

[ihealth-pinns-mini-course](#) Public template

Pin Unwatch Fork Star Use this template

1 Branch 0 Tags Go file Add file Code

dortiz5 Corrected a little typo 9dd6c1b · 5 days ago 36 Commits

figures Add files via upload last week

notebooks Corrected a little typo 5 days ago

slides Slides with trivia last year

solutions Notebooks updated 5 days ago

.gitignore Slides updated last year

LICENSE Add files via upload 2 years ago

README.md Readme updated 5 days ago

pinns-tutorial.yml Add files via upload 2 years ago

[Readme](#) [MIT license](#)

Redes neuronales artificiales informadas por la física (PINNs)

Este repositorio contiene material para el taller sobre redes neuronales informadas por la física (PINNs) del Instituto Milenio [IHEALTH](#) (ANID – Programa Iniciativa Científica Milenio – ICN2021_004).

Motivación

About

Taller Teórico-Práctico sobre Physics-Informed Neural Networks (PINNs), Instituto Milenio IHEALTH

neural-networks
partial-differential-equations
physics-informed-neural-networks

Readme
MIT license
Activity
2 stars
1 watching
1 fork

Releases

No releases published [Create a new release](#)

Packages

No packages published [Publish your first package](#)

Languages

Jupyter Notebook 72.0% Python 28.0%



(11:00–12:30)	(13:30–14:45)	(14:45–16:00)
Taller teórico	Introducción a las PINNs	Problemas 2D: directos e inversos

Introducción a las Redes Neuronales Informadas por la Física

Taller teórico-práctico

David Ortiz-Puerta, Tabita Catalán, Tomás Banduc, Francisco Sahli

Universidad de Valparaíso
Pontificia Universidad Católica de Chile
Millennium Institute for intelligent Healthcare Engineering, ihealth

16 de enero, 2026





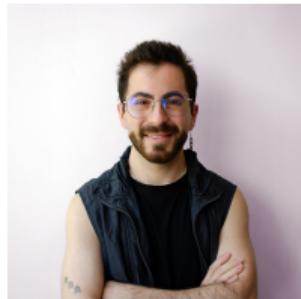
David Ortiz-Puerta

david.ortiz@uv.cl



Tabita Catalán

tabicm.nhg@gmail.com



Tomás Banduc

tabicm.nhg@gmail.com



Tabla de contenido

1. Motivación
2. Aprendizaje de máquinas: deep learning
3. Modelos físicos: problemas directos e inversos
4. Teorema de aproximación universal: un puente entre los modelos físicos y el aprendizaje máquinas
5. Redes neuronales informadas por la física
6. Pros y contras
7. Aplicaciones

Motivación

Redes Neuronales Artificiales...
(Aprendizaje de máquinas)

... Informadas por la física
(Modelos matemáticos)

Redes Neuronales Artificiales... (Aprendizaje de máquinas)

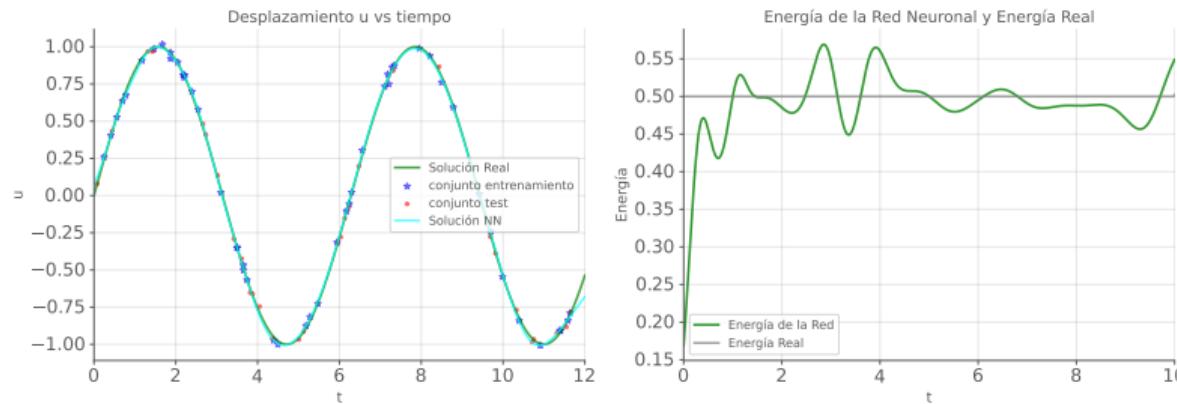
... Informadas por la física
(Modelos matemáticos)

Scopus query: “Machine learning” \approx 3,197,354 documentos encontrados
Artículos publicados en el 2025: 365,569

Redes Neuronales Artificiales... (Aprendizaje de máquinas)

... Informadas por la física
(Modelos matemáticos)

Scopus query: “Machine learning” $\approx 3,197,354$ documentos encontrados
Artículos publicados en el 2025: 365,569

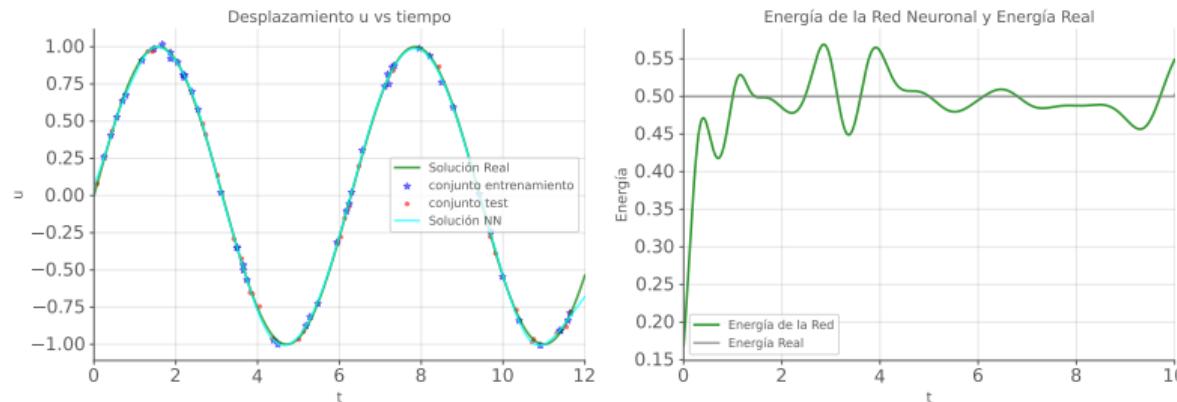


Oscilador armónico y su energía total

Redes Neuronales Artificiales... (Aprendizaje de máquinas)

... Informadas por la física
(Modelos matemáticos)

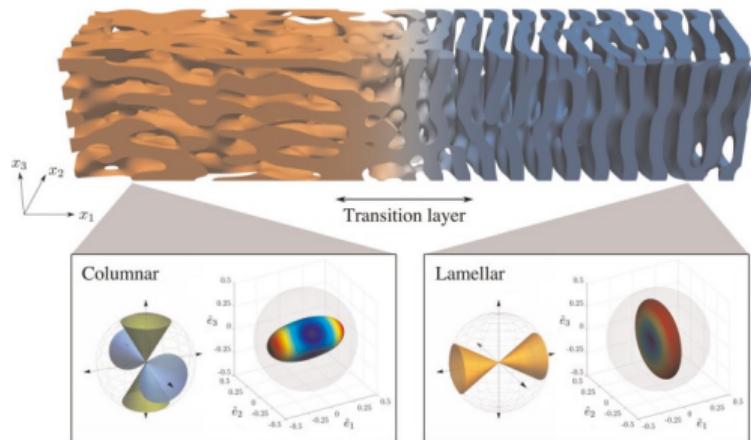
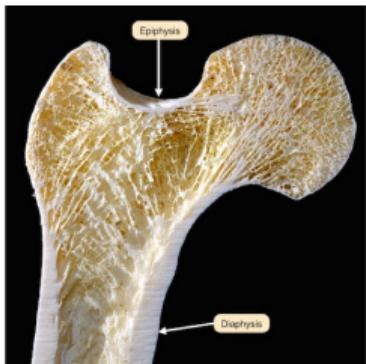
Scopus query: “Machine learning” $\approx 3,197,354$ documentos encontrados
Artículos publicados en el 2025: 365,569



Oscilador armónico y su energía total

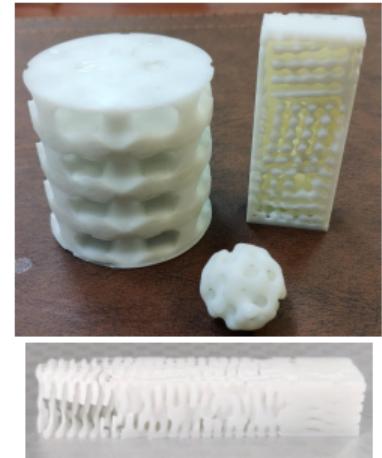
¡No siempre funcionan bien en modelos físicos!

Prótesis personalizadas → Diseño computacional → impresión 3D



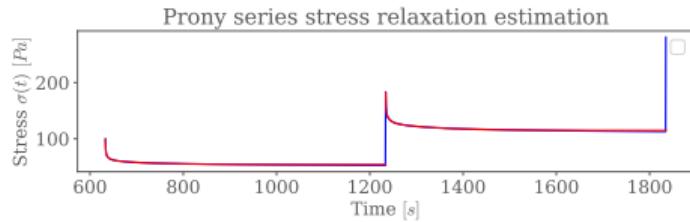
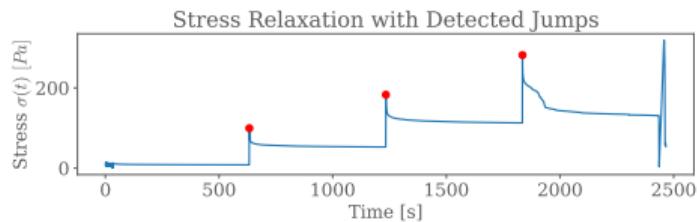
Trabéculas del fémur

Propiedades anisotrópicas del espinodoide,
Kumar et al. , 2020

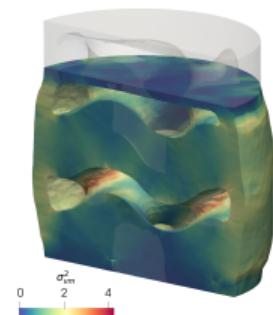


Diseño computacional → ¿Qué modelo matemático utilizar?

