Mathématiques pour la physique pt.1

Doriane Belling-Lefebvre

January 2025

coucou

Contents

1 Algèbre

1.1 Polynômes

1.2 Introduction & Espaces vectoriels

1.3 Matrices & Applications en physique

1.3.1 Généralités

Définition: Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On appelle *transposée* de $\mathcal{A}$ la matrice notée $\mathcal{A}^T$ de taille $n \times m$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathcal{A}^T_{j,i} = \mathcal{A}_{i,j}$.

Multiplication de matrices:

Soient $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ deux matrices. Le produit $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ est une matrice $\mathcal{C} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\mathcal{C}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_{i,k}\mathcal{B}_{k,j}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Exemple:

Soit les matrices suivantes :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Calculons le produit $\mathcal{A}\mathcal{B}$:

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

Propriétés de la transposée:

Pour deux matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de tailles compatibles, on a :

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^T = \mathcal{A}^T + \mathcal{B}^T$$

$$(k\mathcal{A})^T = k\mathcal{A}^T \quad \text{pour tout scalaire } k$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^T = \mathcal{B}^T\mathcal{A}^T$$

Inverse d'une matrice:

Une matrice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe une matrice $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}_n$$

où $\mathcal{I}_n$ est la matrice identité de taille n. La matrice $\mathcal{B}$ est alors unique et est notée $\mathcal{A}^{-1}$.

Propriétés de l'inverse:

Pour deux matrices inversibles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de même taille, on a :

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}$$

$$(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$$

$$(\mathcal{A}^T)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^T$$

Déterminant d'une matrice

Le déterminant est une fonction qui associe un scalaire à une matrice carrée. Le déterminant d'une matrice A est noté $\det(A)$ ou $|A|$. Pour une matrice 2×2, le déterminant est calculé comme suit :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Pour une matrice 3×3, le déterminant est calculé comme suit :

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

De manière plus générale, on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Théorème de Cramer: Si $\det(A) \neq 0$, alors le système a une solution unique donnée par :

$$X_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par le vecteur B.

Théorème de Cayley-Hamilton: Ce théorème affirme que toute matrice carrée satisfait son propre polynôme caractéristique. Soit A une matrice carrée $n \times n$ et $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ son polynôme caractéristique. Le théorème de Cayley-Hamilton stipule que :

$$p(A) = 0$$

où 0 est la matrice nulle de même dimension que A.

Théorème de la matrice inverse: Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si A est inversible, alors son inverse est donné par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

où $\operatorname{adj}(A)$ est la comatrice de A, c'est-à-dire la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

1.3.2 Matrices Jacobienne et Hessienne

Définition:

Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction vectorielle différentiable. La matrice Jacobienne de $\mathbf{f}$, notée $\mathbf{J_f}$, est la matrice $m \times n$ des dérivées partielles de $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{J_f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Exemple:

Considérons la fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne de $\mathbf{f}$ est :

$$\mathbf{J_f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial(2xy)}{\partial x} & \frac{\partial(2xy)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire deux fois différentiable. La matrice Hessienne de f, notée $\mathbf{H_f}$, est la matrice $n \times n$ des dérivées partielles secondes de f :

$$\mathbf{H_f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Exemple:

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

La matrice Hessienne de f est :

$$\mathbf{H_f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 (x^2+xy+y^2)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 (x^2+xy+y^2)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 (x^2+xy+y^2)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 (x^2+xy+y^2)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Application en physique: Les matrices Jacobiennes sont utilisée en physique pour étudier des systèmes dynamiques (points de stabilité, ...), quant aux matrices Hessiennes, elles permettent d'analyser la courbure des surfaces et d'optimiser la détermination de la nature des points critiques.

1.4 Noyau, Image

1.5 Corps, Anneaux, Groupes

1.5.1 Groupes

Définition: Un groupe est un ensemble G muni d'une opération binaire $\cdot$ (souvent appelée multiplication) qui satisfait les axiomes suivants :

- **Fermeture:** Pour tout $a, b \in G$, $a \cdot b \in G$.
- **Associativité:** Pour tout $a, b, c \in G$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Élément neutre:** Il existe un élément $e \in G$ tel que pour tout $a \in G$, $a \cdot e = e \cdot a = a$.
- **Inverse:** Pour tout $a \in G$, il existe un élément $b \in G$ tel que $a \cdot b = b \cdot a = e$.

Exemples:

- $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien (commutatif).
- $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ est un groupe non abélien.

Théorème de Lagrange: Si G est un groupe fini et H est un sous-groupe de G, alors l'ordre de H divise l'ordre de G.

