DEM:

1) ⇒ 2):

SE SABE QUE f ES CONTINUA EN P.

SEA $(p_n)_n$ SUCESIÓN TALQUE $p_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Y ADEMÁS $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$

HAY QUE PROBAR QUE $f(p_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(p)$,

DEF. LÍMITE SUCESIONES

O SEA HAY QUE PROBAR QUE: $[\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \ |f(p_n) - f(p)| < \varepsilon]$

SEA $\varepsilon > 0$ COMO f ES CONTINUA EN P, SE SABE QUE EXISTE $\delta > 0$ TALQUE $\forall q \in A$ TALQUE $\|q - p\| < \delta$ SE VERIFICA QUE $|f(q) - f(p)| < \varepsilon$ (1)

DEF. f CONTINUA

DADO ESTE $\delta > 0$, COMO $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ ENTONCES:

$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \quad \|p_n - p\| < \delta$ (2)

DEF. LÍM. SUC.

VAMOS A PROBAR QUE $\forall n \geq n_0 \quad |f(p_n) - f(p)| < \varepsilon$

SEA $n \geq n_0$ POR (2) SE DEDUCE QUE $\|p_n - p\| < \delta$, ADEMÁS $p_n \in A$ POR HIPÓTESIS

POR (1) SE DEDUCE QUE $|f(p_n) - f(p)| < \varepsilon$

2) ⇒ 1):

f CUMPLE 2). HAY QUE PROBAR QUE f ES CONTINUA EN P.

SUPONEMOS QUE NO:

QUE CUMPLE LO PRIMERO PERO NO LO SEGUNDO

ENTONCES EXISTE $\varepsilon_0 > 0$ TALQUE $\forall \delta > 0 \quad \exists q \in A / \|q - p\| < \delta$ PERO $|f(q) - f(p)| \geq \varepsilon_0$

TOMAMOS $\delta = \frac{1}{n} > 0$ CON $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \exists q_n \in A / \|q_n - p\| < \frac{1}{n}$ PERO $|f(q_n) - f(p)| \geq \varepsilon_0$

ENTONCES: $0 \leq \|q_n - p\| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \to 0, \quad \frac{1}{n} \to 0$$

POR SANDWICH $\Rightarrow \|q_n - p\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$

ADEMÁS $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(q_n) - f(p)| \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow |f(q_n) - f(p)| \not\to 0$

$\Rightarrow f(q_n) \not\to f(p)$

Abs! PUES CONTRADICE LA HIPÓTESIS 2)

LUEGO, f ES CONTINUA EN P.

TEOREMA (CONSERVACIÓN DE SIGNO):

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

a) SI $p \in A$, $p_n \xrightarrow[n]{} p$, $f(p_n) \leq 0 \ \forall n$
$\Rightarrow f(p) \leq 0$

a') SI $p \in A$, $p_n \xrightarrow[n]{} p$, $f(p_n) \geq 0 \ \forall n$
$\Rightarrow f(p) \geq 0$

b) SI $f(p) > 0$, $\exists \ r > 0$ TALQUE
SI $\underbrace{x \in A \text{ y } \|x - p\| < r}_{\text{"x cerca de p"}} \Rightarrow f(x) > 0$

b') SI $f(p) < 0$, $\exists \ r > 0$ TALQUE
SI $\underbrace{x \in A \cap B_r(p)}_{=} \Rightarrow f(x) < 0$

"x CERCA DE p"

DEM. DE a):

SUPONGAMOS QUE $f(p) > 0$ Y LLEGUEMOS A UNA CONTRADICCIÓN:

SI FUESE $f(p) > 0$, TOMO $\varepsilon = \frac{f(p)}{2} > 0$. $p_n \xrightarrow[n]{} p$ POR HIPÓTESIS, COMO f ES CONTINUA ENTONCES

$f(p_n) \xrightarrow[n]{} f(p)$

$\Rightarrow \exists \ n_0 \in \mathbb{N}$ TALQUE $\forall n \geq n_0$ $|f(p_n) - f(p)| < \varepsilon = \frac{f(p)}{2}$

LUEGO, $-\frac{f(p)}{2} < f(p_n) - f(p) < \frac{f(p)}{2} \quad \forall n \geq n_0$

$-\frac{f(p)}{2} + f(p) < f(p_n) - f(p) + f(p)$

$0 < \frac{f(p)}{2} < f(p_n) \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow f(p_n) > 0$ **Abs!** CONTRADICE LA HIPÓTESIS

$\Rightarrow$ DEBE SER $f(p) \leq 0$

(a' SALE ANÁLOGAMENTE)

DEM. DE b):

SUPONGAMOS QUE NO VALE b), ENTONCES $\forall r > 0 \ \exists \ x_r \in A$, $\|x_r - p\| < r$ y $f(x_r) \leq 0$

$f(p) > 0$

TOMANDO $r = \frac{1}{n} > 0$

EN PARTICULAR $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \ x_n \in A$ TALQUE $\|x_n - p\| < \frac{1}{n}$ y $f(x_n) \leq 0$

TENGO $(x_n)_n \subseteq A$, $x_n \neq p$, $x_n \xrightarrow[n]{} p$ y $f(x_n) \leq 0$ $\underset{\text{POR a)}}{\Rightarrow}$ $f(p) \leq 0$ **Abs!** CONTRADICE LA HIPÓTESIS

$\Rightarrow \exists \ r > 0$ TALQUE $f(x) > 0$ SI $x \in A \cap B_r(p)$

(b' SALE ANÁLOGAMENTE)

Si una sucesión no está acotada (por ej. superiormente), entonces podemos extraer de ella una subsucesión creciente. Análogamente, si no está acotada inferiormente, podemos extraer una sucesión decreciente.
Generalizando:

Proposición 1.1.28:

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ que es monótona.

