1) SEA $D=[0,1]\times[0,1]$

a) DADA UNA FUNCIÓN CONTINUA $f: D\to\mathbb{R}$ PROBAR QUE EXISTE $P\in D$ TAL QUE

$$f(P)=\iint_D f$$

b) SI $g: D\to\mathbb{R}$ ES UNA FUNCIÓN C^1 TAL QUE $g(1,y)=0$ PARA TODO y,

PROBAR QUE EXISTE $P\in D$ TAL QUE

$$g(P)=-\iint_D x\cdot\frac{\partial g}{\partial x}$$

SOL:

a)

$$\iint_D f=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\Big(\underbrace{\int_0^1 f(x,y)\,dy}\Big)dx$$

FIJO EL X

EL X LO TOMO COMO CONSTANTE INTEGRO SOBRE Y NOMÁS.

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = f(x,y_0).(1-0)=f(x,y_0)$$

CON $y_0\in(0,1)$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\exists\, c\in(a,b)$ TQ' $f(c).(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$ TEO. VALOR MEDIO INTEGRAL

MISMO PROCEDIMIENTO →

$$=\int_0^1 f(x,y_0)\,dx = f(x_0,y_0).(1-0)=f(x_0,y_0)$$

$x_0\in(0,1)$, $y_0\in(0,1)$ $\Rightarrow (x_0,y_0)\in D$

LUEGO, TOMO $P=(x_0,y_0)$

b)

$$-\iint_D x\cdot\frac{\partial g}{\partial x}=-\int_0^1\Big(\int_0^1 x\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\,dx\Big)dy = -\int_0^1\Big(x\cdot g(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 1.\,g(x,y)\,dx\Big)dy$$

$u=x \quad v'=\frac{\partial g}{\partial x}$

$u'=1 \quad v=g(x,y)$

$$-\int_0^1\Big(\underbrace{g(1,y)}_{=0}-\int_0^1 g(x,y)\,dx\Big)dy=\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\,dx\,dy=\iint_D g \underset{a)}{=} g(P)$$

1) SEA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN CONTINUA QUE SATISFACE QUE:

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

PROBAR QUE f ES IDENTICAMENTE CERO.

SUGERENCIA: CONSIDERAR LA FUNCIÓN $g(x) = f(x).e^{-x}$

SOL:

$$g'(x) = f'(x).e^{-x} + f(x).e^{-x}.(-1) = f(x).e^{-x} - f(x).e^{-x} = 0$$

POR TFC $f'(x) = f(x)$

LA DERIVADA DE g ES 0 $\forall x$ $\Rightarrow$ g ES CONSTANTE

PERO $g = f(x).e^{-x}$ $\Rightarrow$ $f(x).e^{-x} = c$ $\forall x$ (PARA c ALGÚN CONSTANTE)

$$f(x) = c.e^{x}$$

EVALÚO EN 0:

$$f(0) = c.e^{0} = c$$

SÉ QUE $f(0) = 0$

$\Rightarrow$ $0 = c$

Y f ESTABA DEFINIDA COMO $f(x) = c.e^{x}$

PERO COMO $c = 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = 0$ $\forall x$

QUE ES LO QUE QUERÍA PROBAR.

4) SEA $a < b$, SEA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA TAL QUE $f(x) \geq 0 \quad \forall \; x \in [a,b]$

Y ADEMÁS
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

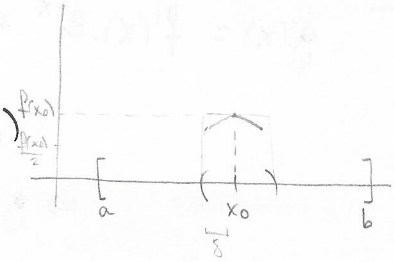
PROBAR QUE $f(x) = 0 \quad \forall \; x \in [a,b]$

BUENO PERO COMO AHÍ EN x_0 ES >0, $\Rightarrow$ VOY A PODER TENER UNA INTEGRAL >0 OSEA VOY A PODER TENER UN CUADRADITO CON ALGÚN ÁREA.

Sol:

Qvq' $f(x) = 0 \quad \forall \; x \in [a,b]$. SUPONGO QUE NO Y LLEGO A UN ABSURDO:

ENTONCES EXISTE $x_0 \in [a,b]$ TAL QUE $f(x_0) > 0$



COMO f ES CONTINUA ENTONCES $\exists \; \delta > 0$ TAL QUE SI $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = \varepsilon$$

LUEGO,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,dx = \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx = \frac{f(x_0)}{2}\left[\cancel{x_0}+\delta - (\cancel{x_0} - \delta)\right]$$

$f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$

$\dfrac{f(x_0)}{2}$ cte.

