Basi ortogonali e ortonormali, proiezione ortogonale, complemento ortogonale, sottospazi affini perpendicolari #GAL

Definizione:

V spazio euclideo, H sottospazio, una base $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ di H si dice

- Base ortogonale se $<\underline{b}_i,\underline{b}_j> = 0$ se $i \neq j$
- Base ortonormale se è ortogonale e inoltre $\underline{b}_i$ ha norma = 1 $<\underline{b}_i,\underline{b}_j> = \{0$ se $i \neq j$; 1 se $i = j\}$

Esempio:

la base canonica $E = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ di R^n è ortonormale

Esempio:

$\{(1\ 1)^t, (1\ {-1})^t\}$ base ortogonale di R^2

$(1\ 1)^t \cdot (1\ {-1})^t = 1*1 + 1*(-1) = 0$

$||(1\ 1)^t|| = \sqrt{(1^2+1^2)} = \sqrt{2} \neq 1$ $\quad ||(1\ {-1})^t|| = \sqrt{(1^2 + (-1)^2)} = \sqrt{2} \neq 1$

Osservazione:

dividendo ogni vettore di una base ortogonale per la sua norma, otteniamo una base ortonormale

Esempio:

$B = \{(1/\sqrt{2}\ \ 1/\sqrt{2})^t, (1/\sqrt{2}\ \ {-1}/\sqrt{2})^t\}$ base ortonormale di R^2

Base B rappresentabile come due vettori di lunghezza pari al raggio della circonferenza goniometrica

I due vettori formano un angolo di $\pi/2$ essendo ortogonali

Proposizione(coordinate rispetto a una base ortonormale):

$B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d\}$ base ortonormale di V allora $[\underline{v}]_B = (\underline{v}\cdot\underline{b}_1 \dots \underline{v}\cdot\underline{b}_d)^t$

Dimostrazione:

Per definizione di $[\underline{v}]_B$ abbiamo $[\underline{v}]_B = (c_1 \dots c_d)^t$ dove $\underline{v} = c_1 \times \underline{b}_1 + \dots + c_d\underline{b}_d$ moltiplichiamo $\underline{v}$ per $\underline{b}_i$

$<\underline{v},\underline{b}_i> = <c_1 * \underline{b}_1 + \dots + c_d\underline{b}_d, \underline{b}_i>$ =(bilineare)= $c_1<\underline{b}_1,\underline{b}_i> + \dots + c_i<\underline{b}_i,\underline{b}_i> + \dots + c_d<\underline{b}_d,\underline{b}_i> = c_1 \times 0 + \dots + c_i \times 1 + \dots + c_d \times 0 = c_i$

Definizione:

V spazio euclideo, $H \subseteq V$ sottospazio, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d\}$ base ortonormale di H

la proiezione ortogonale H è la funzione $\pi_H : V \to V$ definita da $\pi_H(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{d} <\underline{v},\underline{b}_i>\underline{b}_i \quad \forall \underline{v} \in V$

Importante:

si verifica che usando un'altra base ortonormale B' di H si ottiene la stessa funzione $\pi_H : V \to V$

Proposizione(proprietà di π_H):

1. $\pi_H : V \to V$ è un endomorfismo
2. Se $\underline{h} \in H \Rightarrow \pi_H(\underline{h}) = \underline{h}$
3. $\pi_H \circ \pi_H = \pi_H$
4. $Im(\pi_H) = H$
5. $\ker(\pi_H) = H^{\perp}$
6. $\forall \underline{v} \in V \Rightarrow \underline{v} - \pi_H(\underline{v}) \in H^{\perp}$

Dimostrazione:

1. Segue dalla bilinearità di <-,->

$\pi_H(c_1\underline{v_1}+c_2\underline{v_2}) = {}^d\Sigma_{i=1} <c_1\underline{v_1}+c_2\underline{v_2},\underline{b_i}>\underline{b_i}$ =(bilineare)= ${}^d\Sigma_{i=1}$ $(c_1<\underline{v_1},\underline{b_i}> + c_2<\underline{v_2},\underline{b_i}>)\underline{b_i}$ =

$= c_1 * {}^d\Sigma_{i=1}<\underline{v_1},\underline{b_i}>\underline{b_i} + c_2 * {}^d\Sigma_{i=1}<\underline{v_2},\underline{b_i}>\underline{b_i} = c_1 * \pi_H(\underline{v_1}) + c_2 * \pi_H(\underline{v_2})$

2. Segue dalla proposizione dell'ultima
3. Segue da 2): se $\underline{v} \in V \Rightarrow \pi_H(\underline{v}) = {}^d\Sigma_{i=1} <\underline{v},\underline{b_i}>\underline{b_i}$ $\quad \underline{b_i} \in H \ \forall i \Rightarrow$

   $\pi_H(\pi_H(\underline{v}))$ =(2)= $\pi_H(\underline{v})$
4. Segue da 2)
5. $\underline{w} \in \ker(\pi_H) \iff \pi_H(\underline{w}) = \underline{0} \iff <\underline{w},\underline{b_i}> = 0 \ \forall i = 1, .., d \iff \underline{w} \perp \underline{b_i} \ \forall i$

