Semplificazione di una quadrica a centro #GAL

Ipersuperficie quadrica:

$Q = \{\underline{x} \in R^n : q(\underline{x}) = 0\} \subseteq R^n$ $\qquad q(x) = \Sigma_{i\leq j}\, a_{ij}x_ix_j + 2*{}^n\Sigma_{i=1}\, b_ix_i + c = \underline{x}^t A\underline{x} + 2\underline{b}^t\underline{x} + c$

$\underline{v_0} \in R^n$ è un centro di Q se $A\underline{v_0} = -\underline{b}$ $\qquad \underline{x} \in Q \iff 2\underline{v_0} - \underline{x} \in Q$

Semplificazione di una quadrica a centro:

1. Applichiamo una traslazione per spostare il centro sull'origine:

   sia $\underline{v_0}$ un centro di Q $\qquad \underline{x} = T(\underline{y}) = \underline{y} + \underline{v_0}$ $\qquad$ quindi $\underline{x} = \underline{v_0} \iff \underline{y} = \underline{0}$ $\qquad$ ($\underline{x}$ = vecchie coordinate, $\qquad \underline{y}$ = nuove coordinate)

   $q(\underline{x}) = \underline{x}^t A\underline{x} + 2\underline{b}^t\underline{x} + c = q(T(\underline{y})) = (\underline{y} + \underline{v_0})^t A(\underline{y} + \underline{v_0}) + 2\underline{b}^t(\underline{y} + \underline{v_0}) + c =$

   $= \underline{y}^t \underline{A}\underline{y} + \underline{v_0}^t \underline{A}\underline{y} + \underline{y}^t A\underline{v_0} + \underline{v_0}^t A\underline{v_0} + 2\underline{b}^t\underline{y} + 2\underline{b}^t\underline{v_0} + c =$

   (Osservazione: $\underline{v_0}^t A\underline{y} =(1\times1)= (\underline{v_0}^t A\underline{y})^t = \underline{y}^t A^t \underline{v_0} =(\text{A simmetrica})= \underline{y}^t A\underline{v_0}$)

   $= \underline{y}^t \underline{A}\underline{y} + \underline{y}^t A\underline{v_0} + \underline{y}^t A\underline{v_0} + \underline{v_0}^t A\underline{v_0} + 2\underline{y}^t\underline{b} + 2\underline{b}^t\underline{v_0} + c = \underline{y}^t \underline{A}\underline{y} + \cancel{2\underline{y}^t(-\underline{b})} + \underline{v_0}^t(-\underline{b}) + \cancel{2\underline{y}^t\underline{b}} + 2\underline{v_0}^t\underline{b} + c =$

   $= \underline{y}^t \underline{A}\underline{y} + \underline{v_0}^t\underline{b} + c = \underline{y}^t \underline{A}\underline{y} + c'$ $\qquad$ (nuova costante $c' = c + \underline{b}^t\underline{v_0}$)

   Conclusione: traslando il centro sull'origine, eliminiamo la parte lineare (e cambia il termine costante)

2. Applichiamo un'isometria lineare per diagonalizzare ortogonalmente la forma quadratica $\underline{y}^t \underline{A}\underline{y}$:

   A simmetrica =(Teorema Spettrale)=> $\exists$S ortogonale t.c. $D = S^tAS$ diagonale

   Cambio coordinate $\underline{y} = T_S(\underline{z}) = S\underline{z}$ $\qquad$ ($\underline{y}$ = vecchie coordinate, $\underline{z}$ = nuove coordinate)

   $q(y) = \underline{y}^t A\underline{y} + c' = q(T_S(\underline{z})) = (S\underline{z})^t AS\underline{z} + c' = \underline{z}^t(S^tAS)\underline{z} + c' = \underline{z}^t D\underline{z} + c' = \underline{z}^t(\lambda_1\ 0 \dots 0 \mid 0\ \lambda_2 \dots 0 \mid \dots \mid 0 \dots \lambda_n)\underline{z} + c'$

Classificazione metrica di una quadrica a centro:

Nelle nuove coordinate $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)^t$ l'equazione diventa

$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + c'$ $\qquad$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ = autovalori di A e $c' = c + \underline{b}^t\underline{v_0}$

questa equazione si chiama forma canonica dell'equazione della quadrica ottenuta oprando un'isometria: {traslazione: $\underline{x} = \underline{y} + \underline{v_0}$ + isometria

lineare: $\underline{y} = S\underline{z}\}$
Esempio:

trovare una forma canonica metrica della conica $C = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 + 6x_2 + 1 = 0$

Forma matriciale: $(x_1\ x_2)(3\ 1\ |\ 1\ 3)(x_1\ x_2)^t + 2(1\ 3)(x_1\ x_2)^t + 1$

centro ? $A\underline{v_0} = -\underline{b}$ rkA = 2 => ∃unica soluzione $(3\ 1\ |\ 1\ 3)(v_1\ v_2)^t = (-1\ -3)$ => … => $\underline{v_0} = (0\ -1)^t$

