Capitolo 7: Quadriche, forme quadratiche equivalenti, segnatura di una forma quadratica, teorema di Sylvester, ipersuperfici quadriche #GAL

Obbiettivo:

studiare parabole, ellissi, sfere, cilindri, ... versioni dim > 1 = studiare equazioni di 2° grado

Definizione:

una forma quadratica è un polinomio $p : R^n \to R$ omogeneo di grado 2 in un polinomio

cioè $p(x)$ = somma di monomi di grado 2 nelle variabili $x_1, \dots, x_n$

Esempio:

$p : R^3 \to R$

- $p(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$ è una forma quadratica
- $p(\underline{x}) = x_1x_2 + x_2x_3$ è una forma quadratica
- $x_1^2 - 2x_2 + x_3^2$ non è una forma quadratica
- $x_1^2 + x_2x_3 + 4$ non è una forma quadratica

Osservazione:

$p : R^n \to R$ forma quadratica

- $p(\underline{0}) = 0$
- $p(c \times \underline{x}) = c^2 p(\underline{x}) \quad \forall c \in R$

Definizione(segno di una forma quadratica):

$p : R^n \to R$ si dice

- Definita positiva $p(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \in R^n \setminus \{\underline{0}\}$
- Semidefinita positiva $p(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in R^n$
- Definita negativa $p(\underline{x}) < 0 \quad \forall \underline{x} \in R^n \setminus \{\underline{0}\}$
- Semidefinita negativa $p(\underline{x}) \leq 0 \quad \forall \underline{x} \in R^n$
- Indefinita $\exists \underline{x_1}, \underline{x_2}$ t.c. $p(\underline{x_1}) > 0$ e $p(\underline{x_2}) < 0$

Esempio(in R^2):

- $p(x_1\ x_2)^t = (x_1 + x_2)^2$ semidefinita positiva
- $p(x_1\ x_2)^t = x_1^2 + x_2^2$ definita positiva
- $p(x_1\ x_2)^t = -x_1^2 - x_2^2$ definita negativa
- $p(x_1\ x_2)^t = -(x_1^2 + x_2^2)$ definita negativa

- $p(x_1\ x_2)^t = x_1^2 - x_2^2$ indefinita
- $p(x_1\ x_2)^t = x_1^{2}*x_2^2$ indefinita

Osservazione:

R^3 => $p(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 = x_2x_3$ per studiare forme quadratiche usando le matrici

Esercizio(in R^2):

forma quadratica $p(x_1\ x_2)^t = \partial x_1^2 + \beta x_1x_2 + \mu x_2^2$ $\partial,\beta,\mu \in R$

=> $p(\underline{x}) = (x_1\ x_2)\ (\partial\ \beta/2 \mid \beta/2\ \mu)\ (x_1\ x_2)^t$ => $p(\underline{x}) = (x_1\ x_2)\ (\partial x_1+\beta/2x_2\ \ \beta/2x_1+\mu x_2)^t = \partial x_1^2 + \beta/2x_2x_x \times \beta/2x_1x_x \times \mu x_2^2 = \partial x_1^2 + \beta x_1x_2 + \mu x_2^2$

Esercizio(in R^3):

forma quadratica $p(x_1\ x_2\ x_3)^t = \partial_1x_1^2 + \partial_2x_2^2 + \partial_3x_3^2 + \beta_{12}x_1x_2 + \beta_{13}x_1x_3 + \beta_{23}x_2x_3$

verificare che $p(\underline{x}) = (x_1\ x_2\ x_3)\ (\partial_1\ \beta_{12}/2\ \beta_{13}/2 \mid \beta_{12}/2\ \partial_2\ \beta_{23}/2 \mid \beta_{13}/2\ \beta_{23}/2\ \partial_3)\ (x_1\ x_2\ x_3)^t$

Proposizione:

sia $p(\underline{x}) = {}^n\sum_{i=1} a_{ii}x_i^2 + {}^n\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i\leq j} a_{ij}x_ix_j$ una forma quadratica $p : R^3 \to R$

Allora esiste un'unica $A \in Mat(n,n)$ simmetrica t.c. $p(\underline{x}) = \underline{x}^tA\underline{x}$ $(a_{11}\ a_{12}/2\ a_{13}/2 \dots \mid a_{12}/2\ a_{22}\ a_{23}/2 \dots \mid a_{13}/2\ a_{23}/2\ a_{33} \dots \mid \dots)$

Corrispondenza biunivoca forma quadratiche <=> matrici simmetriche

Definizione:

due forme quadratiche p_1, $p_2 : R^n \to R$ si dicono equivalenti

se $\exists$ isomorfismo $L : R^n \to R^n$ t.c. $p_1(\underline{x}) = L(p_2(\underline{x}))\ \forall\underline{x}$

Esempio(in R^2):