   $\iff \underline{w} \perp \underline{h} \ \ h \in H \iff \underline{w} \in H^{\perp}$
6. $\underline{v} \in V \Rightarrow \pi_H(\underline{v} - \pi_H(\underline{v}))$ =(1)= $\pi_H(\underline{v}) - \pi_H(\pi_H(\underline{v}))$ =(3)= $\pi_H(\underline{v}) - \pi_H(\underline{v}) =$

   $\underline{0} \Rightarrow \underline{v} - \pi_H(\underline{v}) \in \ker(\pi_H) = H^{\perp}$

Corollario(complemento ortogonale):

1. $\dim H^{\perp} = \dim V - \dim H \Rightarrow \dim H + \dim H^{\perp} = \dim V$
2. $H + H^{\perp} = V$
3. $H \cap H^{\perp} = \{\underline{0}\}$
4. $H^{\perp\perp} = H$
5. $\forall \underline{v} \in V \Rightarrow \underline{v} = \pi_H(\underline{v}) + \pi_{H^{\perp}}(\underline{v})$ cioè $Id_V = \pi_H + \pi_{H^{\perp}}$

Dimostrazione:

1. Segue da proposizione 4) e 5) e dal teorema nullità+rango
2. Segue da proposizione 6): $\underline{v} = \pi_H(\underline{v}) + \pi_{H^{\perp}}(\underline{v}) \Rightarrow V = H + H^{\perp}$
3. Segue da proposizione 1) e 2) e dalla formula di Grassman, oppure:

   se $\underline{v} \in H \cap H^{\perp} \Rightarrow \underline{v}(\in H) \perp \underline{v}(\in H^{\perp}) \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$ (proprietà definita positiva)
4. - $H \subseteq H^{\perp\perp} = (H^{\perp})^{\perp}$ perché $\forall \underline{v} \in H, \underline{w} \in H^{\perp} \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{w} \Rightarrow v \in (H^{\perp})^{\perp}$

- $\dim H = \dim H^{\perp\perp}$ perché $\dim H^{\perp\perp} =(1)= \dim V - \dim H^{\perp} =(1)= \dim V - (\dim V - \dim H) = \dim H \Rightarrow H = H^{\perp\perp}$

5. Sia $B_1 = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d\}$ base ortonormale di H $B_2 = \{\underline{b}_{d+1}, \dots, \underline{b}_n\}$ base ortonormale di $H^{\perp}$

   dove $d = \dim H$, $n = \dim V$, $n-d = \dim H^{\perp}$ => $B = B_1 \cup B_2 \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ è una base ortonormale di V (segue da 2) e 3))

   $\forall \underline{v} \in V \ \pi_H(\underline{v}) + \pi_{H^{\perp}}(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{d} \langle \underline{v}, \underline{b}_i \rangle \underline{b}_i + \sum_{i=d+1}^{n} \langle \underline{v}, \underline{b}_i \rangle \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \underline{v}, \underline{b}_i \rangle \underline{b}_i = \pi_H(\underline{v}) = Id_V(\underline{v}) = \underline{v}$

Corollario(minima distanza):

dato $\underline{v} \in V$ e $H \subseteq V$ sottospazio $\pi_H(\underline{v})$ è il vettore di H più vicino a $\underline{v}$ cioè $d(\underline{v}, \pi_H(\underline{v})) \leq d(\underline{v}, \underline{h}) \ \forall \underline{h} \in H$

Dimostrazione:

$d(\underline{v},\underline{h})^2 = ||\underline{v}-\underline{h}||^2 = ||(\underline{v} - \pi_H(\underline{v})) + (\pi_H(\underline{v}) - \underline{h})||^2$ =(Pitagora)= $||\underline{v} - \pi_H(\underline{v})||^2 + ||\pi_H(\underline{v}) - \underline{h}||^2 \geq ||\underline{v} - \pi_H(\underline{v})||^2 = d(\underline{v}, \pi_H(\underline{v}))^2$

=> $d(\underline{v},\underline{h}) \geq d(\underline{v}, \pi_H(\underline{v}))$

Osservazione:

se $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d\}$ è una base ortogonale di $H \subseteq V$ allora:

$\pi_H = (\langle \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle \underline{b}_1) / ||\underline{b}_1||^2 + \dots + (\langle \underline{v}, \underline{b}_d \rangle \underline{b}_d) / ||\underline{b}_d||^2$

Domanda:

Come trovare una base ortonormale di $H \subseteq V$?