Relajación de tensiones en ensayos uniaxiales

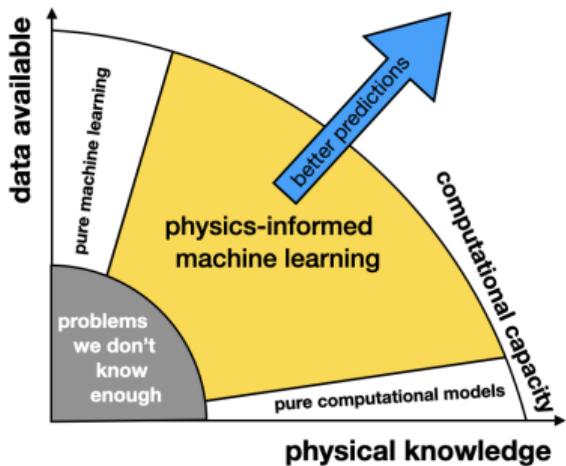


$$\min_{u \in V} \underbrace{\int_{\Omega} \psi(u) dx}_{?} - \int_{\Omega} B \cdot u \, dx - \int_{\partial\Omega} T \cdot u \, ds \rightarrow 0$$



¡Integrar observaciones puede ser desafiante!

¿Como podemos sacar provecho de lo mejor de ambas áreas?



Al integrar ambas áreas se busca:

- Interpretabilidad en ML
- Generalización
- **Menos datos de entrenamiento**

Imagen tomada de "*Introduction to physics-informed neural networks*" (Francisco Sahli)

Aprendizaje de máquinas: deep learning

Aprendizaje de máquinas

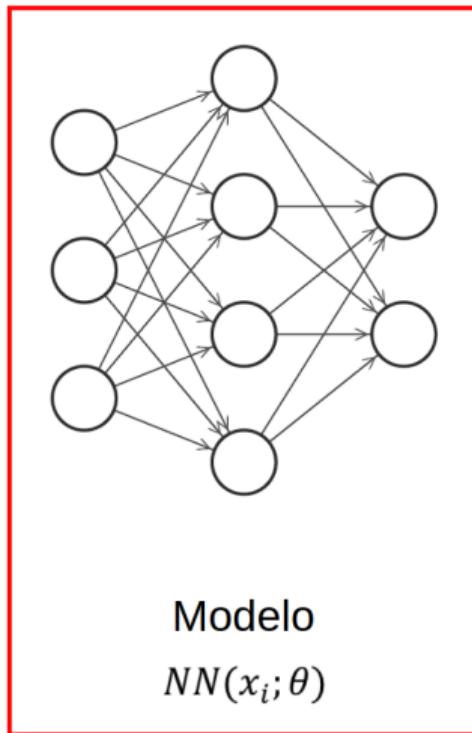
"Un programa de computador aprende de una experiencia E , respecto de tareas T y una medida de desempeño P , si su desempeño en T , medido mediante P , mejora con la experiencia E ." (Mitchell, 1997)

Aprendizaje de máquinas



Imagen tomada de internet

Entrada x_i

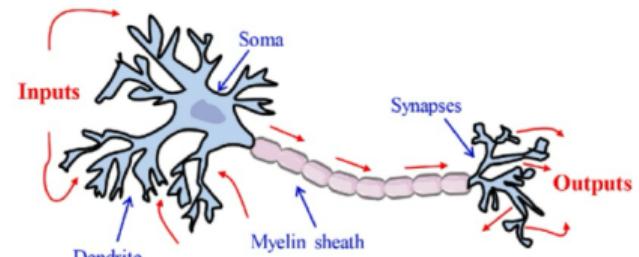
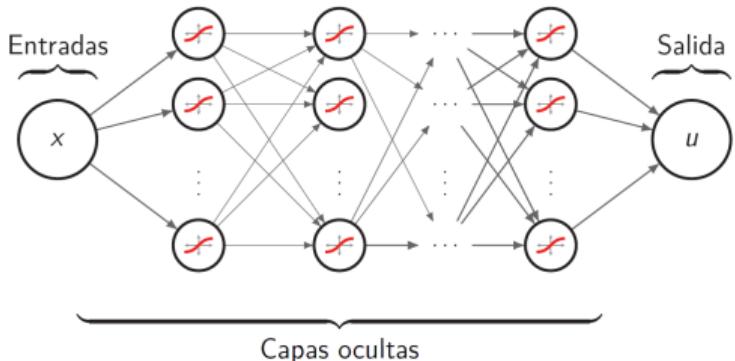


Probabilidad:
70% Muffin
30% Chihuahua

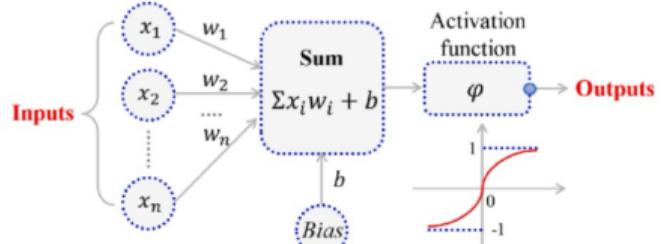
Salida $y_i = NN(x_i; \Theta)$

Aprendizaje de máquinas: deep learning

Redes neuronales: modelos computacionales



(a) Biological neuron

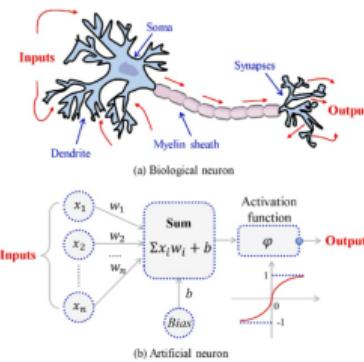
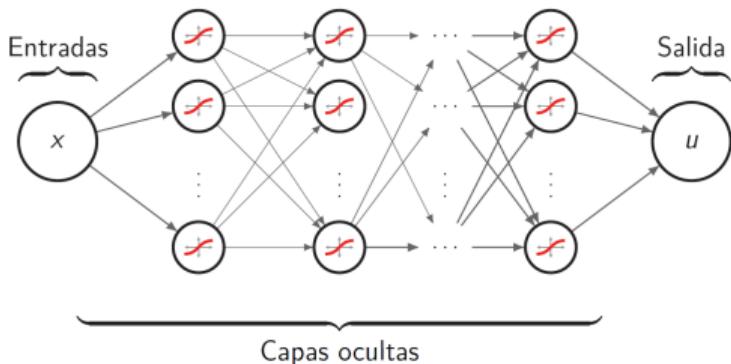


(b) Artificial neuron

Imagen tomada de internet

Aprendizaje de máquinas: deep learning

Redes neuronales: modelos computacionales



Funciones compuestas

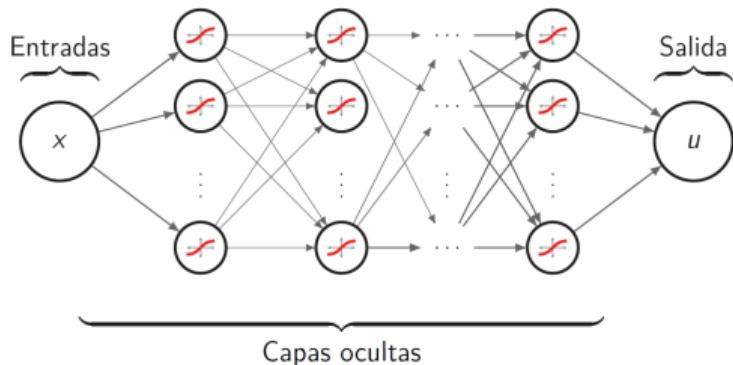
$$f(x; \theta) = f_n(\dots f_2(f_1(x; \theta_1); \theta_2); \dots; \theta_n)$$

Pesos y sesgos, función de activación no lineal

$$\begin{aligned} h_i &= f_i(h_{i-1}; \theta_i = \{\mathbf{W}_i, \mathbf{b}_i\}) \\ &= g(\mathbf{W}_i^T h_{i-1} + \mathbf{b}_i) \end{aligned}$$

Aprendizaje de máquinas: deep learning

Redes neuronales: modelos computacionales



Función de pérdida

$$\mathcal{L}_{\text{MSE}}(\boldsymbol{\theta}; \{x_i, y_i\}_{i=1}^N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i; \boldsymbol{\theta}))^2$$

Método de entrenamiento: Descenso de gradiente
Retropropagación

$$\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} - \varepsilon \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}_{\text{MSE}}$$

Aprendizaje de máquinas: deep learning

Epoch 000,000 Learning rate 0.03 Activation Tanh Regularization None Regularization rate 0 Problem type Classification

DATA
Which dataset do you want to use?



FEATURES
Which properties do you want to feed in?

2 HIDDEN LAYERS

+ - 4 neurons
+ - 2 neurons

X₁ X₂ X₁² X₂² X₁X₂ sin(X₁) sin(X₂)

The outputs are mixed with varying weights, shown by the thickness of the lines.

