Capitolo 6: Spazi Euclidei, sottospazi, teorema di Pitagora, complemento ortogonale #GAL

Definizione:

sia V uno spazio vettoriale

un prodotto scalare su V è un'operazione <-,-> : VxV->R t.c. (proprietà)

1. (Commutativa) $<\underline{v},\underline{w}> = <\underline{w},\underline{v}>$
2. (Bilineare) $<\mu_1 * \underline{v_1} + \mu_2 * \underline{v_2}, \underline{w}> = \mu_1 * <\underline{v_1},\underline{w}> + \mu_2 <\underline{v_2},\underline{w}>$

e $<\underline{v}, \mu_1 \underline{w_1} + \mu_2 \underline{w_2}> = \mu_1 * <\underline{v},\underline{w_1}> + \mu_2 <\underline{v},\underline{w_2}>$ dove $\underline{v}, \underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{w}, \underline{w_1}, \underline{w_2} \in V$ e $\mu_1, \mu_2 \in R$

3. (Definita positiva) $<\underline{v},\underline{v}> \geq 0 \quad \forall \underline{v} \in V$ e $<\underline{v},\underline{v}> = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

Uno spazio Euclideo è uno spazio vettoriale che rispetta il prodotto scalare

Definizione(Il prodotto scalare standard su R^n):

è definito da $(a_1 \dots a_n)^t \cdot (b_1 \dots b_n)^t = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

Dimostrazione:

verifica le 3 proprietà

Notazione:

$<\underline{a},\underline{b}>$ arbitrario prodotto scalare in V $\underline{a} \cdot \underline{b}$ prodotto scalare standard in R^n

Osservazione:

$\underline{a},\underline{b}$ R^n vettori colonna (prodotto scalare) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}^t \cdot \underline{b}$ (prodotto riga per colonna)

Altri esempi:

- $V = R^2$ $<\underline{a},\underline{b}> = 2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1$
- $V = R^3$ $<\underline{a},\underline{b}> = 7a_1 b_1 + 3a_2 b_2 + 5a_3 b_3$
- $V = R_{[t]}$ $<p(t),q(t)> = {}_0\int^1 p(t)q(t)\, dt$
- $V = Mat(n,n)$ $<A,B> = tr(AB^t)$

Sono tutti esempi di prodotti scalari

Definizioni:

sia V spazio Euclideo

- La norma (lunghezza) di $\underline{v} \in V$ è $||\underline{v}|| = \sqrt{<\underline{v},\underline{v}>}$
- La distanza tra $\underline{v},\underline{w} \in V$ è $d(\underline{v},\underline{w}) = ||\underline{v} - \underline{w}||$

Esempi:

in R^n (con $\cdot$) $\underline{a} = (a_1 \dots a_n)^t$ $\underline{b} = (b_1 \dots b_n)^t$

$||\underline{a}|| = \sqrt{(\underline{a} \cdot \underline{a})} = \sqrt{(a_1^2 + \dots + a_n^2)}$

$d(\underline{a},\underline{b}) = ||\underline{a} - \underline{b}|| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}$

Proposizione:

V spazio Euclideo

1. $||\underline{v}|| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$
2. $||c\underline{v}|| = |c| * ||\underline{v}||$
3. $<\underline{0},\underline{v}> = \underline{0}$
4. Disuguaglianza di Schwartz: $|<\underline{a},\underline{b}>| \leq ||\underline{a}|| * ||\underline{b}||$
5. Disuguaglianza triangolare: $||\underline{a} + \underline{b}|| \leq ||\underline{a}|| + ||\underline{b}||$
6. Teorema di Carnot: $||\underline{a} + \underline{b}||^2 = ||\underline{a}||^2 + ||\underline{b}||^2 + 2<\underline{a},\underline{b}>$

Dimostrazione:

1. Proprietà definita positiva
2. $||c\underline{v}|| = \sqrt{<c\underline{v},c\underline{v}>}$ =(bilineare)= $\sqrt{c * <\underline{v},c\underline{v}>}$ =(bilineare)= $\sqrt{c^2 * <\underline{v},\underline{v}>} = \sqrt{c^2} * \sqrt{<\underline{v},\underline{v}>} = |c| * ||\underline{v}||$
3. $<\underline{0},\underline{v}> = <0 * \underline{0},\underline{v}>$ =(bilineare)= $0 * <\underline{0},\underline{v}> = 0$
4. No dimostrazione
5. $||\underline{a} + \underline{b}||^2 = <\underline{a}+\underline{b},\underline{a}+\underline{b}>$ =(bilineare)= $<\underline{a},\underline{a}+\underline{b}> + <\underline{b},\underline{a}+\underline{b}>$ =(bilineare)= $<\underline{a},\underline{a}> + <\underline{a},\underline{b}> + <\underline{b},\underline{a}> + <\underline{b},\underline{b}> =$

