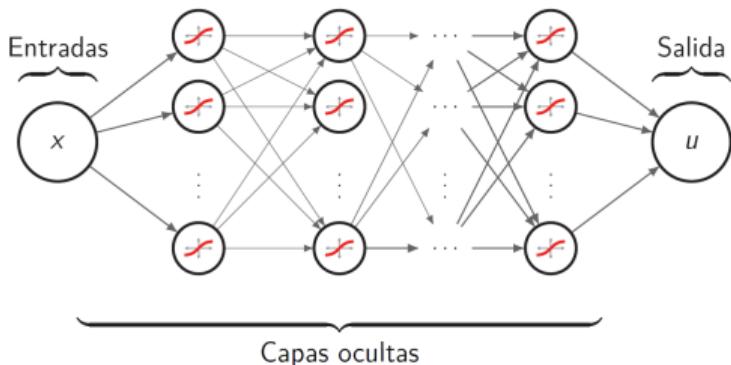


Probabilidad:
70% Muffin
30% Chihuahua

Salida $y_i = NN(x_i; \Theta)$

Aprendizaje de máquinas: deep learning

Redes neuronales: modelos computacionales



Funciones compuestas

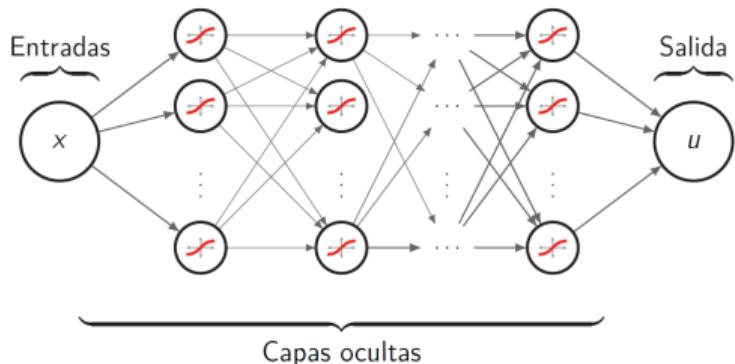
$$f(x; \theta) = f_n(\dots f_2(f_1(x; \theta_1); \theta_2); \dots; \theta_n)$$

Pesos y sesgos, función de activación no lineal

$$\begin{aligned} h_i &= f_i(h_{i-1}; \theta_i = \{\mathbf{W}_i, \mathbf{b}_i\}) \\ &= g(\mathbf{W}_i^T h_{i-1} + \mathbf{b}_i) \end{aligned}$$

Aprendizaje de máquinas: deep learning

Redes neuronales: modelos computacionales



Función de pérdida

$$\mathcal{L}_{\text{MSE}}(\boldsymbol{\theta}; \{x_i, y_i\}_{i=1}^N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i; \boldsymbol{\theta}))^2$$

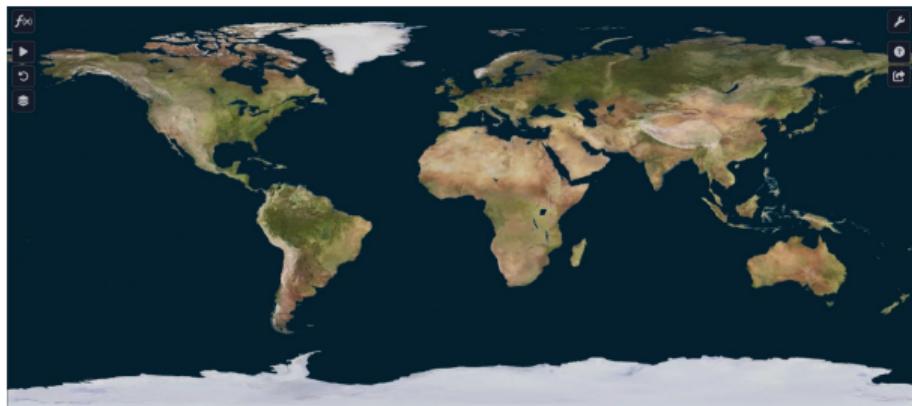
Método de entrenamiento: Descenso de gradiente
Retropropagación

$$\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} - \varepsilon \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}_{\text{MSE}}$$

