7. Лабораторная работа №4

7.1. Вводные замечания

В данной лабораторной работе рассматривается применение метода Монте–Карло к вычислению площадей и двойных интегралов. Кроме непосредственно вычисления площадей и объемов необходимо построить графики времени выполнения, ускорения и эффективности.

7.2. Аппроксимация кратных интегралов методом Монте-Карло

Если при вычислении однократных интегралов Римана можно применить различные эффективные детерминированные численные методы, то в случае необходимости аппроксимации кратных интегралов, зачастую единственным методом аппроксимации служит метод Монте-Карло. Рассмотрим, в чем он заключается на примере двумерного пространства.

Пусть требуется аппроксимировать кратный интеграл по области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{I} = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Метод Монте-Карло применительно к данной задаче, заключается в генерировании N равномерно распределенных случайных точек $(x_i, y_i) \in \Omega$, где $i = 1, \dots, N$. Площадь области, как известно из курса математического анализа, также выражается через кратный интеграл:

$$S = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Тогда справедлива формула:

$$\mathcal{I} \approx I_N = S\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i) = S \cdot \mathbb{E}_N[f],$$

где $\mathbb{E}_N[f]$ — выборочное среднее (среднее арифметическое) значений функции $f(x, y)$ на всем множестве точек (x_i, y_i). Согласно закону больших чисел, справедливо соотношение

$$\lim_{N\to\infty} I_N = \mathcal{I}.$$

Оценка сходимости метода Монте-Карло основывается на центральной предельной теореме, которая позволяет дать оценку абсолютного значения отклонения выборочного среднего от математического ожидания. Оценка дается соотношением

$$\frac{S\sigma_N}{\sqrt{N}}$$

где σ_N является выборочной несмещенной дисперсией функции $f(x, y)$:

$$\mathbb{D}_N[f] = \sigma_N = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(f(x_i, y_i) - \langle f \rangle\right)^2.$$

Основной вклад вносит множитель $1/\sqrt{N}$. Он показывает, что точность аппроксимации интеграла методом Монте-Карло растет как квадратный корень от числа испытаний (сгенерированных точек). Например, чтобы получить точность 10^{-3} потребуется сгенерировать около 10^6 точек. В этом заключается существенный недостаток метода Монте-Карло. Однако следует отметить ряд преимуществ.

1. Погрешность метода не зависит от размерности интеграла.

2. Метод хорошо масштабируется и распараллеливается

7.3. Вычисление площадей методом Монте-Карло

Метод Монте-Карло можно использовать для нахождения площадей, объемов и гиперобъемов. Суть метода заключается в использовании геометрического определения вероятности. Рассмотрим метод на примере вычисления площади круга.

Рассмотрим некоторый круг с центром в начале декартовой системы координат $\Omega_\circ = \{x^2+y^2 \leqslant a^2\}$ и некоторую прямоугольную область $\Omega_\square$, полностью содержащую данный круг внутри себя. Оптимально, чтобы данная область была описанным вокруг круга квадратом (см. рис. 5), тогда погрешность метода будет минимально возможной. Поэтому положим $\Omega_\square = \{(x,y)\colon x \in [-a,a], y \in [-a,a]\}$.

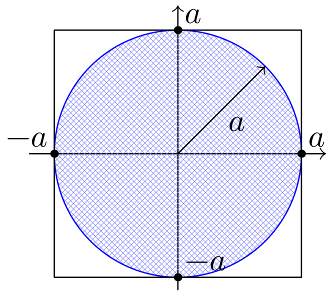

Рис. 5: Вычисление площади круга методом Монте-Карло.

Рассмотрим точку, координаты которой будут случайными равномерно распределенными числами из отрезка $[-a,a]$. По геометрическому определению вероятности, вероятность попадания этой случайной точки в область $\Omega_\circ$ (событие A) равна отношению площади окружности к площади описанного квадрата $\Omega_\square$:

$$P(A) = \frac{S_\circ}{S_\square},$$

где $S_\circ$ — площадь области $\Omega_\circ$, а $S_\square$ — площадь области $\Omega_\square$.