$p_1(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_x \times x_2^2 = (x_1\ x_2)^2$ $p_2(\underline{x}) = x_1^2$ $L : R^2 \to R^2$ definita da $L(x_1\ x_2) = (x_1+x_2\ x_2)$

allora $p_1(\underline{x}) = p_2(L(\underline{x}))$ $p_1(\underline{x})$ e $p_2(\underline{x})$ sono equivalenti

$p_2(x_1\ x_2) = x_1^2$ è semidefinita positiva $p(0\ 1) = 0$

Proposizione:

forme quadratiche equivalenti hanno lo stesso segno

Dimostrazione:

supponiamo $L : R^n \to R^n$ $p_2(\underline{x}) = p_1(L(\underline{x}))$ (sono equivalenti) allora

$p_2(\underline{x}) \leq 0 \ \forall \underline{x} \in R^n$ <=> $p_1(L(\underline{x})) \leq 0 \ \forall \underline{x} \in R^n$ <=(biunivoca)=> $p_1(\underline{y}) \leq 0 \ \forall \underline{y} \in R^n$

Quindi p_2 semidefinita negativa <=> p_1 semidefinita negativa

Analogamente per gli altri segni

Osservazione:

a livello di matrici $p_1(\underline{x}) = \underline{x}^t A\underline{x}$ $p_2 = \underline{x}^t B\underline{x}$ $L(\underline{x}) = S\underline{x}$ S invertibile con A,B simmetriche

$p_1(\underline{x}) = p_2(L(\underline{x}))$ => $\underline{x}^t A\underline{x} = (S\underline{x})^t B(S\underline{x}) = \underline{x}^t S^t BS\underline{x} = \underline{x}^t (S^t BS)\underline{x} \ \forall \underline{x} \in R^n$ => $A = S^t BS$

Definizione:

$A,B \in Mat(n,n)$ simmetriche

si dicono congruenti se $\exists S$ invertibile t.c. $A = S^t BS$ (non confondere con matrici simili $A = S^{-1} BS$)

Osservazione:

A,B congruenti <=> forme quadratiche $\underline{x}^t A\underline{x}$ e $\underline{x}^t B\underline{x}$ sono equivalenti

Definizione:

la segnatura di una forma quadratica $p : R^n \to R$ è la terna di numeri $(n_+ \ n_- \ n_0)$ dove

- $n_+ = \max\{\dim H : H \subseteq R^n$ sottospazio, $p(\underline{x}) > 0 \ \forall \underline{x} \in H, x \neq \underline{0}\}$
- $n_- = \max\{\dim H : H \subseteq R^n$ sottospazio, $p(\underline{x}) < 0 \ \forall \underline{x} \in H, x \neq \underline{0}\}$
- $n_0 = n - n_+ - n_-$

Esempio:

$p(x_1 \ x_2) = (x_1 \ x_2)^2$

$H \subseteq R^2$ di dim = 1 su cui p è definita positiva $H = Span(1 \ 0)$

no esempi di dim = 2 (non è definita positiva) => la segnatura (1, 0, 1)

Osservazione:

Segno	Segnatura
Definita positiva	$(n, 0, 0)$
Semidefinita positiva	$(n_+, 0, n_0)$
Definita negativa	$(0, n, 0)$
Semidefinita negativa	$(0, n_-, n_0)$
Indefinita	(n_+, n_-, n_0)

Proposizione:

forme quadratiche equivalenti hanno la stessa segnatura

Domanda 1:

come calcolare la segnatura?

Domanda 2:

come trovare la "migliore" forma quadratica equivalente?

Esempio(in R^2):

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ equivalente a x_1^2

Teorema(di Sylvester): $\mu = \lambda$

Sia $q : R^n \to R$ forma quadratica $q(\underline{x}) = \underline{x}^t A \underline{x}$ con $A \in Mat(n,n)$ simmetrica

1. A è congruente alla matrice $(I_p\ 0\ 0 \mid 0\ {-I_r}\ 0 \mid 0\ 0\ 0)$ (con un blocco di n-p-r zeri sotto e a destra) $\in Mat(n,n)$
   detta forma canonica di Sylvester della matrice A
   Quindi q è equivalente alla forma quadratica $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+r}^2$ dove
   p = numero di autovalori positivi di A (contati con molteplicità)
   r = numero di autovalori negativi di A (contati con molteplicità)
   ($n-p-r$ = molteplicità dell'autovalore 0)
   Esempio: $A \in Mat(7,7)$ autovalori: 1, 3, 3, -2, -2, 0, 0 la forma canonica di Sylvester sarà
   una matrice 7x7 diagonale con tre 1, due -1, e due 0 sulla diagonale = $(I_3\ 0\ 0 \dots \mid 0\ {-I_2}\ 0 \dots \mid 0\ 0\ 0 \dots \mid 0\ 0\ 0 \dots)$
2. La segnatura della forma quadratica q (o della matrice A) è $(p, r, n-p-r)$

