Diagonalizzabilità di una matrice e formula di cambio base #GAL

Definizione:

un endomorfismo L : V->V si dice diagonalizzabile se esiste una base B di V t.c. $M_L^{B,B}$ è una matrice diagonale

(A $\in$Mat(n,n) è detta diagonalizzabile se T_A è diagonalizzabile)

Esempio:

L : R^2->R^2 L(x y) = (x+y x+y) è diagonalizzabile B = {(1 1), (1 -1)} base di R^2 Troviamo $M_L^{B,B}$

L(1 1) = (1+1 1+1) = (2 2) = 2*(1 1) + 0*(1 -1) => $[L(1\ 1)]_B$ = (2 0)

L(1 -1) = (1-1 1-1) = (0 0) = 0*(1 1) + 0*(1 -1) => $[L(1\ -1)]_B$ = (0 0)

$M_L^{B,B}$ = (2 0 | 0 0)

Osservazione:

L = T_A dove A = (1 1 | 1 1) è una matrice diagonalizzabile

Proposizione(1° criterio di diagonalizzabilità):

L : V->V è diagonalizzabile <=> esiste una base di V composta da autovettori di L

Dimostrazione:

Sia B = {$\underline{b_1}$, ..., $\underline{b_n}$} base di V $\underline{b_i} \neq 0$ $\forall$i $\mu = \lambda$

$\underline{b_i}$ è un autovettore si L <=> $\exists\mu_i \in$R t.c. L($\underline{b_i}$) = μ_i*$\underline{b_i}$ = 0$\underline{b_1}$ ... $\mu_i\underline{b_i}$ ... 0$\underline{b_n}$ <=> $[L(\underline{b_i})]_B$ = (0 ... μ_i ... 0) <-i-esima riga <=>

<=> $M_L^{B,B}$ = ($[L(\underline{b_1})]_B$, ..., $[L(\underline{b_n})]_B$) = (μ_1 0 ... 0 | 0 μ_2 ... 0 | ... | 0 ... μ_n) <=> $M_L^{B,B}$ matrice diagonale <=> L diagonalizzabile

Osservazione:

se B base di V di autovettori di L => $M_L^{B,B}$ matrice diagonale con gli autovalori di L sulla diagonale

Domanda:

L : V->V endomorfismo B,C basi di V qual è la relazione tra $M_L^{B,B}$ e $M_L^{C,C}$?

Definizione:

A,B ∈Mat(n,n) si dicono simili se esiste S ∈Mat(n,n) invertibile t.c. $A = S^{-1}BS$ (cioè SA = BS)

Esempio:

S = (1 -1 | 1 0) è invertibile, S^{-1} (0 1 | -1 1) $S^{-1}AS = B$ =>
=> (0 1 | -1 1)*(1 2 | 2 4)*(1 -1 | 1 0) = (6 -2 | 3 -1) => A = (1 2 | 2 4) e B = (6 -2 | 3 -1) sono simili

Proposizione(proprietà delle matrici simili):

siano A,B ∈Mat(n,n) matrici simili allora

1. A^k, B^k sono simili $\forall k \in N$
2. A^{-1}, B^{-1} sono simili se esistono
3. A^t, B^t sono simili
4. det(A) = det(B)
5. rkA = rkB
6. dimKer(A) = dimKer(B)
7. $X_A(x) = X_B(x)$
8. tr(A) = tr(B)

Definizione:

la traccia di A ∈Mat(n,n) è $tr(A) = {}^n\Sigma_{i=1} (A)_{ii}$

Dimostrazione:

1. $A^k = (S^{-1}BS)^k = (S^{-1}B\cancel{S}) * (\cancel{S}^{-1}B\cancel{S}) * \ldots * (\cancel{S}^{-1}BS) = S^{-1}B\times\ldots\times B\times S = S^{-1}B^kS$
2. Es
3. Es
4. $A = S^{-1}BS$ => $det(A) = det(S^{-1}BS)$ =(Binet)= $det(S^{-1})*dex(B)*dex(S)$ =(binet)= det(B)
5. Segue dal teorema di nullità+rango
6. $A = S^{-1}BS$, cioè $T_A = T_{S^{-1}} \cdot T_B \cdot T_S$ S, S^{-1} invertibili