Dem:

Para armar la subsucesión, nos interesan los términos de la sucesión que son más grandes que todos los términos que les siguen, es decir los a_n tales que $a_n \geq a_k$ para todo $k \geq n$. Estos son <u>términos dominantes</u> (ó cumbre). Hay dos casos:

↳ Hay infinitos términos dominantes:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots \quad \text{con} \quad n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Por ser todos dominantes,

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots$$

Hemos construido una subsucesión decreciente.

↳ Hay finitos términos dominantes: (ó ninguno)

Por ser finitos hay uno que es el último (es decir de allí en adelante ningún término de la sucesión es dominante).

Tomemos a_{n_1} el primer término de la sucesión que viene después de este último dominante (si no hay ningún dominante en la sucesión tomamos $n_1 = 1$)

Existe entonces más adelante algún $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} > a_{n_1}$

(existe sino a_{n_1} sería dominante!)

Así siguiendo vamos hallando $n_k > \dots > n_2 > n_1$ tales que $a_{n_k} > \dots > a_{n_2} > a_{n_1}$

En este caso hemos construido una subsucesión creciente.

COROLARIO 1.1.29 (BOLZANO - WEIERSTRASS):

SEA $\{a_n\}$ UNA SUCESIÓN ACOTADA (SUP. Ó INF.) DE NÚMEROS REALES. ENTONCES EXISTE UNA SUBSUCESIÓN $\{a_{n_k}\}$ DE $\{a_n\}$ QUE ES CONVERGENTE.

DEM:

POR LA PROPOSICIÓN PREVIA, PODEMOS EXTRAER DE $\{a_n\}$ UNA SUBSUCESIÓN MONÓTONA (QUE ESTÁ ACOTADA POR ESTAR ACOTADA LA ORIGINAL)

POR LA PROPOSICION 1.1.26, ÉSTA SUBSUCESIÓN TIENE A SU VEZ UNA SUBSUCESIÓN CONVERGENTE, LA CUAL NO ES MÁS QUE UNA SUBSUCESIÓN DE LA SUCESIÓN ORIGINAL. $\square$

DEFINICIÓN 1.1.30:

UNA SUCESIÓN $\{a_n\}$ DE NÚMEROS REALES TIENDE A $+\infty$ SI PARA TODO $M > 0$ EXISTE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALQUE $n \geq n_0$ IMPLICA $a_n > M$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

ES DECIR QUE PARA CUALQUIER COTA QUE A MÍ SE ME OCURRA, TODOS LOS TÉRMINOS DE LA SUCESIÓN SON MÁS GRANDES QUE ESA COTA A PARTIR DE UN n_0

ANÁLOGAMENTE, DECIMOS QUE $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ SI $\forall\ M < 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ TALQUE $n \geq n_0$ IMPLICA $a_n < M$

POR LA PROP. 1.1.26 ESTA SUBSUCESIÓN TIENE LIM. (QUE COINCIDE CON EL SUP.)

ES DECIR CONVERGE

DEM B-W

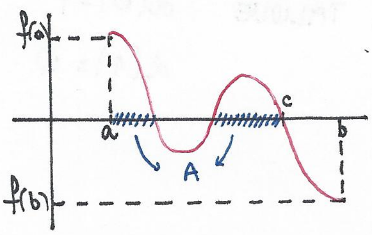
TEOREMA 2.3.8 (BOLZANO): $\boxed{\mathbb{R}}$

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ES CONTINUA Y $f(a)\cdot f(b)<0$,

ENTONCES EXISTE $c\in(a,b)$ TAL QUE $f(c)=0$

DEM:

SUP. QUE $f(a)>0$ Y $f(b)<0$ (EL OTRO CASO ES SIMILAR)



$A=\{x\in[a,b]\ :\ f(x)>0\}\subseteq[a,b]$

$A\neq\emptyset$ $(a\in A)$, A ACOTADO SUPERIORMENTE $(a\leq x\leq b)$

SEA $c=\sup(A)\in\mathbb{R}$, $c\leq b$

$\exists\ (x_n)_n\subseteq A$ TALQUE $x_n \xrightarrow[n]{} c$ (TIENDE Y ES CRECIENTE) (EXISTE UNA SUCESIÓN DE ELEMENTOS DE A QUE TIENDEN AL SUPREMO)

$f(x_n)>0\ \forall n$ PUES $x_n\in A$

EN PARTICULAR $f(x_n)\geq 0\ \ \forall n$ $\Rightarrow$ $f(c)\geq 0$

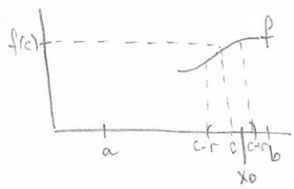
$x_n\xrightarrow[n]{} c$ — f CONTINUA EN C

> f CONT. EN P:
> Si $\{x_k\}$ ES UNA SUCESIÓN TALQUE $x_k\xrightarrow[k]{} P$ EN A
> Y $f(x_k)\leq 0$ ($\geq$) $\forall k\in\mathbb{N}$
> $\Rightarrow f(P)\leq 0$ ($\geq$)

VEAMOS QUE $f(c)=0$

SI NO LO FUERA $f(c)>0$

COMO f CONTINUA $\Rightarrow$ POR TEO. DE CONSERVACIÓN DE SIGNO, $f(x)>0$ PARA x "CERCA" DE C



