Session 04:
Statistische Tests

Dominic Schmitz & Janina Esser

Verein für Diversität in der Linguistik

Statistische Tests

- Einfachster Teil der **inferentiellen Statistik:**

  wir nehmen unsere Daten und leiten etwa aus ihnen ab

- Geschieht meist anhand des "**Null-Hypothesis Significance Testing**"

- Resultat ist oftmals die berühmte ***p*-value** (*probability value*)

Statistische Tests

1. Shapiro-Wilk Test
2. t-Test
3. Chi-Quadrat-Test
4. Wilcoxon-Mann-Whitney Test
5. ANOVA
6. ANCOVA
7. Korrelation

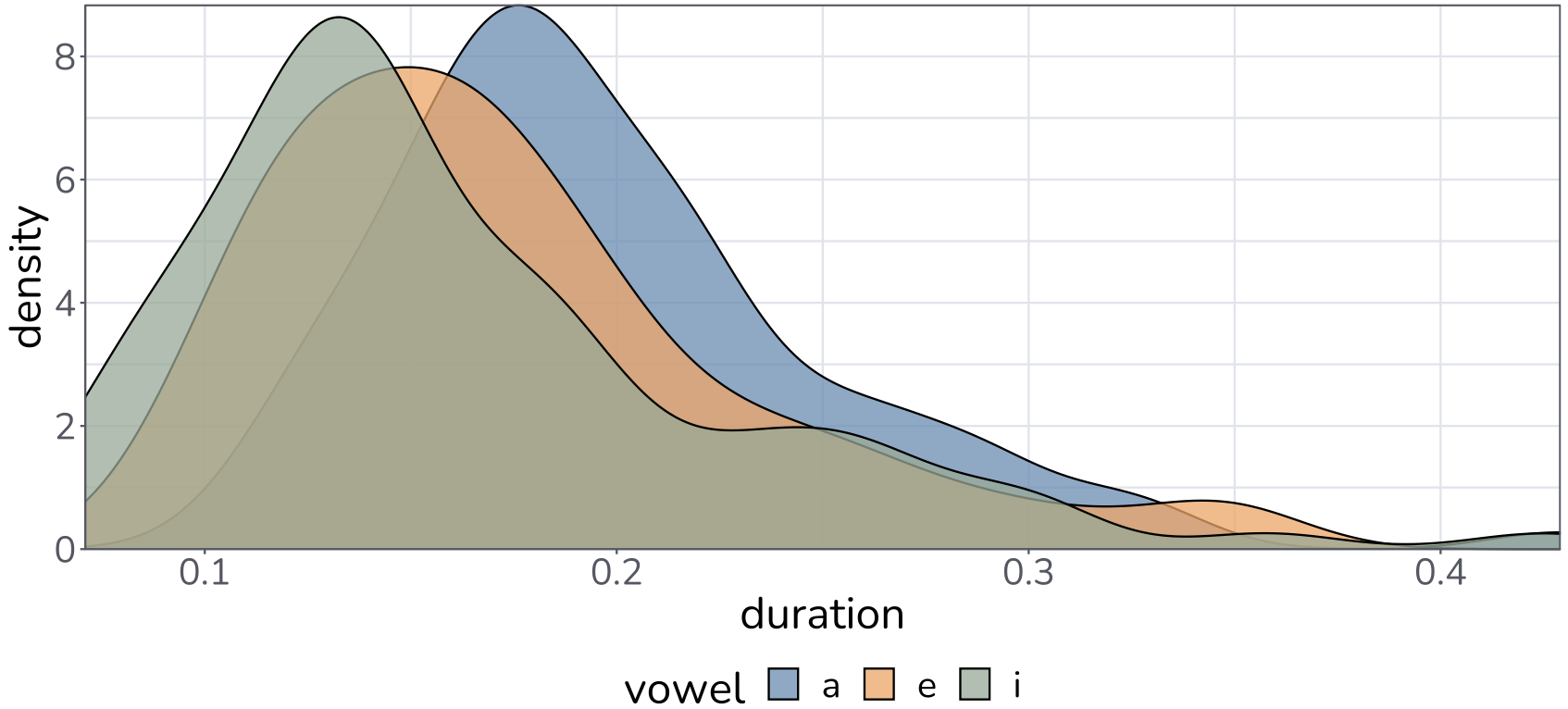
   etc.

1. Shapiro-Wilk Test

- mit einem **Shapiro-Wilk Test** kann man feststellen, ob eine Stichprobe **normalverteilt** ist
- diese Info ist wichtig, da verschiedene andere Tests nur dann funktionieren, wenn Daten (annähernd) normalverteilt sind
- als Beispiel nutzen wir das „Vowel Shortening in German“ Datenset aus dem SfL Package

1. Shapiro-Wilk Test

- Sind die Vokaldauern von /a/, /e/ und /i/ normalverteilt?



1. Shapiro-Wilk Test

- Sind die Vokaldauern von /a/, /e/ und /i/ normalverteilt?
- Der Shapiro-Wilk Test kommt zu folgenden Ergebnissen:

	p-Wert
/a/	$p < 0.001$
/e/	$p < 0.001$
/i/	$p < 0.001$

- Da die *p*-Werte kleiner 0.05 sind, sind die Daten **nicht normalverteilt**

Statistische Tests

1. Shapiro-Wilk Test ✓
2. t-Test
3. Chi-Quadrat-Test
4. Wilcoxon-Mann-Whitney Test
5. ANOVA
6. ANCOVA
7. Korrelation

   etc.