Osservazione:

due forma quadratiche sono equivalenti $\iff$ hanno la stessa segnatura

Dimostrazione:

1. Teorema spettrale: A simmetrica => ∃S ortogonale t.c.
   $S^tAS = D = (\mu_1\ 0 \dots 0 \mid 0\ \mu_2 \dots 0 \mid \dots \mid 0 \dots \mu_n)$ $\mu_1, \dots, \mu_n$ autovalori di A
   a meno di riordinare, possiamo supporre $\mu_1, \dots, \mu_p > 0, \mu_{p+1}, \dots, \mu_{p+r} < 0$, $\mu_{p+r+1}, \dots, \mu_n = 0$
   Consideriamo una matrice diagonale invertibile $W = (1/\sqrt{|\mu_1|}\ 0 \dots \mid \dots \mid 0 \dots 1/\sqrt{|\mu_{p+r}|} \dots 0 \mid 0 \dots 1 \dots 0 \mid 0 \dots 1)$
   Allora $W^tDW = WDW = (1/\sqrt{|\mu_1|} * \mu_1 * 1/\sqrt{|\mu_1|}\ 0 \dots \mid \dots \mid 0 \dots 1/\sqrt{|\mu_{p+r}|} * \mu_{p+r} * 1/\sqrt{|\mu_{p+r}|} \dots 0 \mid 0 \dots 0*1*0 \dots 0 \mid 0 \dots 0*1*0)$
   Cioè W^tDW matrice diagonale abbiamo:
   primi p elementi: $1/\sqrt{|\mu_i|} * \mu_i * 1/\sqrt{|\mu_i|} = 1$ poiché $\mu_i > 0$
   successivi r elementi: $1/\sqrt{|\mu_i|} * \mu_i * 1/\sqrt{|\mu_i|} = -1$ poiché $\mu_i < 0$
   ultimi n-p-r elementi: 1*0*1 cioè $W^tDW = (I_p\ 0\ 0 \mid 0\ -I_r\ 0 \mid 0\ 0\ 0)$
   => $W^t(S^tAS)W = (I_p\ 0\ 0 \mid 0\ -I_r\ 0 \mid 0\ 0\ 0)$ => $(SW)^tA(SW)$ => A congruente a $(I_p\ 0\ 0 \mid 0\ -I_r\ 0 \mid 0\ 0\ 0)$
   => $q(\underline{x}) = \underline{x}^tA\underline{x}$ è equivalente ad A => $\underline{x}^t(I_p\ 0\ 0 \mid 0\ -I_r\ 0 \mid 0\ 0\ 0)\underline{x} = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+r}^2 = S(\underline{x})$
2. $q(\underline{x})$ e $S(\underline{x})$ sono equivalenti => stessa segnatura => segnatura di $q(\underline{x})$ = segnatura di $S(\underline{x}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+r}^2$
   $S(\underline{x})$ è definita positiva nel sottospazio $Span(\underline{e_1}, \dots, \underline{e_p}) \subseteq R^n$
   $S(\underline{x})$ è definita negativa nel sottospazio $Span(\underline{e_{p+1}}, \dots, \underline{e_{p+r}}) \subseteq R^n$
   e questi sottospazi hanno dimensione massima => $n_+ = p, n_- = r$
3. Se $q_1(\underline{x}), q_2(\underline{x})$ sono equivalenti => stessa segnatura (da proposizione)
   se $q_1(\underline{x}), q_2(\underline{x})$ hanno la stessa segnatura => hanno la stessa forma canonica di Sylvester $S(\underline{x})$
   => $q_1(\underline{x}), q_2(\underline{x})$ sono equivalenti a $S(\underline{x})$ => $q_1(\underline{x}), q_2(\underline{x})$ equivalenti tra loro

Definizione:

una ipersuperficie quadrica $Q \subseteq R^n$

$Q = \{\underline{x} \in R^n : p(\underline{x}) = 0\}$ dove $p(\underline{x})$ è un polinomio di grado 2 nelle variabili

$x_1, \dots, x_n$

$p(\underline{x}) = \sum_{i\leq j} a_{ij} * x_i * x_j + 2 * {}^n\sum_{i=1} b_i * x_i + c$ dove $a_{ij}, b_i, c \in R$

($\sum_{i\leq j} a_{ij} \times x_i \times x_j$ = forma quadratica $2 * {}^n\sum_{i=1} b_i \times x_i$ = forma lineare

c = costante)

Esempio:

un'ipersuperficie quadrica in R^2 si chiama conica

- $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ circonferenza
- $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ iperbole
- $x_1^2 - x_2^2 = 0$ 2 rette

Esempio:

un'ipersuperficie quadrica in R^3 è detta (superficie) quadrica

- $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ cilindro
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ sfera
- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ cono