   => T_S, $T_{S^{-1}}$ isomorfismi abbiamo dimKer(A) = dimKer(T_A) = dimKer($T_{S^{-1}} \cdot T_B \cdot T_S$) = dimKer($T_B$)

   perché T_S e $T_{S^{-1}}$ isomorfismi => preservano dimensioni
7. $X_A(x) = det(A - x*I_n)$ osserviamo $S^{-1}(x*I_n \times S = x(S^{-1}I_nS) = x(S^{-1}S) = x*I_n$ adesso $A = S^{-1}BS$

   => $S^{-1}(B - x*I_n \times = S^{-1}BS - S^{-1}(x*I_n \times S = S^{-1}BS - x\times I_n = A - x*I_n$ =>

$A - x\times I_n = S^{-1}(B - x*I_n)S$

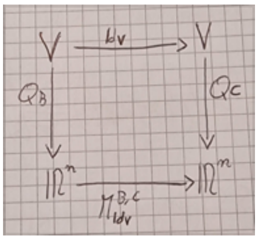
=> $\det(A - x \times I_n) = \det(S^{-1}(B - x*I_n \times S) = \det(S^{-1})*\det(B - x*I_n)*\det(S)$

=> $\det(A - x \times I_n) = \det(B - x*I_n)$ => $X_A(x) = X_B(x)$

Definizione:

V spazio vettoriale $B = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$, $C = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n}\}$ basi di V $M_{Id_V}^{B,C}$ è detta matrice del cambio di base da B a C

Per ogni $\underline{v} \in V$ => $Q_C(Id_V(\underline{v})) = M_{Id_V}^{B,C}(Q_B(\underline{v}))$ => $Q_C(\underline{v}) = M_{Id_V}^{B,C}(Q_B(\underline{v}))$ cioè $[\underline{v}]_C = M_{Id_V}^{B,C}[\underline{v}]_B$



Il diagramma commuta

Esempio:

$V = R^2$ $B = \{(1\ 1), (1\ -1)\}$ $C = \{(1\ 0), (2\ 1)\}$ colonne di $M_{Id_V}^{B,C}$ = coordinate di $Id_V(\underline{v_i}) = \underline{v_i}$ rispetto base C

$(1\ 1) = -1 \times (1\ 0) + 1 \times (2\ 1) = [(1\ 1)]_C = (-1\ 1)$

$(1\ -1) = 3 \times (1\ 0) - 1 \times (2\ 1) = [(1\ -1)]_C = (3\ -1)$

=> $M_{Id_V}^{B,C} = (-1\ 3 \mid 1\ -1)$ trasforma le coordinate $[\underline{v}]_B$ in $[\underline{v}]_C$

Esempio:

$v = 2*(1\ 1) + 3*(1\ -1) = (5\ -1)$ $[\underline{v}]_B = (2\ 3)$

$M_{Id_V}^{B,C} = (-1\ 3 \mid 1\ -1) \times (2\ 3) = (7\ -1) = [\underline{v}]_C$ infatti $7 \times (1\ 0) - 1 \times (2\ 1) = (5\ -1)$

Osservazione:

$M_{Id_V}^{B,C}$ è una matrice quadrata invertibile (perché l'applicazione lineare che rappresenta Id_V : V->V è un endomorfismo)

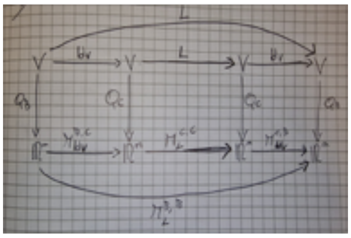
L'inversa è $M_{Id_V}^{C,B}$

Esempio:

trovare $M_{Id_V}^{C,B}$ e verificare che è l'inversa di $(-1\ 3 \mid 1\ -1)^{-1}$

Formula del cambio di base L : V->V endomorfismo B,C basi di V allora

$M_L^{B,B} = M_{Id_V}^{C,B} \cdot M_L^{C,C} \cdot M_{Id_V}^{B,C}$



Il diagramma commuta (rappresentazione della composizione)