2. t-Test

- Es gibt **verschiedene Arten** des t-Tests
- Wichtig dabei:

  Stammen meine Daten aus dem gleichen Sample?
- Ja – z.B. falls zwei Experimente mit gleichen TN durchgeführt werden

  → **dependent samples t-test**
- Nein – z.B. falls zwei Experimente mit verschiedenen TN durchgeführt werden

  → **independent samples t-test**

2. t-Test – dependent samples

- ein Versuch wird *n*-mal durchgeführt
- ein Parameter wird geändert
- der Versuch wird mit den gleichen TN und dem geänderten Parameter erneut durchgeführt
- dann werden die Messergebnisse verglichen

2. t-Test – dependent samples

- unsere gemessene Variable sei in

  Durchführung A: x

  Durchführung B: y

- x und y wurden *n*-mal gemessen $x_1, \dots, x_n$ und $y_1, \dots, y_n$
- der t-Test geht davon aus, dass x und y (annähernd) **normalverteilt** sind (wichtig!)
- **Frage:** Sind die Werte von x und y verschieden oder sind sie nur **zufällig** verschieden?

2. t-Test – dependent samples

- Schritt 1: Durchschnitt von z berechnen

$$\bar{y} - \bar{x} = \bar{z}$$

- Schritt 2: Standardabweichung von z berechnen

$$s := + \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2}$$

- Schritt 3: t-Wert berechnen

$$t = \frac{\bar{z}}{s} * \sqrt{n}$$

2. t-Test – dependent samples

- mithilfe des t-Wertes und der Freiheitsgrade kann nun in einer Tabelle die t-Verteilung nachgeschlagen werden
- die Freiheitsgrade sind $df = n - 1$

2. t-Test – dependent samples

f	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

2. t-Test – dependent samples

- t-Tests können **einseitig** oder **zweiseitig** sein
- es sind μ_1 und μ_2 die unbekannten wahren Erwartungswerte der beiden Stichproben
- bei **zweiseitigen** t-Tests ist die Nullhypothese von der Form

$$H_0 = \{\mu_1 \neq \mu_2\}$$

- bei **einseitigen** t-Tests ist die Nullhypothese von der Form

$$H_0 = \{\mu_1 > \mu_2\}$$

2. t-Test – dependent samples

- bei **zweiseitigen** t-Tests ist die Nullhypothese von der Form

$$H_0 = \{\mu_1 \neq \mu_2\}$$

- bei **zweiseitigen** t-Tests wissen wir nicht, ob x oder y im Durchschnitt größer ist; der Test ist **ungerichtet**
- bei **einseitigen** t-Tests ist die Nullhypothese von der Form

$$H_0 = \{\mu_1 > \mu_2\} \text{ oder } H_0 = \{\mu_1 < \mu_2\}$$

- bei **einseitigen** t-Tests wissen wir bereits, dass x größer/kleiner y ist; der Test ist **gerichtet**

2. t-Test – dependent samples

- das **Signifikanzniveau** sei $\alpha = 0.05$
- mit t-Wert, Freiheitsgraden und Signifikanzniveau können wir nun berechnen
- für **zweiseitige** t-Tests: $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$
- für **einseitige** t-Tests: $t_{n-1,1-\alpha}$ bzw. $-t_{n-1,1-\alpha}$

2. t-Test – dependent samples

$$df = 10 - 1$$

- Beispiel: Blutdruck

Blutdruck	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Placebo x	168	184	172	173	150	155	163	164	151	146
Medikament y	176	145	150	163	136	168	164	139	145	112
Differenz z	8	-39	-22	-10	-14	13	1	-25	-6	-34

- $\bar{z} = -12.8$
- $s = 17.36$
- $t = -2.332$

2. t-Test – dependent samples

- für **einseitige** t-Tests:

$$t_{n-1,1-\alpha} \text{ bzw. } -t_{n-1,1-\alpha}$$

- die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn

$$t < -t_{n-1,1-\alpha}$$

- für unser Blutdruckbeispiel:

$$-t_{n-1,1-\alpha} = -t_{9,0.95}$$

2. t-Test – dependent samples

$-t_{9,0.95}$

f	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

2. t-Test – dependent samples

- also, stimmt es nun, dass

$$t < -t_{n-1,1-\alpha}$$

  ist?

- ja, denn

$$-2.332 < -1.833$$

- damit ist die Wirksamkeit des Medikaments zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ nachgewiesen

2. t-Test – independent samples

- ein Versuch wird *n*-mal durchgeführt
- ein Parameter wird geändert
- der Versuch wird mit den **anderen** TN und dem geänderten Parameter erneut durchgeführt
- da wir verschiedene Probandengruppen haben, kann $n_1 \neq n_2$ zutreffen
- dann werden die Messergebnisse verglichen

2. t-Test – independent samples

- unsere gemessene Variable sei in

  Durchführung A: x

  Durchführung B: y

- x und y wurden n-mal gemessen $x_1, \dots, x_{n1}$ und $y_1, \dots, y_{n2}$
- der t-Test geht davon aus, dass x und y (annähernd) **normalverteilt** sind (wichtig!)
- **Frage**: Sind die Werte von x und y verschieden oder sind sie nur **zufällig** verschieden?