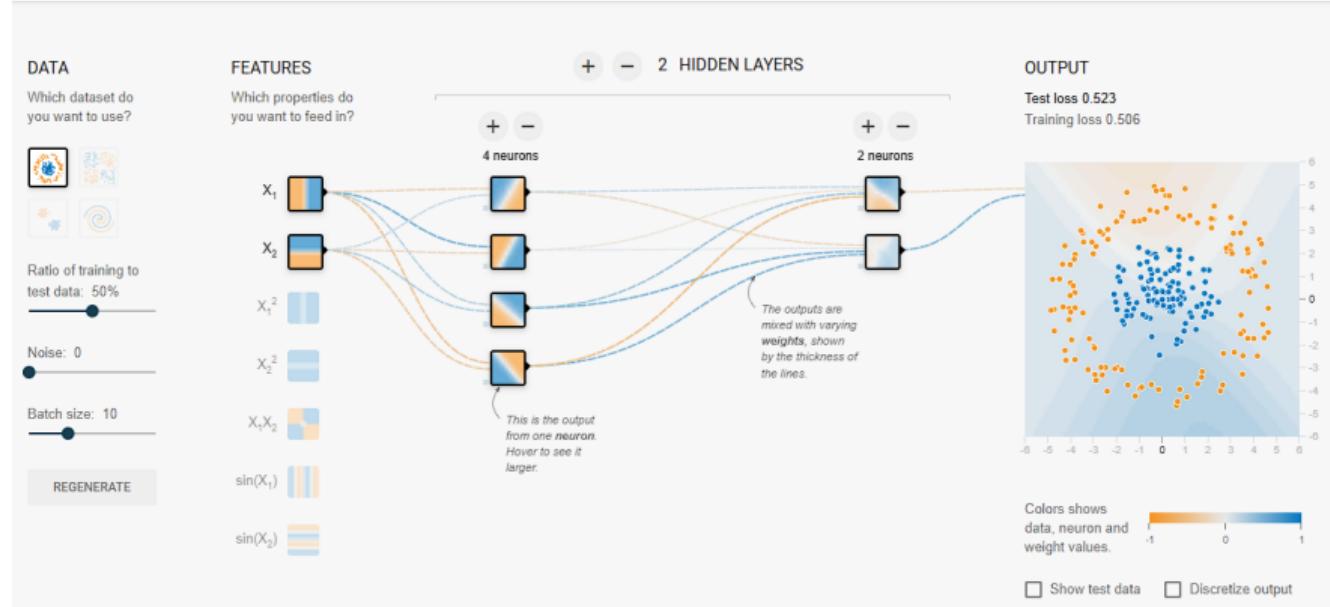
This is the output from one neuron. Hover to see it larger.

OUTPUT
Test loss 0.523
Training loss 0.506

Link!

Ratio of training to test data: 50%
Noise: 0
Batch size: 10
REGENERATE

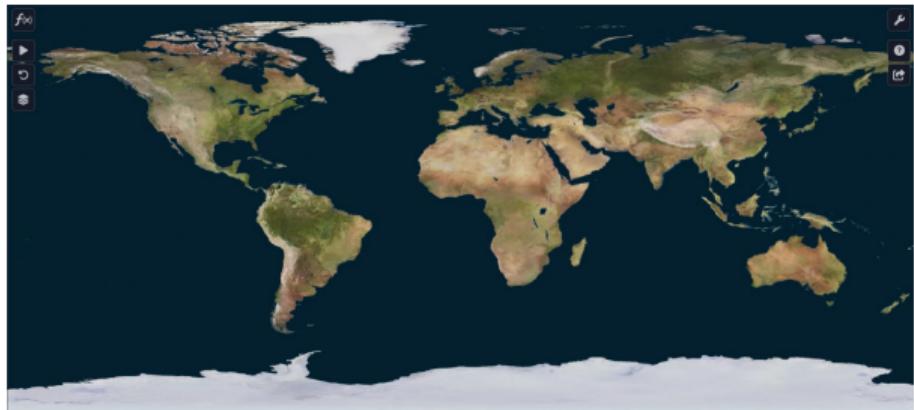
Colors shows data, neuron and weight values.
 Show test data Discretize output



Modelos físicos: problemas directos e inversos

Modelos físicos: simulación, predicción y diseño

- Simular procesos naturales
- Evaluar hipótesis científicas
- Experimentación *in-silico*
- Diseñar y optimizar soluciones
- Asimilación de datos
- **Desarrollo de la medicina de precisión**



“Friendly Floatees Spill” (Patitos de hule), 1992
Simulación realizada con VisualPDE

Modelos físicos: conceptos matemáticos clave

Función: $f(x) = y, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Variable	Descripción
$\mathbf{u}(x, y, z), \quad \mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	Desplazamientos (Mecánica estática)
$T(x, y, z, t), \quad T : \mathbb{R}^3 \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$	Evolución de temperatura (Transferencia de calor)
$c(x, y), \quad c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	Concentración (Química y biología)
$v(t), \quad v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$	Potencial de acción (ECG, fisiología)

Modelos físicos: conceptos matemáticos clave

Función: $f(x) = y, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Derivada: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, e.g.

- $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$
- $f(x) = e^{-3t} + 2e^{4t} \rightarrow f'(x) = -3e^{-3t} + 8e^{4t}$
- ...

Modelos físicos: conceptos matemáticos clave

Función: $f(x) = y, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Derivada: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, e.g.

Derivada parcial: $\frac{\partial u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_1, \dots, x_i+h, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$, e.g.

- Gradiente: $\nabla(\circ) = \left[\frac{\partial(\circ)}{\partial x_1}, \frac{\partial(\circ)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial(\circ)}{\partial x_n} \right]$
- Divergencia: $\text{div}(\mathbf{a}) = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}$
- Laplaciano: $\Delta(\circ) = \nabla \cdot \nabla(\circ) = \text{div}(\nabla(\circ)) = \frac{\partial^2(\circ)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\circ)}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2(\circ)}{\partial x_n^2}$

Modelos físicos: conceptos matemáticos clave

Función: $f(x) = y, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Derivada: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, e.g.

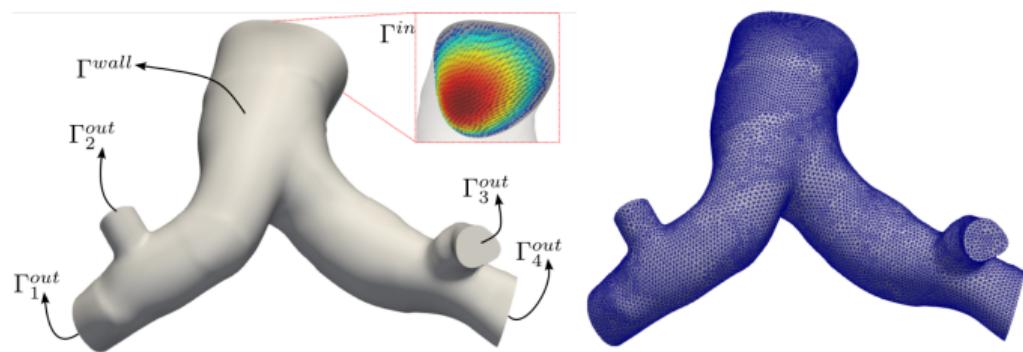
Derivada parcial: $\frac{\partial u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_1, \dots, x_i+h, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$, e.g.

Ecuaciones diferenciales: Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una variable desconocida y sus derivadas.

	Lineal	No Lineal
EDO	$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$ (Masa-Resorte-Amortiguador)	$l \frac{d^2\theta}{dt^2} - g \sin(\theta) = 0$ (Péndulo Invertido)
EDP	$\tau \frac{\partial V}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V$ (Ecuación del Cable - Neuronas)	$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (Navier-Stokes)

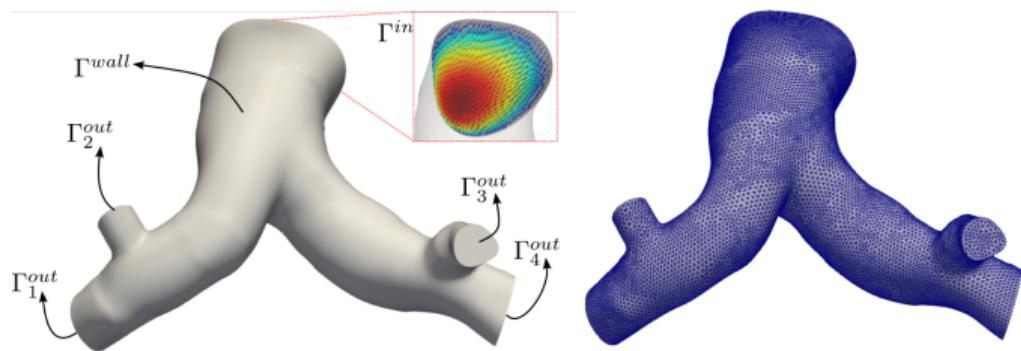
Modelos físicos: ecuaciones diferenciales

- Dominio espacial Ω (y/o temporal t)



Modelos físicos: ecuaciones diferenciales

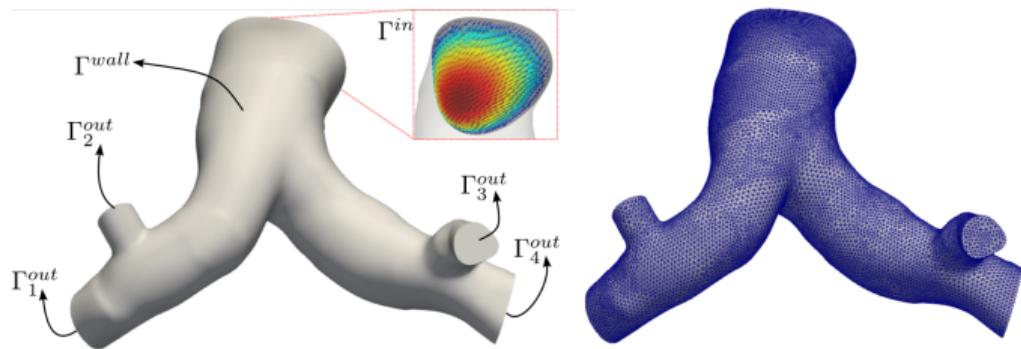
- Dominio espacial Ω (y/o temporal t)
- Derivadas sobre una función desconocida