OSEA

$\exists\ r>0$ TALQUE $c-r<x<c+r\ \Rightarrow f(x)>0$

TOMAMOS x_0 TALQUE $c<x_0<c+r\ \Rightarrow\ f(x_0)>0\ \Rightarrow\ x_0\in A$

PERO $c=\sup(A)<x_0\in A$

<u>Abs!</u> $(\sup(A)\geq a\ \ \forall a\in A)$

$\Rightarrow$ DEBE SER $f(c)=0$

TEOREMA 2.3.9 (BOLZANO): $\boxed{\mathbb{R}^n}$

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

SUPONGAMOS QUE EXISTEN $P, Q \in A$ TALES QUE $f(P) < 0$ y $f(Q) > 0$

SI A ES ARCONEXO y f ES CONTINUA, ENTONCES EXISTE $R \in A$ TALQUE $f(R) = 0$

DEM:

COMO A ES ARCOCONEXO $\exists\ \alpha: [0,1] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ CONTINUA TALQUE $\alpha(0) = P$, $\alpha(1) = Q$

SEA $g = f \circ \alpha$

$g: [0,1] \to \mathbb{R}$, g ESTÁ BIEN DEFINIDA y ES CONTINUA

$$g(0) = f(\alpha(0)) = f(P) \underset{\text{POR HIPOT.}}{<} 0$$

$$g(1) = f(\alpha(1)) = f(Q) > 0$$

LUEGO POR BOLZANO EN $\mathbb{R}$ $\exists\ c \in (0,1)$ TALQUE $g(c) = 0$

TOMO $R = \alpha(c) \in A$

$$\Rightarrow f(R) = f(\alpha(c)) = g(c) = 0$$

COROLARIOS 2.3.10:

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA. SUPONGAMOS QUE A ES ARCOCONEXO. ENTONCES:

1) DADOS $P, Q \in A$, f TOMA TODOS LOS VALORES INTERMEDIOS ENTRE $f(P)$ y $f(Q)$

INTERVALO $[f(P), f(Q)] \subseteq Im f$

VER DEMO EN CUADERNO LAROTONDA

ESTÁ MUY BUENA

2) SEA $P \in A$, $Q \in \bar{A}$ SI $\lim_{x \to Q} f(x) = L$

y $f(P) < L$ $\Rightarrow [f(P), L) \subset Im f$

TEOREMA 2.3.11 (WEIERSTRASS):

SEA $A \subseteq \mathbb{R}^n$ UN COMPACTO Y f CONTINUA EN A.

ENTONCES EXISTEN $m, M \in \mathbb{R}$ TALQUE

$$\forall x \in A \quad m \leq f(x) \leq M$$

(Im(f) ESTÁ ACOTADA)

MÁS AÚN EXISTEN $P_m, P_M \in A$ TALES QUE

$$f(P_m) = \min\{f(x) : x \in A\} \qquad f(P_M) = \max\{f(x) : x \in A\}$$

(f ALCANZA EXTREMOS EN A)

Obs:

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ COMPACTO Y $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$

$\rightarrow \exists\ P \in A$ Y $\{P_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ QUE CONVERGE A P

(TODA SUCESIÓN DENTRO DE UN COMPACTO ADMITE SUBSUCESIÓN CON LÍMITE EN EL COMPACTO)

DEM:

VEAMOS QUE f ESTÁ ACOTADA SUPERIORMENTE (ANÁLOGO VER QUE ES ACOTADA INFERIORMENTE)

SUPONGAMOS QUE NO ES ACOTADA:

DADO $k \in \mathbb{N}$, $\exists\ \{P_k\} \in A$ TQ $f(P_k) \geq k$

COMO A ES COMPACTO $\exists\ \{P_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ SUBSUCESIÓN TALQUE $P_{k_j} \longrightarrow P \in A$

$$\Rightarrow \lim_{j \to +\infty} f(P_{k_j}) = f(P) \quad (f \text{ CONTINUA})$$

POR OTRO LADO $f(P_{k_j}) \geq k_j$

LUEGO $\lim_{j \to +\infty} f(P_{k_j}) = +\infty$

Abs!

VEAMOS QUE f ALCANZA UN MÁXIMO EN A (ANÁLOGO VER EL MÍNIMO):

SEA $S = \sup_{x \in A} f(x)$

SEA $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ TALQUE $f(P_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} S$ ⊛ [PROPOSICIÓN 1.1.22 (HOJA 2)]

COMO A ES COMPACTO, EXISTE $\{P_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ SUBSUCESIÓN TALQUE $P_{k_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} P \in A$

1) $f(P_{k_j}) \xrightarrow[j \to \infty]{} f(P)$ (f CONTINUA)

2) POR ⊛ $f(P_{k_j}) \xrightarrow[j \to \infty]{} S$ POR UNICIDAD DEL LÍMITE $f(P) = S$ $\Rightarrow$ EN P SE ALCANZA UN MÁXIMO.

DERIVADAS:

DECIMOS QUE f ES DERIVABLE EN x_0 SI

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

LA RECTA TANGENTE A LA GRÁFICA DE f QUE PASA POR $(x_0, f(x_0))$

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

TEOREMA 3.2.10:

FERMAT:

SEA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

SI f ES DERIVABLE EN $c \in (a,b)$ Y c ES UN EXTREMO LOCAL DE f

$$\Rightarrow f'(c)=0$$

DEM.

