# Capitolo 5: Endomorfismi #GAL

Definizione:

Un'applicazione lineare L : V->V si dice endomorfismo

Domanda 1:

quali sono gli endomorfismi più "semplici"?

Esempio:

$L : R^2 \to R^2$ definita da $L(x_1\ x_2) = (2x_1\ -x_2)$

ad esempio $L^3(7\ 3) = L(L(L(7\ 3))) = (56\ -3)$ => $L^n(7\ 3) = (2^n*7\ \ (-1)^n*3)$

Nota:

$L = T_A$ con $A = (2\ 0 \mid 0\ -1)$ diagonale

invece:

$L(x_1\ x_2) = (x_1+2x_2\ \ 2x_1+x_2)$ cioè $L = T_A$ con $A = (1\ 2 \mid 2\ 1)$ $L^{10}(7\ 3) = ?$

Osservazione:

se consideriamo la base $\underline{v}_1 = (1\ 1)$, $\underline{v}_2 = (1\ -1)$ di $R^2$ abbiamo

$L(\underline{v}_1) = (1+2\ \ 2+1) = (3\ 3) = 3\underline{v}_1$ $\qquad$ $L(\underline{v}_2) = (1-2\ \ 2-1) = (-1\ 1) = -1*\underline{v}_2$

=> $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una buona base per L

Usando $(7\ 3) = 5(1\ 1) + 2(1\ -1) = 5v_1 + 2v_2$

$L^{10}(7\ 3) = L^{10}(5\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2) = 5\times L^{10}(\underline{v}_1) + 2*L(\underline{x}_2) = 5\times 3^{10}*L(\underline{x}_1) + 2*(-x)^{10}*L(\underline{v}_2)x = 5*3^{10}*(1\ 1) + 2*(1\ -1)$

Domanda 2:

Dato L : V->V, ci sono tante basi diverse B di V, quindi tante matrici rappresentative $M_L^{B,B}$

Quando/Come è possibile scegliere una base B t.c. $M_L^{B,B}$ sia "semplice" (= diagonale)?

Esempio:

$B = \{\underline{v}_1\ \underline{v}_2\}$ => $L(\underline{v}_1) = 3\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2$ $\ L(\underline{v}_2) = 0\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ => $M_L^{B,B} = ([L(\underline{v}_1)]_B, [L(\underline{v}_2)]_B) = (3\ 0 \mid 0\ -1)$

Definizione:

sia L : V->V endomorfismo se esistono $\mu \in R$ $\quad \underline{0} \neq \underline{v} \in V$ t.c. $L(\underline{v}) = \mu\underline{v}$

$\mu = \lambda$

diremo che $\mu$ è un autovalore e $\underline{v}$ un autovettore di L associato all'autovalore $\mu$

Osservazione:

se A $\in$Mat(n,n) => $T_A : R^n \text{->} R^n$ è un endomorfismo

Nota:

se L = $T_A$ diciamo anche che esistono gli autovalori/autovettori di A

Esempio:

A = (1 2 | 2 4)

(1 2 | 2 4)×(1 2) = (5 10) = 5*(1 2)

=> 5 è un autovalore di A

=> (1 2) è un autovettore di A associato all'autovalore 5 (-2 -4) è un autovettore associato all'autovalore 5

(1 2 | 2 4)×(2 -1) = (0 0) = 0*(2 -1)

=> 0 è un autovalore di A

=> (2 -1) è un autovettore di A associato all'autovalore 0

Osservazione:

0 è un autovalore di A <=> ker(A) ≠ {$\underline{0}$} cioè det(A) = 0

Definizione(come trovare gli autovalori):

A $\in$Mat(n,n) il polinomio caratteristico di A è $X_A(x)$ = det(A - x*$I_n$) dove x è una variabile

Esempio:

A = (1 2 | 3 0) $X_A(x)$ = det((1 2 | 3 0) -x*(1 0 | 0 1)) = det(1-x 2 | 3 -x) = (1-x)(-x) - (3×2) = $x^2$ - x - 6

Proposizione:

A $\in$Mat(n,n)

μ è un autovalore di A <=> μ è una radice/uno zero di $X_A(x)$, cioè $X_A(\mu)$ = 0

Dimostrazione:

μ è un autovalore di A <=> $\exists\underline{v} \in R^n$ t.c. $\underline{v}$ ≠ 0 e A$\underline{v}$ = μ$\underline{v}$

<=> $\exists\underline{v} \in R^n$ t.c. $\underline{v}$ ≠ 0 e A$\underline{v}$ - μ$\underline{v}$ = $\underline{0}$ <=> $\exists\underline{v} \in R^n$ t.c. $\underline{v}$ ≠ 0 e A$\underline{v}$ - μ*$I_n$*$\underline{v}$ = $\underline{0}$ <=> $\exists\underline{v} \in R^n$ t.c. $\underline{v}$ ≠ 0 e (A - μ*$I_n$)$\underline{v}$ = $\underline{0}$ <=>

<=> ker(A - μ*$I_n$) ≠ {$\underline{0}$} <=> det(A - μ*$I_n$) = 0

Esempio:

gli autovalori di (1 2 | 3 0) sono le soluzioni di: $x^2$ - x - 6 = 0 (x - 3)(x + 2) = 0 => 3, -2

Definizione(come trovare gli autovettori):

sia $\mu$ autovalore di $L : V \to V$

L'autospazio di $\mu$ —> $E_\mu$ {autovettori di L associati a $\mu$} U {$\underline{0}$} = $\{\underline{v} \in V : L(\underline{v}) = \mu\underline{v}\}$ =

= $\{\underline{v} \in V : (L - \mu \times Id_V)(\underline{v}) = \underline{0}\}$ = $\ker(L - \mu * Id_V)$

nel caso $L = T_A$ $E_\mu = \ker(A - \mu * I_n)$ (è un sottospazio vettoriale)

Esempio:

autospazio di (1 2 | 3 0) associato all'autovalore 3

$E_3$ = ker((1 2 | 3 0) - 3*(1 0 | 0 1)) = ker(1-3  2 | 3  0×3) = ker(-2 2 | 3 -3) = Span(1 1)

Geometricamente:

$L : V \to V$ endomorfismo

$\underline{v}$ autovettore di L <=> direzione preservata da L

Esempio:

$T_A : R^2 \to R^2$ con A = (0 -1 | 1 0) rotazione $\pi/2$: $T_A(x_1\ x_2) = (-x_2\ x_1)$

non ha autovettori: nessuna direzione è preservata infatti

(algebricamente): $X_A(x)$ = det(x -1 | 1 x) = $x^2 + 1$