   $= ||\underline{a}||^2 + ||\underline{b}||^2 + 2<\underline{a},\underline{b}> \leq ||\underline{a}||^2 + ||\underline{b}||^2 + 2|<\underline{a},\underline{b}>|$ ≤(Schwartz)≤ $||\underline{a}||^2 + ||\underline{b}||^2 + 2||\underline{a}|| * ||\underline{b}|| =$

   $= (||\underline{a}|| + ||\underline{b}||)^2 \Rightarrow ||\underline{a} + \underline{b}||^2 \leq (||\underline{a}|| + ||\underline{b}||)^2 \Rightarrow ||\underline{a} + \underline{b}|| \leq ||\underline{a}|| + ||\underline{b}||$
6. Già visto nella dimostrazione 5)

Osservazione:

dati $\underline{v},\underline{w} \neq 0 \Rightarrow ||\underline{v}||, ||\underline{w}|| \neq 0$

Schwartz: $|<\underline{v},\underline{w}>| \leq ||\underline{v}|| * ||\underline{w}|| \Rightarrow (|<\underline{v},\underline{w}>|) / (||\underline{v}|| * ||\underline{w}||) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq (|<\underline{v},\underline{w}>|) / (||\underline{v}|| * ||\underline{w}||) \leq 1$

Definizione:

l'angolo tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$ è $\underline{v}\hat{}\underline{w} = \arccos [(|<\underline{v},\underline{w}>|) / (||\underline{v}|| * ||\underline{w}||)]$

Osservazione:

$0 \leq \underline{v}\hat{}\underline{w} \leq \pi \quad \cos(\underline{v}\hat{}\underline{w}) = (|<\underline{v},\underline{w}>|) / (||\underline{v}|| * ||\underline{w}||) \Rightarrow <\underline{v},\underline{w}> = ||\underline{v}|| * ||\underline{w}|| * \cos(\underline{v}\hat{}\underline{w})$

Definizione:

- $\underline{v}\hat{}\underline{w} = \pi/2 \iff \cos(\underline{v}\hat{}\underline{w}) = 0 \iff <\underline{v},\underline{w}> = 0$ In questo caso, $\underline{v},\underline{w}$ si dicono ortogonali e scriviamo $\underline{v} \perp \underline{w}$
- $\underline{0}$ è ortogonale a qualsiasi $\underline{v}$

Esempio:

$(1\ -1\ 0)^t \cdot (2\ 2\ 0)^t = 1*2 - 1*2 + 1*0 = 0 \Rightarrow$ ortogonali

Esempi:

- Disuguaglianza triangolare: $||\underline{a} + \underline{b}|| \leq ||\underline{a}|| + ||\underline{b}||$ $\quad AC \leq AB + BC$

- Teorema di Pitagora: Teorema di Carnot $||\underline{a} + \underline{b}||^2 = ||\underline{a}||^2 + ||\underline{b}||^2 + 2<\underline{a},\underline{b}>$ ($<\underline{a},\underline{b}> = 0$, perché $\underline{a},\underline{b}$ ortogonali) $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- Teorema del coseno: Teorema di Carnot (in R^2)

Teorema(Pitagora):

se $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ ortogonali a 2 a 2 ($\underline{v_i} \perp \underline{v_j}$ se $i \neq j$) => $||\underline{v_1} + \dots + \underline{v_n}||^2 = ||\underline{v_1}||^2 + \dots + ||\underline{v_n}||^2$

Dimostrazione:

$||\underline{v_1} + \dots + \underline{v_n}||^2 = <\underline{v_1} + \dots + \underline{v_n}, \underline{v_1} + \dots + \underline{v_n}>$ =(bilineare)= $<\underline{v_1},\underline{v_1}> + \dots + <\underline{v_1},\underline{v_n}> + <\underline{v_2},\underline{v_1}> + \dots + <\underline{v_2},\underline{v_n}> + <\underline{v_n},\underline{v_1}> + \dots + <\underline{v_n},\underline{v_n}> =$

$= {}^{n}\Sigma_{i,j=1} <\underline{v_i},\underline{v_j}>$ per ipotesi $<\underline{v_i},\underline{v_j}> = 0$ per $i \neq j$ => $<\underline{v_1},\underline{v_1}> + \dots + <\underline{v_n},\underline{v_n}> = ||\underline{v_1}||^2 + \dots + ||\underline{v_n}||^2$

Proposizione:

se $\underline{v_1} + \dots + \underline{v_n} \neq 0$ ortogonali a 2 a 2 => $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ LI