$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset [a,b]$

(ACHICO LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN, LA INTEGRAL ME VA A DAR MÁS CHICA)

$$= \underbrace{\frac{f(x_0)}{2}}_{>0} \cdot \underbrace{2\delta}_{>0} > 0$$

Abs!

CONTRADICE LA HIPÓTESIS

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

Y LLEGUÉ A $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$

1) Sea $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ continua y derivable en $\mathbb{R}_{>0}$ talque $f(0)=1$ y $|f'(x)| \leq 1/2$ para todo $x>0$

Probar que existe un único $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ talque $f(x_0) = x_0$

Sol:

Como f es continua y derivable en $\mathbb{R}_{>0}$ en particular lo será para el intervalo entre 0 y $x>0$. Entonces por Lagrange existe $c \in (0,x)$ talque

$$f'(c).(x-0) = f(x) - f(0)$$

Tomando módulo:

$$\underbrace{|f'(c)|}_{\leq 1/2}|x| = |f(x) - \underbrace{f(0)}_{=1}|$$

$$|f(x)-1| = |f'(c)||x| \underset{c>0}{\leq} \frac{1}{2}|x| \underset{x>0}{=} \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow |f(x)-1| \leq \frac{1}{2}x$$

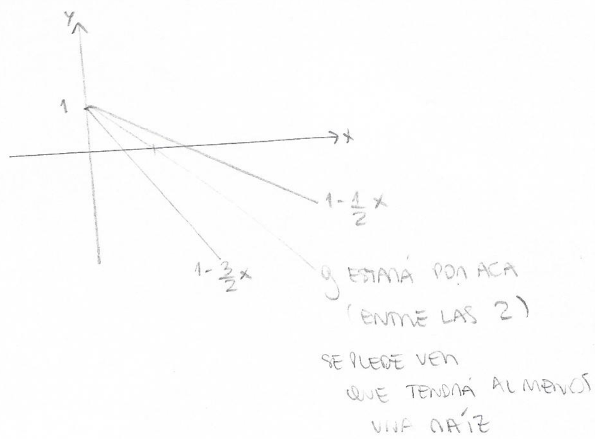
$$1 - 1/2x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 1$$

Defino g una función auxiliar: (y ver que es única)

$$g(x) = f(x) - x$$ → Básicamente voy abuscar la raíz de g

$$1 - 1/2x - x \leq f(x) - x \leq \frac{1}{2}x + 1 - x$$

$$1 - \frac{3}{2}x \leq g(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x$$



Ahora, veo que:

$$g(0) = f(0) - 0 = 1 > 0$$

$$1 - \frac{3}{2}.4 \leq g(4) \leq 1 - \frac{1}{2}.4$$

$$-5 \leq g(4) \leq -1 \Rightarrow g(4) < 0$$

Como g es continua (por ser resta de continuas) y $g(0)>0$ y $g(4)<0$, entonces por Bolzano existe $x_0 \in (0,4)$ talque $g(x_0)=0$

Es decir probé entonces que existe $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ talque $f(x_0) = x_0$

Ahora restaría ver que tal x_0 es único.

LO PRUEBO POR EL ABSURDO:

SUPONGO QUE NO ES ÚNICO.

ENTONCES EXISTE x_1 TALQUE $g(x_1)=0$

COMO g ES CONTINUA Y DERIVABLE, Y COMO $g(x_0)=g(x_1)=0$ ENTONCES POR ROLLE EXISTE $c \in (x_0, x_1)$ TALQUE $g'(c)=0$

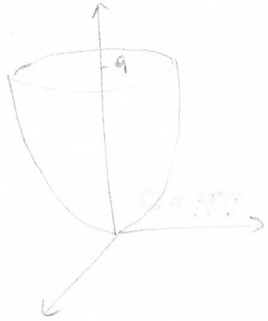
PERO $g'(x) = f'(x) - 1$ ENTONCES $\exists\, c \,/\, f'(c) - 1 = 0$

$f'(c) = 1$ $\underline{\text{Abs}}!$ CONTRADICE LA HIPÓTESIS $|f'(x)| \leq 1/2$

LUEGO, x_0 ES ÚNICO.

3) SEA $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 \leq z \leq 9\}$ Y $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x + 2y + \alpha z$

PARA CADA VALOR DE $\alpha \in \mathbb{R}$ ENCONTRAR EL MÁXIMO ABS. DE f.



