Simmetrie #GAL

Definizione(simmetria rispetto a un sottospazio affine):

sia $S = p_0 + H \subseteq R^n$ sottospazio affine la funzione $\partial_S : R^n \to R^n$ definita da $\partial_S(p) = p - 2\pi_{H^\perp}(p-p_0)$

(caso speciale $S = \{p_0\}$ => $H = \{\underline{0}\}$ => $\partial_S(p) = 2p_0 - p$) ∂_S è detta simmetria rispetto a S

Una quadrica Q è simmetrica rispetto a S se $\partial_S(Q) = Q$ cioè: $\underline{x} \in Q$ <=> $\partial_S(\underline{x}) \in Q$

Definizione(simmetrie di quadriche a centro):

$Q : \underline{x}^t A \underline{x} + 2\underline{b}^t \underline{x} + c = 0$ $\underline{v_0} \in R^n$ un centro ($A\underline{v_0} = -\underline{b}$) $\{\underline{u_1}, \dots, \underline{u_n}\}$ base ortonormale di R^n di autovettori di A

$S = (\underline{u_1}, \dots, \underline{u_n})$ cambio coordinate $\underline{x} = S\underline{z} + \underline{v_0}$ trasforma l'equazione in forma canonica metrica

$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + c'$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ = autovalori di A e $c' = c + \underline{b}^t \underline{v_0}$

Nuove coordinate	Vecchie coordinate
Origine $\underline{z} = \underline{0}$	Centro $\underline{x} = \underline{v_0}$
Retta z_i Span($\underline{e_i}$)	Retta $\underline{v_0}$ + Span($\underline{u_i}$)
Piani z_i, z_j Span($\underline{e_i}$,$\underline{e_j}$)	Piano $\underline{v_0}$ + Span($\underline{u_i}$,$\underline{u_j}$)

Osservazione:

$(z_1, \dots, z_n) \in Q$ <=> $(\pm z_1, \dots, \pm z_n) \in Q$ (perché equazione = somma di quadrati z_i^2)

=> Q è simmetrica rispetto alle rette delle coordinate $z_1, \dots, z_n$ e ai piani delle coordinate z_i, z_j

=> nelle vecchie coordinate Q è simmetrica rispetto a:

- Rette di simmetria: $\underline{v_0}$ + Span($\underline{u_i}$)
- Piani di simmetria: $\underline{v_0}$ + Span($\underline{u_i}$,$\underline{u_j}$)

Definizione:

un vertice di una quadrica senza centro Q è un punto $\underline{v_0} \in Q \cap A(Q)$

Osservazione:

le traslazioni effettuate nella classificazione metrica spostano l'origine sul vertice $\underline{x} = \underline{v_0}$ <—> $\underline{w} = \underline{0}$

Osservazione:

$\underline{v_0}$ esiste sempre, cioè $Q \cap A(Q) \neq \underline{0}$

Definizione(simmetrie di quadriche senza centro):

nelle nuove coordinate l'equazione di Q : $\lambda_1 w_1^2 + \dots + \lambda_s w_s^2 + 2\|\underline{b}'\| * w_{s+1} = 0$

simmetrie di Q: $(w_1, \dots, w_n) \in Q \iff (\pm w_1, \dots, \pm w_n) \in Q$

nelle vecchie coordinate Q è simmetrica rispetto ai sottospazi affini determinati da asse A(Q) + autovettori

$A(Q) + \text{Span}(\underline{u_i})$ $\quad$ $A(Q) + \text{Span}(\underline{u_i}, \underline{u_j})$

Definizione(simmetrie di rotazione in R^3):

Supponiamo $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ $\quad$ forme canoniche metriche:

- Con centro: $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + c' = 0$ => dividendo per $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ => $z_1^2 + z_2^2 = d + \mu * z_3^2$ $\quad$ per qualche $d, \mu \in R$
- Senza centro: $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2\|\underline{b}'\| * z_3 = 0$ => dividendo per $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ => $z_1^2 + z_2^2 = \mu * z_3$ $\quad$ per qualche $\mu \in R$

Q è una quadrica di rotazione, per ogni piano ∂ (z_3 = k(perpendicolare ad asse z_3))

=> la curva $Q \cap \partial$ $z_1^2 + z_2^2$ = costante = k' è {circonferenza se k' > 0; punto se k' = 0; $\quad$ $\underline{0}$ se k' < 0}

Definizione(asse di rotazione):

retta $z_3 = \text{Span}(\underline{e_3})$ $\quad$ (nuove coordinate)

retta $z_3 = \underline{v_0} + \text{Span}(\underline{u_3})$ $\quad$ (vecchie coordinate) $\quad$ ($\underline{v_0}$ (centro/vertice); $\underline{u_3}$ (autovettore relativo a $\lambda_3 \neq \lambda_1 = \lambda_2$))

Si può verificare: $\quad$ Q quadrica di rotazione <=> A ha un autovalore $\neq 0$ con molteplicità ≥ 2

Osservazione:

se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$ => rk(A) = 3 (centro)

equazione: $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + c' = 0$ => $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = k$ è {sfera se k > 0; $\quad$ punto se k = 0; $\quad$ $\underline{0}$ se k < 0}