1.5.2 Anneaux

Définition: Un anneau est un ensemble R muni de deux opérations binaires, addition $(+)$ et multiplication $(\cdot)$, satisfaisant les axiomes suivants :

- $(R, +)$ est un groupe abélien.
- **Associativité de la multiplication:** Pour tout $a, b, c \in R$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Distributivité:** Pour tout $a, b, c \in R$, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ et $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Exemples:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.
- $(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un anneau non commutatif.

Théorème: Dans un anneau commutatif, l'ensemble des éléments inversibles forme un groupe multiplicatif.

1.5.3 Corps

Définition: Un corps est un anneau commutatif $(K, +, \cdot)$ dans lequel tout élément non nul possède un inverse multiplicatif.

Exemples:

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps.

Théorème: Tout corps est un anneau intègre, c'est-à-dire qu'il ne contient pas de diviseurs de zéro.

1.5.4 Théorie de Galois

Définition: La théorie de Galois étudie les extensions de corps et les solutions des équations polynomiales en utilisant les groupes de symétrie des racines.

Applications:

- **Résolution des équations polynomiales:** La théorie de Galois permet de déterminer si une équation polynomiale est résoluble par radicaux.
- **Construction des corps finis:** Elle est utilisée pour comprendre la structure des corps finis et leurs applications en cryptographie.
- **Problèmes de constructibilité:** Elle aide à résoudre des problèmes classiques de géométrie, comme la trisection de l'angle et la duplication du cube.

Théorème fondamental de la théorie de Galois: Il existe une correspondance bijective entre les sous-groupes du groupe de Galois d'une extension de corps et les sous-corps intermédiaires de cette extension.

1.5.5 Magmas

Définition: Un magma est un ensemble M muni d'une opération binaire $\cdot : M \times M \to M$.

1.5.6 Monoïdes

Définition: Un monoïde est un magma $(M, \cdot)$ qui satisfait les axiomes suivants :

- **Associativité:** Pour tout $a, b, c \in M$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Élément neutre:** Il existe un élément $e \in M$ tel que pour tout $a \in M$, $a \cdot e = e \cdot a = a$.

1.5.7 Semi-groupes

Définition: Un semi-groupe est un magma $(S, \cdot)$ qui satisfait l'axiome d'associativité :

- **Associativité:** Pour tout $a, b, c \in S$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

1.5.8 Anneaux intègres

Définition: Un anneau intègre est un anneau commutatif $(R, +, \cdot)$ sans diviseurs de zéro, c'est-à-dire que pour tout $a, b \in R$, si $a \cdot b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

1.5.9 Corps finis

Définition: Un corps fini est un corps $(K, +, \cdot)$ contenant un nombre fini d'éléments.

Exemples:

- $\mathbb{F}_p$, le corps des entiers modulo un nombre premier p.
- $\mathbb{F}_{p^n}$, une extension de degré n du corps $\mathbb{F}_p$.

1.5.10 Algèbres

Définition: Une algèbre sur un corps K est un espace vectoriel A sur K muni d'une opération bilinéaire $\cdot : A \times A \to A$.

Exemples:

- Les algèbres de matrices $\mathbb{M}_n(K)$.

- Les algèbres de polynômes $K[x]$.

1.5.11 Algèbres associatives

Définition: Une algèbre associative est une algèbre $(A, \cdot)$ telle que pour tout $a, b, c \in A$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

1.5.12 Algèbres commutatives

Définition: Une algèbre commutative est une algèbre $(A, \cdot)$ telle que pour tout $a, b \in A$, $a \cdot b = b \cdot a$.

1.5.13 Algèbres de Lie

Définition: Une algèbre de Lie est un espace vectoriel L muni d'une opération bilinéaire $[\cdot, \cdot] : L \times L \to L$ appelée crochet de Lie, satisfaisant les axiomes suivants :

- **Antisymétrie:** Pour tout $x, y \in L$, $[x, y] = -[y, x]$.
- **Identité de Jacobi:** Pour tout $x, y, z \in L$, $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

2 Analyse

2.1 Equations différentielles

2.1.1 EDL d'odre 1:

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et continue sur ce même intervalle. On appelle équation différentielle toute équation de la forme:

$$\frac{df(x)}{dx} + \alpha_0 f(x) = g(x)$$

Résolution:

Existence des solutions: Si $g(x)$ est continue sur I, alors l'équation possède une infinité de solutions.