COMO c ES EXTREMO LOCAL $\exists\, r>0$ TALQUE $\forall x \in B_r(c)$ → $f(x)\leq f(c)$ (MÁX. LOCAL) / → $f(x)\geq f(c)$ (MÍN. LOCAL)

SUPONGAMOS QUE c ES UN MÁXIMO LOCAL DE f (OSEA $f(x)\leq f(c)$):

CALCULEMOS $f'(c)$ USANDO LA DEFINICIÓN, CON LOS LÍMITES LATERALES:

SI $x=c+h$: $f(c+h)\leq f(c)$

$f(c+h)-f(c)\leq 0$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(c)\leq 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(c)\geq 0$$

COMO AMBOS LATERALES DEBEN SER IGUALES A $f'(c)$, LA ÚNICA POSIBILIDAD ES $f'(c)=0$

PROPOSICIÓN 3.2.11 (CAUCHY):

SEAN f, g CONTINUAS EN $[a,b]$ Y DERIVABLES EN (a,b), ENTONCES EXISTE $c \in (a,b)$ TALQUE

$$f'(c)\,(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$$

DEM:

$(f(x)-c_1)(g(b)-g(a)) \qquad (g(x)-c_2)(f(b)-f(a)) \qquad c_1, c_2$ ctes.

CONSIDEREMOS $h(x) = (f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) - (g(x)-g(a))(f(b)-f(a))$

h ES CONTINUA EN $[a,b]$ Y DERIVABLE EN (a,b)

$$h(a) = 0 = h(b)$$

POR ROLLE EXISTE $c \in (a,b)$ TALQUE $h'(c) = 0$

$$h'(x) = f'(x)(g(b)-g(a)) - g'(x)(f(b)-f(a))$$

$$0 = h'(c) = f'(c)(g(b)-g(a)) - g'(c)(f(b)-f(a))$$

$$f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$$

Obs:

Si $g'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a,b) \Rightarrow g(b) \neq g(b)$ POR ROLLE

Y EN ESTE CASO
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

PROPOSICIÓN 3.2.12 (L'HOSPITAL):

SEAN f, g FUNCIONES DERIVABLES EN UN ENTORNO DEL PUNTO $x=a$ (EXCEPTUANDO TAL VEZ EL MISMO PUNTO $x=a$). SUPONGAMOS QUE $g'(x) \neq 0$ PARA TODO $x \neq a$ Y QUE

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Si EXISTE EL LÍMITE
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

ENTONCES EXISTE
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

DEM:

PRIMERO OBSERVEMOS QUE PODEMOS EXTENDER A LAS FUNCIONES f, g AL PUNTO $x=a$ COMO $f(a)=g(a)=0$ Y QUEDAN CONTINUAS POR HIPÓTESIS.

ANALICEMOS $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ (EL OTRO CASO ES ANÁLOGO)

COMO f Y g ERAN DERIVABLES EN UN ENTORNO DE a, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE f Y g SON CONTINUAS EN $[a, a+\delta]$ Y DERIVABLES EN $(a, a+\delta)$

Obs: AFIRMO QUE g NO SE ANULA EN $(a, a+\delta)$

SI SE ANULARA:

SUP. $\exists\ x_0 \in (a, a+\delta)$ TALQUE $g(x_0)=0$

$g(a)=g(x_0)=0$ POR ROLLE HABRÍA $x_1 \in (a, x_0)$ TALQUE $g'(x_1)=0$

ABS! ⟶ POR HIPÓTESIS $g'(x) \neq 0\ \forall x \neq a$

TOMEMOS $x \in (a, a+\delta)$ Y APLIQUEMOS EL TEOREMA DE CAUCHY EN $[a, x]$ PARA OBTENER QUE EXISTE $c \in (a, x)$ DONDE

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - \overset{=0}{f(a)}}{g(x) - \underset{=0}{g(a)}} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

SI MUEVO EL x HACIA a, COMO c ESTÁ EN EL MEDIO TAMBIÉN VA A TENDER A a.

SI HACEMOS TENDER $x \to a^+$, SE DEDUCE QUE $c \to a^+$ TAMBIÉN, CON LO CUAL LA EXPRESIÓN DE LA IZQUIERDA TIENDE A L POR HIPÓTESIS.

LUEGO LA EXPRESIÓN DE LA DERECHA TAMBIÉN TIENDE A L.

Derivada direccional:

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^\circ$, $v \in \mathbb{R}^n$ $\|v\| = 1$

Si existe $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(P+t.v) - f(P)}{t}$ lo denominamos derivada direccional de f en P en la dirección v. Si existe se denota $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$

Derivadas parciales:

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^\circ$, $e_j = (0, \dots, \underbrace{1}_{j}, \dots, 0)$ [1 en la coord. j, 0 en todos los demás]

La j-ésima derivada parcial de f en P es la derivada direccional de f en P en la dirección e_j. Se la nota $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{t \to 0} \frac{f(P+t.e_j) - f(P)}{t}$$

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, la derivada parcial respecto a x será:

$v = e_1 = (1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P+t(1,0)) - f(P)}{t}$$

Def. i):

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $F: A \to \mathbb{R}$, $P \in A$

Decimos que F es diferenciable en P $\iff$ $\exists$ T transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \to P} \frac{|f(x) - f(P) - T(x-P)|}{\|x-P\|} = 0$$

¿Qué pinta tiene $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

$T = (t_1, \dots, t_n)$

$$T.x = (t_1, \dots, t_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t_1.x_1 + t_2.x_2 + \dots + t_n.x_n = \langle (t_1, \dots, t_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle$$

Afirmo que si F es diferenciable en P

$\Rightarrow$

$$T = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(P), \frac{\partial F}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) \right)$$

DEF. ii):

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^\circ$. SI EXISTEN LAS DERIVADAS PARCIALES DE f EN P, DECIMOS QUE f ES DIFERENCIABLE EN P SI

$$\lim_{x \to P} \frac{\left| f(x) - f(P) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)(x_1 - P_1) - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)(x_n - P_n) \right|}{\|x - P\|} = 0$$