PRIMERO ANALIZO EL INTERIOR:

$$\nabla f = 0$$

$$\nabla f = (1, 2, \alpha) = (0,0,0) \quad \underline{\text{Abs!}}$$

$\Rightarrow$ EN EL INTERIOR NO HAY PUNTOS CRÍTICOS.

AHORA ANALIZO EL BORDE:

HAY "DOS BORDES": EL PARABOLOIDE Y "LA TAPA" (LA CIRCUNFERENCIA DE ARRIBA)

MIRO EL PARABOLOIDE:

$z = x^2+y^2 \qquad 0 \leq z < 9$

$\qquad\qquad\qquad 0 \leq x^2+y^2 < 9$

PARAMETRIZANDO:

$$f(x, y, x^2+y^2) = x + 2y + \alpha(x^2+y^2) = G$$

$\Rightarrow$ BUSCO MÁX. Y MÍN. DE G EN $0 \leq x^2+y^2 < 9$: $\nabla G = 0$

$$\nabla G = (1 + 2x\alpha, \; 2 + 2y\alpha) = (0,0)$$

Si $\alpha = 0$ ESTO NUNCA SE CUMPLE $\Rightarrow \alpha \neq 0$: $\quad 1 + 2x\alpha = 0 \qquad 2 + 2y\alpha = 0$

$\qquad x = -\dfrac{1}{2\alpha} \qquad y = -\dfrac{1}{\alpha}$

PERO ADEMÁS SE DEBE CUMPLIR $x^2+y^2 < 9$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^2 < 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} < 9 \Leftrightarrow \overbrace{\frac{5}{4\alpha^2}}^{=z} < 9 \Leftrightarrow \frac{5}{36} < \alpha^2$$

LUEGO, $P.C = \left\{\left(-\dfrac{1}{2\alpha}, -\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{5}{4\alpha^2}\right) : \dfrac{5}{36} < \alpha^2\right\}$

AHORA MIRO "LA TAPA":

$z = 9$

~~APROVECHO LO QUE SERÍA "EL INTERIOR" ES DECIR $x^2+y^2 \leq 9$~~

$x^2 + y^2 \leq 9$

PARAMETRIZANDO: $f(x,y,9) = x + 2y + 9\alpha = H$

BUSCO PUNTOS CRÍTICOS EN LO QUE SERÍA EL "INTERIOR" DE H, PARA ELLO $\nabla H = 0$

$\nabla H = (1,2) = (0,0)$ Abs! $\Rightarrow$ NO HAY PUNTOS CRÍTICOS.

AHORA MIRO "EL BORDE":

ÉSTE SERÍA $x^2+y^2=9$

SI DEFINO $g(x,y) = x^2+y^2-9$ ENTONCES QUIERO VER LOS EXTREMOS DE H RESTRINGIDOS A $S = \{g(x,y)=0\}$. USANDO MULTIPLICADORES DE LAGRANGE:

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$

$\Rightarrow \quad \nabla H = \lambda \nabla g$

$(1,2) = \lambda(2x, 2y)$

$$\begin{cases} 2x\lambda = 1 & (1) \\ 2y\lambda = 2 & (2) \\ x^2+y^2 = 9 & (3) \end{cases}$$

$x=0$: (1) $0=1$ Abs!

$x \neq 0$: (1) $\lambda = \frac{1}{2x}$

(2) $2y \frac{1}{2x} = 2$

$y = 2x$

(3) $x^2 + (2x)^2 = 9$

$5x^2 = 9$

$x^2 = 9/5$

$x = \pm\sqrt{9/5}$

$y = \pm 2\sqrt{9/5}$

ENTONCES, PUNTOS CRÍTICOS:

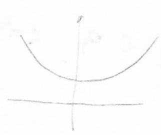
$(\sqrt{9/5}, 2\sqrt{9/5}, 9)$, $(-\sqrt{9/5}, -2\sqrt{9/5}, 9)$, $(-\frac{1}{2\alpha}, -\frac{1}{\alpha}, \frac{5}{4\alpha^2})$ CON $\alpha^2 > 5/36$

$f(\sqrt{9/5}, 2\sqrt{9/5}, 9) = \sqrt{9/5} + 4\sqrt{9/5} + 9\alpha = 5\sqrt{9/5} + 9\alpha$

$5\sqrt{9/5} + 9\alpha > -5\sqrt{9/5} + 9\alpha \quad \forall \alpha$

$f(-\sqrt{9/5}, -2\sqrt{9/5}, 9) = -\sqrt{9/5} - 4\sqrt{9/5} + 9\alpha = -5\sqrt{9/5} + 9\alpha$ → NO ES MÁXIMO NUNCA