$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T]$$

Modelos físicos: ecuaciones diferenciales

- Dominio espacial Ω (y/o temporal t)
- Derivadas sobre una función desconocida
- Condiciones iniciales y de frontera



$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T]$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_{inlet}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma^{in} \\ \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma^{wall} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p \mathbf{n} = -P \mathbf{n}, & \Gamma_i^{out}, \quad i = 1, \dots, 4 \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases}$$

Problemas directos

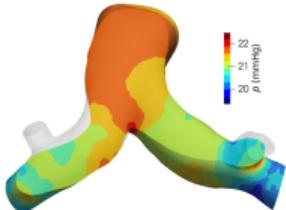
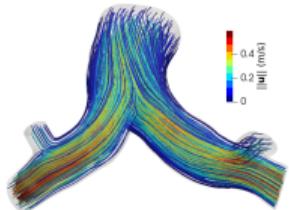
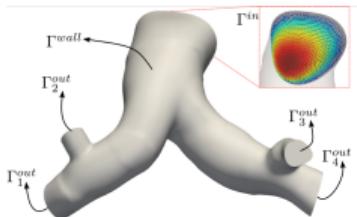
De las causas a los efectos

Entradas (causas),
son "conocidas"

Resultado (efecto) es
"desconocido"

Modelo físico $\rightarrow \mathcal{F}(\bar{A}) = \bar{B}$

$$\mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* + \nabla p^* = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0$$
$$BC: \quad \mathbf{u}^* = 0, \quad \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \mathbf{n}} - n p^* = 0$$



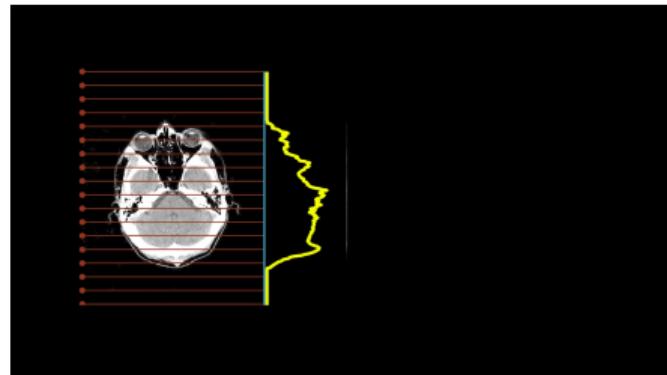
Problemas inversos

De los efectos a las causas

Entradas (causas), son
"desconocidas"

Resultado (efecto), es
"conocido"

Modelo físico $\rightarrow \mathcal{F}(\bar{A}) = B$



Reconstrucción de tomografía axial computarizada
(TAC). Por Samuli Siltanen



Teorema de aproximación universal: un puente entre los modelos físicos y el aprendizaje máquinas

Teorema de aproximación universal

Una **red neuronal con una sola capa oculta** y una función de activación no constante, acotada y continua σ , puede **aproximar cualquier función continua f** definida en un dominio cerrado y acotado Ω con una **precisión arbitraria**.

Para cualquier función continua $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, existe una red neuronal de la forma

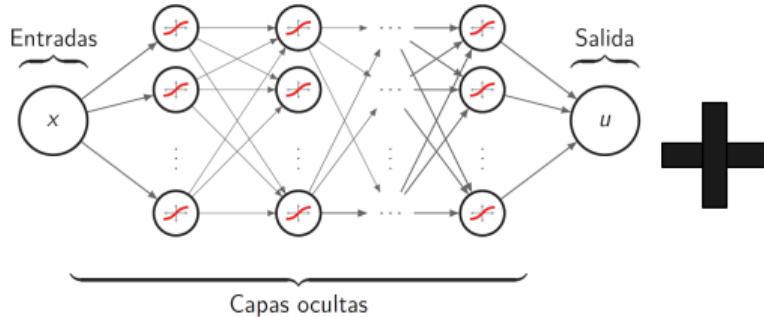
$$\phi(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sigma(\mathbf{w}_i^T x + b_i)$$

con parámetros $\alpha_i, \mathbf{w}_i, b_i$ y un número de neuronas N en la capa oculta, tal que

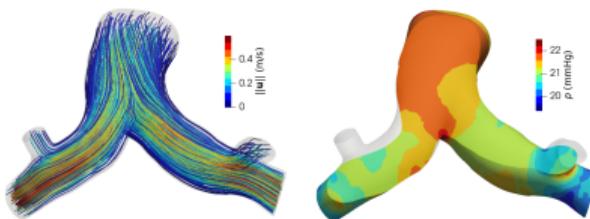
$$\|f - \phi\| < \varepsilon \quad \text{en } \Omega$$

Physics-Informed Neural Networks

Redes Neuronales Artificiales Informadas por la Física



$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* + \nabla p^* &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ BC: \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{0}, \quad \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \mathbf{n}} - n p^* &= \mathbf{0} \end{aligned}$$



Raissi, 2019 (PINNs)



Karniadakis, 2021 (PIML)



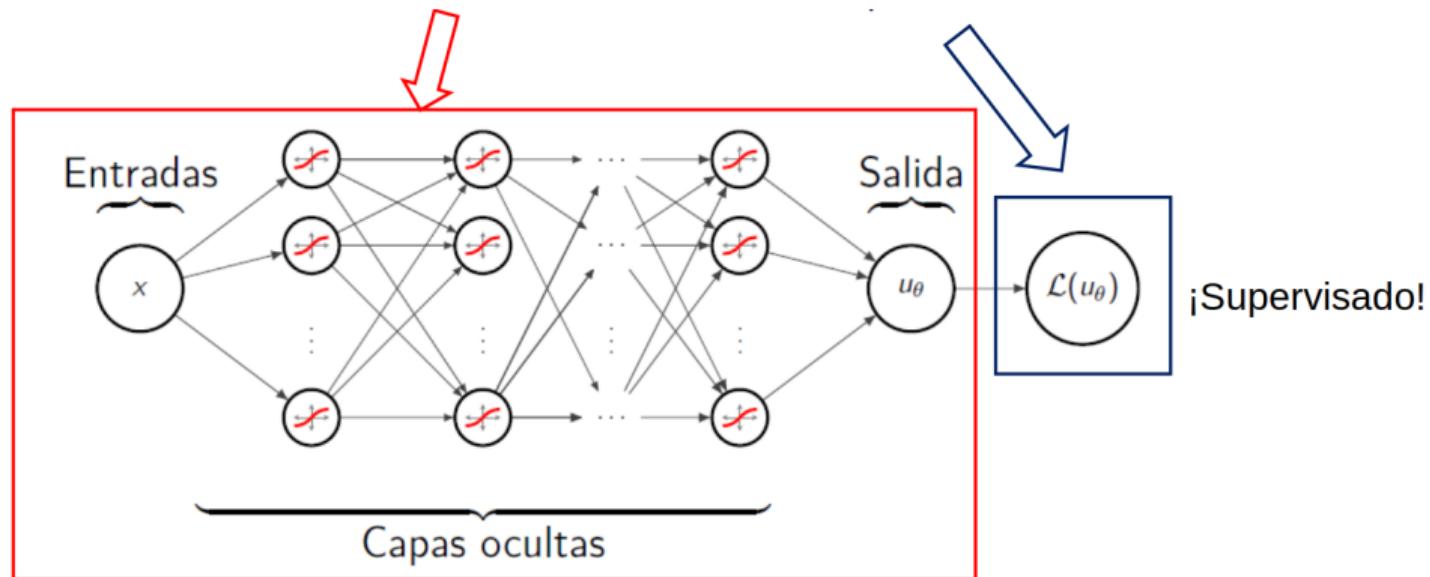
Expert's guide



Ben Moseley

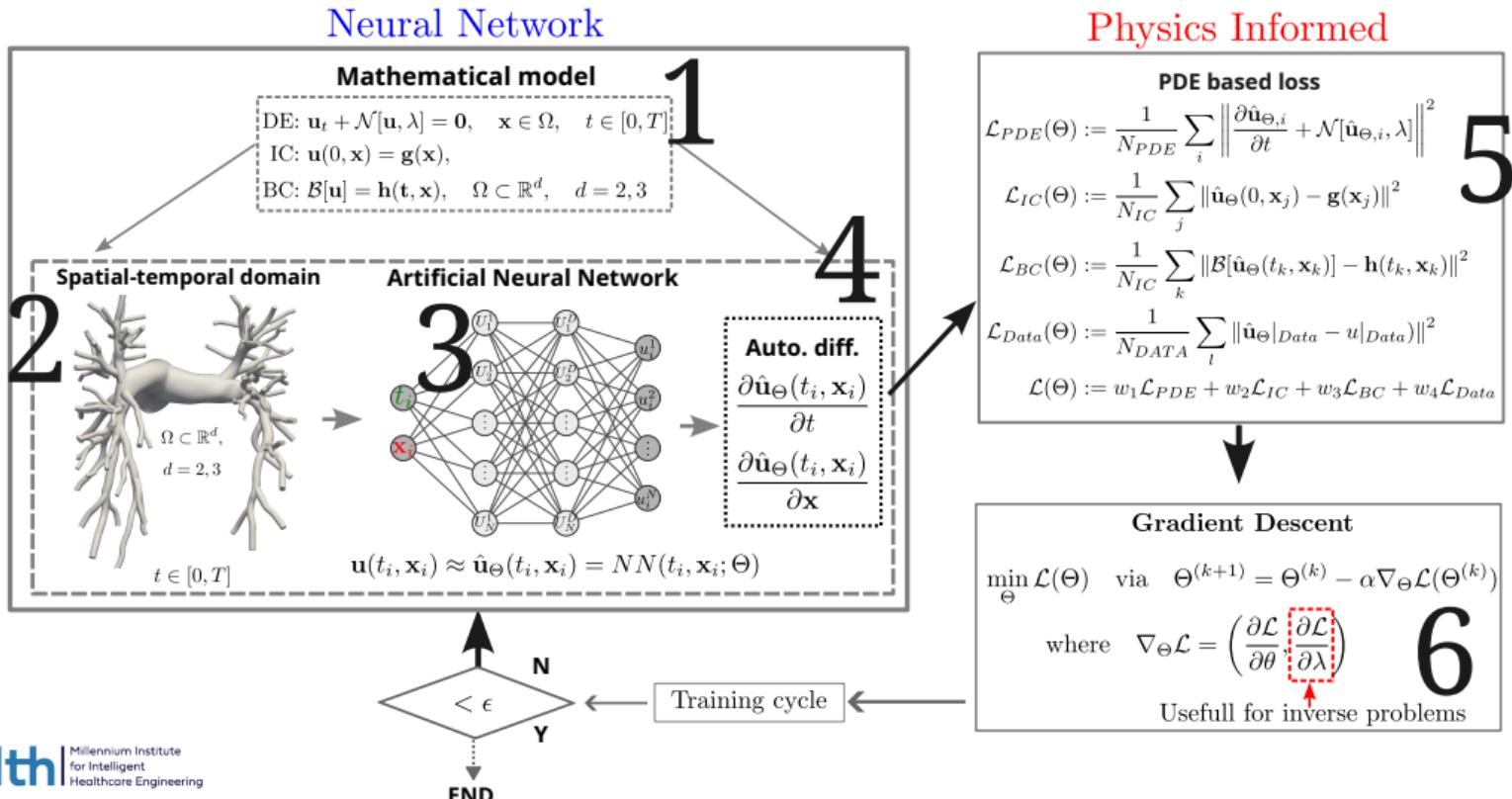
Physics-Informed Neural Networks: esquema base