1. Traslazione: $(x_1\ x_2)^t = (y_1\ y_2)^t + (0\ -1)^t$ trasforma l'equazione in $(y_1\ y_2)(3\ 1\ |\ 1\ 3)(y_1\ y_2)^t - 2$ $c' = c + \underline{b}^t\underline{v_0} = 1 + (1\ 3)(0\ -1)^t = 1 - 3 = -2$
2. Diagonalizzazione ortogonale di A: $X_A(x) = \det(3-x\ 1\ |\ 1\ 3-x) = (3-x)^2 - 1^2 = (3 - x - 1)(3 - x - 1) = (2 - x)(4 - x)$

   autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ Forma canonica metrica $2z_1^2 + 4z_2^2 - 2 = 0$ ellisse

   Per scrivere l'isometria lineare utilizzata (cambio di coordinate):

   autospazi $E_2 = \mathrm{Span}((1\ -1)^t)$, $E_4 = \mathrm{Span}((1\ 1)^t)$ normalizzando $S = 1/\sqrt{2} * (1\ 1\ |\ -1\ 1)$ cambio di coordinate utilizzato:

   $\underline{x} = \underline{y} + \underline{v_0} = S\underline{z} + \underline{v_0}$ => $(x_1\ x_2)^t = 1/\sqrt{2} * (1\ 1\ |\ -1\ 1)(z_1\ z_2)^t + (0\ -1)^t = 1/\sqrt{2} * (z_1+z_2\ \ -z_1+z_2)^t + (0\ -1)^t$

   $\{x_1 = 1/\sqrt{2} * (z_1 + z_2);$ $x_2 = 1/\sqrt{2} * (-z_1 + z_2) - 1\}$

Se scaliamo le variabili (isomorfismo, non isometria):

$\{2z_1^2 + 4z_2^2 = 2;$ $z_1^2 + 2z_2^2 = 1\}$ => $\{z_1 = w_1;$ $z_2 = 1/\sqrt{2}\, w_2\}$ => $w_1^2 + w_2^2 = 1$

Classificazione affine:

consideriamo anche cambi di coordinate $L : R^n \to R^n$ dove L isomorfismo qualsiasi (non isometria)

continuando dalla classificazione metrica $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + c' = 0$ procediamo come nel teorema di Sylvester

3. Semplificazione di una quadrica a centro (affine):
   - (Se $c' \neq 0$ dividiamo per $|c'|$) => $\mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_n z_n^2 + c'' = 0$ $\mu_i = \lambda_i/|c'|$ (stesso segno) $c'' \in \{0, 1, -1\}$
   - Per ogni $\mu_i \neq 0$ poniamo $z_i = 1/\sqrt{|\mu_i|} * w_i$ per ogni $\mu_i = 0$ poniamo $z_i = w_i$

cioè il cambio di coordinate $\underline{z} = W\underline{w}$ dove $W = (1/\sqrt{\mu_1} \dots 0 \mid \dots \mid 0 \dots 1/\sqrt{\mu_r} \dots 0 \mid \dots \mid 0 \dots 1)$ dilatazione/compressione

Forma canonica affine:

nelle nuove coordinate $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n)^t$ l'equazione diventa $w_1^2 + \dots w_p^2 - w_{p+1}^2 - \dots - w_{p+r}^2 + c'' = 0$

dove p = # autovalori >0 r = # autovalori <0 cioè (p, r, n-p-r) segnatura di A e $c'' \in \{0, 1, -1\}$

Osservazione:

Q ammette un unico centro <=> $A\underline{v} = -\underline{b}$ unica soluzione <=> A invertibile (<=> rkA = n <=> $\lambda_i \neq 0 \ \forall i$)

Esempio: Ellisse, Iperbole, Rette Incidenti (quadriche con un unico centro)

Se A non è invertibile, 2 casi:

1. Q ammette infiniti centri ($A\underline{v} = -\underline{b}$ ∞ soluzioni)
   Esempio: 2 Rette Parallele, Cilindro Ellittico (quadriche con infiniti centri)
2. Q non ha centri ($A\underline{v} = -\underline{b}$ non ammette soluzioni in R)
   Esempio: Parabola, Paraboloide ellittico

Osservazione:

$\exists$centro <=> $A\underline{v_0} = -\underline{b}$ <=> $\underline{b} \in col(A)$

Poniamo H = col(A) =(A simmetrica)= row(A) $\subseteq R^n$

Osserviamo $H^\perp = (rowA)^\perp = \{\underline{v} : \underline{a} \cdot \underline{v} = 0 \ \ \forall \underline{a}$ riga di A$\} = \{\underline{v} \in R^n : A\underline{v} = \underline{0}\} = ker(A)$

Se Q non ha centro, consideriamo una versione "approssimata" di $A\underline{v} = -\underline{b}$ cioè $A\underline{v} = -\pi_H(\underline{b})$

questo ha soluzioni, perché $\pi_H(\underline{b}) \in H = col(A)$

Definizione:

sia Q una quadrica senza centro. Lasse di Q è il sottospazio affine $A(Q) = \{\underline{v} \in R^n : A\underline{v} = -\pi_{col(A)}(\underline{b})\}$

Osservazione:

dimA(Q) > 0 perché A non invertibile => dimKer(A) > 0 A(Q) = una traslazione di ker(A)

Proposizione:

Q è simmetrica rispetto all'asse A(Q)

Esempio:

Parabola, Paraboloide Ellittico