2. t-Test – independent samples

- Schritt 1: Durchschnitt von x und y berechnen
- Schritt 2: Standardabweichung von x und y berechnen
- Schritt 3: Standardabweichung von $x + y$ berechnen

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) * s_x^2 + (n_2 - 1) * s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

- Schritt 4: t-Wert berechnen

$$t = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{s_p} * \sqrt{\frac{n_1 * n_2}{n_1 + n_2}}$$

2. t-Test – independent samples

- das **Signifikanzniveau** sei $\alpha = 0.05$
- mit t-Wert, Freiheitsgraden und Signifikanzniveau können wir nun berechnen
- für **zweiseitige** t-Tests: $t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}}$
- für **einseitige** t-Tests: $t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$ bzw. $-t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$

2. t-Test – independent samples

- Beispiel: f0 bei Männern

f0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gruppe 1 x	55	69	64	70	75	70	83	69	75	69
Gruppe 2 y	61	60	62	58	75	63	52	66	59	

- $n_1 = 10, n_2 = 9$
- $\bar{x} = 69.00, \bar{y} = 61.78$
- $s_x = 7.972, s_y = 6.280$

$s_p = 7.226$

$t = -2.175$

2. t-Test – independent samples

- also, stimmt es nun, dass

$$t < -t_{17,0.95}$$

  ist?

- ja, denn

$$-2.175 < -1.740$$

- damit ist die f0 der zweiten Gruppe zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ nachgewiesen tiefer

Statistische Tests

1. Shapiro-Wilk Test ✓
2. t-Test ✓
3. Chi-Quadrat-Test
4. Wilcoxon-Mann-Whitney Test
5. ANOVA
6. ANCOVA
7. Korrelation

   etc.

Chi-Quadrat-Test

- mit Chi-Quadrat-Tests können wir bestimmen, ob zwei kategorische Variablen zusammenhängen
- als Beispiel nutzen wir das „Age and Looks“ Datenset aus dem SfL Package

	blue	brown	green
blonde	3	7	3
brunette	5	15	2
red	1	3	1

Chi-Quadrat-Test

- nun können wir mit einem Chi-Quadrat-Test testen, ob Haar- und Augenfarbe in unserem Sample zusammengehören
- Ergebnis: $p = 0.84 > 0.05$, d.h. nein, kein Zusammmenhang

	blue	brown	green
blonde	3	7	3
brunette	5	15	2
red	1	3	1

Statistische Tests

1. Shapiro-Wilk Test ✓
2. t-Test ✓
3. Chi-Quadrat-Test ✓
4. Wilcoxon-Mann-Whitney Test
5. ANOVA
6. ANCOVA
7. Korrelation

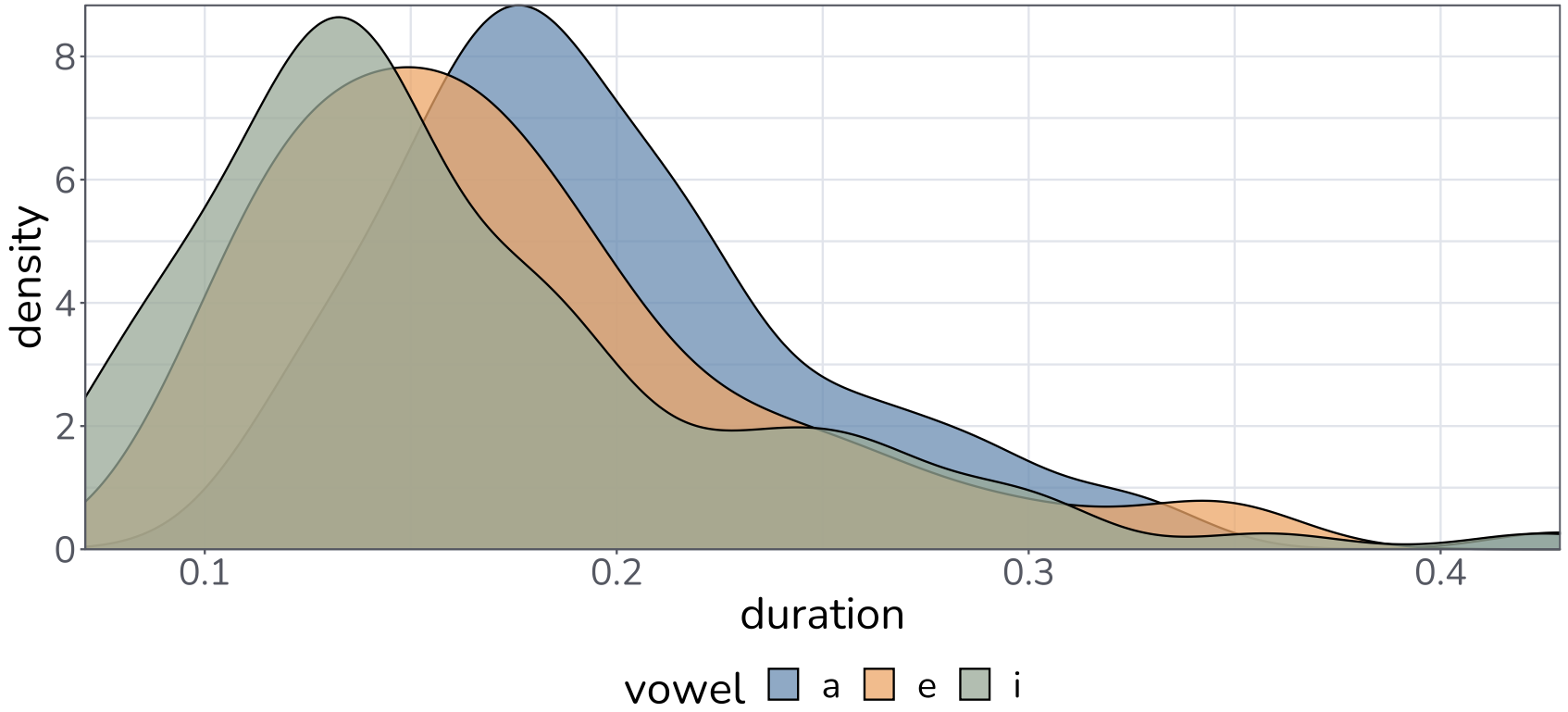
   etc.