$f(-\frac{1}{2\alpha}, -\frac{1}{\alpha}, \frac{5}{4\alpha^2}) = -\frac{1}{2\alpha} - \frac{2}{\alpha} + \frac{5}{4\alpha^2}\cdot\alpha = -\frac{5}{4\alpha}$



NO TIENE RAÍCES Y ES SIEMPRE >0 $(a=36>0)$

SI $\alpha^2 \leq 5/36 \Rightarrow$ EL ÚLTIMO NO ESTÁ $\Rightarrow$ MÁX: $(\sqrt{9/5}, 2\sqrt{9/5}, 9)$

POR' ERA P.C. $\Leftrightarrow \alpha^2 > 5/36$

SI $\alpha^2 > 5/36$

$|\alpha| > \sqrt{5/36}$ $\quad -\sqrt{5/36} > \alpha > \sqrt{5/36}$

$\alpha > \sqrt{5/36} > 0$

$\alpha < -\sqrt{5/36} < 0$

VEAMOS CUANDO $5\sqrt{9/5} + 9\alpha > -\frac{5}{4\alpha} \Leftrightarrow 36\alpha^2 + 20\sqrt{9/5}\,\alpha + 5 < 0$

NO SE CUMPLE NUNCA.

SIEMPRE $\Rightarrow 5\sqrt{9/5} + 9\alpha < -\frac{5}{4\alpha}$

$\Rightarrow$ SI $\alpha < -\sqrt{5/36} \Rightarrow$ MÁX: $(-\frac{1}{2\alpha}, -\frac{1}{\alpha}, \frac{5}{4\alpha^2})$

EL PRIMERO >0

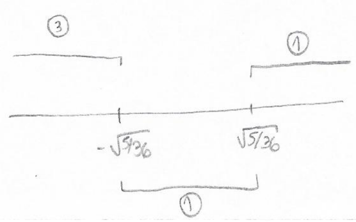
Y EL ÚLTIMO <0

$\Rightarrow$ MÁX: $(\sqrt{\frac{9}{5}}, 2\sqrt{9/5}, 9)$

Rta:

SI $\alpha \geq -\sqrt{5/36}$: MÁX: $(\sqrt{9/5}, 2\sqrt{9/5}, 9)$

SI $\alpha < -\sqrt{5/36}$: MÁX: $(-\frac{1}{2\alpha}, -\frac{1}{\alpha}, \frac{5}{4\alpha^2})$



1) SEA $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ TAL QUE $|F(x,y)| \leq x^2+y^2$

a) DECIDIR SI F ES CONTINUA EN $(0,0)$

b) DECIDIR SI F ES DIFERENCIABLE EN $(0,0)$

c) ¿EXISTE $\lim_{n\to\infty} F\left(\frac{\cos(1/n^2)}{n}, n \operatorname{sen}(1/n^2)\right)$?

a)
EVALÚO F EN $(0,0)$:

$$-(x^2+y^2) \leq F(x,y) \leq x^2+y^2$$

$$0 \leq F(0,0) \leq 0 \quad \Rightarrow F(0,0)=0$$

F ES CONTINUA EN $(0,0)$ $\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = F(0,0) = 0$

$\Rightarrow$ QVQ' $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 0$

DADO $\varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$ TQ' SI $\|(x,y)\|<\delta \Rightarrow |F(x,y)-0|<\varepsilon$

$\|(x,y)\|<\delta \iff \sqrt{x^2+y^2}<\delta \iff x^2+y^2<\delta^2$

SÉ QUE $|F(x,y)| \leq x^2+y^2$ Y COMO $x^2+y^2<\delta^2$

ENTONCES SI TOMO $\varepsilon=\sqrt{\delta}$:

$$|F(x,y)|<\varepsilon \quad \text{si} \quad \|(x,y)\|<\delta$$

b)
F ES DIFERENCIABLE EN $(0,0)$ $\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y) - \overbrace{F(0,0)}^{=0} - F_x(0,0)(x-0) - F_y(0,0)(y-0)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$

AFIRMO QUE AMBAS DERIVADAS PARCIALES SERÁN 0, LO PRUEBO:

$F_x(0,0)=0$:

$$F_x(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{F((0,0)+t(1,0)) - \overbrace{F(0,0)}^{=0}}{t} = \lim_{t\to0} \frac{F(t,0)}{t} = 0$$

QVQ'

DADO $\varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$ TQ' SI $|t|<\delta \Rightarrow \left|\frac{F(t,0)}{t} - 0\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{F(t,0)}{t}\right| = \frac{|F(t,0)|}{t} \leq \frac{t^2+0^2}{t} = t < \delta$$

