Isometrie, simbolo di Kronecker, matrici ortogonali, simmetria di endomorfismi #GAL

Definizione:

un'isometria lineare è un endomorfismo $L : V \to V$ t.c. $\langle L(\underline{v}),L(\underline{w})\rangle = \langle\underline{v},\underline{w}\rangle$ $\forall \underline{v},\underline{w} \in V$

Proprietà:

1. $\|L(\underline{v})\| = \|\underline{v}\|$
2. $d(\underline{v},\underline{w}) = d(L(\underline{v}),L(\underline{w}))$
3. $L(\underline{v})\hat{}L(\underline{w}) = \underline{v}\hat{}\underline{w}$

Notazione:

Il simbolo di Kronecker è $\partial_{ij} = \{1$ se $i=j$; 0 se $i\neq j\}$

Osservazione:

- $I_n = \partial_{ij}$
- $\langle\underline{b_i},\underline{b_j}\rangle = \partial_{ij}$ $\Leftrightarrow$ $\{\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}\}$ base ortonormale

Proposizione:

$L : V \to V$ $B = \{\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}\}$ base ortonormale

L isometria lineare $\Leftrightarrow$ $\{L(\underline{b_1}), \dots, L(\underline{b_n})\}$ base ortonormale di V

Dimostrazione:

$\Rightarrow$ $\langle L(\underline{b_i}),L(\underline{b_j})\rangle$ =(isometria)= $\langle\underline{b_i},\underline{b_j}\rangle = \partial_{ij} = \{L(\underline{b_1}), \dots, L(\underline{b_n})\}$ base ortonormale di V

$\Leftarrow$ Supponiamo $\{\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}\}$ e $\{L(\underline{b_1}), \dots, L(\underline{b_n})\}$ basi ortonormali di V

Dati $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i * \underline{b_i}$, $\underline{w} = \sum_{j=1}^{n} w_j * \underline{b_j}$ $\in V$ verifichiamo che $\langle\underline{v},\underline{w}\rangle = \langle L(\underline{v}),L(\underline{w})\rangle$

$\langle\underline{v},\underline{w}\rangle = \langle\sum_{i=1}^{n} v_i*\underline{b_i}, \sum_{j=1}^{n} w_j*\underline{b_j}\rangle$ =(bilineare)= $\sum_{i=1}^{n} v_i * \langle\underline{b_i}, \sum_{j=1}^{n} w_j*\underline{b_j}\rangle$ =(bilineare)= $\sum_{i=1}^{n} v_i * \sum_{j=1}^{n} w_j * \langle\underline{b_i},\underline{b_j}\rangle$ =

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i*w_j*\partial_{ij}$ =(∂_{ij})= $\sum_{i=1}^{n} v_i*w_i$

$\langle L(\underline{v}),L(\underline{w})\rangle = \langle L(\sum_{i=1}^{n} v_i*\underline{b_i}),L(\sum_{j=1}^{n} v_j*\underline{b_j})\rangle$ =(lineare)= $\langle\sum_{i=1}^{n} v_i*L(\underline{b_i}), \sum_{i=1}^{n} v_i*L(\underline{b_j})\rangle$ =(bilineare)= $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i*w_j*\langle L(\underline{v}),L(\underline{w})\rangle$ =

=(ortonormale)= $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i*w_j*\partial_{ij}$ =(∂_{ij})= $\sum_{i=1}^{n} v_i*w_i$

$\Rightarrow$ L isometria lineare

Corollario:

L isometria lineare $\Rightarrow$ L isomorfismo

Dimostrazione:

L trasforma una base in una base

$M_L^{B,C} = I_n$ $\Rightarrow$ L isomorfismo $C = \{L(\underline{b_1}), \dots, L(\underline{b_n})\}$ $B =$

$\{\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_n}\}$

Osservazione(prodotto scalare qualsiasi vs prodotto scalare standard):

V spazio euclideo,   B base ortonormale

$<\underline{v},\underline{w}> = \sum_{i=1}^{n} v_i \times w_i = [\underline{v}]_B \cdot [\underline{w}]_B = [\underline{v}]_B{}^t \cdot [\underline{w}]_B$