Wilcoxon-Mann-Whitney Test

- reminder: t-Tests setzen eine (annähernde) Normalverteilung der Daten voraus
- der Wilcoxon-Mann-Whitney Test kann auch mit nicht-normalverteilten Daten umgehen
- als Beispiel nutzen wir das das „Vowel Shortening in German“ Datenset aus dem SfL Package

Wilcoxon-Mann-Whitney Test

- die Vokaldauern von /a/, /e/ und /i/ sind nicht normalverteilt (siehe Shapiro-Wilk Test)



Wilcoxon-Mann-Whitney Test

- Ergebnis:

  ja, die Vokale haben unterschiedliche Dauern

	/a/ vs. /e/	/a/ vs. /i/	/e/ vs. /i/
t-Test	<0.001	<0.001	0.00568
WMW-Test	<0.001	<0.001	0.00241

Statistische Tests

1. Shapiro-Wilk Test ✓
2. t-Test ✓
3. Chi-Quadrat-Test ✓
4. Wilcoxon-Mann-Whitney Test ✓
5. ANOVA
6. ANCOVA
7. Korrelation

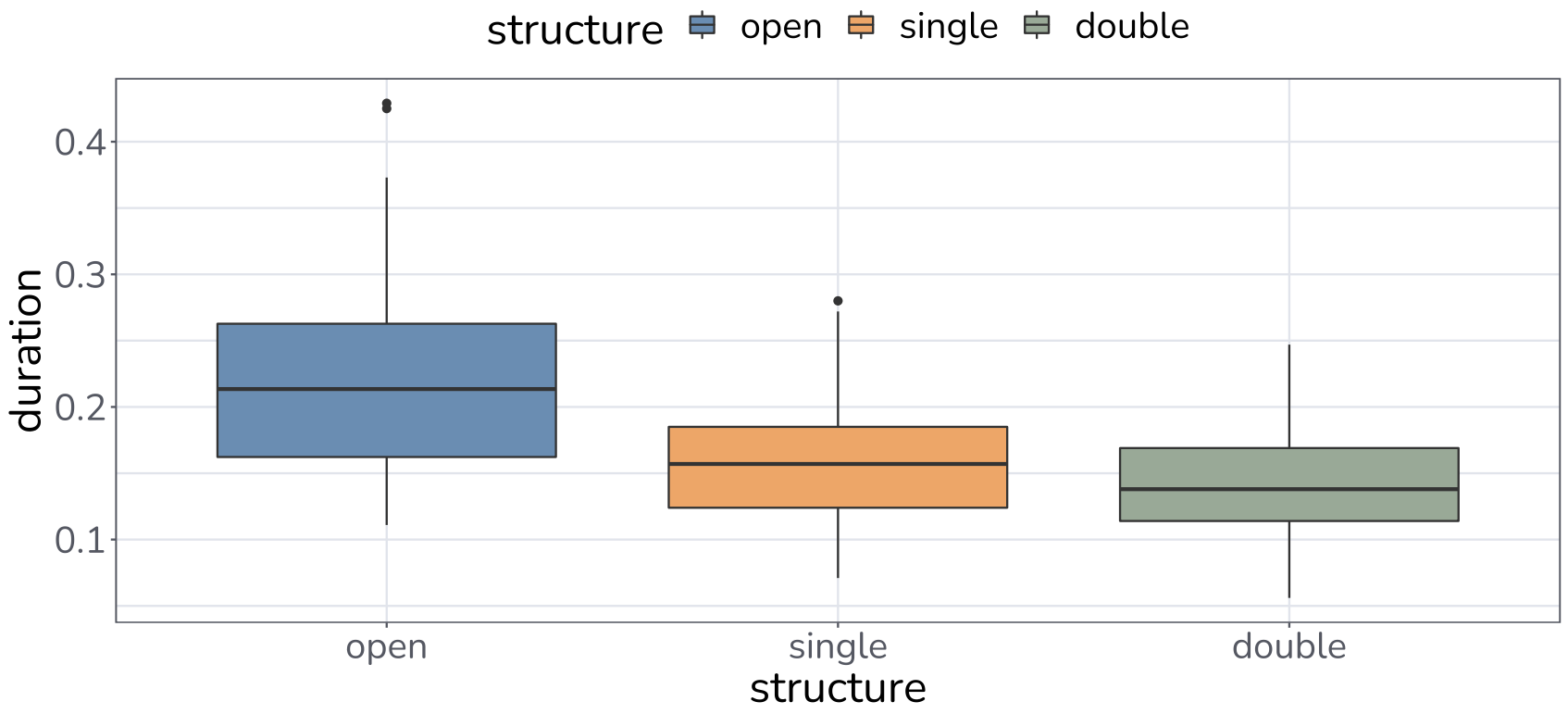
   etc.