Modelos físicos: problemas directos e inversos

Modelos físicos: simulación, predicción y diseño

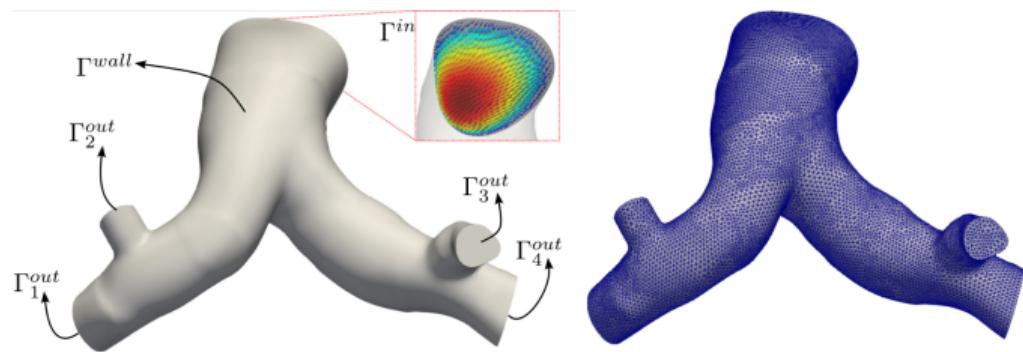
- Simular procesos naturales
- Evaluar hipótesis científicas
- Experimentación *in-silico*
- Diseñar y optimizar soluciones
- Apoyar decisiones climáticas
- Asimilación de datos



"Friendly Floatees Spill" (Patitos de hule), 1992
Simulación realizada con VisualPDE

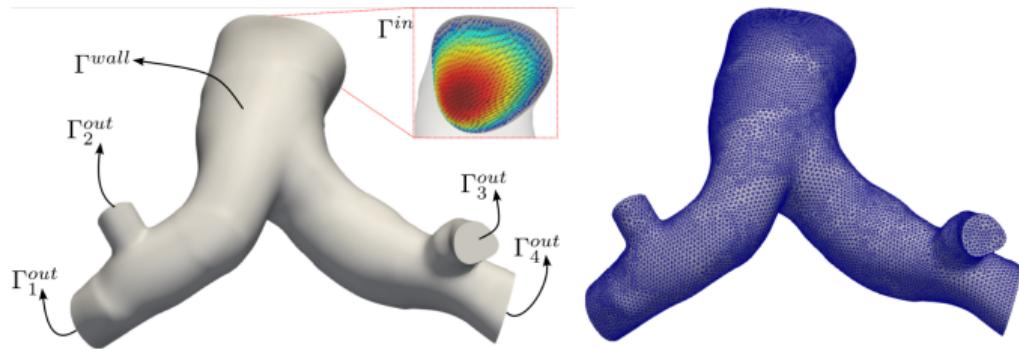
Modelos físicos: ecuaciones diferenciales

- Dominio espacial Ω (y/o temporal t)



Modelos físicos: ecuaciones diferenciales

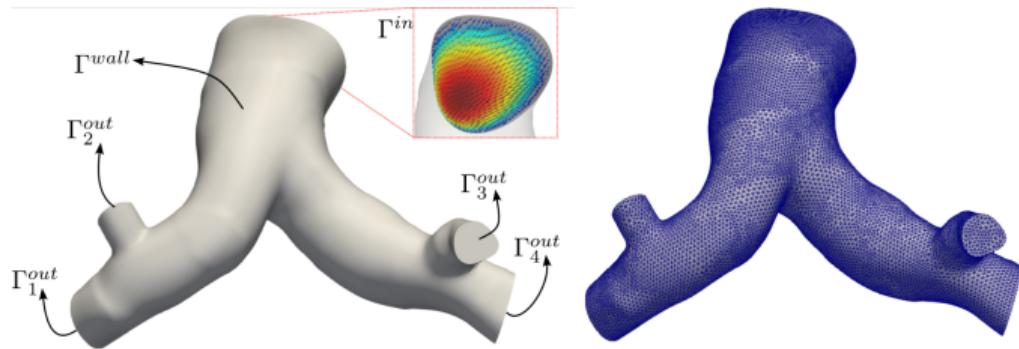
- Dominio espacial Ω (y/o temporal t)
- Derivadas sobre una función desconocida