EN ESE CASO A LA FUNCIÓN $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \cdot x_1 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)(x_n)$ LA DENOMINAMOS DIFERENCIAL DE f EN P Y LO ANOTAMOS Df_P

EN $\mathbb{R}^2$:

$F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A ABIERTO, $P \in A$, $P = (P_1, P_2)$

DECIMOS QUE F ES DIFERENCIABLE EN P SII:

$$\lim_{(x_1, x_2) \to (P_1, P_2)} \frac{\left| F(x_1, x_2) - F(P_1, P_2) - \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(P_1, P_2)(x_1 - P_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P_1, P_2)(x_2 - P_2) \right| \right.}{\|(x_1, x_2) - (P_1, P_2)\|} = 0$$

POR EJ:

EL CANDIDATO A PLANO TG. A F EN (P_1, P_2) ES

$\pi: z = F(P_1, P_2) + F_{x_1}(P)(x_1 - P_1) + F_{x_2}(P)(x_2 - P_2)$

ES EL PLANO TG. SI F ES DIF. EN P.

DEF.'s y Obs's:

- SI F ES DIFERENCIABLE EN P $\underset{\cancel{\Leftarrow}}{\Rightarrow}$ $\forall j$ EXISTE $\frac{\partial F}{\partial x_j}(P)$

- GRADIENTE DE F EN P:

$$\nabla F(P) := \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(P), \frac{\partial F}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) \right)$$

- LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE A F EN P:

$$x_{n+1} = F(P) + \langle \nabla F, x - P \rangle$$

- SI F ES DIFERENCIABLE EN P, LA DIFERENCIAL DE F EN P ES UNA T.L. DE $\mathbb{R}^n$ A $\mathbb{R}$

$$DF_P(Y) = \langle \nabla F(P), Y \rangle = \sum_{i=1,\dots,n} F_{x_i}(P) \cdot Y_i$$

- SE TIENE, POR LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ,

$$|DF_P(x)| = |\langle \nabla F(P), x \rangle| \leq \|\nabla F(P)\| \cdot \|x\|$$

Teorema:

Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^{\circ}$

Si F es diferenciable en $P \Rightarrow F$ es continua en P

Dem:

Como F es diferenciable en P sabemos que:

$$\lim_{x \to P} \frac{|F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x-P \rangle|}{\|x-P\|} = 0$$

Sea $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|x-P\| < \delta$

$$\Rightarrow \frac{|F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x-P \rangle|}{\|x-P\|} < 1$$

Qvq $F(x) \xrightarrow[x \to P]{} F(P)$

Luego, si $0 \leq \|x-P\| < \delta$

$$\Rightarrow |F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x-P \rangle| < \|x-P\|$$

Por otro lado:

$$|F(x) - F(P)| = |F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x-P \rangle + \langle \nabla F(P), x-P \rangle|$$

$$\underset{\ddagger\Delta}{\leq} |F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x-P \rangle| + \underbrace{|\langle \nabla F(P), x-P \rangle|}_{\leq \text{ C-S}}$$

$$\underset{0<\|x-P\|<\delta}{\leq} \|x-P\| + \|\nabla F(P)\| \cdot \|x-P\|$$

Entonces, si $0 < \|x-P\| < \delta$

$$|F(x) - F(P)| \leq (1 + \|\nabla F(P)\|) \|x-P\|$$

Tomando límite cuando $x \to P$:

$$\lim_{x \to P} |F(x) - F(P)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to P} F(x) = F(P)$$

$\Leftrightarrow F$ es continua en P

TEOREMA:

SEA $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^\circ$.

SI F ES DIFERENCIABLE EN P ENTONCES EXISTEN TODAS LAS DERIVADAS DIRECCIONALES DE F EN P Y ADEMÁS VALE: $\frac{\partial F}{\partial v}(P) = \langle \nabla F(P), v \rangle \quad \forall\ v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$

DEM:

COMO F ES DIFERENCIABLE EN P SABEMOS QUE:

$$\lim_{x \to P} \frac{|F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x - P \rangle|}{\|x - P\|} = 0$$

COMO ESTE LÍMITE EXISTE, EXISTE EN PARTICULAR EL LÍMITE COMPONIENDO CON CUALQUIER CURVA QUE TENGA LÍMITE P.

EN PARTICULAR SI PONEMOS $X = P + t.V$ (CON t SUFICIENTEMENTE CHICO PARA QUE $X \in A$) SE TIENE:

$$\lim_{t \to 0} \frac{|F(P+t.V) - F(P) - \langle \nabla F(P), t.V \rangle|}{\|t.V\|} = 0$$

$\|t.V\| = \|t\|.\|V\| = |t|$

$\langle A, 2B \rangle = 2 \langle A, B \rangle$

$$\lim_{t \to 0} \frac{|F(P+t.V) - F(P) - t. \langle \nabla F(P), V \rangle|}{|t|} = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{F(P+t.V) - F(P) - t. \langle \nabla F(P), V \rangle}{t} \right| = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{F(P+tV) - F(P)}{t} - \frac{\cancel{t} \langle \nabla F(P), V \rangle}{\cancel{t}} \right| = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(P+tV) - F(P)}{t} - \langle \nabla F(P), V \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{F(P+tV) - F(P)}{t}}_{\frac{\partial F}{\partial v}(P)} = \langle \nabla F(P), V \rangle$$

COMO EXISTEN TODAS LAS DERIVADAS DIRECCIONALES, EN PARTICULAR EXISTEN TODAS LAS DERIVADAS PARCIALES.

