Capitolo 4: Determinante #GAL

Definizione: il determinante di una matrice quadrata
$A = (a_{ij}) \in Mat(n,n)$ è definita ricorsivamente

- Caso n = 1 $A = (a_{ij}) \Rightarrow det(A)$ definito da $a_{11} \in R$
- Caso n > denotiamo $\hat{A}_{ij} \in Mat(n-1,n-1)$ sotto matrice ottenuta eliminando la riga i e colonna j

  Definiamo det(A) in diversi modi equivalenti:

  - Scegliamo una riga i e "espandiamo lungo la riga i": $det(A) = {}^{n}\Sigma_{j=1} (-1)^{i+j} * a_{ij} * det(\hat{A}_{ij})$

segni alterni - elementi di A sulla riga i - sottomatrici senza riga i

  - Scegliamo una colonna j e "espandiamo lungo la colonna j": $det(A) = {}^{n}\Sigma_{i=1} (-1)^{i+j} * a_{ij} * det(\hat{A}_{ij})$

segni alterni - elementi di A sulla colonna j - sottomatrici senza colonna j

Esempio:
2x2 $(a_{11}\ a_{12} \mid a_{21}\ a_{22})$

- Scegliamo la riga i = 1: $det(A) = {}^{2}\Sigma_{j=1} (-1)^{1+j} * a_{xj} * dxt(\hat{A}_{1j}) = (-1)^{2} * a_{x1} * dxt(\hat{A}_{11}) + (-1)^{3} * a_{12} \times det(\times_{12}) =$

  $= a_{11} * det(\cancel{a_{11}}\ \cancel{a_{12}} \mid \cancel{a_{21}}\ a_{22}) + (-1) * a_{12} * det(\cancel{a_{11}}\ \cancel{a_{12}} \mid a_{21}\ \cancel{a_{22}}) = a_{11}*a_{22} - a_{12}*a_{21}$

- Scegliamo la colonna j = 2: $det(A) = {}^{2}\Sigma_{i=1} (-1)^{i+2} * a_{i2} * det(\hat{A}_{i2}) = (-1)^{3} * a_{x2} * dxt(\hat{A}_{12}) + (-1)^{4} * a_{22} \times det(\times_{22}) =$

  $= (-1) * a_{12} * det(\cancel{a_{11}}\ \cancel{a_{12}} \mid a_{21}\ \cancel{a_{22}}) + a_{22} * det(a_{11}\ \cancel{a_{12}} \mid \cancel{a_{21}}\ \cancel{a_{22}}) = (-1)*a_{12}*a_{21} + a_{22}*a_{11}$

Osservazione:
si può dimostrare che scelte diverse danno lo stesso risultato (det(A) è ben definito)

Osservazione(formula speciale caso 2x2):
$a_{11}*a_{22} - a_{12}*a_{21}$ (prodotto della prima diagonale - prodotto della seconda diagonale)

Osservazione(formula speciale caso 3x3):
data la matrice $A \in Mat(3,3)$ si ricopiano a destra le prime due colonne si tracciano
3 diagonali verso destra (sud-est) e 3 diagonali verso sinistra (sud-ovest)
(somma dei prodotti delle diagonali verso destra) - (somma dei

prodotti delle diagonali verso sinistra)

Osservazione:

per $n \geq 4$ non ci sono formule utili, si procede utilizzando la definizione

Osservazione:

I segni $(-1)^{i+j}$ nel calcolo di det(A) formano un pattern "a schiera"

$$\begin{array}{c|cccc} & j=1 & j=2 & j=3 & j=4 \\ i=1 & (+ & - & + & \dots) \\ i=2 & (- & + & - & \dots) \\ i=3 & (+ & - & + & \dots) \\ i=4 & (\dots & \dots & \dots & \dots) \end{array}$$

Osservazione:

la funzione det: Mat(n,n)->R non è un'applicazione lineare

Proposizione:

A Mat(n,n) -> $\det(A) = \det(A^t)$

Esempio:

- n = 1 -> ovvio $A = (a_{11}) = A^t$
- n = 2 -> $\det(a_{11}\ a_{12} \mid a_{21}\ a_{22}) = a_{11}*a_{22} - a_{12}*a_{21}$ $\det(a_{11}\ a_{21} \mid a_{12}\ a_{22}) = a_{11}*a_{22} - a_{12}*a_{21}$

Proposizione(proprietà multilineare):

$A \in Mat(n,n)$ $A = (R_1 \dots R_n)^t$ fissiamo la riga $R_i \in R^n$ supponiamo $R_i = \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$ con $\mu, \lambda \in R$ $\underline{v},\underline{w} \in R^n$

allora $\det(A) = \det(R_1\ \ R_{i-1}\ \ \lambda\underline{v}+\mu\underline{w}\ \ R_{i+1}\ \dots\ R_n)^t = \lambda*\det(R_1\ \ R_{i-1}\ \ \underline{v}\ \ R_{i+1}\ \dots\ R_n)^t + \mu*\det(R_1\ \ R_{i-1}\ \ \underline{w}\ \ R_{i+1}\ \dots\ R_n)^t$

La stessa proprietà vale per le colonne

Esempio:

2(1 1 0) + 3(0 0 1) = (2 2 3)

det(1 2 3 | 2 2 3 | 0 1 2) = 2*det(1 2 3 | 1 1 0 | 0 1 2) + 3*det(1 2 3 | 0 0 1 | 0 1 2)

Dimostrazione(righe):

$A = (R_1 \dots \lambda\underline{v}+\mu\underline{w} \dots R_n)^t = a_{ij}$ $B = (R_1 \dots \underline{v} \dots R_n)^t$, $B = (R_1 \dots \underline{w} \dots R_n)^t \in Mat(n,n)$

dobbiamo dimostrare $\det(A) = \lambda*\det(B) + \mu*\det(C)$

denotiamo $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n) \in R^n = Mat(1,n)$ => $a_{ij} = \lambda \times \underline{v_j} + \mu \times \underline{w_j}$

osservazione: le righe ≠ i-esima coincidono per A, B, C => $\hat{A}_{ij} = \hat{B}_{ij} = \hat{C}_{ij}$

$\forall j$

calcoliamo det(A) sviluppando lungo la riga i:

$det(A) = {}^n\Sigma_{j=1} (-1)^{i+j} * a_{xj} * d\times t(\hat{A}_{ij}) = {}^n\Sigma_{j=1} (-1)^{i+j} * (\times * \underline{v}_j \times + \mu * \underline{w}_i \times * d\times t(\hat{A}_{ij}) =$

$= {}^n\Sigma_{j=1} (-1)^{i+j} * (\lambda * \underline{v}_j) * det(\hat{A}_{ij}) + {}^n\Sigma_{j=1} (-1)^{i+j} * (\times * \underline{w}_i \times * d\times t(\hat{A}_{ij}) = {}^n\Sigma_{j=1} (-1)^{i+j} * \underline{v}_j * det(B\hat{}_{ij}) + {}^n\Sigma_{j=1} (-1)^{i+j} * \underline{w}_x * d\times t(\hat{C}_{ij}) =$

$= \lambda * det(B) + \mu * det(C)$

Osservazione:

$c \in R$, $A \in Mat(n,n)$ $\quad\quad det(c \times A) = c^n * det(A)$

in altre parole fissando tutte le righe tranne 1 otteniamo un'applicazione lineare

$det : R^n \to R \quad\quad L(\underline{v}) = det(R_1 \dots \underline{v} \dots R_n)^t$

Esempio:

$L : R^n \to R \quad\quad L(x\ y\ z) = det(1\ 2\ 3 \mid 4\ 5\ 6 \mid x\ y\ z)$ è un'applicazione lineare

Proposizione(proprietà alternante):

$A \in Mat(n,n)$

Se B è ottenuto da A scambiando 2 righe/colonne => det(B) = - det(A)