Dimostrazione:

supponiamo $c_1\underline{v_1} + \dots + c_n\underline{v_n} = 0$ vogliamo dimostrare $c_i = 0$ $\forall i$

$0 = <\underline{0},\underline{v}> = <c_1\underline{v_1} + \dots + c_n\underline{v_n}>$ =(bilineare)= $c_1<\underline{v_1},\underline{v_i}> + \dots + c_i<\underline{v_i},\underline{v_i}> + \dots + c_n<\underline{v_n},\underline{v_i}> = 0 + \dots + c_i||\underline{v_i}||^2 + \dots + 0$

=> $c_i||\underline{v_i}||^2 = 0$ con $||\underline{v_i}||^2 > 0$ => $c_i = 0$

Osservazione:

il viceversa non vale $(1\ 0)^t, (1\ 1)^t$ sono LI ma non ortogonali
Ortogonale è più forte di LI

Definizione:

sia $H \subseteq V$ un sottospazio il completamento ortogonale di H
$H^\perp = \{\underline{v} \in V : \underline{v} \perp \underline{w} \quad \forall \underline{w} \in H\}$
Proprietà:
1. $H^\perp$ è un sottospazio di V
2. Se $H = Span(\underline{w_1}, \dots, \underline{w_n})$ allora $H^\perp = \{\underline{v} \in V : \underline{v_1} \perp \underline{w_1}, \dots, \underline{v_n} \perp \underline{w_n}\}$

Dimostrazione:

1. $\underline{0} \perp \underline{w}$ $\forall \underline{w} \in V$ => $\underline{0} \in H^\perp$
   se $\underline{v_1},\underline{v_2} \in H^\perp$ => $<\underline{v_1},\underline{w}> = <\underline{v_2},\underline{w}> = 0$ $\forall \underline{w} \in H$
   => $<c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2},\underline{w}>$ =(bilineare)= $c_1<\underline{v_1},\underline{w}> + c_2<\underline{v_2},\underline{w}> = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow\ c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2} \perp \underline{w}\ \ \forall \underline{w} \in H \ \Rightarrow\ c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2} \in H^{\perp}$

2. Se $\underline{v}\perp\underline{w}\ \ \forall\underline{w} \in H \ \Rightarrow\ \underline{v}\perp\underline{w_1}, \ldots, \underline{v_n}\perp\underline{w_n} \ \Rightarrow\ \{\underline{v} \in V : \underline{v}\perp\underline{w}\ \ \forall\underline{w} \in H\}\subseteq\{\underline{v} \in V : \underline{v_1}\perp\underline{w_1}, \ldots, \underline{v_n}\perp\underline{w_n}\}$

viceversa: se $\underline{v} \in V : \underline{v_1}\perp\underline{w_1}, \ldots, \underline{v_n}\perp\underline{w_n}\ \ \forall\underline{w} \in H$

$\Rightarrow\ \underline{w} = c_1\underline{w_1} + \ldots + c_n\underline{w_n}$ per qualche c_i e $<\underline{v},\underline{w}> = <\underline{v},c_1\underline{w_1} + \ldots + c_n\underline{w_n}> =$(bilineare)$= c_1<\underline{v},\underline{w_1}> + \ldots + c_n<\underline{v},\underline{w_n}> = 0$

$\Rightarrow\ \underline{v}\perp\underline{w} \ \Rightarrow\ \{\underline{v} \in V : \underline{v_1}\perp\underline{w_1}, \ldots, \underline{v_n}\perp\underline{w_n}\}\subseteq\{\underline{v} \in V : \underline{v}\perp\underline{w}\ \ \forall\underline{w} \in H\}$

Esempio:

trovare $H^{\perp}$ dove $H = \text{Span}(\underline{w_1}, \underline{w_2}) = \text{Span}((1\ 1\ 1)^t, (1\ 0\ 2)^t)\subseteq R^3$

cerchiamo $\underline{v} = (v_1\ v_2\ v_3)^t \subseteq R^3$ t.c. $\underline{v}\perp\underline{w_1}, \underline{v}\perp\underline{w_2}$

$\underline{v}\cdot\underline{w_1} = 0 \ \Rightarrow\ (v_1\ v_2\ v_3)^t(1\ 1\ 1)^t = v_1 + v_2 + v_3 = 0$ $\underline{v}\cdot\underline{w_2} = 0 \ \Rightarrow\ (v_1\ v_2\ v_3)^t(1\ 0\ 2)^t = v_1 + 2v_3 = 0 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \{v_1 + v_2 + v_3 = 0;\ \ v_1 + 2v_3 = 0\} \ \Rightarrow\ \text{Span}((2\ -1\ -1)^t) = H^{\perp}$