Redes Neuronales Artificiales Informadas por la Física



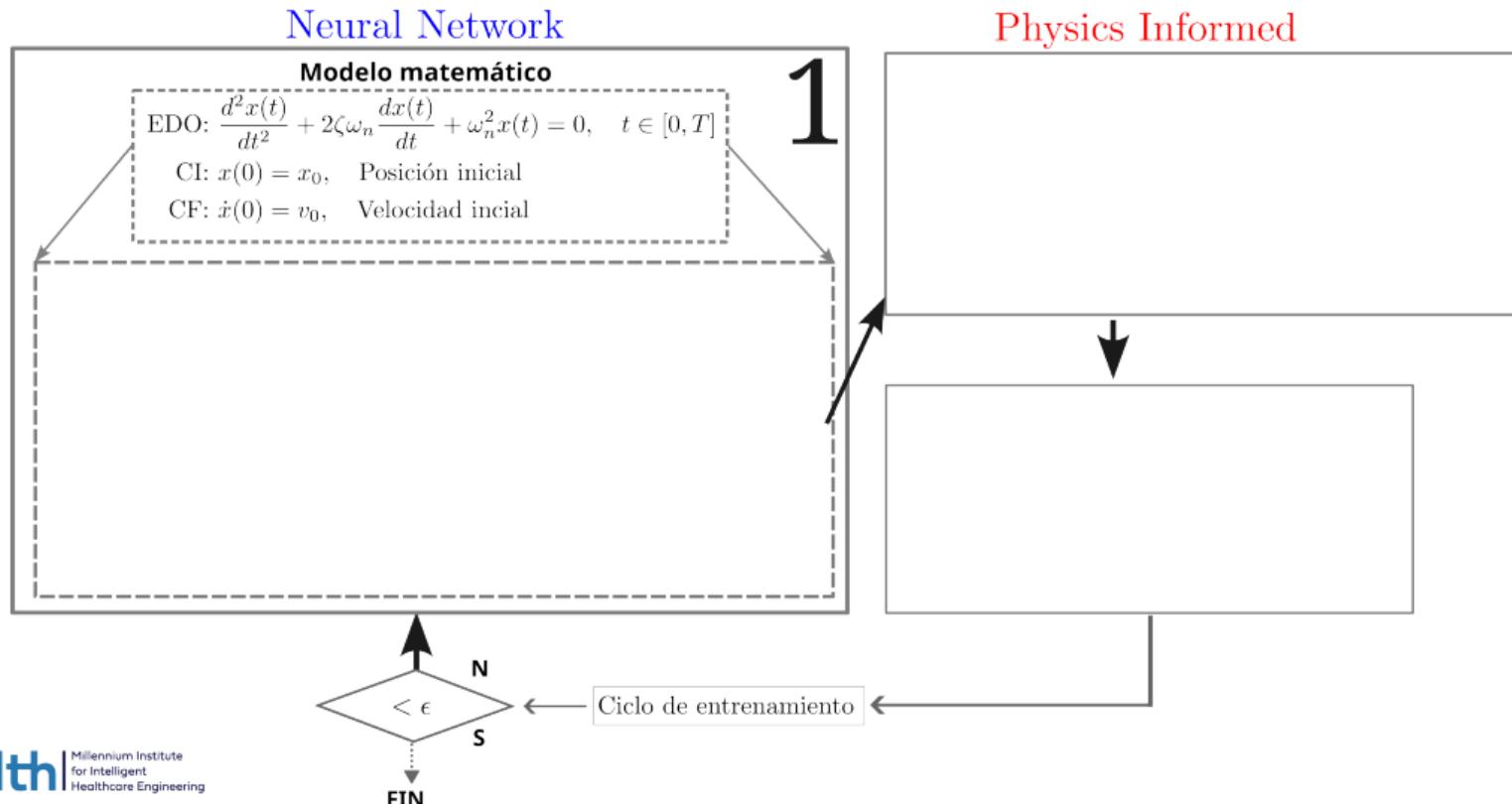
Ingrediente final: diferenciación automática