Esempio:

det(a b | c d) = ad - bc $\quad\quad$ det(c d | ab) = bc - ad

Corollario:

se A ha 2 righe/colonne uguali => det(A) = 0

Dimostrazione:

siano R_i e R_j uguali ($i \neq j$)

scambiando le due righe otteniamo ancora B = A => det(B) = det(A)

ma per la proprietà alternante => det(B) = - det(A) => det(A) = 0

Definizione:

$A = (a_{ij}) \in Mat(n,n)$

- Si dice triangolare superiore (dalla diagonale in su) se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$
- Si dice triangolare inferiore (dalla diagonale in giù) se $a_{ij} = 0$ per ogni $j > i$
- Si dice diagonale se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$

Proposizione:

se $A = (a_{ij}) \in Mat(n,n)$ è triangolare/diagonale

allora $det(A) = a_{11} * a_{22} * \ldots * a_{nn}$

Dimostrazione:

prendiamo A triangolare superiore

$A = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots \mid 0\ a_{22}\ a_{23} \ldots \mid 0\ 0\ a_{33} \ldots \mid 0\ 0\ 0 \ldots \mid \ldots)$ sviluppiamo det(A) lungo $j = 1$

$det(A) = a_{11} \times det(\hat{A}_{11}) - 0 \times det(\hat{A}_{21}) + 0 \times det(\hat{A}_{13}) + \ldots = a_{11} \times det(\hat{A}_{11})$ =($\hat{A}_{11}$ ancora triangolare superiore)= $a_{11}(a_{22} * det(\hat{A}_{11}))$

Proposizione(calcolo det(A) con operazioni righe/colonne):

1. Scambiare due righe cambia il segno del determinante $A \xrightarrow{R_i <-> R_j} A'$ => $det(A') = -det(A)$
2. Moltiplicare una riga per c moltiplica il determinante per c $A \xrightarrow{cR_1} A'$ => $det(A') = c * det(A)$
3. Aggiunta a una riga un multiplo di un'altra preserva il determinante $A \xrightarrow{R_i + cR_j} A'$ => $det(A') = det(A)$

Gli stessi enunciati valgono per le colonne

Dimostrazione:

1. Proprietà alternante
2. Proprietà multilineare (caso particolare)
3. $det(A') = det(R_1 \ldots R_i + cR_j \ldots R_n)^t$ =(proprietà multilineare)= $det(R_1 \ldots R_i \ldots R_j \ldots R_n)^t + c * det(R_1 \ldots R_j \ldots R_j \ldots R_n)^t = det(A) + 0$

Corollario:

sia $A \in Mat(n,n)$

allora $det(A) \neq 0 \iff rk(A) = n$

Dimostrazione:

segue dalla proposizione precedente e dal fatto che

$rk(A) = n \iff A \xrightarrow{(Gauss)} A'$ a scala con n pivot =>

=> A' matrice triangolare superiore con elementi ≠ 0 sulla diagonale (pivot) $\iff det(A') \neq 0$

Dalla proprietà precedente, riducendo a scala $A \to A'$ abbiamo $det(A') = c' * det(A)$ con $c \neq 0$

Quindi $det(A') \neq 0 \iff det(A) \neq 0$ quindi $rk(A) = n \iff det(A) \neq 0$

Corollario:

$A \in Mat(n,n)$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $det(A) \neq 0$
2. $rk(A) = n$
3. A è invertibile
4. $A\underline{x} = \underline{b}$ => 1 soluzione
5. $ker(A) = \{\underline{0}\}$

6. row(A) = R^n
7. Righe LI/generatori/base di R^n
8. col(A) = R^n
9. Colonne LI/generatori/base di R^n
10. T_A è iniettiva
11. T_A è suriettiva
12. T_A è un isomorfismo

Calcolo del determinante:

per calcolare det(A), usare un mix di strategie

- Sviluppare lungo una riga/colonna con tanti 0
- Operazioni su righe/colonne per semplificare A
- Ridurre a una matrice triangolare

Teorema di Binet:

$\det(AB) = \det(A) * \det(B)$

Corollario:

se A invertibile => $\det(A) \neq 0$ => $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

Dimostrazione:

$AA^{-1} = I_n$ => $\det(A)\det(A^{-1})$ =(Binet)= $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$