Proposición: (Observación 3.2.6 pág. 66)

Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^\circ$.

Si F es diferenciable en P entonces $\nabla F(P)$ es la dirección de mayor crecimiento de F en P.

Dem:

Como F es diferenciable en P, tomando v de norma unitaria:

$$\frac{\partial F}{\partial v}(P) = \langle \nabla F(P), v \rangle \leq |\langle \nabla F(P), v \rangle| \underset{\text{des C-S}}{\leq} \|\nabla F(P)\| . \underbrace{\|v\|}_{=1} = \|\nabla F(P)\|$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial v}(P) \leq \|\nabla F(P)\| \quad \forall v$$

Lo que nos muestra que la derivada direccional a lo sumo vale $\|\nabla F(P)\|$

Por otro lado, si $\nabla F(P) \neq 0$, tomando $v_p = \dfrac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|}$ se tiene:

→ gradiente de F en P normalizado, un versor con la misma dirección que $\nabla F(P)$

$$\frac{\partial F}{\partial v_p}(P) = \left\langle \nabla F(P), \frac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\|\nabla F(P)\|} \langle \nabla F(P), \nabla F(P) \rangle = \frac{\|\nabla F(P)\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|\nabla F(P)\|}} = \|\nabla F(P)\|$$

$\Rightarrow$ En $v_p = \dfrac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|}$ hay máximo crecimiento.

$$\underbrace{\left|\frac{\partial F}{\partial v}(P)\right|}_{} \leq \|\nabla F(P)\|$$

Este alcanzará máximo valor cuando sea $= \|\nabla F(P)\|$

TEOREMA:

SEA $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Y $P \in A^\circ$. SI EXISTEN TODAS LAS DERIVADAS PARCIALES $\frac{\partial F}{\partial x_j}(P)$ $\forall j = 1, \dots, n$ Y SON CONTINUAS EN UN ENTORNO DE $P \Rightarrow F$ ES DIFERENCIABLE EN P.

OSEA,

SI F ES C^1 EN UN ENTORNO DE $P \Rightarrow F$ ES DIFERENCIABLE.

Obs:
SI f ES DERIVABLE EN UN ENTORNO DE x PARA h SUFICIENTEMENTE CHICO, POR LAGRANGE:

$$f(x+h) - f(x) = f'(c_h) \cdot h \quad \text{DONDE } c_h \in int(x, x+h)$$

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ $c \in (a,b)$

$a = x$

$b = x+h$

DEM:

QUEREMOS VER QUE $\lim_{h \to 0} \frac{|F(P+h) - F(P) - \langle \nabla F(P), h \rangle|}{\|h\|} = 0$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left|F(P+h) - F(P) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(P) \cdot h_j\right|}{\|h\|} = 0$$

$$F(P+h) - F(P) = F(p_1+h_1, p_2+h_2, \dots, p_n+h_n) - F(p_1, \dots, p_n)$$

$$= \boxed{F(p_1+h_1, p_2+h_2, \dots, p_n+h_n) - F(p_1, p_2+h_2, \dots, p_n+h_n)}$$

$$+ F(p_1, p_2+h_2, \dots, p_n+h_n) - F(p_1, p_2, p_3+h_3, \dots, p_n+h_n)$$

$$+ F(p_1, p_2, p_3+h_3, \dots, p_n+h_n) - F(p_1, p_2, p_3, p_4+h_4, \dots, p_n+h_n)$$

$c_1 \in int(p_1+h_1, p_1)$

$+ \dots$

$$+ F(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}+h_{n-1}, p_n+h_n) - F(p_1, \dots, p_{n-1}, p_n)$$

USANDO LAGRANGE PARA 1 VARIABLE

$$\uparrow$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1}(c_1) \cdot h_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(c_2) \cdot h_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(c_n) \cdot h_n$$

$c_1 = (a_1, p_2+h_2, \dots, p_n+h_n)$ $\quad a_1 \in int(p_1, p_1+h_1)$

$c_2 = (p_1, a_2, p_3+h_3, \dots, p_n+h_n)$ $\quad a_2 \in int(p_2, p_2+h_2)$

$\vdots$

$c_n = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, a_n)$ $\quad a_n \in int(p_n, p_n+h_n)$

ENTONCES, TENÍAMOS: 11

$$\frac{\left|F(P+h) - F(P) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(P).h_j\right|}{\|h\|} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(c_j).h_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(P).h_j}{\|h\|} =$$

$$\frac{\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}(c_1)h_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(c_2)h_2 - \frac{\partial F}{\partial x_1}(P_1)h_1 - \frac{\partial F}{\partial x_2}(P_2)h_2\right|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}(c_1)h_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}(P_1)h_1\right|}{\|h\|} + \frac{\left|\frac{\partial F}{\partial x_2}(c_2)h_2 - \frac{\partial F}{\partial x_2}(P_2)h_2\right|}{\|h\|}$$

$$= \frac{\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(c_j) - \frac{\partial F}{\partial x_j}(P)\right).h_j\right|}{\|h\|} \underset{\neq \Delta}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}(c_j) - \frac{\partial F}{\partial x_j}(P)\right|}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} . \frac{|h_j|}{\|h\|} \leq 1 \rightarrow |h_j| \leq \|h\|$$

Si $h \to 0 \Rightarrow c_j \to P$

COMO $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)$ SON CONTINUAS EN UN ENTORNO DE $P \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\partial F}{\partial x_j}(c_j) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(P)$

LUEGO,

$$\lim_{h\to 0} \frac{|F(P+h) - F(P) - \langle \nabla F(P), h\rangle|}{\|h\|} = 0$$

