Classificazione delle quadriche #GAL

Problema:

data una quadrica $Q = \{\underline{x} \in R^n : p(\underline{x}) = 0\}$ riconoscere il tipo della quadrica? (Forma geometrica?)

Esempio:

$3x_1^2 - 2x_2^2 + 7x_1x_2 - x_2 + 4 = 0$?

Obbiettivo:

cambiare coordinate per trovare una forma più semplice dell'equazione e riconoscere il tipo di Q

Esempio:

data la conica $C \subseteq R^2$ di equazione $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 1 = 0$

verificare che il cambio di coordinate $\{x_1 = 1/\sqrt{2}*(y_1 + y_2);\ \ x_2 = 1/\sqrt{2}*(y_1 - y_2)\}$

trasforma l'equazione in $4y_1^2 + 2y_2^2 = 1$ è un'ellisse

In generale:

cerchiamo una trasformazione biunivoca $T : R^n \to R^n$ t.c.

il cambio di coordinate $\underline{x} = T(\underline{y})$ semplifichi l'equazione $q(\underline{x}) = 0 \longrightarrow q(T(\underline{y})) = 0$

nell'esempio in $T : R^2 \to R^2$ è $(x_1\ x_2) \times = T(x_1\ x_2) = 1/\sqrt{2}*(y_1+y_2\ \ y_1-y_2)$ (rotazione di 40°)

2 tipi di classificazione:

1. Classificazione Metrica: usando solo isometrie $T : R^n \to R^n$ (cioè isometrie lineari e traslazioni) (non alterando la forma di Q)
2. Classificazione Affine: usando affinità $T : R^n \to R^n$ (cioè isomorfismi e traslazioni) (possiamo "dilatare" Q)

Esempio:

$\{y_1 = z_1/2;\quad y_2 = z_2/\sqrt{2}\} \longrightarrow$ nuova equazione $z_1^2 + z_2^2 = 1$

Definizione(forma matriciale dell'equazione di una quadrica):

$p(\underline{x}) = \Sigma_{i\leq j}\, a_{ij}*x_i*x_j\ +\ 2*{}^{n}\Sigma_{i=1}\, b_i \times x_i\ +\ c\ =\ \underline{x}^t A \underline{x} + 2\underline{b}^t \underline{x}$ t.c.

A = matrice simmetrica della forma quadratica $\underline{b}$ = 1/2 vettore dei coefficienti della parte lineare

Esempio:

...

Definizione:

un punto $\underline{v_0} \in R^n$ che soddisfa il sistema lineare $A\underline{v_0} = -\underline{b}$ si dice centro della quadrica Q

se esiste (almeno) un centro Q è detta quadrica a centro (?)

Proposizione:

sia $\underline{v_0}$ un centro di Q, allora Q è simmetrica rispetto a $\underline{v_0}$ cioè

se $\underline{x} \in Q$ => $2\underline{v_0} - \underline{x} \in Q$ punto diametralmente opposto rispetto a $\underline{v_0}$

infatti

$(\underline{x} + 2\underline{v_0} - \underline{x})/2 = \underline{v_0} = M$ (punto medio)

Dimostrazione:

supponiamo $\underline{v_0}$ centro di Q => $A\underline{v_0} = -\underline{b}$ $\underline{x}$ punto di Q => $\underline{x}^tA\underline{x} + 2\underline{b}^t\underline{x} + c = 0$

vogliamo dimostrare che $2\underline{v_0} - \underline{x} \in Q$ cioè $p(2\underline{v_0} - \underline{x}) = 0$

Allora calcoliamo $(2\underline{v_0} - \underline{x})^tA(2\underline{v_0} - \underline{x}) + 2\underline{b}^t(2\underline{v_0} - \underline{x}) + c = 2\underline{v_0}^t*A*2\underline{v_0} - \underline{x}^t*A*2\underline{v_0} + 2\underline{v_0}^t*A*(-\underline{x}) - \underline{x}^t*A*(-\underline{x}) + 4\underline{b}^t*\underline{v_0} - 2\underline{b}^t\underline{x} + c =$

$= \underline{x}^t*A*\underline{x} - 2\underline{b}^t\underline{x} + c + 4\underline{v_0}^t*A*\underline{v_0} - 2\underline{x}^t*A*\underline{v_0} - 2\underline{v_0}*A\underline{x} + 4\underline{b}^t\underline{v_0} =$ (A simmetrica => $\underline{v_0}^t*A*\underline{x} \times \underline{v_0}^t*A^t\times\underline{x} = (\times\underline{_0}^t*A^t\times\underline{x})^t = \times\underline{x}^t*A*\times\underline{_0}\times$) =

$= \underline{x}^t*A*\underline{x} - 2\underline{b}^t\underline{x} + c + 4\underline{v_0}^t*A*\underline{v_0} - 2\underline{x}^t*A*\underline{v_0} - 2\underline{x}^t*A*\underline{v_0} + 4\underline{b}^t\underline{v_0}$ $=(A\times\underline{v_0} = -\underline{b})=$

$= \underline{x}^t*A*\underline{x} - \cancel{2\underline{b}^t\underline{x}} + c + \cancel{4\underline{v_0}^t(-\underline{b})} - \cancel{2\underline{x}^t(-\underline{b})} - 2\underline{x}^t(-\underline{b}) + \cancel{4\underline{b}^t\underline{v_0}} = 0$

perché $\underline{x} \in Q$ => $2\underline{v_0} - \underline{x} \in Q$