ANOVA

- die **an**alysis **o**f **va**riance, d.h. die Varianzanalyse, kann dann genutzt werden, wenn man die Durchschnitte mehrerer Gruppen in einem Rutsch miteinander vergleichen möchte
- als Beispiel nutzen wir das „Vowel Shortening in German“ Datenset aus dem SfL Package
- unsere Gruppen: Silbenstruktur (offen, single, double)

ANOVA

- Hypothese: Die Vokaldauern unterscheidet sich je nach Silbenstruktur.



ANOVA

- führen wir nun eine ANOVA durch, müssen wir den Inhalt unserer Hypothese spezifizieren:

$$Dauer \sim Silbenstruktur$$

- die ANOVA gibt dann mit einem *p*-Wert an, ob eine signifikante Abhängigkeit besteht

$$p < 0.001$$

- wir wissen allerdings noch nicht, ob die Unterschiede zwischen allen Silbenstrukturen signifikant verschieden sind

ANOVA

- hierzu müssen wir einen **Post-Hoc-Test** nutzen
- wir nutzen den **Tukey-Test**, einen der meist genutzten Post-Hoc-Test
- dieser liefert uns folgende Ergebnisse:

	p-Wert
single – open	<0.001
double – open	<0.001
double – single	0.005

- **Ergebnis**: alle Unterschiede sind signifikant

Statistische Tests

1. Shapiro-Wilk Test ✓
2. t-Test ✓
3. Chi-Quadrat-Test ✓
4. Wilcoxon-Mann-Whitney Test ✓
5. ANOVA ✓
6. ANCOVA
7. Korrelation

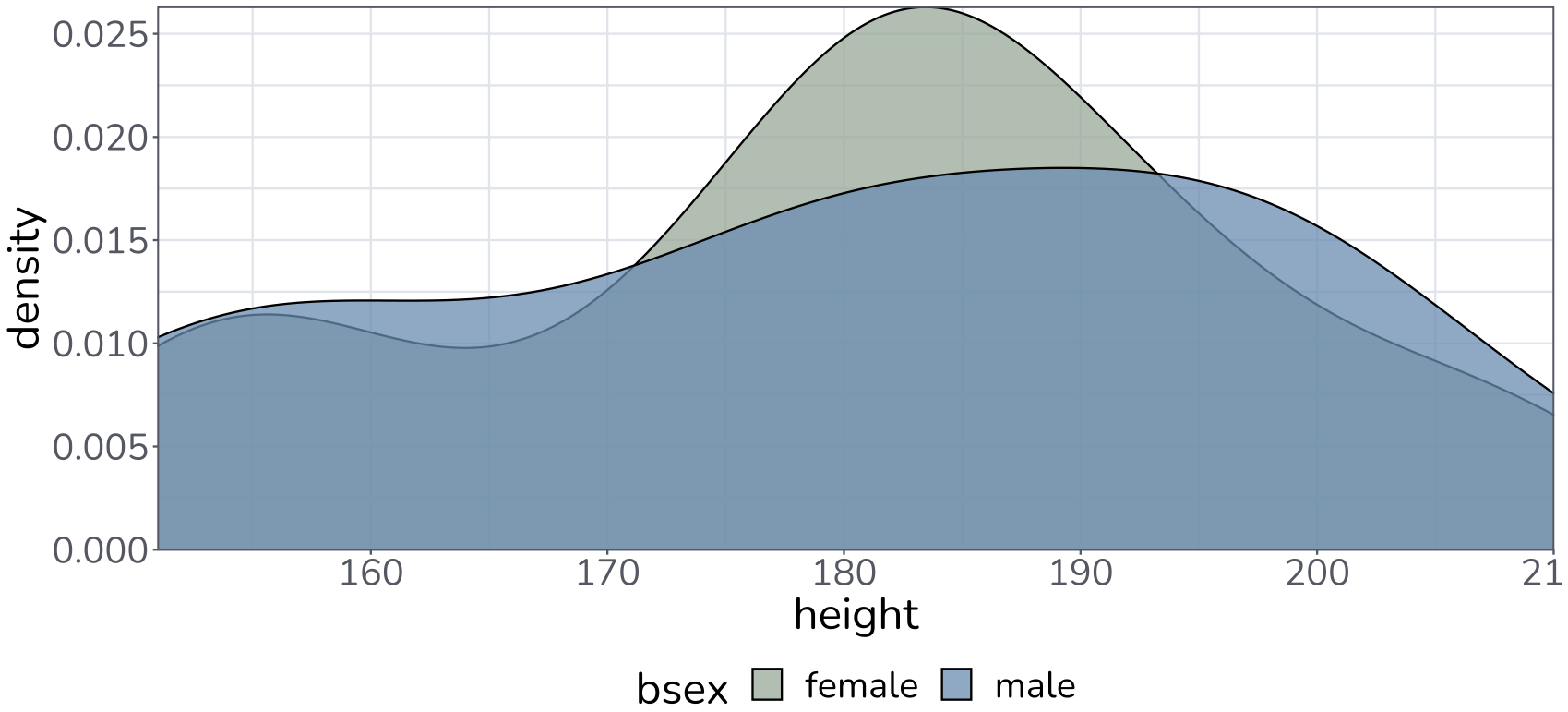
   etc.

