Semplificazione di una quadrica senza centro #GAL

1. Traslazione:
   Traslare per spostare un punto $\underline{v_0} \in A(Q)$ dell'asse sull'origine
   $\underline{x} = T(\underline{y}) = \underline{y} + \underline{v_0}$ con $A\underline{v_0} = -\pi_H(\underline{b})$, $H = col(A)$
   $\underline{x}^tA\underline{x} + 2\underline{b}^t\underline{x} + c = (\underline{y} + \underline{v_0})^tA(\underline{y} + \underline{v_0}) + 2\underline{b}^t(\underline{y} + \underline{v_0}) + c =$
   $= \underline{y}^tA\underline{y} + \underline{v_0}^tA\underline{y} + \underline{y}^tA\underline{v_0} + \underline{v_0}^tA\underline{v_0} + 2\underline{b}^t\underline{y} + 2\underline{b}^t\underline{v_0} + c$ =(simmetria)= $\underline{y}^t\underline{A}\underline{y}$ $+ 2\underline{v_0}^tA\underline{y} + 2\underline{b}^t\underline{y} + (\underline{v_0}^tA\underline{v_0} + 2\underline{b}^t\underline{v_0} + c)$(nuova costante) $=$
   $= \underline{y}^tA\underline{y} + 2(\underline{v_0}^tA + \underline{b}^t)\underline{y} + c' = \underline{y}^t\underline{A}\underline{y} + 2(\underline{v_0}A^t + \underline{b})^t\underline{y} + c' = \underline{y}^t\underline{A}\underline{y} + 2(A\underline{v_0} + \underline{b})^t\underline{y} + c' = \underline{y}^t\underline{A}\underline{y} + 2(\underline{b} - \pi_H(\underline{b}))^t\underline{y} + c' =$
   $= \underline{y}^tA\underline{y} + 2\pi_{H^\perp}(\underline{b})^t\underline{y} + c' = \underline{y}^tA\underline{y} + 2(\underline{b}')^t\underline{y} + c'$ nuovo $\underline{b}' = \pi_{H^\perp}(\underline{b})$ $= \pi_{ker(A)}(\underline{b})$
2. Diagonalizzazione ortogonale di A:
   Nota: Q quadrica senza centro => A non invertibile => 0 è un autovalore di A => $E_0 = ker(A)$ è autospazio di A =>
   => $\underline{b}' = \pi_{ker(A)}(\underline{b})$ è un autovettore di A => possiamo completare a una base ortonormale di R^n di autovettori di A =>
   => $\underline{b}'/||\underline{b}'||$ è un autovettore di A con norma 1 => otteniamo una base ortonormale di R^n $B = \{\underline{v_1}, ..., \underline{v_{p+r}}, \underline{v_{p+r+1}} = \underline{b}'/||\underline{b}'||, ..., \underline{v_n}\}$
   ($\underline{v_1}, ..., \underline{v_{p+r}}$ autovettori associati ad autovalori $\lambda_i \neq 0$) ($\underline{v_{p+r+1}} = \underline{b}'/||\underline{b}'||, ..., \underline{v_n}$ autovettori associati all'autovalore 0)
   $S = (\underline{u_1}, ..., \underline{u_n})$ matrice ortogonale con colonne = vettori di B applichiamo l'isometria $\underline{y} = S\underline{z}$ l'equazione diventa
   $(S\underline{z})^tA(S\underline{z}) + 2(\underline{b}')^t(S\underline{z}) + c' = \underline{z}^t(S^tAS)\underline{z} + 2||\underline{b}'|| * \underline{u_{r+p+1}}^t * S\underline{z} + c'$
   Osservazione: $S^t\underline{u_{r+p+1}} = (\underline{u_1}, ..., \underline{u_n})^t * \underline{u_{x+p+1}} = (\underline{u_1} * \underline{u_{r+p+1}}, ..., \underline{u_n} \times \underline{u_{r+p+1}})^t = (0 ... 1 ... 0)^t = \underline{e_{r+p+1}}$ =>
   => $(S^t\underline{u_{r+p+1}}) = \underline{u_{r+p+1}}^t * S \times = \underline{e_{r+p+1}}^t$
   $\underline{z}^t(S^tAS)\underline{z} + 2||\underline{b}'|| * \underline{u_{r+p+1}}^t * S\underline{z} + c' = \underline{z}^tD\underline{z} + \underline{e_{r+p+1}}^t * \underline{z} + c' = \lambda_1 z_1^2 + ... + \lambda_{r+p} z_{r+p}^2 + 2||\underline{b}'|| * z_{r+p+1} + c' = 0$
3. Traslazione per eliminare c':
   $z_i = w_i$ $\forall i \neq s+1$ $z_{s+1} = w_{s+1} - c'/2||\underline{b}'||$ => $\lambda_1 w_1^2 + ... + \lambda_s w_s^2 + 2||\underline{b}'|| * w_{s+1} = 0$

Forma canonica metrica di Q:

$\lambda_1 w_1^2 + ... + \lambda_s w_s^2 + 2||\underline{b}'||*w_{s+1} = 0$ dove $\lambda_1, ..., \lambda_s$ autovalori non nulli di A $\underline{b}' = \pi_{ker(A)}(\underline{b})$

4. Scaliamo i coefficienti:

   $w_i = 1/\sqrt{|\lambda_i|} * t_i$ $w_{s+1} = 1/2||\underline{b}'|| * t_{s+1}$ $w_i = t_i$ per i = s+2, ..., n

   $\Rightarrow t_1^2 + ... + t_p^2 - t_{p+1}^2 - ... - t_{p+r}^2 + t_{p+r+1} = 0$

Forma canonica affine (di una quadrica senza centro):

$t_1^2 + ... + t_p^2 - t_{p+1}^2 - ... - t_{p+r}^2 + t_{p+r+1} = 0$ dove (p, r, n-p-r) è la segnatura di A

Osservazione:

la forma canonica affine dipende soltanto da
- Segnatura di A
- Segno c'' $\in\{0, 1, -1\}$ (caso a centro)

=> numero finito di possibilità (tabelle di classificazione):
- 9 coniche in R^2
- 17 quadriche in R^3

Esempio:

$Q : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 4 = 0$

$\underline{x}^t(1\ -1\ 0\ |\ -1\ 1\ 0\ |\ 0\ 0\ 0)\underline{x} + (-2\ -2\ -2)(x_1\ x_2\ x_3)^t + 4 = 0$

rkA = 1, rk(A|-$\underline{b}$) = 2 => $A\underline{v_0} = -\underline{b}$ no soluzioni => no centro

Autovalori di A:
- rkA = 1 => dimKer(A) = 2 => 0 è un autovalore con $g_0 = a_0 = 2$
- Altro autovalore $\lambda_1 \neq 0$ possiamo trovarlo usando $2 = tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + 0 + 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$

=> segnatura (1, 0, 2) => forma canonica affine $t_1^2 + t_2 = 0$ => cilindro parabolico

$\underline{b} = (-2\ -2\ -2)^t$ proiettare su $ker(A) = (col(A))^\perp = (Span((1\ -1\ 0)^t))^\perp$

Osservazione: $(-2\ -2\ -2)\perp(1\ -1\ 0)$ $\underline{b} \in (Span((1\ -1\ 0)^t))^\perp = ker(A)$ => $\underline{b}' = \pi_{ker(A)}(\underline{b}) = \underline{b} = (-2\ -2\ -2)$

$||\underline{b}'|| = \sqrt{((-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2)} = 2\sqrt{3}$ Forma canonica metrica: $2w_1^2 + 4\sqrt{3}w_2 = 0$