(prodotto scalare arbitrario) = (prodotto scalare standard in R^n) = (prodotto riga per colonna)

Definizione:

A $\in$Mat(n,n) è una matrice ortogonale se $A^tA = I_n$

Proprietà:

1. A ortogonale <=> $A^{-1} = A^t$
2. A ortogonale <=> A^t ortogonale
3. A,B ortogonali => AB ortogonale

Dimostrazione:

1. —No dimostrazione—
2. A ortogonale <=> $A^t = A^{-1}$ => $(A^t)^tA^t = AA^t = AA^{-1} = I_n$ => $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$ =(1)> A^t ortogonale
3. $(AB)^t(AB) = B^tA^tAB = B^tI_nB = B^tB = I_n$ => AB ortogonale

Proposizione:

le seguenti condizioni sono equivalenti per A $\in$Mat(n,n)

1. A ortogonale
2. Le righe di A formano una base ortonormale di R^n
3. Le colonne di A formano una base ortonormale di R^n

Dimostrazione:

1) <=> 3)   poniamo $A = (\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$ colonne di A $A^t = (\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})^t$ righe di A

$A^tA = (\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})^t * (\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) = (\underline{a_1}^t * \underline{a_1} \ldots \underline{a_1}^t * \underline{a_n} \mid \ldots \mid \underline{a_n}^t * \underline{a_1} \ldots \underline{a_n}^t * \underline{a_n} \times = (\underline{a_1} \cdot \underline{a_1} \ldots \underline{a_1} \cdot \underline{a_n} \mid \ldots \mid \underline{a_n} \cdot \underline{a_1} \ldots \underline{a_n} \cdot \underline{a_n})$ = cioè $(A^tA)_{ij} = \underline{a_i} \cdot \underline{a_j}$

Deduciamo A ortogonale <=> $A^tA = I_n$ <=> $(A^tA)_{ij} = (I_n)_{ij}$ $\forall i,j$ <=> $\underline{a_i} \cdot \underline{a_j} = \partial_{ij}$ <=> $\{\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}\}$ base ortonormale di R^n

Proposizione:

V spazio euclideo $L : V \to V$ endomorfismo B,C basi ortonormali allora

L isometria linere <=> $M_L^{B,C}$ matrice ortogonale

Dimostrazione:

$B = \{\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_n}\}$, $A = M_L^{B,C}$

L isometria lineare <=> $\{L(\underline{b_1}), \ldots, L(\underline{b_n})\}$ base ortonormale <=>

$\langle L(\underline{b_i}), L(\underline{b_j})\rangle = \partial_{ij} \ \forall i,j$ <=> $[L(\underline{b_i})]_C{}^t \cdot [L(\underline{b_j})]_C = \partial_{ij}$ <=>

<=> $(M_L^{B,C}[\underline{b_i}]_B)^t * (M_L^{B,C}[\underline{b_j}]_B) = \partial_{ij}$ <=> $(A\underline{e_i})^t * (A\underline{x_j}) = \partial_{ij}$ <=>

<=> $\underline{e_i}^t A^t A\underline{e_j} = \partial_{ij}$ ($A^tA\underline{e_j}$ = j-esima colonna di A^tA) ($\underline{e_i}^t A^t A\underline{e_j}$ = i-esimo elemento nella colonna j-esima di A^tA) <=>

<=> $(A^tA)_{ij} = \partial_{ij}$ <=> $A^tA = I_n$ <=> $A = M_L^{B,C}$ ortogonale

Casi particolari:

1. $V = R^n$, $B = C = E$ (base canonica) T_A isometria lineare <=> A ortogonale
2. V qualsiasi, $L = Id_V$ (isometria lineare) $M_{Id_V}^{B,C}$ matrice del cambio di base tra due basi ortonormali, è una matrice ortogonale

Esempio(matrici ortogonali/isometrie lineari in R^2):