SI TOMO $\varepsilon=\delta$ ✓ $\quad \Rightarrow F_x(0,0)=0$

($\underbrace{F_y(0,0)}_{=0}$ SALE ANÁLOGAMENTE)

ENTONCES, EL LÍMITE DE DIFERENCIABILIDAD ME QUEDA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\|(x,y)\|} \underset{\text{QVQ!}}{\downarrow}= 0$$

DADO $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ TQ' si $\|(x,y)\|<\delta \Rightarrow \left|\frac{F(x,y)}{\|(x,y)\|}\right| < \varepsilon$

$x^2+y^2 = \|x,y\|^2$

$$\left|\frac{F(x,y)}{\|(x,y)\|}\right| = \frac{|F(x,y)|}{\|x,y\|} \leq \frac{\|x,y\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|x,y\|}} = \|x,y\| < \delta$$

$\Rightarrow$ TOMO $\varepsilon = \delta$

c) $\lim_{n\to\infty} F\left(\frac{\cos(1/n^2)}{n}, n \operatorname{sen}(1/n^2)\right)$

$\operatorname{sen}(x) \leq x$
$\cos(x) \leq 1$

$$0 \leq \left|F\left(\frac{\cos(1/n^2)}{n}, n\operatorname{sen}(1/n^2)\right)\right| \leq \frac{\cos^2(1/n^2)}{n^2} + n^2 \operatorname{sen}^2(1/n^2) \leq \frac{1}{n^2} + n^2 \cdot \frac{1}{n^4} = \frac{2}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$0 \leq \left|F\left(\frac{\cos(1/n^2)}{n}, n\operatorname{sen}(1/n^2)\right)\right| \leq \frac{2}{n^2}$$

$0 \downarrow 0$ $\qquad$ $\frac{2}{n^2} \downarrow 0$

$\Rightarrow$ POR SANDWICH: $\downarrow 0$

LUEGO $\lim_{n\to\infty} F\left(\frac{\cos(1/n^2)}{n}, n\operatorname{sen}(1/n^2)\right)$ EXISTE Y ES 0.

2) SEA $C = \{(n, 2n)$ TALQUE $n \in \mathbb{N}, n \leq 100\}$

SEA $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN DE CLASE C^1 QUE SATISFACE: $F(P) = 0$ SI Y SOLO SI $P \in C$

PROBAR QUE PARA TODO $P \in C$ SE VERIFICA QUE $\nabla F(P) = 0$

SEA $A = \mathbb{R}^2 - \{C\}$. SI SUPONGO QUE $\exists$ $P, Q \in A$ TALES QUE $F(P) < 0$ Y $F(Q) > 0$,

Y COMO A ES ARCOCONEXO Y F CONTINUA. ENTONCES POR BOLZANO EXISTE

$R \in A$ TALQUE $F(R) = 0$

PERO ESTO ES ABSURDO: PUES $F(P) = 0 \iff P \in C$ Y EN ESTE CASO $F(R) = 0$ CON $R \notin C$

ENTONCES, DEBE SER QUE $F(Q) < 0$ $\forall$ $Q \in A$ ó $F(Q) > 0$ $\forall$ $Q \in A$

LUEGO, COMO F SE ANULA SOLO EN LOS PUNTOS DE C Y EN TODOS LOS DEMÁS PUNTOS ($\in A$)

ES < 0 ó > 0 POR LO TANTO LOS PUNTOS DE C SON EXTREMOS.

$\Rightarrow$ F ES DIFERENCIABLE Y LOS PUNTOS $P \in C$ SON EXTREMOS DE f.

POR FERMAT, COMO F ES DIFERENCIABLE Y LOS PUNTOS $P \in C$ SON EXTREMOS DE f,

ENTONCES $\nabla F(P) = 0$

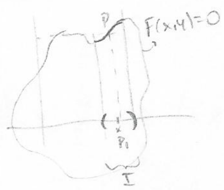
OTRA FORMA: <u>USANDO IMPLÍCITA</u>:

SUPONGO QUE $\nabla F(P) \neq 0$ $\Rightarrow$ SUP. POR EJ. $\frac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0$

ENTONCES POR TEO. DE LA F. IMPLÍCITA $\exists$ UN ENTORNO ABIERTO $I \subseteq \mathbb{R}$ DE P_1 Y UNA FUNCIÓN DERIVABLE

φ TAL QUE $\forall$ x EN ESE ENTORNO SE CUMPLE $(x,y) \in S = \{(x,y) : F(x,y) = 0\} \iff y = \varphi(x)$

O SEA $F(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$



$\Rightarrow F(x, \varphi(x)) = 0$ $\forall$ $x \in I$

$Graf(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$ ES UN CONJUNTO INFINITO