$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T]$$

Modelos físicos: ecuaciones diferenciales

- Dominio espacial Ω (y/o temporal t)
- Derivadas sobre una función desconocida
- Condiciones iniciales y de frontera



$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T]$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_{inlet}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma^{in} \\ \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma^{wall} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p \mathbf{n} = -P \mathbf{n}, & \Gamma_i^{out}, \quad i = 1, \dots, 4 \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases}$$

Problemas directos

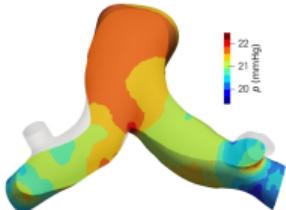
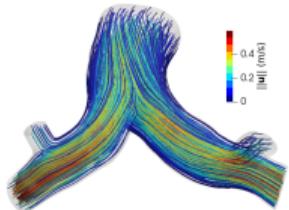
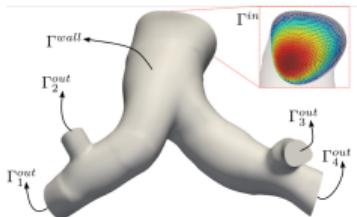
De las causas a los efectos

Entradas (causas),
son "conocidas"

Resultado (efecto) es
"desconocido"

Modelo físico $\rightarrow \mathcal{F}(\bar{A}) = \bar{B}$

$$\mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* + \nabla p^* = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0$$
$$BC: \quad \mathbf{u}^* = 0, \quad \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \mathbf{n}} - n p^* = 0$$



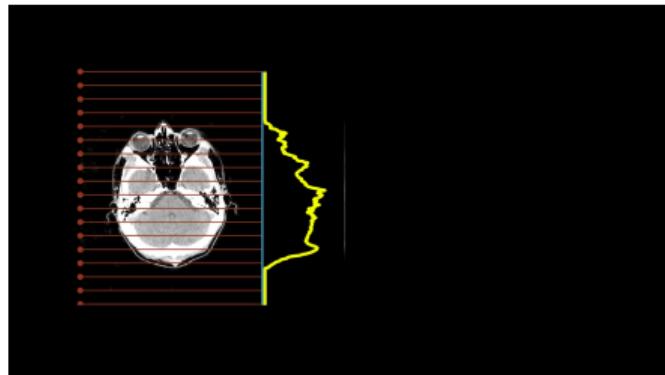
Problemas inversos

De los efectos a las causas

Entradas (causas), son
"desconocidas"

Resultado (efecto), es
"conocido"

Modelo físico $\rightarrow \mathcal{F}(\bar{A}) = B$



Reconstrucción de tomografía axial computarizada
(TAC). Por Samuli Siltanen



Teorema de aproximación universal: un puente entre los modelos físicos y el aprendizaje máquinas

Teorema de aproximación universal

Una **red neuronal con una sola capa oculta** y una función de activación no constante, acotada y continua σ , puede **aproximar cualquier función continua f** definida en un dominio cerrado y acotado Ω con una **precisión arbitraria**.