- (cos∂ -sin∂ | sin∂ cos∂) rotazione di angolo ∂
  - $||\cos\partial \ \sin\partial|| = \sqrt{(\cos^2\partial + \sin^2\partial)} = \sqrt{1} = 1$, $||-\sin\partial \ \cos\partial|| = 1$
  - $(\cos\partial \ \sin\partial)^t \cdot (-\sin\partial \ \cos\partial)^t = \cos\partial(-\sin\partial) + \sin\partial(\cos\partial) = 0$
  - Colonne = base ortonormale di R^2 => matrice ortogonale
- (1 0 | 0 -1) riflessione rispetto all'asse x
- (-1 0 | 0 1) riflessione rispetto all'asse y
- (-1 0 | 0 -1) riflessione rispetto all'origine
- Composizione di isometrie lineari / prodotto di matrici ortogonali

  Esempio: (1 0 | 0 -1)*(cos∂ -sin∂ | sin∂ cos∂) = (cos∂ -sin∂ | -sin∂ -cos∂)

Definizione:

V spazio euclideo un'isometria è una funzione $f : V \to V$ t.c.

$d(\underline{v},\underline{w}) = d(f(\underline{v}), f(\underline{w})) \ \forall \underline{v},\underline{w} \in V$

Esempio:

una traslazione è un'isometria (non lineare): fissato $\underline{v_0} \in V$, $f : V \to V$ $f(\underline{v}) = \underline{v} + \underline{v_0}$

Teorema:

sia $f : V \to V$ un'isometria

allora esistono un'isometria lineare $L : V \to V$ e un $\underline{v_0} \in V$ t.c. $f(\underline{v}) = L(\underline{v}) + \underline{v_0}$ cioè

isometria qualsiasi = isometria lineare + traslazione

Esempio:

$(y - 3) = 2(x + 1)^2 - 3x + 1$ $\qquad\qquad$ $y = x^2$

Definizione:

un endomorfismo $L : V \to V$ si dice simmetrico se $<L(\underline{v}),\underline{w}> = <\underline{v},L(\underline{w})>$ $\forall \underline{v},\underline{w} \in V$

Proposizione:

$L : V \to V$ endomorfismo, $\qquad$ B base ortonormale di V $\qquad$ allora

L simmetrico $\iff$ $M_L^{B,B}$ simmetrica

Dimostrazione:

poniamo $A = M_L^{B,B}$

Calcoliamo $<L(\underline{v}),\underline{w}> = [L(\underline{v})]_B \cdot [\underline{w}]_B = (M_L^{B,B}[\underline{v}]_B) \cdot [\underline{w}]_B = (A[\underline{v}]_B) \cdot [\underline{w}]_B = (A[\underline{v}]_B)^t * [\underline{w}]_B = [\underline{v}]_B{}^t A^t [\underline{w}]_B$

Calcoliamo $<\underline{v},L(\underline{w})> = [\underline{v}]_B{}^t * (A[\underline{w}]_B) = [\underline{v}]_B{}^t A[\underline{w}]_B$ $\implies$ L simmetrico

$\iff$ $<L(\underline{v}),\underline{w}> = <\underline{v},L(\underline{w})>$ $\iff$ $[\underline{v}]_B{}^t A^t [\underline{w}]_B = [\underline{v}]_B{}^t A[\underline{w}]_B$ $\quad \forall \underline{v},\underline{w} \in V$ $\iff$

$\iff$ $\underline{x}^t A^t \underline{y} = \underline{x}^t A \underline{y}$ $\qquad \forall \underline{x},\underline{y} \in R^n$ $\iff$ $A^t = A$ $\iff$ A matrice simmetrica

Corollario:

$A \in Mat(n,n)$ $\quad T_A : R^n \to R^n$ endomorfismo simmetrico $\iff$ A matrice simmetrica

Definizione:

un endomorfismo $L : V \to V$ si dice ortogonalmente diagonalizzabile
se esiste una base ortonormale di V composta da autovettori di L

Teorema Spettrale:

V spazio euclideo $\quad L : V \to V$ endomorfismo

L simmetrico $\iff$ L ortogonalmente diagonalizzabile

- $L : V \to V$ è simmetrico se $<L(\underline{v}),\underline{w}> = <\underline{v},L(\underline{w})>$ $\qquad \forall \underline{v},\underline{w} \in V$
- $L : V \to V$ è ortogonalmente diagonalizzabile se $\exists$base ortonormale di V di autovettori di L

Dimostrazione:

Parte 1: ortogonalmente diagonalizzabile $\implies$ simmetrica

∃ $B = \{\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}\}$ base ortonormale di V di autovettori di L $L(\underline{b_i}) = \lambda_i \underline{b_i}$

Dati $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b_i}$ $\underline{w} = \sum_{j=1}^{n} w_j \underline{b_j}$,   calcoliamo

$<L(\underline{v}),\underline{w}> = <L(\sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b_i}), \sum_{j=1}^{n} w_j \underline{b_j}>$ =(lineare)= $<\sum_{i=1}^{n} v_i L(\underline{b_i}), \sum_{j=1}^{n} w_j \underline{b_j}>$ =(autovettori)= $<\sum_{i=1}^{n} v_i \lambda_i \underline{b_i}, \sum_{j=1}^{n} w_j \underline{b_j}> =$

=(bilineare)= $\sum_{i=1}^{n} v_i \lambda_i \sum_{j=1}^{n} w_j <\underline{b_i},\underline{b_j}>$ =(ortonormale)= $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \lambda_i w_j \partial_{ij}$ =(∂_{ij})= $\sum_{i=1}^{n} v_i \lambda_i w_i$

Allo stesso modo $<\underline{v},L(\underline{w})> = \dots = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i (w_j \lambda_j) \partial_{ij}$ =(∂_{ij})= $\sum_{j=1}^{n} v_j \lambda_j w_j$

=> L simmetrico

Lemma: L : V->V endomorfismo simmetrico => $X_L(x)$ ha almeno una radice in R

Parte 2: L simmetrico => L ortogonalmente diagonalizzabile

Sia n = dimV   Lemma: L ha almeno un autovalore $\lambda_1 \in R$ => un autovettore $\underline{0} \neq \underline{b_1} \in V$ t.c. $L(\underline{b_1}) = \lambda_1 \underline{b_1}$

A meno di normalizzare, possiamo supporre $||\underline{b_1}|| = 1$

Consideriamo $H = Span(\underline{b_1}) \subseteq V$ e $W = H^{\perp}$ => dimW = dimV - dimH = n - 1

Sia $\underline{w} \in W$ Osserviamo $<L(\underline{w}),\underline{b_1}> = <\underline{w},L(\underline{b_1})> = <\underline{w},\lambda_1 \underline{b_1}> = \lambda_1 <\underline{w},\underline{b_1}> = 0$ perché $\underline{w} \in W = (Span(\underline{b_1}))^{\perp}$

Cioè: se $\underline{w} \in W$ => $L(\underline{w}) \perp \underline{b_1}$ => $L(\underline{w}) \in W = H^{\perp}$ cioè $L(W) \subseteq W$

Cioè la restrizione di L : V->V al sottospazio W è L : W->W è ancora un endomorfismo ed è ancora simmetrico

con dimW = n - 1, $W \perp Span(\underline{b_1})$

Ripetendo il ragionamento per W otteniamo $\underline{b_2}$, etc. => $\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}$ base ortonormale di V di autovettori di L

Corollario:

L : V->V endomorfismo simmetrico $\lambda_i \neq \lambda_j$ autovalori di L => $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$

Corollario(teorema spettrale per le matrici):

A ∈Mat(n,n) le seguenti condizioni sono equivalenti

1. A è una matrice simmetrica
2. ∃ $B = \{\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}\}$ base ortonormale di R^n composta da autovettori di A
3. ∃ S,D ∈Mat(n,n) t.c. $D = S^t A S$ dove D è diagonale e $S = (\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n})$ è una matrice ortogonale