O SEA HAY INFINITOS PUNTOS DONDE F SE ANULA

$\Rightarrow$ NO SE PUEDE ANULAR SOLO EN LOS $P \in C$

<u>Abs!</u>

$\Rightarrow \nabla F(P) = 0$

SEA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ CONTINUA TALQUE $f(1,2) = (5,3)$ Y SEA $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ TALQUE $(5,3)$ ES UN MÁXIMO RELATIVO DE g. PROBAR QUE $(1,2)$ ES UN MÁX. RELATIVO DE $g \circ f$

Qpq' $(1,2)$ MÁX. RELATIVO DE $g \circ f = g(f(x,y))$

$(5,3)$ ES MÁX. RELATIVO DE $g \Rightarrow \nabla g(5,3) = 0$

NO SÉ SI g ES DIF. (PARA USAR REG. CADENA)

Qvq' $\nabla g\circ f(1,2) = 0 \iff Dg\circ f(1,2) = Dg|_{f(1,2)} \cdot Df|_{(1,2)} = \underbrace{Dg|_{(5,3)}}_{=0} \cdot Df|_{(1,2)} = 0$

DEF. DE MÁXIMO LOCAL: $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ALCANZA MÁX. LOCAL EN (x_0,y_0) SI $\exists\, r>0 \,/\, h(x_0,y_0) \geq h(x,y) \ \forall (x,y) \in B_r(x_0,y_0)$

AHORA COMO g TIENE MAX. LOCAL EN $(5,3)$ $\exists\, r>0$ TQ' $g(5,3) \geq g(x,y) \ \forall (x,y) \in B_r(5,3)$

AHORA PARA ESE $r>0$, COMO f ES CONTINUA EN $(1,2)$ $\exists\, \delta > 0 \,/\, \|(x,y)-(1,2)\| < \delta$
$\Rightarrow \|f(x,y) - (5,3)\| < r$

$\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = (5,3)\right)$

USEMOS EL δ EN CUESTIÓN PARA PROBAR LO PEDIDO:

QUEREMOS VER QUE SI $(x,y) \in B_\delta(1,2) \Rightarrow g\circ f(1,2) \geq g\circ f(x,y)$

COMO $(x,y) \in B_\delta(1,2) \Rightarrow \|(x,y)-(1,2)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - (5,3)\| < r \Rightarrow f(x,y) \in B_r(5,3)$

LUEGO, SE CUMPLE QUE $g(5,3) \geq g(f(x,y))$

RECORDANDO QUE $(5,3) = f(1,2)$ NOS QUEDA:

$$g\circ f(1,2) \geq g\circ f(x,y)$$

Y ESTO VALE $\forall (x,y) \in B_\delta(1,2)$, POR LO CUAL $g\circ f$ TIENE MÁX. LOCAL EN $(1,2)$

2) SEA $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN CONTINUA, CRECIENTE, POSITIVA Y DERIVABLE.

CONSIDEREMOS LA FUNCIÓN $H:[0,+\infty)\to\mathbb{R}_{>0}$ DETERMINADA POR:

$$H(x)=\int_0^{x^2} g(t)\,dt$$

i) PROBAR QUE LA SEGUNDA DERIVADA DE H ES POSITIVA EN TODO $\mathbb{R}_{>0}$

ii) PROBAR QUE H DIVERGE EN $\mathbb{R}_{>0}$

Sol:

i) Como g es continua, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, podemos decir que H es derivable y continua, y además:

$$f(x)=\int_0^x g(t)dt$$

$$h(x)=x^2$$

$$H(x)=f\circ h(x)$$

$$H'(x)=f'(h(x)).h'(x)$$

$$H'(x)=g(x^2).2x$$

$$H''(x)=\underbrace{g'(\underset{>0}{x^2})}_{\substack{>0\\ g\text{ creciente}}}.\underbrace{2x.2x}_{>0}+\underbrace{g(x^2).2}_{>0}$$

$$\Rightarrow H''(x)>0$$

ii)

g creciente y positiva $\Rightarrow$

$$\forall t>0 \qquad g(t)\geq g(0)>0$$

$$\Updownarrow$$

$$H(x)=\int_0^{x^2} g(t)\,dt \geq \int_0^{x^2} g(0)\,dt = g(0).x^2 >0$$

$$H(x)\geq g(0).x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

$$\Rightarrow H \text{ diverge}$$

3) SEA $B = [1,4] \times [1,5]$ Y SEA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DIFERENCIABLE TALQUE

$\inf\{f(P) : P \in B\} = 5$; $\sup\{f(P) : P \in B\} = 20$

PROBAR QUE EXISTE $C \in B$ TALQUE $\|\nabla f(C)\| \geq 3$

SOL:

f ES DIFERENCIABLE, POR LO TANTO ES CONTINUA. B ES COMPACTO, ENTONCES POR WEIERSTRASS f ALCANZA MÍNIMO Y MÁXIMO EN DICHO COMPACTO.