$\Rightarrow F$ ES DIFERENCIABLE EN P

TEOREMA DE LAGRANGE EN $\mathbb{R}^n$: (PROPOSICIÓN 3.3.1 PAG. 80)

SEA $f: B_r(P) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DIFERENCIABLE. ENTONCES PARA TODO $Q, R \in B_r(P)$

ABIERTO CONVEXO

EXISTE UN PUNTO P_0 EN EL SEGMENTO QUE UNE Q CON R TAL QUE

$$f(Q) - f(R) = \langle \nabla f(P_0), Q - R \rangle$$

DEM:

SEA $g(t) = R + t(Q-R)$ → PARAMETRIZACIÓN DEL SEGMENTO QUE UNE Q CON R

$g(0) = R$

$g(1) = Q$

CONSIDEREMOS $h(t) = f(g(t))$

Y A ÉSTA LE VOY A APLICAR LAGRANGE EN $\mathbb{R}$

ENTONCES VEO QUE CUMPLA LAS HIPÓTESIS:

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONT EN $[0,1]$ DERIV EN $(0,1)$

$h(t)$ ESTÁ DEFINIDA EN $[0,1]$ Y ES DIFERENCIABLE EN $(0,1)$ POR LA REGLA DE LA CADENA.

MÁS AÚN, $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ ES UNA FUNCIÓN CONTINUA PUES f ES CONTINUA POR SER DIFERENCIABLE.

ENTONCES POR LAGRANGE EN $\mathbb{R}$:

EXISTE $c \in (0,1)$ TAL QUE $h(1) - h(0) = h'(c)(1-0)$

$$f(g(1)) - f(g(0)) = h'(c)$$

$$f(Q) - f(R) = h'(c)$$

$h'(c) = Df|_{g(c)} \cdot Dg|_c$

$Dg|_c = g'(c)$

$g(t) = R + t(Q-R)$

$g'(t) = Q - R$

$h'(c) = \nabla f(g(c)) \cdot (Q-R)$

$\Rightarrow g'(c) = Q - R$

$$\Rightarrow f(Q) - f(R) = \langle \nabla f(\underbrace{g(c)}_{=P_0}), Q - R \rangle$$

Teorema de Fermat en $\mathbb{R}^n$:

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, A abierto. Supongamos que $P \in A$ es un extremo local de f. Entonces $Df_P = \nabla f(P) = 0$

Equivalentemente todas las derivadas parciales de f se anularán en P

Dem:

Supongamos que P es un máximo local de f (el otro caso es análogo)

Entonces, sea $r > 0$ / $B_r(P) \subseteq A$ y si $x \in B_r(P)$

$$\Rightarrow f(P) \geq f(x)$$

Sea $1 \leq j \leq n$:

Consideremos la función auxiliar $g(t) = f(P + t.e_j)$ — e_j vector de la base canónica.

Entonces $g: (-r, r) \to \mathbb{R}$ es una función derivable que tiene un máximo local en $t = 0$

↳ por ser comp. de dif.

pues $g(0) = f(P) \geq f(P + t.e_j) = g(t)$

El dominio de g es $(\;)$ para que toda la imagen de g me caiga dentro de la bola $B_r(P)$ (y así sé que cualquier cosa de ahí adentro de f será más chica que $f(P)$)

Por Fermat en $\mathbb{R}$ debe ser

$$g'(0) = 0 = \lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(P + he_j) - f(P)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_j}(P)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(P) = 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow Df_P = \nabla f(P) = 0$$

Polinomio de Taylor

En $\mathbb{R}$:

Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y sea $f \in C^n(I)$.
El polinomio de Taylor de grado n de f en el punto $a \in I^\circ$ es el único polinomio $P(x)$ de grado n tal que, para todo $k \in \{0,1,\dots,n\}$ verifica:

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

La expresión de P es:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

Además para todo $x \in I$ vale que:

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

Donde $R(x) = f(x) - P(x)$ es el resto, que verifica: $\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$

Teorema: Taylor con resto de Lagrange:

Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable.
Entonces dados $x, a \in I$, existe c estrictamente entre x y a tal que:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}}_{P(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{R(x)}$$

Dem:

Fijemos $x, a \in I$, consideremos la función auxiliar $g: I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(t) = f(x) - \underbrace{f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!} - \dots - \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!}} - \frac{K(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

K es una constante apropiada tal que $g(a) = 0$ Intentaremos hallar el valor de K:

Como $g(t) = f(x) - P_f(t)$ entonces g es una función derivable de la variable t ($t \in (a,x)$) y continua en $[a,x]$. Además, como $g(x) = 0 = g(a) \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$ existe c entre x y a tal que $g'(c) = 0$

$$g'(t) = \left(f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2} - \frac{K(x-t)^3}{3!}\right)' \qquad -\frac{K}{3!}3(x-t)^2(-1) = -\frac{3}{6}K(x-t)^2$$

Por ejemplo, si $n=2$:

$$g'(t) = -\cancel{f'(t)} - \cancel{f''(t)(x-t)} + \cancel{f'(t)} - \frac{f'''(t)(x-t)^2}{2} + \cancel{f''(t)(x-t)} + \frac{K}{2}(x-t)^2$$

$$(f'(t)(x-t))' = f''(t)(x-t) + f'(t)(x-t)(-1)$$

$$g'(t) = \frac{-f^{(3)}(t)(x-t)^2}{2} + \frac{K(x-t)^2}{2}$$

$$0 = g'(c) = \left[-f^{(3)}(c) + K \right] \cdot \frac{(x-c)^2}{2}$$

$$\iff \quad -f^{(3)}(c) + K = 0$$

$$\iff \quad K = f^{(3)}(c)$$

EN GENERAL , $K = f^{(n+1)}(c)$

ENTONCES AHORA, EVALUANDO g EN EL PUNTO a:

$$\underset{0}{\overset{\shortparallel}{g(a)}} = f(x) - f(a) - \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} - f'(a)(x-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$c \in \text{int}(x,a)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Teorema (Taylor en $\mathbb{R}^n$)