Para cualquier función continua $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, existe una red neuronal de la forma

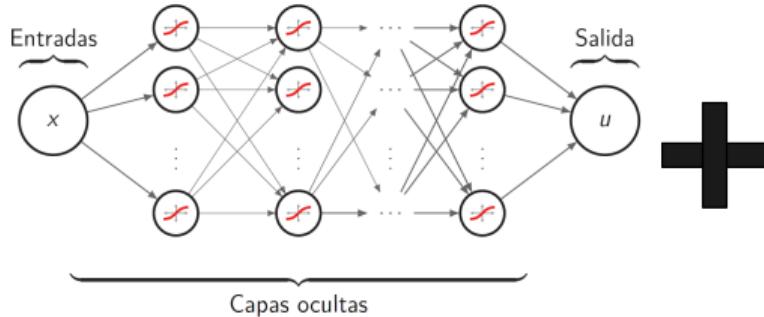
$$\phi(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sigma(\mathbf{w}_i^T x + b_i)$$

con parámetros $\alpha_i, \mathbf{w}_i, b_i$ y un número de neuronas N en la capa oculta, tal que

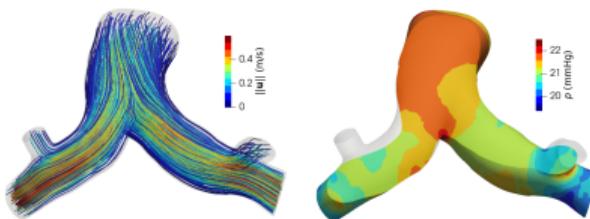
$$\|f - \phi\| < \varepsilon \quad \text{en } \Omega$$

Physics-Informed Neural Networks

Redes Neuronales Artificiales Informadas por la Física



$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* + \nabla p^* &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ BC: \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{0}, \quad \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \mathbf{n}} - n p^* &= \mathbf{0} \end{aligned}$$



Raissi, 2019 (PINNs)



Karniadakis, 2021 (PIML)