YA SÉ LOS VALORES QUE TOMARÁ f EN TALES PUNTOS:

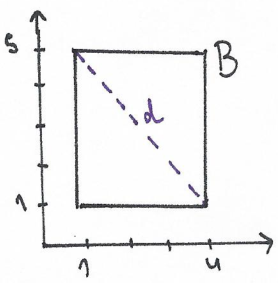
SEA $P \in B$ EL PUNTO DONDE f ALCANZA SU MÍNIMO (EN B), ES DECIR $f(P) = 5$

AHORA SEA $q \in B$ DONDE f ALCANZA SU MÁXIMO, $f(q) = 20$

POR OTRO LADO, COMO f ES DIFERENCIABLE SOBRE UN ABIERTO CONVEXO ($\mathbb{R}^2$), POR LAGRANGE EXISTIRÁ UN PUNTO C EN EL SEGMENTO QUE UNE A P Y q TALQUE:

$$f(q) - f(P) = \langle \nabla f(C), q - P \rangle$$

VEAMOS COMO ES B:



$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

A PARTIR DEL GRÁFICO DE B, SE PUEDE VER QUE DADOS DOS PUNTOS CUALESQUIERA EN B, LA DISTANCIA ENTRE ELLOS SERÁ A LO SUMO 5

$$\Rightarrow \forall\ P, q \in B \quad dist(P,q) = \|q - P\| \leq 5$$

VOLVIENDO A LO QUE TENÍAMOS:

$$f(q) - f(P) = \langle \nabla f(C), q - P \rangle$$

$$20 - 5 = \langle \nabla f(C), q - P \rangle \underset{C\text{-}S}{\leq} \|\nabla f(C)\| . \|q - P\|$$

$$15 \leq \|\nabla f(C)\| . \|q - P\| \leq \|\nabla f(C)\| . 5$$

$$3 \leq \|\nabla f(C)\|$$

QUE ES LO QUE QUERÍAMOS PROBAR.

2) SEA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ C^1 TALQUE $Im(f) \subset A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$

PROBAR QUE Df NO ES INVERSIBLE EN NINGÚN PUNTO.

Sol:

Si Df FUERA INVERSIBLE, COMO f ES C^1, POR EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA,

$\exists$ V, W ENTORNOS ABIERTOS DE $\mathbb{R}^2$ TALES QUE SI $x \in V$, $f(x) \in W$,

DE MODO QUE $f(\ )$ "CAE" TODO EN W Y $f: V \to W$ ES BIYECTIVA.

ENTONCES ESTE W TIENE QUE ESTAR EN LA $Im(f)$, ADEMÁS ESTE W ES

UN ENTORNO ABIERTO, EN PARTICULAR CONTIENE UNA BOLITA DE CIERTO RADIO.

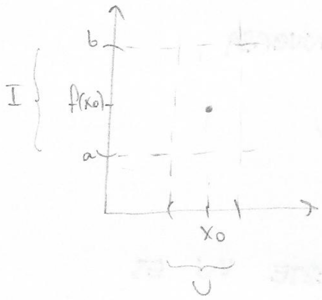
PERO LA $Im(f)$ ES UNA RECTA, NO PUEDE CONTENER NINGUNA BOLITA.

Abs!

$\Rightarrow$ Df NO ES INVERSIBLE.

3) SEA $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ CONTINUA, $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$ UN INTERVALO ABIERTO.

PROBAR QUE SI $f(x_0)\in I$ ENTONCES $\exists\ U\subset\mathbb{R}$ INTERVALO ABIERTO ENTORNO DE x_0 TALQUE $f(x)\in I\ \ \forall\, x\in U$.