Algoritmo di Gram-Schindt:

Input: una base (qualsiasi) di un sottospazio $H \subseteq V$ $C = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

Output: una base ortonormale $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d\}$ di H

1. $\underline{b}_1 = \underline{v}_1 / ||\underline{v}_1||$ poniamo $H_1 = Span(\underline{v}_1) = Span(\underline{b}_1)$
2. $\underline{w}_2 = \underline{v}_2 - \pi_{H_1}(\underline{v}_2)$ e $\underline{b}_2 = \underline{w}_2 / ||\underline{w}_2||$ $\underline{w}_2, \underline{b}_2 \perp H_1$ => $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ base ortonormale di $H_2 = Span(\underline{b}_1, \underline{b}_2) = Span(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
3. $\underline{w}_3 = \underline{v}_3 - \pi_{H_2}(\underline{v}_3)$ e $\underline{b}_3 = \underline{w}_3 / ||\underline{w}_3||$ $\underline{w}_3, \underline{b}_3 \perp H_2$ => $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ base ortonormale di $H_3 = Span(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3) = Span(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$
4. $\underline{w}_d = \underline{v}_d - \pi_{H_{d-1}}(\underline{v}_d)$ e $\underline{b}_d = \underline{w}_d / ||\underline{w}_d||$ $\underline{w}_d, \underline{b}_d \perp H_{d-1}$ => $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d\}$ base ortonormale di $H = Span(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d) = Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_d)$

Definizione:

V spazio euclideo, due sottospazi affini $S_1 = \underline{x}_1 + H_1$ e $S_2 = \underline{x}_2 + H_2$

si dicono perpendicolari se $H_1 \perp H_2$ cioè $\underline{v} \perp \underline{w}$ $\forall \underline{v} \in H_1, \forall \underline{w} \in H_2$ e inoltre $S_1 \cap S_2 \neq 0$

Esempio:

in R^3 trovare la retta r perpendicolare il piano π e passante per il punto P

- Ho il punto P
- Giacitura di r = (giacitura di π)^t

Definizione:

la distanza tra due sottospazi affini S_1, S_2 è $d(S_1, S_2) = \min\{d(\underline{y_1},\underline{y_2}) : \underline{y_1} \in S_1, \underline{y_2} \in S_2\}$

Osservazione:

se $S_1 \cap S_2 \neq \underline{0}$ scegliendo $\underline{y_1} = \underline{y_2}$ otteniamo $d(S_1, S_2) = 0$

Proposizione:

dati $S_1 = \underline{x_1} + H_1$, $S_2 = \underline{x_2} + H_2$ poniamo $H = H_1 + H_2 \subseteq V$ allora posso determinare $d(S_1,S_2) = ||\pi_H(\underline{x_1}-\underline{x_2})||$

minima distanza: lunghezza del vettore, $\underline{x_1}-\underline{x_2}$ proiettato su una direzione perpendicolare a entrambi S_1 e S_2

Dimostrazione:

osservazione: $\underline{x_1}-\underline{x_2} = \pi_H(\underline{x_1}-\underline{x_2}) + \pi_{H^\perp}(\underline{x_1}-\underline{x_2})$ e $\pi_H(\underline{x_1}-\underline{x_2})$ $H = H_1 + H_2$

=> $\pi_H(\underline{x_1}-\underline{x_2}) = \underline{h_1} + \underline{h_2}$ con $\underline{h_1} \in H_1$ e $\underline{h_2} \in H_2$ => $\underline{x_1}-\underline{x_2} = \underline{h_1} + \underline{h_2} + \pi_H(\underline{x_1}-\underline{x_2})$

dati due qualsiasi $\underline{y_1} \in S_1$ e $\underline{y_2} \in S_2 = \underline{x_2} + H_2$ => $\underline{y_1} = \underline{x_1} + \underline{h_1}'$ e $\underline{y_2} = \underline{x_2} + \underline{h_2}'$ con $\underline{h_1}' \in H_1$ e $\underline{h_2}' \in H_2$

calcoliamo $d(\underline{y_1},\underline{y_2}) = ||\underline{y_1}-\underline{y_2}||^2 = ||\underline{x_1}-\underline{h_1}' - \underline{x_2}-\underline{h_2}'||^2 = ||(\underline{x_1}-\underline{x_2}) - \underline{h_1}'+\underline{h_2}'||^2 = ||\pi_H(\underline{x_1}-\underline{x_2}) + \underline{h_1}+\underline{h_2}+\underline{h_1}'+\underline{h_2}'||^2 =$

=(Pitagora)= $||\pi_{H^\perp}(\underline{x_1}-\underline{x_2})||^2 + ||\underline{h_1}+\underline{h_2}+\underline{h_1}'+\underline{h_2}'||^2 \geq ||\pi_{H^\perp}(\underline{x_1}-\underline{x_2})||^2$ => $d(\underline{y_1},\underline{y_2}) \geq ||\pi_{H^\perp}(\underline{x_1}-\underline{x_2})||^2$

d'altro canto scegliamo $\underline{h_1}' = \underline{h_1}$ e $\underline{h_2}' = \underline{h_2}$ cioè $\underline{y_1} = \underline{x_1} - \underline{h_1}' \in S_1$ e $\underline{y_2} = \underline{x_2} - \underline{h_2}' \in S_2$ stessi calcoli

$d(\underline{y_1},\underline{y_2}) = ||\pi_{H^\perp}(\underline{x_1}-\underline{x_2})||^2$ minima distanza possibile