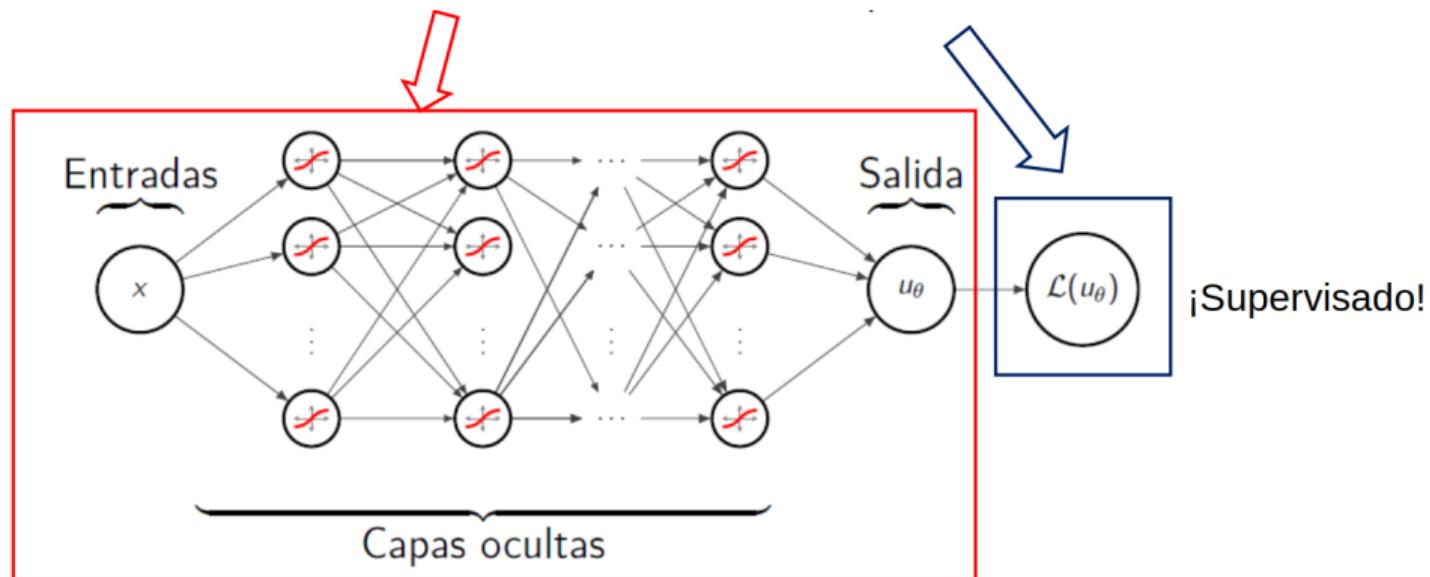
Expert's guide



Ben Moseley

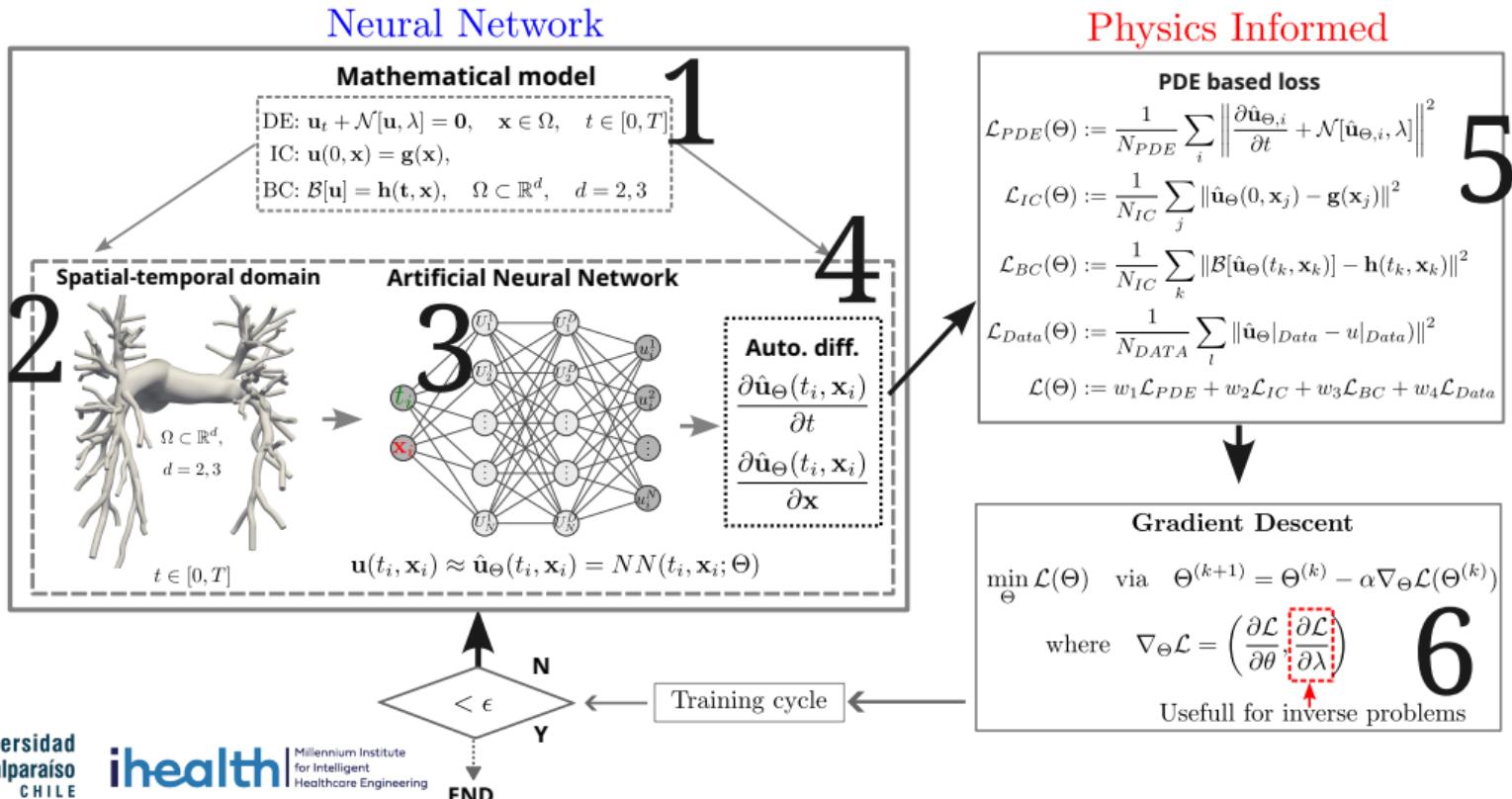
Physics-Informed Neural Networks: esquema base