Пусть мы сгенерировали всего N точек (x_i, y_i) из прямоугольной области $\Omega_\square$ и M из них попали в область $\Omega_\circ$, тогда частота попадания точек в область $\Omega_\circ$ вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{M}{N}.$$

Чем больше точек мы генерируем, тем ближе частота α будет к теоретической вероятности $P(A)$:

$$\alpha \to \lim_{N\to\infty} \frac{M}{N} = P(A).$$

Следовательно, площадь области $S_\circ$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$S_\circ \approx \alpha S_\square = \alpha(2a)^2.$$

Данные формулы легко обобщаются на любую замкнутую область Ω (см. рис. 6). Если $[x_1,x_2] \ni x \in \Omega$ и $[y_1,y_2] \ni y \in \Omega$, то $\Omega_\square = [x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$ и площадь произвольной области Ω вычисляется по формуле$S = \alpha S_\square$, где $S_\square$ — площадь $\Omega_\square$.

Разделим теперь задачу генерации чисел на n потоков. Пусть каждый поток самостоятельно генерирует $N_j,\ j = 1,\dots,n$ чисел и находит соотношение M_j/N_j. По окончанию работы потоков получим набор чисел

$$\frac{M_1}{N_1} = \alpha_1, \frac{M_2}{N_2} = \alpha_2, \frac{M_3}{N_3} = \alpha_3, \dots, \frac{M_n}{N_n} = \alpha_n.$$

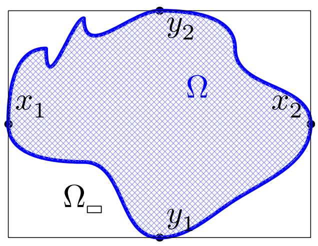

Рис. 6: Вычисление площади произвольной области Ω методом Монте-Карло.

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \dots + \alpha_n N_n,$$
$$S \approx \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_n}{N_1 + N_2 + \dots + N_n} = \frac{\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \dots + \alpha_n N_n}{N_1 + N_2 + \dots + N_n}.$$

Если потоки генерируют разное количество точек, то придется сохранять величины M_i и N_i для всех возможных i. Однако если число точек одинаковое, то достаточно сохранить α_i так как

$$\frac{\alpha_1 N + \alpha_2 N + \dots + \alpha_n N}{nN} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Таким образом, задачу вычисления площади методом Монте-Карло можно реализовать с помощью редукции величин α_i, что позволит сэкономить память.

7.4. Пример

В качестве примера рассмотрим следующий интеграл, который легко свести к повторному и вычислить аналитически:

$$\mathcal{I} = \iint\limits_{\Omega} 3y^2 \sin^2 x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega = \{0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}.$$

Область Ω изображена на рисунке 7. Приближенная формула для вычисления интеграла по методу Монте-Карло будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{I} \approx \frac{S_\Omega}{M} \sum_{i=1}^{M} f(x_i, y_i),$$

где S_Ω — площадь области Ω, а M – количество точек, попавших в область Ω, $f(x_i, y_i) = 3y^2 \sin^2 x$

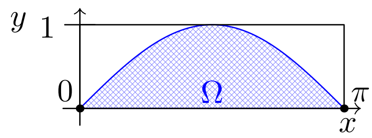

Рис. 7: $\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}$

Из рисунка 6 видно, что площадь S_Ω это площадь, ограниченная графиком синуса сверху и осью абсцисс снизу, поэтому можно обойтись обыкновенным определенным интегралом:

$$S_\Omega = \int\limits_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

Следовательно аппроксимирующая формула будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{I} \approx \frac{2}{M} \sum_{i=1}^{M} 3y_i^2 \sin^2 x_i.$$