Corollario:

scrivendo $S = M_{Id_V}^{B,C}$ è invertibile $M_L^{B,B} = S^{-1} * M_L^{C,C} * S$

Definizione:

L : V->V endomorfismo dove $A = M_L^{B,B}$ è una qualsiasi matrice associata a L

- $\det(L) = \det(A)$
- $X_L(x) = X_A(x)$
- $tr(L) = tr(A)$

Osservazione:

$A \in Mat(n,n)$ $T_A : R^n \to R^n$ $E = \{\underline{e_1}, \ldots, \underline{e_n}\}$ base canonica di R^n

$M_{T_A}^{E,E} = A$ perché i-esima colonna di $M_{T_A}^{E,E}$ $[T_A(\underline{e_i})]_E = [A \times \underline{e_i}]_E = A \times \underline{e_i}$ = i-esima colonna di A

Proposizione(formula cambio di base, caso matrice quadrata):

$A \in Mat(n,n)$ diagonalizzabile <=> A simile a una matrice diagonale

In questo caso $D = S^{-1}AS$ dove

D matrice diagonale con autovalori di A sulla diagonale

$S = (\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_n})$ matrice invertibile dove colonne = base di autovettori di A

Dimostrazione:

A diagonalizzabile <=> T_A diagonalizzabile <=(1° criterio)=> $\exists$base $B\{\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_n}\}$ di R^n t.c. $M_{T_A}^{B,B}$ è diagonale

Formula di cambio di base $M_{T_A}^{B,B} = M_{Id_{R^n}}^{E,B} \cdot M_{T_A}^{E,E} \cdot M_{Id_{R^n}}^{B,E}$

abbiamo $M_{T_A}^{E,E} = A$ $M_{Id_{R^n}}^{B,E}([\underline{b}_1]_E, ..., [\underline{b}_n]_E) = (\underline{b}_1, ..., \underline{b}_n) = S$ $M_{Id_{R^n}}^{E,B} = S^{-1}$

$\exists$base $B\{\underline{b}_1, ..., \underline{b}_n\}$ t.c. $D = S^{-1}AS$ è una matrice diagonale

Esempio:

diagonalizzare $A = (1\ 1 \mid 1\ 1)$

1. Autovalori $X_A(x) = \det(1-x\ \ 1 \mid 1\ \ 1-x) = (1 - x)^2 - 1^2 = (1 - x - 1)(1 - x + 1) = -x(2 - x) \Rightarrow$ autovalori 0,2
2. Autospazi $E_0 = \ker(A - 0\times I_2) = \ker(A) = \ker(1\ 1 \mid 1\ 1) = \mathrm{Span}(1\ -1)$

$E_2 = \ker(A - 2\times I_2) = \ker(1-2\ \ 1 \mid 1\ \ 1-2) = \ker(-1\ 1 \mid 1\ -1) = \mathrm{Span}(1\ 1)$

abbiamo $B = \{(1\ -1); (1\ 1)\}$ base di R^2 composta da autovalori di A =(1° criterio)= diagonalizzabile

Equazione di diagonalizzazione $D = S^{-1}AS$

$(0\ 0 \mid 0\ 2) = (1\ 1 \mid -1\ 1)^{-1} * (1\ 1 \mid 1\ 1) * (1\ 1 \mid -1\ 1)$ $M_{T_A}^{B,B} = M_{Id_{R^n}}^{E,B} \cdot M_{T_A}^{E,E} \cdot M_{Id_{R^n}}^{B,E}$

Richiami sui polinomi:

un polinomio $p(x) \in R_{[x]}$ parliamo di scomposizione/fattorizzazione $p(x) = (\partial_1 - x)^m * ... * (\partial_r - x)^{m_r} * q(x)$

dove	$\partial, ..., \partial_r \in R$	sono le radici distinte di $p(x)$
	$m, ..., m_r \in N$	m_i = molteplicità di ∂_i
	$q(x)$	è un polinomio senza radici in R

Esempio:

- $x^3 - x^2 - 3x + 3 = x^2(x - 1) -3(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 3) = (x - 1)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