Redes Neuronales Artificiales Informadas por la Física



Ingrediente final: diferenciación automática

Physics-Informed Neural Networks: esquema base



Pros y contras

Pros

1. Sin malla (pero sí sus nodos)
2. Funcionan bien en formulaciones mixtas (o acopladas)
3. Problemas directos e inversos, “descubrimiento” de modelos físicos escondidos
4. Funcionan bien en datos con ruido
5. Puede eludir algunas condiciones que harían que el problema inverso esté mal planteado, como las condiciones de contorno

Contras

1. Lentas de entrenar
2. No cumplen completamente las condiciones de frontera en geometrías irregulares
3. Difíciles de sintonizar. No hay una arquitectura definida como “la mejor”
4. En comparación con los métodos numéricos, no hay estimación del error a priori
5. Tienen sesgos espectrales

Aplicaciones

Método PINN para el estudio de la PPA

Modelo de fluido dinámica

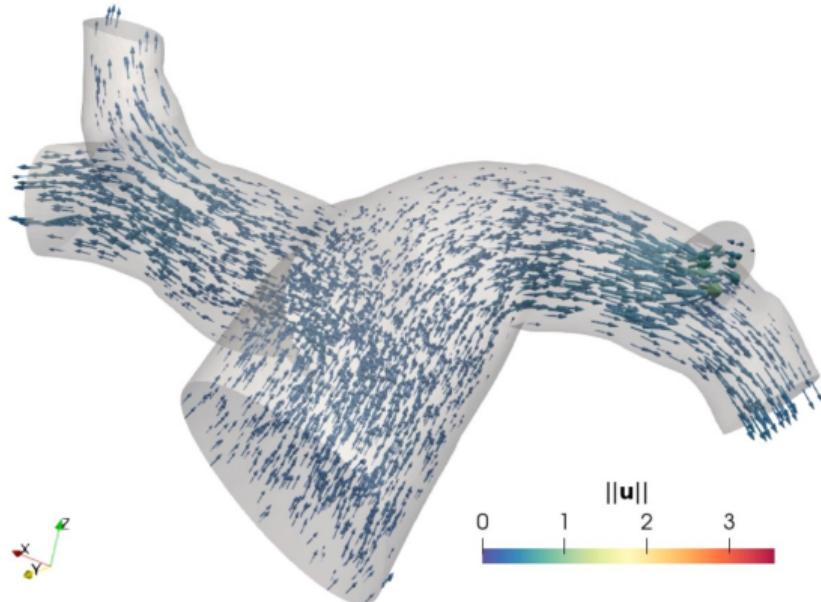
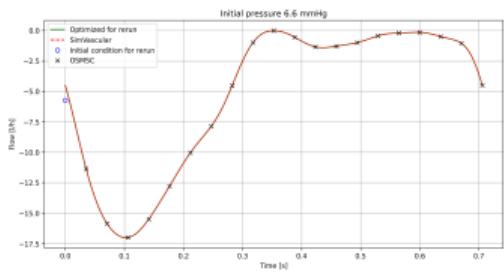
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad x \in \Omega$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{inlet}(x), \quad x \in \Gamma^{in}$$

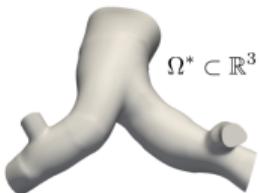
$$\mathbf{u} = 0, \quad x \in \Gamma^{wall}$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p \mathbf{n} = -P \mathbf{n}, \quad \Gamma_i^{out}, \quad i = 1, \dots, 4$$