Conditions: $f(x_0) = c, c \in \mathbb{R}$ (CI) ou $f(x_p) = c, c \in \mathbb{R}$ (CP), $\Rightarrow$ Si une CI ou une CP est donnée, alors l'équation différentielle formera un problème de Cauchy. L'ED sera de la forme:

$$\begin{cases} \frac{df(x)}{dx} + \alpha_0 f(x) = g(x) \\ f(x_0) = c \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{df(x)}{dx} + \alpha_0 f(x) = g(x) \\ f(x_p) = c \end{cases}$$

Equation homogène:

Considérons $\frac{df(x)}{dx} + \alpha_0 f(x) = 0 \iff \frac{df(x)}{f(x)dx} = \alpha_0$
Soit,

$$f(x) = e^{(-\alpha_0 x + cte)} = Ae^{-\alpha_0 x}, A \in \mathbb{R}$$

Solutions particulières:

Forme de $g(x)$:

- $\alpha, (\alpha \in \mathbb{R})$ (1)
- $P_n(x)\cos(\Omega_1 x) + Q_m(x)\sin(\Omega_2 x), P_n, Q_m \in \mathbf{R}[\mathbf{X}]$ (2)
- $e^{\alpha x}.P_n(x), \alpha \in \mathbb{R}$ (3)

Forme de $f_p(x)$:

- $A, (A \in \mathbb{R})$ (1)
- $R_n(x)\cos(\Omega_1 x) + S_n(x)\sin(\Omega_1 x) + T_m(x)\cos(\Omega_2 x) + U_m(x)\sin(\Omega_2 x)$ (2)
- $\alpha \neq -a_0 : e^{\alpha x}.Q_n(x), \alpha = -a_0 : e^{\alpha x}.xQ_n(x)$ (3)

La solution finale de l'EDL d'ordre 1 sera $f_P(x) + f_H(x)$

2.1.2 EDL d'ordre 2:

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est de la forme:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Equation homogène:

Si $g(x) = 0$, l'équation devient:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Résolution:

1. Cas à coefficients constants:

Si a_2, a_1, a_0 sont constants, on résout l'équation caractéristique associée:

$$a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0$$

Les solutions de cette équation caractéristique déterminent la forme de la solution générale de l'équation homogène.

2. Cas général:

Pour des coefficients non constants, on utilise des méthodes comme la variation des paramètres ou la transformation de Laplace.

Formes du second membre:

Forme de $g(x)$	Forme de $f_P(x)$
α	A
$P_n(x)$	$Q_n(x)$
$e^{\beta x}$	$Be^{\beta x}$
$\cos(\omega x)$ ou $\sin(\omega x)$	$C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$
$e^{\beta x}P_n(x)$	$e^{\beta x}R_n(x)$
$P_n(x)\cos(\omega x) + Q_m(x)\sin(\omega x)$	$S_n(x)\cos(\omega x) + T_m(x)\sin(\omega x)$

La solution générale de l'équation non homogène est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène, c'est à dire:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
c (cste)	0	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$u \pm v$	$u' \pm v'$	$\mathbb{R}$
uv	$u'v + uv'$	$\mathbb{R}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$
$u(v(x))$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$	$\mathbb{R}$

Table 1: Dérivées usuelles de fonctions et d'opérations sur les fonctions

2.2 Fonctions à plusieurs variables et dérivées partielles

2.2.1 Rappels

2.2.2 Dérivées partielles

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^p$. Une fonction de plusieurs variables est une fonction qui dépend de deux ou plusieurs variables. La dérivée partielle de f par rapport à x, notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, mesure le taux de variation de f lorsque x varie et y reste constant. De même, la dérivée partielle de f par rapport à y, notée $\frac{\partial f}{\partial y}$, mesure le taux de variation de f lorsque y varie et x reste constant.

Pour une fonction $f(x, y)$, les dérivées partielles sont définies comme suit:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

2.2.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Les dérivées partielles d'ordre supérieur sont obtenues en dérivant plusieurs fois par rapport à différentes variables. Par exemple, pour une fonction $f(x, y)$, les dérivées partielles d'ordre supérieur incluent:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

En général, pour une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la dérivée partielle d'ordre k par rapport aux variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ est notée:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}$$

2.3 Primitives et intégrations

Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur $[a, b]$. Alors F est une primitive de f ssi:

$$F(x) = \int_a^b f(x)\, dx$$

2.3.1 Intégrales multiples

Les intégrales multiples permettent de généraliser la notion d'intégrale à des fonctions de plusieurs variables. Elles sont utilisées pour calculer des volumes, des aires, des masses, etc.

2.3.2 Intégrale double

Soit $f(x, y)$ une fonction continue sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. L'intégrale double de f sur D est définie par:

$$\iint_D f(x, y)\, dA$$

où dA représente un élément de surface infinitésimal.