Physics-Informed Neural Networks: esquema base

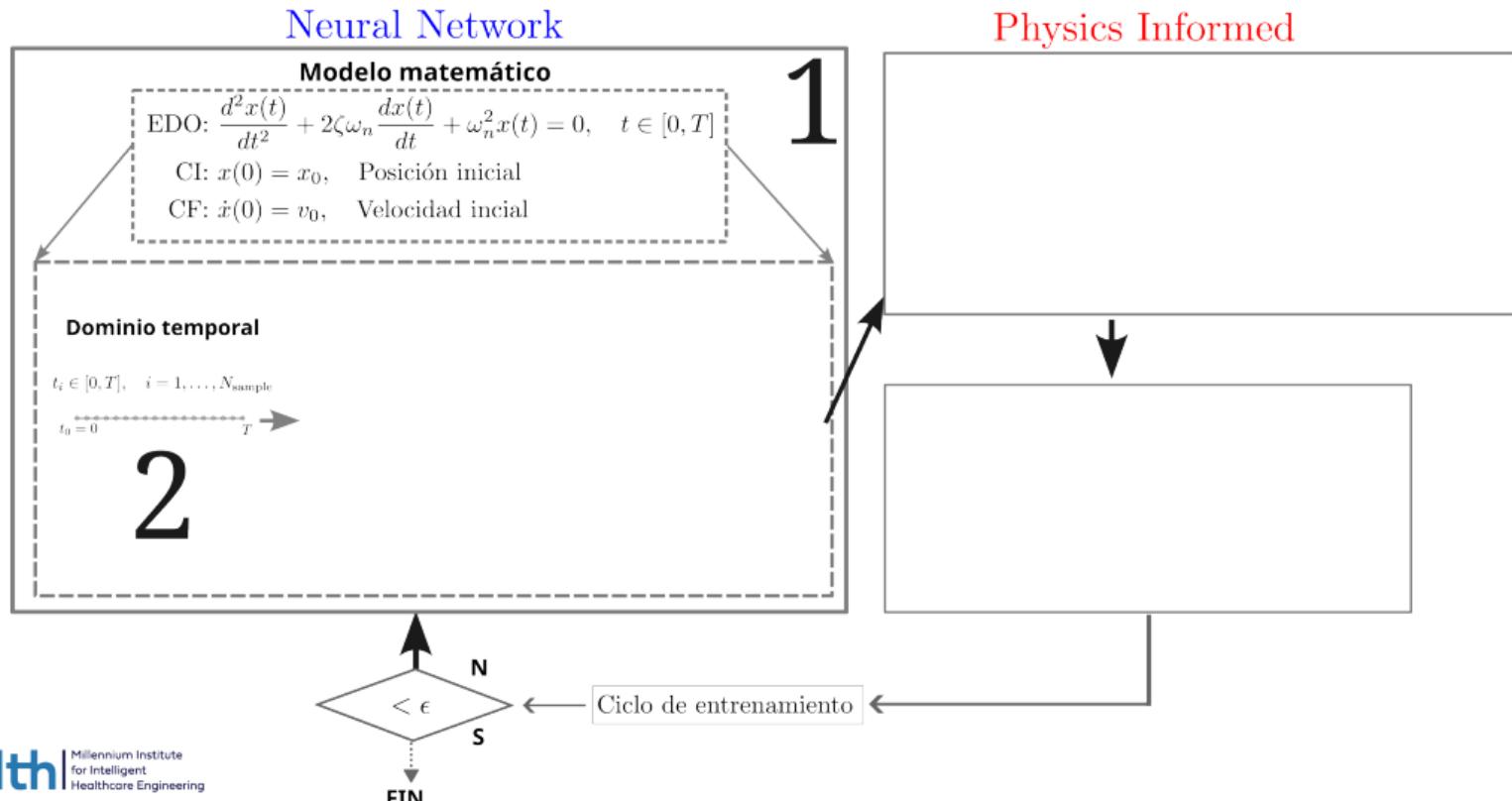


PINNs: Sistema masa-resorte-amortiguador

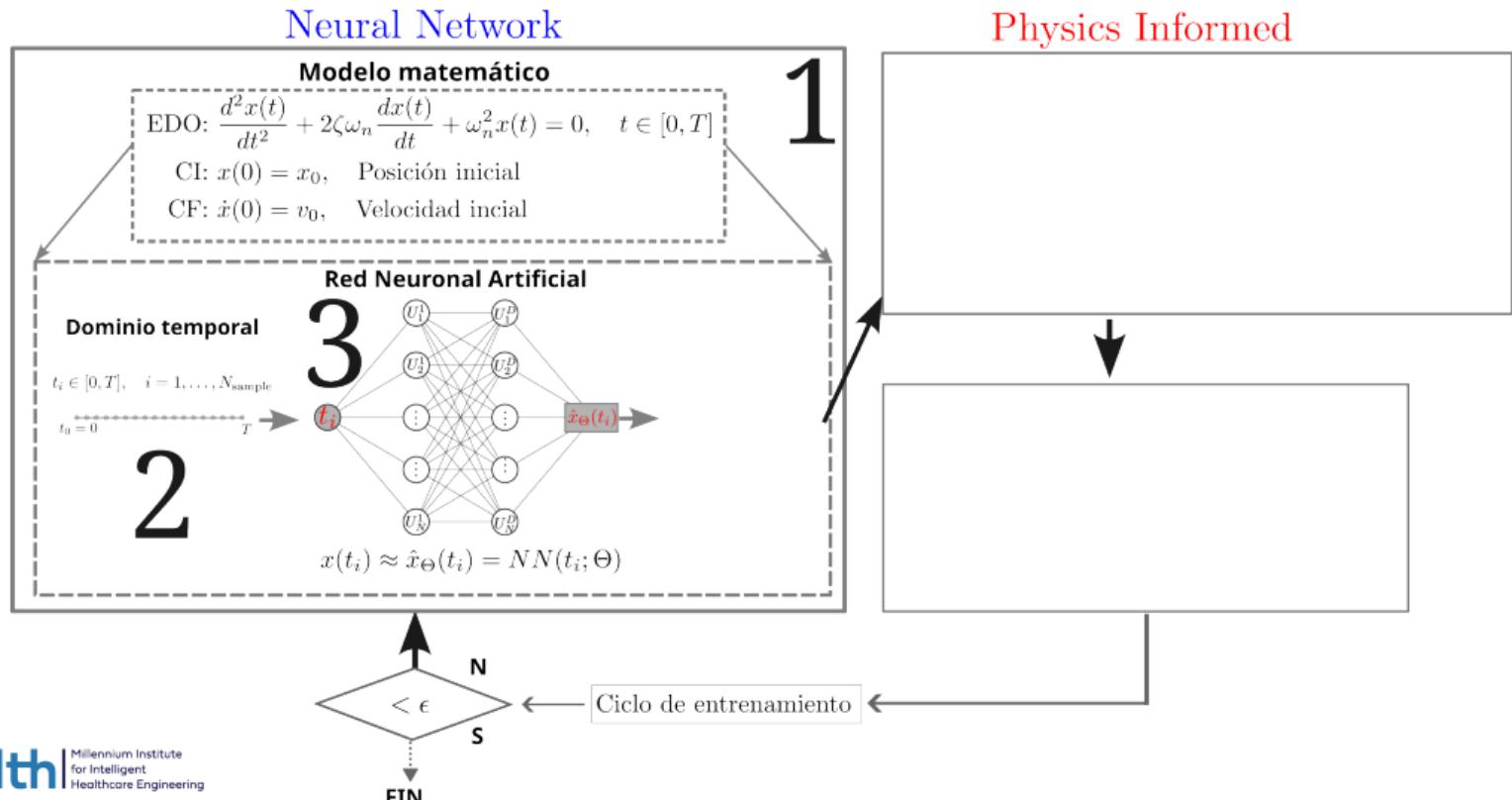
PINNs: Sistema masa-resorte-amortiguador



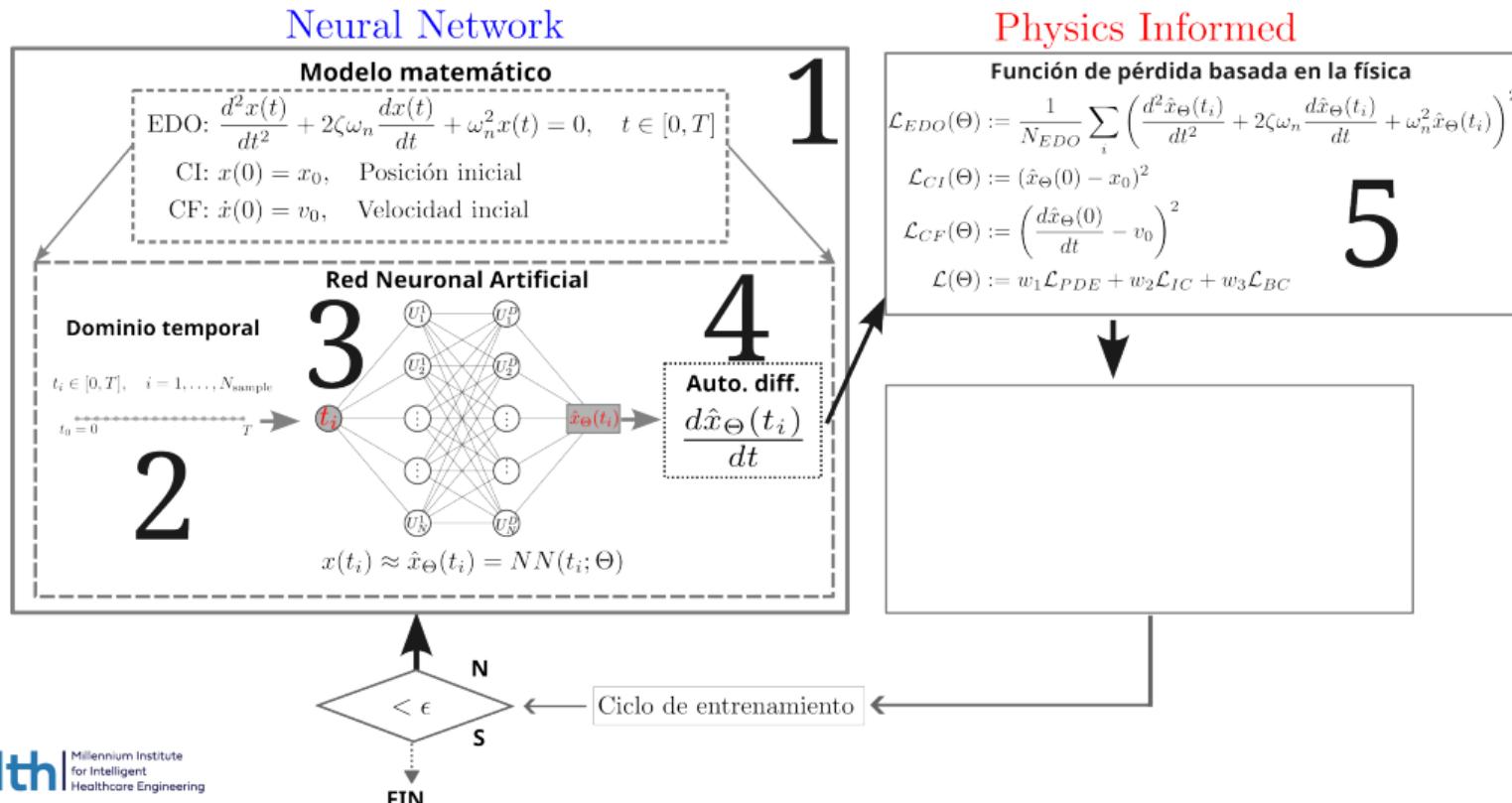
PINNs: Sistema masa-resorte-amortiguador



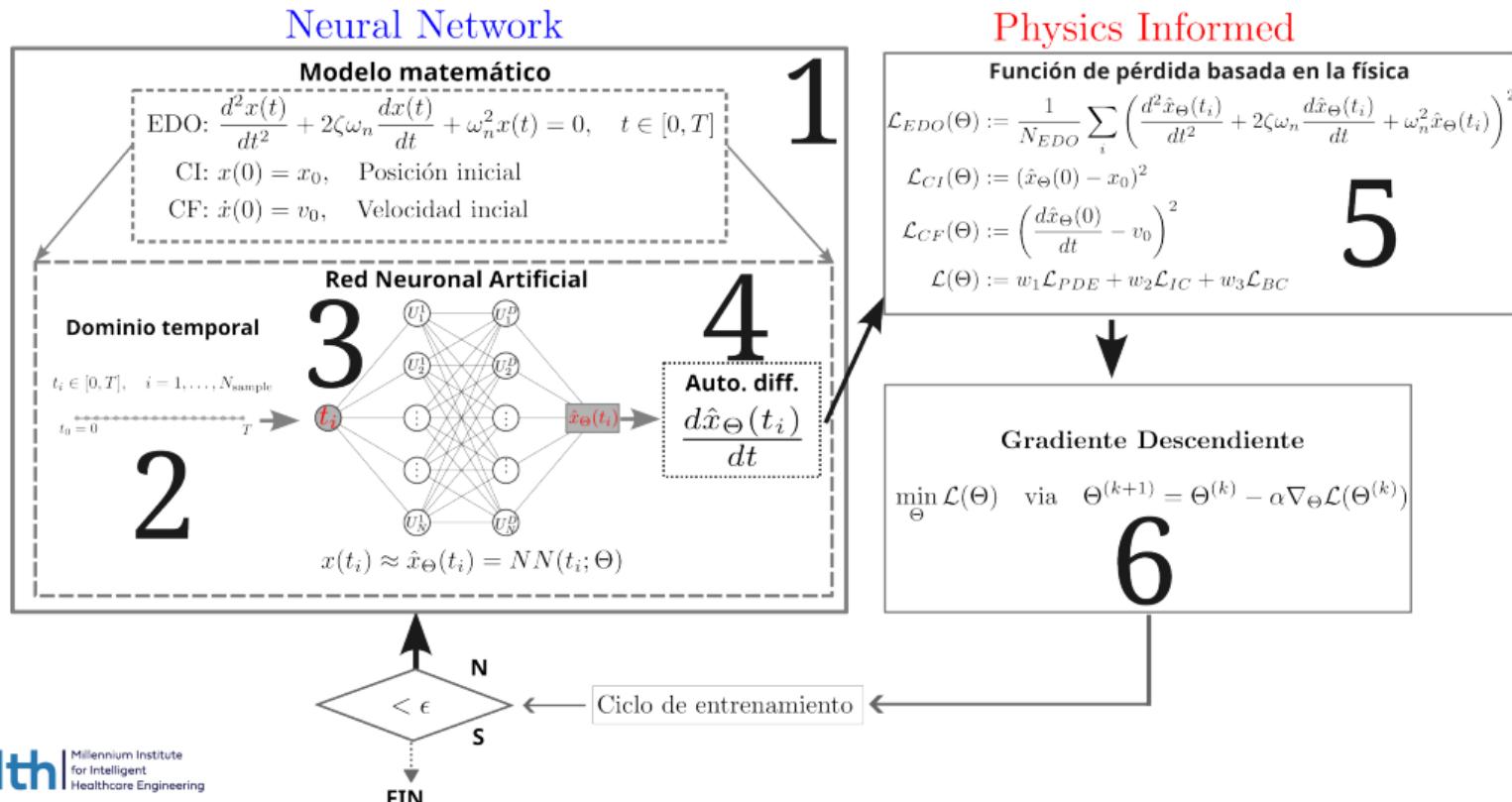
PINNs: Sistema masa-resorte-amortiguador