ANCOVA

- die **an**alysis of **cova**riance, d.h. die Kovarianzanalyse, kann dann genutzt werden, wenn man den Durchschnittswert einer Variable in potentieller Abhängigkeit von einer kategorischen Variable und ihrer Levels herausfinden möchte
- als Beispiel nutzen wir das „Age and Looks“ Datenset aus dem SfL Package

ANCOVA

- Hypothese: Männer sind größer als Frauen.



ANCOVA

- führen wir nun eine ANCOVA durch, müssen wir den Inhalt unserer Hypothese spezifizieren:

$$Größe \sim Geschlecht$$

- die ANCOVA gibt dann mit einem *p*-Wert an, ob eine signifikante Abhängigkeit besteht

$$p = 0.957$$

- in diesem Fall: die Hypothese wird nicht bestätigt
- bei $p < 0.05$ muss ein Post-Hoc-Test durchgeführt werden

Statistische Tests

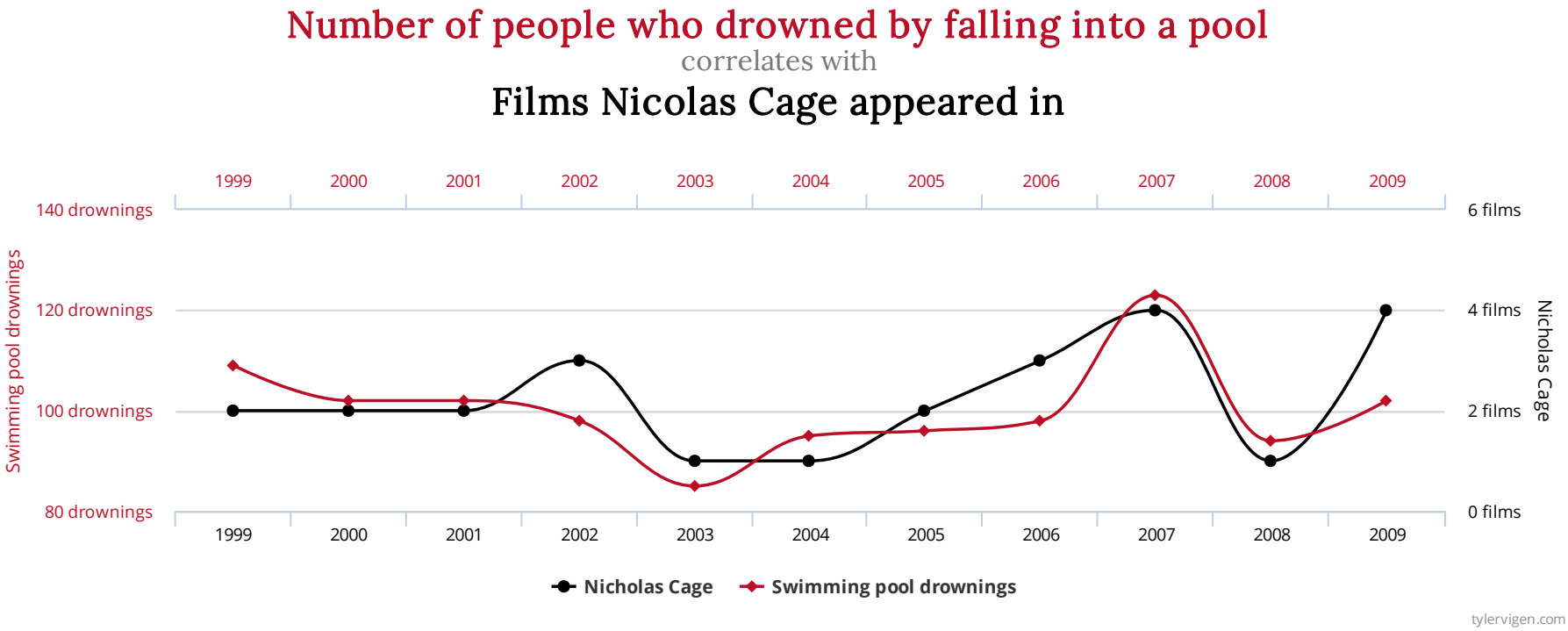
1. Shapiro-Wilk Test ✓
2. t-Test ✓
3. Chi-Quadrat-Test ✓
4. Wilcoxon-Mann-Whitney Test ✓
5. ANOVA ✓
6. ANCOVA ✓
7. Korrelation

   etc.