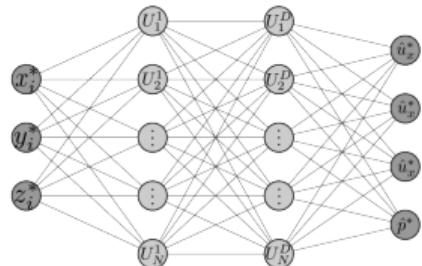
Método PINN para el estudio de la PPA personalizada

ROM-NS-PINNs



Artificial Neural Network

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ p(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \\ \hat{p}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathcal{NN}_N^D[\mathbf{x}; \Theta]$$



$$\arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma} \mathcal{L}(\mathbf{x}; \theta)$$

$$\mathcal{L} = w_1 \mathcal{L}_{PDE} + w_2 \mathcal{L}_{Data} + w_3 \mathcal{L}_{BC}$$

Autodiff

$$\begin{aligned} & \nabla^* \hat{\mathbf{u}}^* \\ & \nabla^* p^* \\ & \Delta^* \hat{\mathbf{u}}^* \\ & \nabla^* \cdot \hat{\mathbf{u}}^* \end{aligned}$$

Steady Navier-Stokes

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = 0 \quad \text{in } \Omega^*, \\ & \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{in } \Omega^*, \\ & \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}_{\text{inlet}}}{U_s} \quad \text{on } \Gamma^{in^*}, \\ & \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{on } \Gamma^{wall^*}, \\ & \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial n} - p^* \mathbf{n} = -P^* \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_i^{out^*}, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

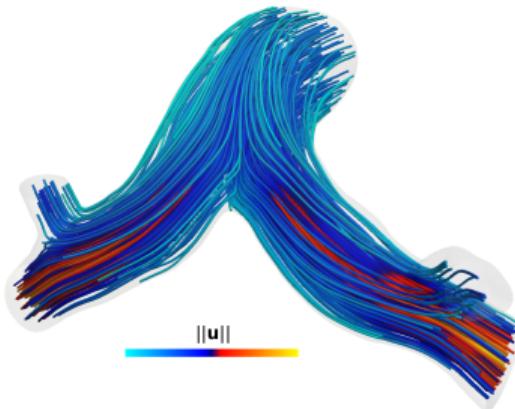
$$\mathcal{L}_{PDE} = MSE(f(\hat{\mathbf{u}}, \partial_t \hat{\mathbf{u}}, \partial_x \hat{\mathbf{u}}, \dots, \lambda))$$

$$\mathcal{L}_{Data} = MSE(\hat{\mathbf{u}}|_{\Omega} - \mathbf{u}|_{Data})$$

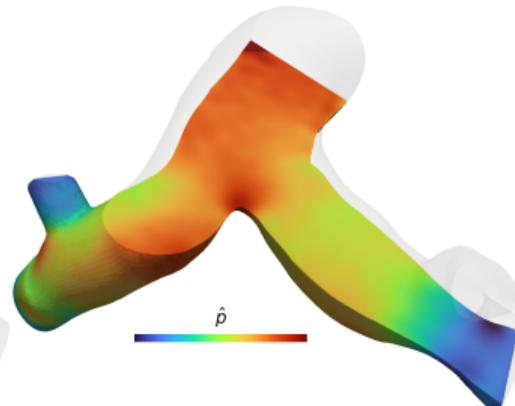
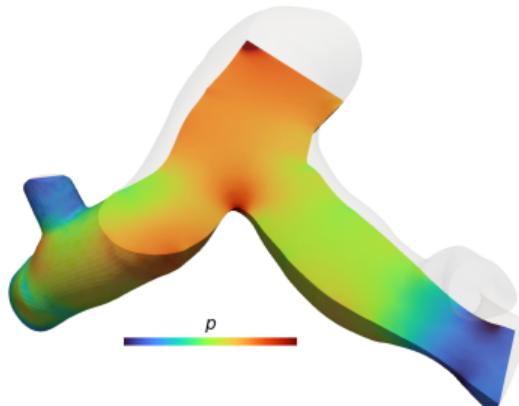
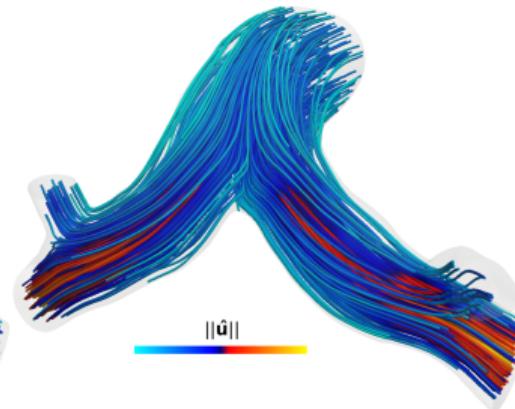
$$\mathcal{L}_{BC} = MSE(\partial_n \hat{\mathbf{u}}|_{\partial \Omega} - \partial_n g|_{\partial \Omega})$$