PINNs: Sistema masa-resorte-amortiguador

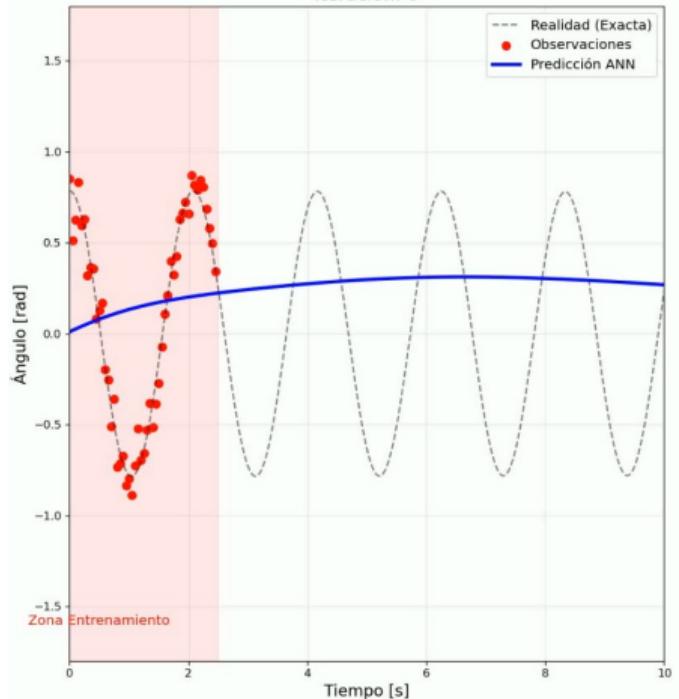


PINNs: Sistema masa-resorte-amortiguador

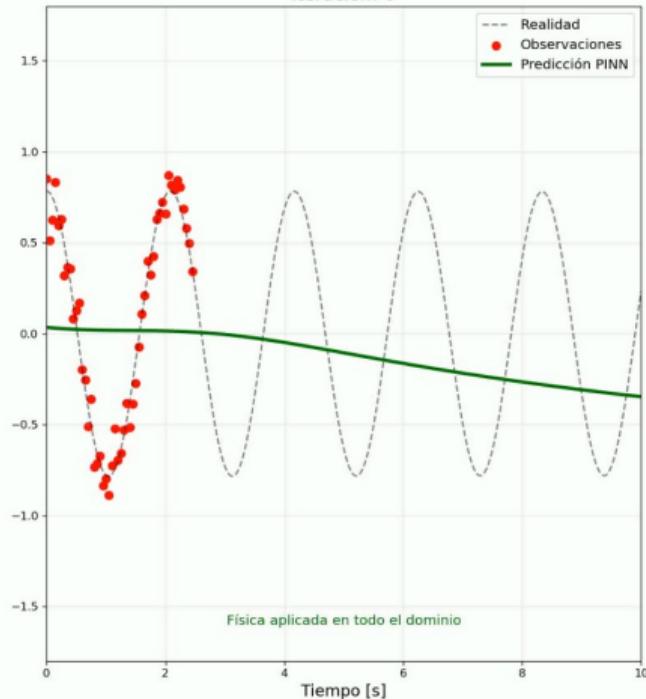


Pros y contras

ANN (Solo Datos)
Iteración: 0



PINN (Datos + Física)
Iteración: 0



Pros

1. Sin malla (pero sí sus nodos)
2. Funcionan bien en formulaciones mixtas (o acopladas)
3. Problemas directos e inversos, “descubrimiento” de modelos físicos escondidos
4. Funcionan bien en datos con ruido
5. Puede eludir algunas condiciones que harían que el problema inverso esté mal planteado, como las condiciones de contorno

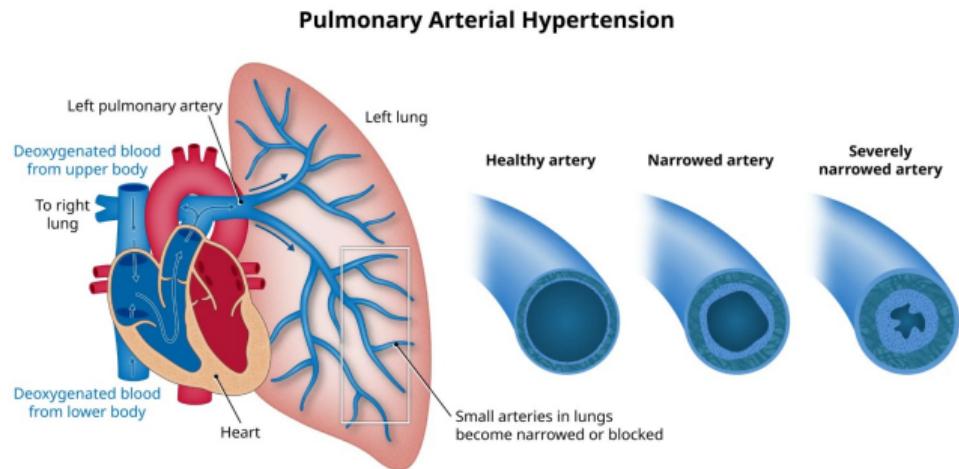
Contras

1. Lentas de entrenar
2. No cumplen completamente las condiciones de frontera en geometrías irregulares
3. Difíciles de sintonizar. No hay una arquitectura definida como “la mejor”
4. En comparación con los métodos numéricos, no hay estimación del error a priori
5. Tienen sesgos espectrales

Aplicaciones: PINNs para la estimación
de la presión arterial pulmonar

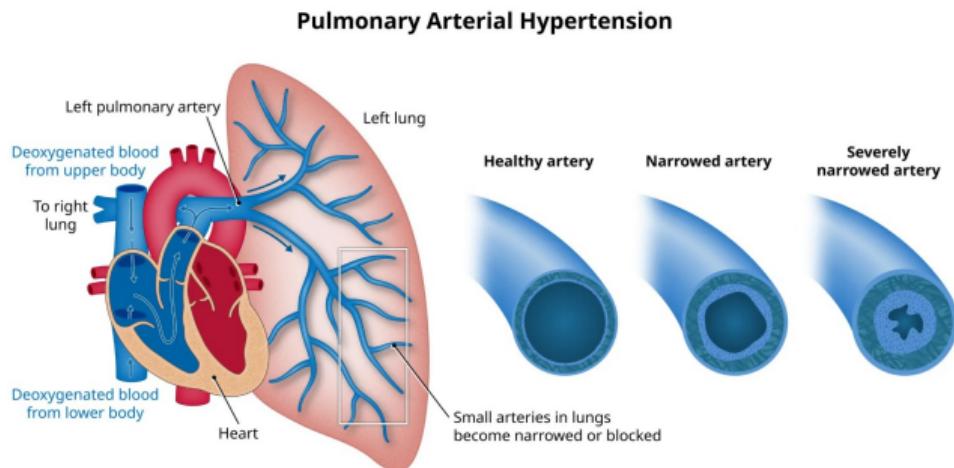
¿Qué es la hipertensión arterial pulmonar?

- mPAP>25 mmHg
- Diagnóstico tardío
- GS: RHC
- Subdiagnosticado, difícil monitoreo



¿Qué es la hipertensión arterial pulmonar?

- mPAP>25 mmHg
- Diagnóstico tardío
- GS: RHC
- Subdiagnosticado, difícil monitoreo



¿Cómo estimar la presión arterial en forma no invasiva, precisa y específica de cada sujeto?