  $\partial_1 = \sqrt{3}$ $\partial_2 = -\sqrt{3}$ $\partial_3 = 1$ $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ $q(x) = 1$
- $x^2 - 1$ non ha radici in R $q(x) = x^2 + 1$ $(x^2 - 1) = (x + i)(x - i)$ in C
- $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2)^2 - 2(x^2) = (x^2 - 1)^2 = [(x - 1)(x + 1)]^2 = (x - 1)^2 * (x + 1)^2$

  $\partial_1 = 1$ $\partial_2 = -1$ $m_1 = m_2 = 2$

radici (contate con molteplicità)

Osservazione:

se $q(x)$ = costante (grado 0) diciamo che $p(x)$ si scompone completamente o che ha tutte le radici in R

Definizione:

sia $\mu \in R$ un autovalore di $L : V \to V$ definiamo

- a_μ = molteplicità algebrica di μ = la molteplicità di μ come radice del polinomio caratteristico $X_A(x)$
- g_μ = molteplicità geometrica di μ = la dimensione dell'autospazio = $\dim E_\mu = \dim Ker(L - \mu * Id_V)$

Proposizione:

se μ è un autovalore di L => $1 \le g_\mu \le a_\mu$

Teorema(2° criterio di diagonalizzabilità):

$L : V \to V$ $\dim V = n$ siano $\mu_1, \dots \mu_r$ gli autovalori distinti di L

allora L è diagonalizzabile <=> $\sum_{i=1}^{r} a_{\mu_i} = n$ e $a_{\mu_i} = g_{\mu_i}$ $\forall i$ <=> $\sum_{i=1}^{r} g_{\mu_i} = n$

In questo caso: se $B_1, \dots, B_r$ sono basi degli autospazi $E_{\mu_1}, \dots, E_{\mu_r}$ allora $B_{\mu_1} \cup \dots \cup B_{\mu_r}$ ottengo una base di V composta da autovettori di L

Esempi:

1. A = (1 1 | 1 1) è diagonalizzabile $a_0 = g_0 = 1$, $a_2 = g_2 = 1$ e $a_0 + a_2 = n = 2$
2. A = (0 1 | -1 0) $X_A(x)$ = det(-x 1 | -1 -x) = $x^2 + 1$ no autovalori
   $\sum_{i=1}^{r} a_{\mu_i} = 0 < 2 = n$ => A non è diagonalizzabile
3. A = (1 1 | 0 1) $X_A(x)$ = det(1-x 1 | 0 1-x) = $(1 - x)^2$ un solo autovalore $\mu_1 = \mu_2 = 2$
   => $\sum_{i=1}^{r} a_{\mu_i} = 2 = n$ E_1 = ker(1-1 1 | 0 1-1) = ker(0 1 | 0 0)
   => g_1 = dimKer(0 1 | 0 0) = 2 - rk(0 1 | 0 0) = 1 $g_1 < a_1$ => A non è diagonalizzabile

Processo di diagonalizzazione:

$A \in Mat(n,n)$

1. Troviamo $X_A(x) = det(A - x*I_n)$ e fattorizzato => troviamo autovalori μ_1, ..., μ_n e molteplicità algebrica a_{μ_i}

   Se ${}^r\Sigma_{i=1} a_{\mu_i} < n$ => A non è diagonalizzabile

altrimenti

2. Per ogni μ_i trovare dimensione/base di E_{μ_i} e molteplicità geometrica $g_{\mu_i} = dimE_{\mu_i}$

   se $g_{\mu_i} < a_{\mu_i}$ per qualche μ_i => A non è diagonalizzabile

altrimenti

3. A è diagonalizzabile $B = B_1 \cup ... \cup B_r$ è una base di R^n di autovettori di A $D = S^{-1}AS$

   dove $D = (\mu_1\ 0 \dots 0 \mid 0\ \mu_2 \dots 0 \mid \dots \mid 0 \dots \mu_n)$ $S = (\underline{b_1}, ..., \underline{b_n}) =$

$M_{Id_{R^n}}{}^{B,E}$ dove $B = \{\underline{b_1}, ..., \underline{b_n}\}$

Corollario:

L : V->V   dimV = n   se L ha autovalori distinti => L è diagonalizzabile

Dimostrazione:

autovalori $\mu_1, ..., \mu_n$ (n = r)   dato che $1 \le a_{\mu_i}$ $\forall i$ e ${}^r\Sigma_{i=1} a_{\mu_i} \le n$

=> $a_{\mu_I} = 1$ => $1 \le g_{\mu_i} \le a_{\mu_i} = 1$ => $g_{\mu_i} = 1 = a_{\mu_i}$

Esempio:

A = (2 3 5 | 0 4 0 | 0 0 -7) è diagonalizzabile (triangolare => autovalori 2, 4, -7)

Osservazione:

date due matrici A,B come vedere se A,B sono simili ?

abbiamo visto tante condizioni necessarie

se rkA ≠ rkB => A,B non sono simili

oppure se detA ≠ detB => A,B non sono simili

oppure se trA ≠ trB => A,B non sono simili

oppure se $X_A(x) \neq X_B(x)$ => A,B non sono simili

Attenzione:

se detA = detB, rkA = rkB, trA = trB, $X_A(x) = X_B(x)$ non posso concludere che A,B sono simili

Controesempio:

(1 1 | 0 1) e (1 0 | 0 1) non sono simili oppure (0 0 | 0 0) e (0 1 | 0 0)

perché (1 1 | 0 1) non è diagonalizzabile => non è simile a una matrice diagonale (come (1 0 | 0 1))

Unico modo (per noi) per concludere che due matrici sono simili:

Corollario:

se $A,B \in Mat(n,n)$ sono entrambe diagonalizzabili con stessi autovalori e stesse molteplicità algebriche (cioè $X_A(x) = X_B(x)$) allora A,B sono simili

Dimostrazione:

applicando il 2° criterio di diagonalizzabilità a entrambe => esistono S_1, S_2 invertibili t.c.

$S_1^{-1}AS_1 = D = S_2^{-1}AS_2$ (D stessa matrice diagonale per A e B) => $S_1^{-1}AS_1 = S_2^{-1}AS_2$

=> $A = S_1S_2^{-1}BS_2S_1^{-1} = (S_2S_1^{-1})^{-1}B(S_2S_1^{-1})$ => A,B sono simili

Proposizione(informazioni contenute in $X_A(x)$):

$A \in Mat(n,n)$ => $X_A(x) = (-x)^n + (-x)^{n-1} * tr(A)$ + (equazioni di grado n-2, ..., 1) + $det(A)$

Esempio:

$A = (a_{11}\ a_{12} \mid a_{21}\ a_{22})$

$X_A(x) = det(a_{11}-x\ \ a_{12} \mid a_{21}\ \ a_{22}-x) = (a_{11}-x)(a_{21}-x) - a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{22}x - a_{11}x + (-x)^2 - a_{21}a_{12} =$

$= (-x)^2 + (-x)(a_{11} + a_{22})[tr(A)] + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})[det(A)]$

Esercizio:

verificare la proposizione per A 3x3

Corollario:

se $A \in Mat(n,n)$ diagonalizable con autovalori $\mu_1, ..., \mu_n$ non necessariamente distinti

$tr(A) = ? = \mu_1 + ... + \mu_n$ $\quad$ $det(A) = ? = \mu_1*...*\mu_n$

Dimostrazione:

A simile a $D = (\mu_1\ 0 \dots 0 \mid 0\ \mu_2 \dots 0 \mid \dots \mid 0 \dots \mu_n)$

=> $tr(A) = tr(D) = \mu_1 + ... + \mu_n$ $\quad$ $det(A) = det(D) = \mu_1*...*\mu_n$

Esempio:

$A = (2\ 1 \mid 1\ 2)$ è diagonalizzabile (lo vedremo nel prossimo capitolo)

=> gli autovalori μ_1 e μ_2 soddisfa

- $\mu_1 + \mu_2 = tr(A) = 2+2 = 4$
- $\mu_1 \times \mu_2 = det(A) = 4 - 1 = 3$

=> $\mu_1 = 1$ $\quad$ $\mu_2 = 3$