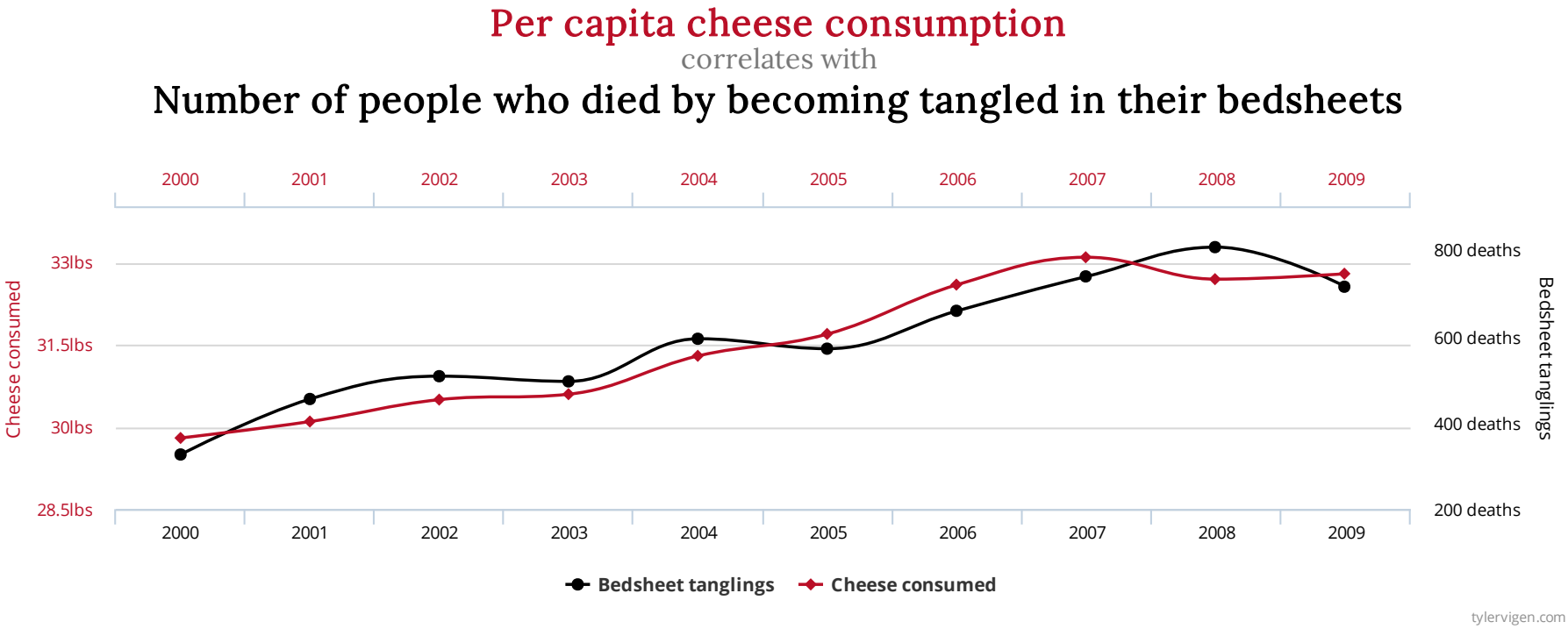
Korrelation

- die Korrelation beschreibt eine Beziehung zwischen zwei oder mehr Variablen
- Korrelation **bedeutet nicht** Kausalität:
  - zwei Variablen können korreliert sein
  - ohne dabei in kausaler Verbindung zu stehen

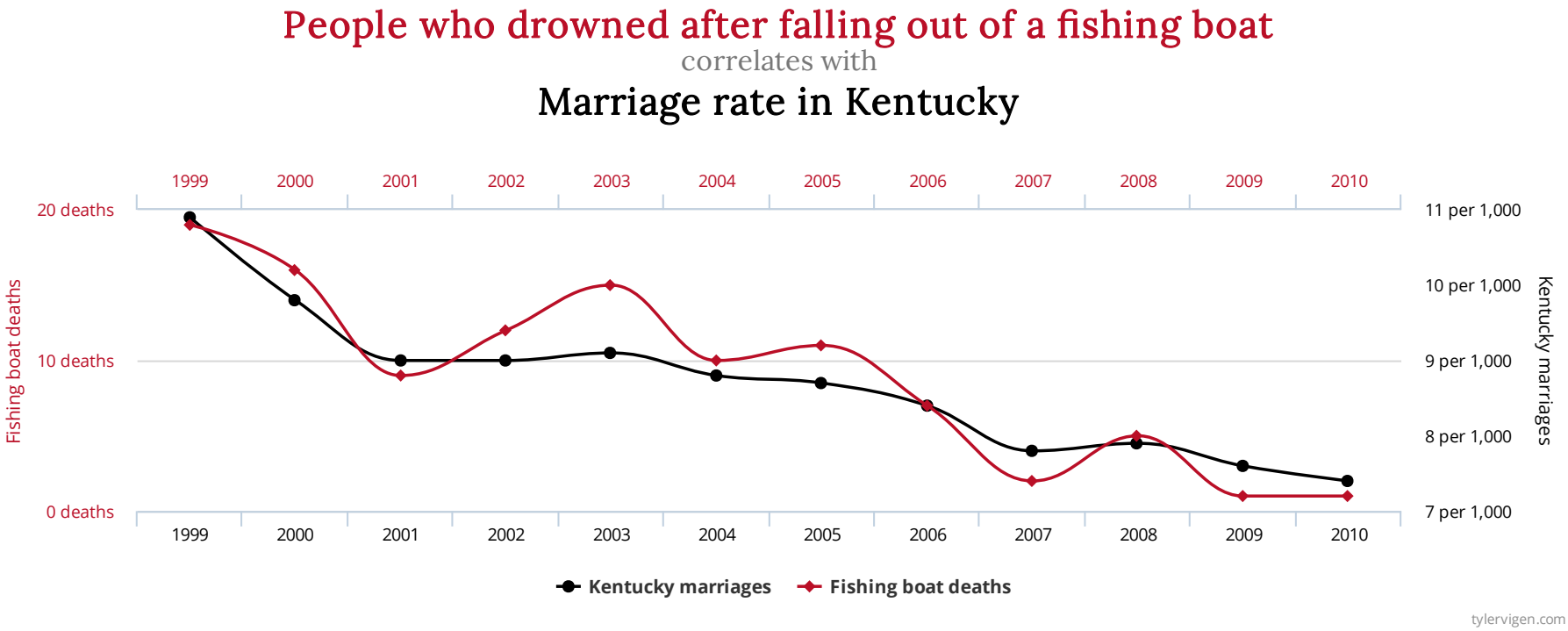
Korrelation



Korrelation



Korrelation



Korrelation

- sind die zu vergleichenden Daten normalverteilt und metrisch, nutzen wir **Pearson‘s r**
- sind die zu vergleichenden Daten nicht normalverteilt und/oder nicht numerisch, nutzen wir **Spearman‘s rho**
- als Beispiel nutzen wir das „Duration of word-final /s/ in English” Datenset aus dem SfL Package