Théorème de Fubini:

Si f est continue sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$, alors:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy$$

2.3.3 Intégrale triple

Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$. L'intégrale triple de f sur D est définie par:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV$$

où dV représente un élément de volume infinitésimal.

Théorème de Fubini (extension):

Si f est continue sur un parallélépipède $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, alors:

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

2.3.4 Changement de variables

Pour simplifier le calcul des intégrales multiples, on peut utiliser un changement de variables. Soit $u = g(x, y)$ et $v = h(x, y)$ un changement de variables bijectif et différentiable avec un jacobien non nul. Alors:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{D'} f(g^{-1}(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

où $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$ est le déterminant du jacobien du changement de variables.

2.3.5 Intégrales de Riemann

Les intégrales de Riemann généralisent la notion d'intégrale à des fonctions de plusieurs variables. Soit f une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$. L'intégrale de Riemann de f sur D est définie comme la limite de la somme de Riemann:

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\mathbf{x}_i^*) \Delta V_i$$

où P est une partition de D, $\mathbf{x}_i^*$ est un point dans le i-ième sous-domaine, et ΔV_i est le volume du i-ième sous-domaine.

Conditions de Riemann:

Pour que l'intégrale de Riemann existe, il faut que f soit bornée et que la somme des volumes des sous-domaines tende vers zéro lorsque la norme de la partition tend vers zéro.

2.4 Opérateur Nabla

L'opérateur nabla, noté ∇, est un opérateur différentiel vectoriel utilisé en calcul vectoriel. Il est défini comme suit en coordonnées cartésiennes (x, y, z):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

L'opérateur nabla est utilisé pour définir plusieurs opérations importantes en analyse vectorielle, notamment le gradient, la divergence et le rotationnel.

Gradient:

Le gradient d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$ est un vecteur noté ∇f et défini par:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Le gradient indique la direction de la plus grande variation de la fonction et sa norme représente le taux de variation maximal.

Divergence:

La divergence d'un champ vectoriel $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ est un scalaire noté $\nabla \cdot \mathbf{F}$ et défini par:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

La divergence mesure le taux de variation du flux sortant d'un point dans un champ vectoriel.

Rotationnel:

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ est un vecteur noté $\nabla \times \mathbf{F}$ et défini par:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Le rotationnel mesure la tendance d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point.

2.4.1 Gradient, divergence et rotationnel en coordonnées cylindriques et sphériques

2.4.2 Annexes:

Théorème de Green:

Le théorème de Green relie une intégrale curviligne autour d'une courbe fermée à une intégrale double sur la région délimitée par cette courbe.
Soit C une courbe fermée simple et D la région délimitée par C. Si P et Q sont des fonctions ayant des dérivées partielles continues sur une région qui contient D, alors:

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

En d'autres termes, l'intégrale curviligne de $P\,dx + Q\,dy$ autour de C est égale à l'intégrale double de $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ sur D.

Applications du théorème de Green:

1. Calcul de l'aire d'une région plane:

$$A = \iint_D dA = \frac{1}{2} \oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

2. Calcul du flux d'un champ vectoriel à travers une courbe fermée:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\,dA$$

où $\mathbf{F} = (P, Q)$ et $\mathbf{k}$ est le vecteur unitaire normal à la surface.

2.5 Développements limités et formule de Taylor

2.5.1 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème: Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors, $\exists c \in]a, b[$ tq:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2)}{2!} f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n)}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c)$$

Remarque: pour $n = 0$, apparaît le TAF (théorème des accroissements finis).

Formule de Mac Laurin-Lagrange: Si f est C^n sur $]-\alpha, \alpha[$ avec f^n dérivable sur $]-\alpha, \alpha[-\{0\}$, alors $\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \exists \theta \in]0, 1[$ tq:

$$f(0) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta x)$$

Inégalités de Taylor-Lagrange: En ajoutant $|f^{n+1}|$ majorée par M sur $]a, b[$ on obtient:

$$|f(b) - (f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2)}{2!} f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n)}{n!} f^{(n)}(a))| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

2.5.2 Formule de Taylor-Young:

Théorème: Soit f une fonction de classe C^n sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha$ tq $\exists f^{(n)}(x_0)$. Alors pour $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2)}{2!} f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n)}{n!} f^{(n)}(x_0)\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Développements limités usuels:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n\varepsilon(x)$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + x^{2n}\varepsilon(x)$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$
$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{2n!} + x^{2n}\varepsilon(x)$
$\sinh(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$
$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + ... + -\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$

3 Preuves