Método PINN para el estudio de la PAPm

ROM-Navier-Stokes



Navier-Stokes estacionario

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad x \in \Omega$$

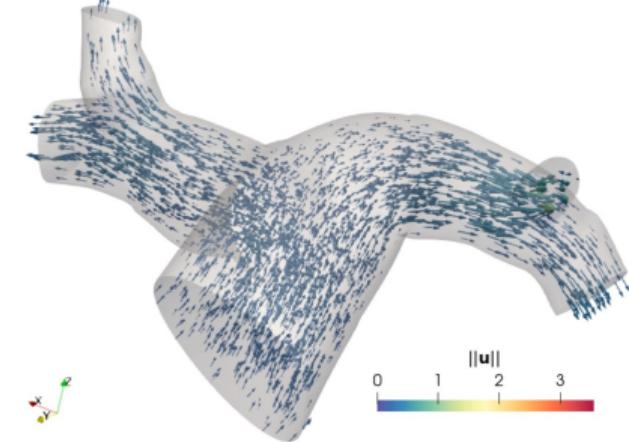
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{inlet}(x), \quad x \in \Gamma^{in}$$

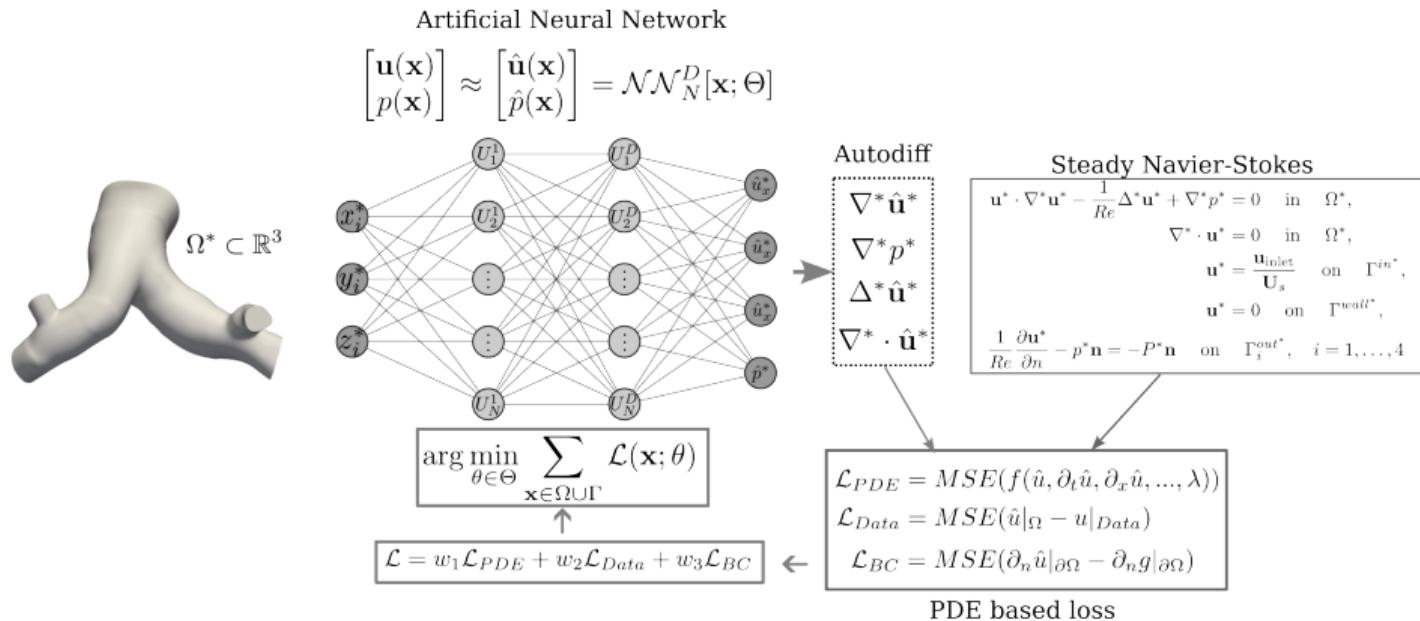
$$\mathbf{u} = 0, \quad x \in \Gamma^{wall}$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p \mathbf{n} = -P \mathbf{n}, \quad \Gamma_i^{out}, \quad i = 1, \dots, 4$$

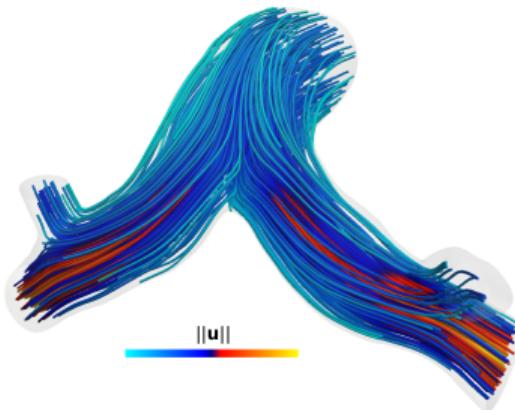
Solo contamos con datos de velocidad
de la sangre (4D-flow MRI-PC)



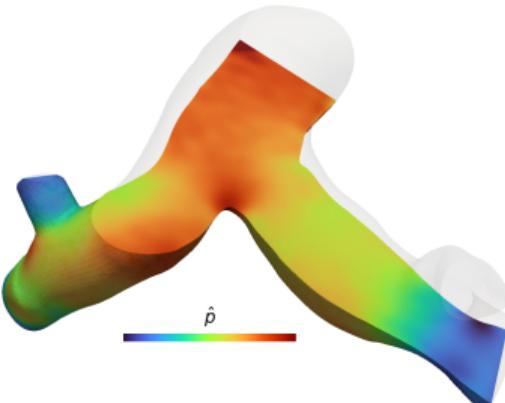
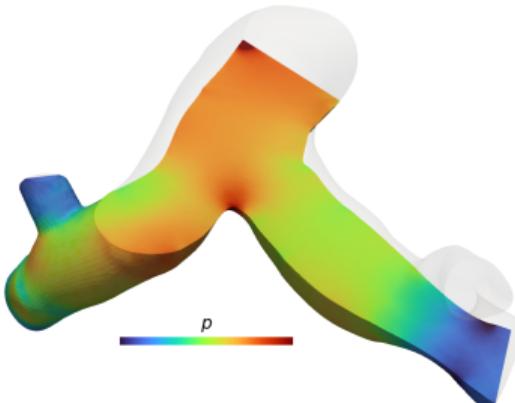
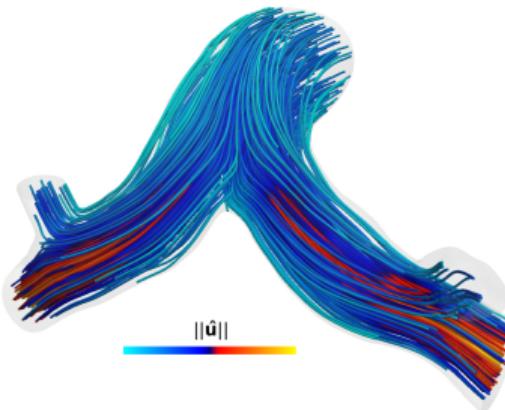
Método PINN para el estudio de la PAPm personalizada



Solución numérica



Solución PINN



Conclusiones

- Las PINNs ofrecen una metodología innovadora que combina modelos físicos y aprendizaje automático.

Conclusiones

- Las PINNs ofrecen una metodología innovadora que combina modelos físicos y aprendizaje automático.
- Las PINNs son particularmente útiles para abordar problemas inversos, multifísicos, “incompletos” y con datos ruidosos.

Conclusiones

- Las PINNs ofrecen una metodología innovadora que combina modelos físicos y aprendizaje automático.
- Las PINNs son particularmente útiles para abordar problemas inversos, multifísicos, “incompletos” y con datos ruidosos.
- “Unas por otras”: eludir algunas restricciones, como las condiciones de frontera, permite obtener soluciones aproximadas de problemas inversos mal planteados.

Conclusiones

- Las PINNs ofrecen una metodología innovadora que combina modelos físicos y aprendizaje automático.
- Las PINNs son particularmente útiles para abordar problemas inversos, multifísicos, “incompletos” y con datos ruidosos.
- “Unas por otras”: eludir algunas restricciones, como las condiciones de frontera, permite obtener soluciones aproximadas de problemas inversos mal planteados.
- No existe una única arquitectura óptima para las PINNs, lo que requiere experimentación y ajustes específicos para cada problema.

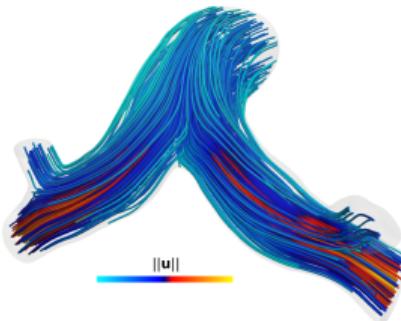
¡Muchas gracias por su atención!

David Ortiz-Puerta

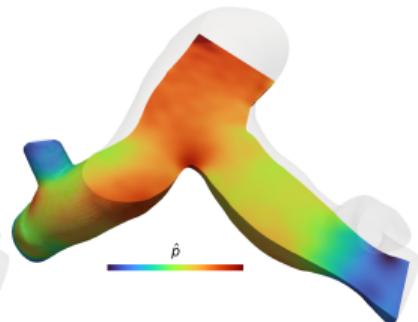
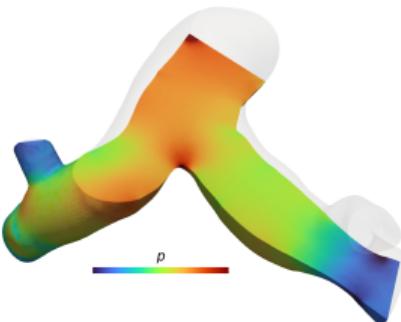
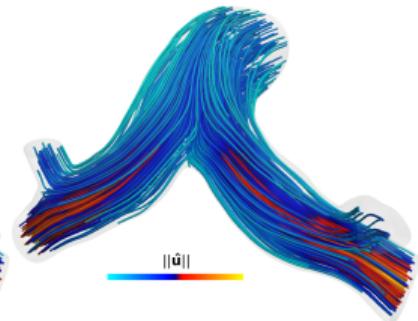
david.ortiz.puerta@gmail.com

david.ortiz@uv.cl

Solución numérica



Solución PINN



This work was funded by ANID - Millennium Science Initiative Program - ICN2021_004 and ANID - Fondecyt de Postdoctorado N°3250439 método de red neuronal artificial informada por la física para modelación de interacción fluido-estructura: estimación y caracterización precisa y no invasiva de la presión arterial pulmonar, personalizada al sujeto, basada en imágenes de resonancia magnética