С другой стороны, сам интеграл можно вычислить аналитически, что позволяет использовать его для проверки корректности работы программы:

$$\mathcal{I} = \int\limits_0^\pi \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sin x} 3y^2 \sin^2 x \,\mathrm{d}y = \int\limits_0^\pi \sin^2 x y^3\Big|_0^{\sin x} \mathrm{d}x = \int\limits_0^\pi \sin^5 x \,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^\pi \sin^4 x \,\mathrm{d}\cos x =$$

$$= -\int\limits_0^\pi (1 - \cos^2 x)^2 \,\mathrm{d}\cos x = -\int\limits_0^{-1} (1 - 2t^2 + t^4)\,\mathrm{d}t = -(-1-1) - 2\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{15}.$$

В случае, если площадь S_Ω аналитически не вычисляется, ее можно вычислить методом Монте-Карло, заодно вычисляя значения функции $f(x, y)$.

7.5. Задания лабораторной работы

7.5.1. Задание №1

Используйте метод Монте–Карло для вычисления объема геометрического тела, ограниченного следующими поверхностями [1, № 4027]:

$$z^2 = xy, \; x + y = a, \; x + y = b, 0 < a < b.$$

Задача сводится к вычислению двойного интеграла:

$$V = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \; \Omega = \{x + y = a, x + y = b\}.$$

Область Ω изображена на рисунке 8. Учтите, что из уравнения поверхности $z^2 = xy$ следует, что $xy > 0$ и, следовательно,

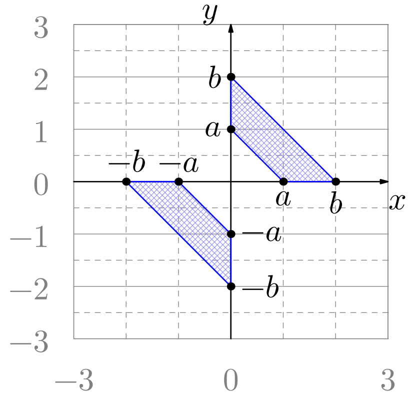

Рис. 8: $\Omega = \{x + y > a, x + y < b\}$

область ограничена первой и третьей четвертями: $x, y \geqslant 0$ или $x, y \leqslant 0$

Для проверки программы, воспользуйтесь аналитическим решением:

$$V = \frac{\pi}{12}(b^3 - a^3).$$

- Программа должна работать в параллельном режиме. Используйте OpenMP и `reduction`.
- Не используйте массивы для хранения попавших в область точек, а подсчитывайте только их количество.
- Постройте графики времени выполнения, ускорения и эффективности в зависимости от количества задействованных потоков.

7.5.2. Задание №2

Используйте метод Монте–Карло для вычисления площади области, образуемой пересечением трех кругов. Для проверки корректной работы программы вычислите площадь *треугольника Рёло* [2, с. 198]. Данный «треугольник» показан на рисунке 9, где O_1, O_2, O_3 — центры окружностей с одинаковыми радиусами r. Площадь треугольника Рёло можно вычислить по формуле:

$$S = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})r^2,$$

используйте ее для проверки программы.

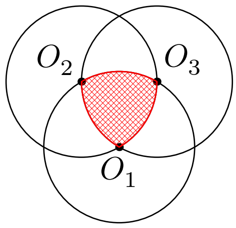

Рис. 9: Треугольник Рёло

Программа должна работать в параллельном режиме. Учтите замечания к предыдущему заданию. Не забудьте, что необходимо построить графики времени выполнения, ускорения и эффективности в зависимости от количества задействованных потоков.

Список литературы

1. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — 13-е изд. — Москва : Издательство Московского университета, ЧеРо, 1997. — 624 с.
2. *Радемахер Г.*, *Теплиц О.* Числа и фигуры. Опыты математического мышления. — 3-е изд. — Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. — 265 с.