SOL:

$$a < f(x_0) < b$$

DEFINO 2 FUNCIONES AUXILIARES:

$$F_1(x) = f(x) - b$$
$$F_2(x) = f(x) - a$$

$F_1(x_0)<0 \Rightarrow \exists\ \delta_1>0$ TALQUE $\forall\, x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ $F_1(x)<0$

CONSERVACIÓN DE SIGNO (F_1,F_2 CONTINUAS)

$F(x_0)>0 \Rightarrow \exists\ \delta_2>0$ TALQUE $\forall\, x\in(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)$ $F_2(x)>0$

$\Rightarrow$ Si $F_1(x)<0\ \forall\, x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$

$f(x)-b<0 \iff f(x)<b$

$\Rightarrow$ Si $F_2(x)>0\ \forall\, x\in(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)$

$f(x)-a>0 \iff a<f(x)$

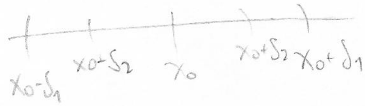
TOMO $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$\Rightarrow$ Si $x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ y $(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)$

$\Rightarrow a<f(x)<b$

ENTONCES, EL U BUSCADO SERÁ

$$U=(x_0-\delta, x_0+\delta)$$



2) SEAN $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DIFERENCIABLES TALES QUE $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \leq g(x,y)$

PROBAR QUE SI PARA $P \in \mathbb{R}^2$ SE TIENE $f(P) = g(P)$ ENTONCES $\nabla f(P) = \nabla g(P)$

Sol:

SEA $h(x = g(x,y) - f(x,y) \underset{f \leq g}{\geq} 0$

SE TIENE $h(P) = 0$

$$h(P) = g(P) - f(P) = 0$$

COMO $h(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ Y $h(P) = 0$ ENTONCES EN P TENGO UN MÍNIMO (ABSOLUTO), LUEGO POR FERMAT, $\nabla h(P) = 0$

$$\nabla h(P) = \nabla g(P) - \nabla \ (P) = 0$$

$\iff$ $\nabla g(P) = \nabla f(P)$ QUE ES LO QUE QUERÍA PROBAR.

4) SEA $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ C^1 TALQUE $f(t^3+4,\cos(t))=(7,5)$ $\forall\ t\in\mathbb{R}$

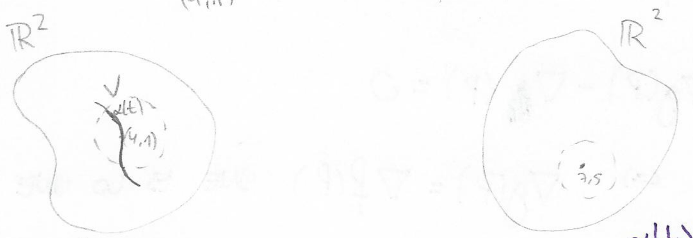
PROBAR QUE $Df(4,1)$ NO ES INVERSIBLE.

SUGERENCIA: USAR TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA.

SOL:

QVQ' $Df(4,1)$ NO ES INVERSIBLE, SUPONGO QUE SÍ LO ES Y TRATO DE LLEGAR A UN ABSURDO:

SI LO FUERA, COMO f ES C^1, POR EL TEO. DE LA FUNCIÓN INVERSA EXISTEN V, W ENTORNOS ABIERTOS $\subseteq\mathbb{R}^2$ CON $\underbrace{(4,1)\in V}_{V\text{ ent. abto del }(4,1)}$ Y $\underbrace{f(4,1)\in W}_{W\text{ ent. abto del }f(4,1)}$ TALES QUE $f:V\to W$ ES BIYECTIVA.



$\alpha(t)=(t^3+4,\cos(t))$

Si $t=0$: $\alpha(t)=(4,1)$

$\alpha(0)=(4,1)$

PUEDO SUPONER $V=B_\varepsilon((4,1))$ PARA ALGÚN RADIO ε

VEAMOS QUE EXISTE $t'\neq 0$ TALQUE $\alpha(t')\in B_\varepsilon((4,1))$

$\alpha(t)=(t^3+4,\cos(t))$ ES CONTINUA. $\lim_{t\to 0}\alpha(t)=\alpha(0)$

$\Rightarrow$ DADO ESE $\varepsilon>0$ $\exists\ \delta>0$ TQ' SI $|t-0|<\delta \Rightarrow \|\alpha(t)-\underbrace{\alpha(0)}_{(4,1)}\|<\varepsilon$

SI $|t|<\delta \Rightarrow \alpha(t)\in B_\varepsilon((4,1))$

ES DECIR, CUANDO HAGO $\alpha(t)$ PARA t LO SUFICIENTEMENTE CERCA DE 0 ME CAERÁ ADENTRO (DE V) DE LA BOLA Y AL APLICARLE f A ESE $\alpha(t)$ ME LLEVARÁ AL $(7,5)$

O SEA AL $(7,5)$ LLEGO CON CUALQUIER t TALQUE $|t|<\delta$

POR LO TANTO f NO PUEDE SER LOCALMENTE BIYECTIVA.

Abs!

$\Rightarrow Df(4,1)$ NO ES INVERSIBLE.