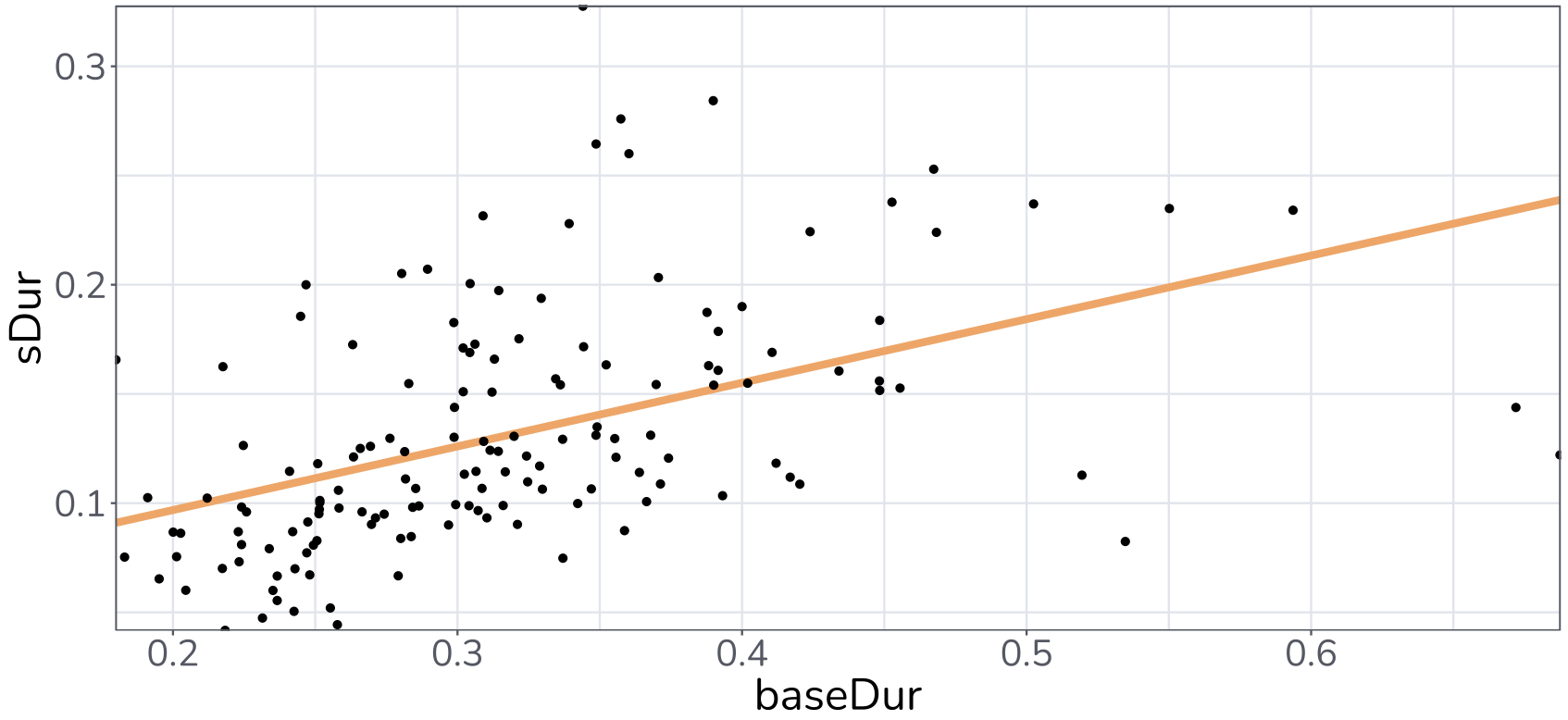
Korrelation

- Wann sprechen wir von Korrelation?

correlation coefficient			labeling	kind of correlation
0.7	< r ≤	1	very high	positive correlation
0.5	< r ≤	0.7	high	
0.2	< r ≤	0.5	intermediate	
0	< r ≤	0.2	low	
r ≈ 0			no statistical correlation	
0	> r ≥	-0.2	low	negative correlation
-0.2	> r ≥	-0.5	intermediate	
-0.5	> r ≥	-0.7	high	
-0.7	> r ≥	-1	very high	

Korrelation

- **Frage:** sind /s/-Dauer und base-Dauer korreliert?



- **Antwort:** ja, da $r = 0.47$

Statistische Tests

1. Shapiro-Wilk Test ✓
2. t-Test ✓
3. Chi-Quadrat-Test ✓
4. Wilcoxon-Mann-Whitney Test ✓
5. ANOVA ✓
6. ANCOVA ✓
7. Korrelation ✓

   etc.