PDE based loss

Solución numérica



Solución PINN



Conclusiones

- Las PINNs ofrecen una metodología innovadora que combina modelos físicos y aprendizaje automático.

Conclusiones

- Las PINNs ofrecen una metodología innovadora que combina modelos físicos y aprendizaje automático.
- Las PINNs son particularmente útiles para abordar problemas inversos, multifísicos, “incompletos” y con datos ruidosos.

Conclusiones

- Las PINNs ofrecen una metodología innovadora que combina modelos físicos y aprendizaje automático.
- Las PINNs son particularmente útiles para abordar problemas inversos, multifísicos, “incompletos” y con datos ruidosos.
- “Unas por otras”: eludir algunas restricciones, como las condiciones de frontera, permite obtener soluciones aproximadas de problemas inversos mal planteados.

Conclusiones

- Las PINNs ofrecen una metodología innovadora que combina modelos físicos y aprendizaje automático.
- Las PINNs son particularmente útiles para abordar problemas inversos, multifísicos, “incompletos” y con datos ruidosos.
- “Unas por otras”: eludir algunas restricciones, como las condiciones de frontera, permite obtener soluciones aproximadas de problemas inversos mal planteados.
- No existe una única arquitectura óptima para las PINNs, lo que requiere experimentación y ajustes específicos para cada problema.

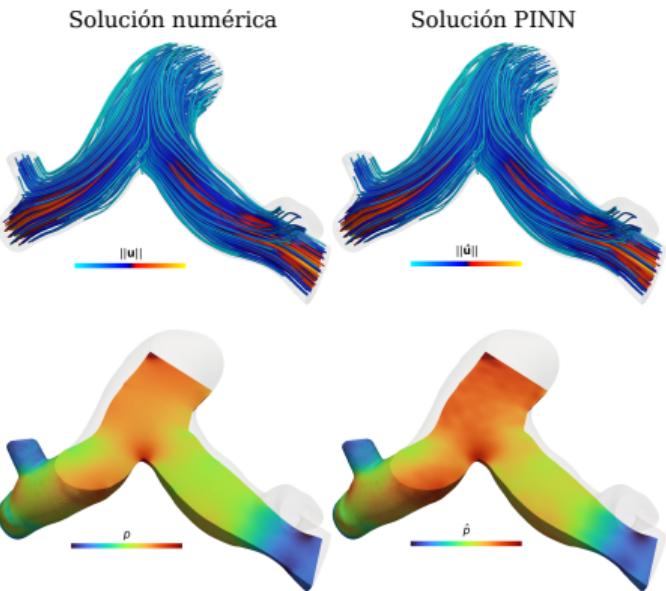
¡Hay muchísimo por hacer!

Muchas gracias por su atención!

David Ortiz-Puerta

david.ortiz.puerta@gmail.com

david.ortiz@uv.cl



This work was funded by ANID - Millennium Science Initiative Program - ICN2021_004 and ANID - Fondecyt de Postdoctorado N°3250439 Physics-Informed Artificial Neural Network Method for Fluid-Structure Interaction Modeling (PINN-FSI): Accurate and Non-invasive Estimation,