Con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo: Si dados $P, Q \in A$ $\Rightarrow$ segmento$[P,Q] \subseteq A$

$\text{SEG}[P,Q] = \{P + t(Q-P) : t \in [0,1]\}$

Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A abierto convexo, F es $C^3(A)$

$P = (p_1, \dots, p_n) \in A$

$X = (x_1, \dots, x_n) \in A$

Se tiene:

$$F(x) = F(P) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)(x_i - p_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P)(x_j - p_j)(x_i - p_i) + R_P(x-P)$$

Más aún,

$$R_P(x-P) = \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(C)(x_i - p_i)(x_j - p_j)(x_k - p_k)$$

con C algún punto en el segmento entre x y P

y verifica que:

$$\lim_{x \to P} \frac{R_P(x-P)}{\|x-P\|^2} = 0$$

Obs: El pol. de Taylor de orden 1 de F es:

$$F(P) + \langle \nabla F(P), x - P \rangle = F(P) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)(x_i - p_i)$$

Dem:

Consideremos $X, P \in A$ y consideremos la función auxiliar $g(t) = F(P + t(x-P))$ que es C^3 en un entorno del intervalo $[0,1]$

Derivando obtenemos:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P + t(x-P))(x_i - p_i)$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P + t(x-P))(x_i - p_i)(x_j - p_j)$$

$$g'''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(P + t(x-P))(x_i - p_i)(x_j - p_j)(x_k - p_k)$$

Ver cálculos auxiliares.

AHORA UTILIZAMOS LA FÓRMULA DE TAYLOR EN $\mathbb{R}$ DE ORDEN 2 SOBRE g EN EL INTERVALO $[0,1]$ QUE NOS DICE:

$$g(1) = g(0) + g'(0)(1-0) + \frac{g''(0)}{2!}(1-0)^2 + \frac{g'''(c)(1-0)^3}{3!} \quad \text{CON } c \in (0,1)$$

REEMPLAZANDO SE TIENE:

$$F(x) = F(P) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)(x_i-P_i) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P)(x_i-P_i)(x_j-P_j)\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(\underbrace{P+c(x-P)}_{C})(x_i-P_i)(x_j-P_j)(x_k-P_k)\right)$$

$C = P + c(x-P)$ ES UN PUNTO EN EL SEGMENTO QUE UNE X CON P

$\square$

AHORA VEAMOS QUE $\lim_{x \to P} \frac{R_P(x-P)}{\|x-P\|^2} = 0$:

COMO F ES C^3 EN A, LAS DERIVADAS TERCERAS EXISTEN Y SON FUNCIONES CONTINUAS

$\left[\forall\ i,j,k \in \{1,\dots,n\}\ \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \text{ EXISTE Y ES CONTINUA EN } A\right]$

POR LO TANTO TOMANDO ALGÚN COMPACTO ALREDEDOR DE P, SON FUNCIONES ACOTADAS:

$\overline{B}_r(P) = \{ y \in \mathbb{R}^n \,/\, \|y-P\| \leq r \}$

LUEGO EXISTE $M > 0$ TALQUE : $\left|\frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right| \leq M \quad \forall\ Q \in \overline{B}_r(P)$

POR OTRO LADO TENIAMOS:

$$R_P(x-P) = \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c)(x_k-P_k)(x_j-P_j)(x_i-P_i)$$

SI $\|x-P\| < r \Rightarrow c \in \overline{B}_r(P)$

C ESTÁ ENTRE X Y P

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c)\right| \leq M$$

COMO $c \in \overline{B}_r(P)$

CÁLCULOS AUXILIARES PARA LA DEMO. DE TAYLOR EN $\mathbb{R}^n$:

SEA $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P, X \in A$

$$h(t) = g(P+t(X-P))$$

$$h'(t) = \langle \nabla g(P+t(X-P)), (X-P) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(P+t(X-P))(x_i - P_i)$$

$$h''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(P+t(X-P))(x_i-P_i) \right)' \underbrace{(t)}_{\text{EVALUADO EN } t} =$$

PARA RESOLVERLA, SUPONGO QUE $\underline{n=3}$, LUEGO SE PODRÁ GENERALIZAR FÁCILMENTE:

$$\left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P+t(X-P))(x_i-P_i) \right]' = \left[\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_1}(P+t(X-P))}(x_1-P_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P+t(X-P))(x_2-P_2) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(P+t(X-P))(x_3-P_3) \right]'$$

ANALIZO LA DERIVADA DE ESTO:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(P+t(X-P)) \right]' : \text{ USO REGLA DE LA CADENA LLAMANDO: }$$

$V = (V_1, V_2, V_3)$

$$g(V) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(V) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$h(t) = P + t(X-P) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

OTRA h NADA QUE VER CON AQUELLA

$P = (P_1, P_2, P_3)$
$X = (x_1, x_2, x_3)$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(P+t(X-P)) \right]' = Dg|_{(P+t(X-P))} \cdot Dh|_t = \langle \nabla g(P+t(X-P)), \underbrace{X-P}_{=(x_1-P_1),(x_2-P_2),(x_3-P_3)} \rangle$$

$$= \langle \nabla \frac{\partial F}{\partial x_1}(P+t(X-P)), X-P \rangle$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(P+t(X-P))(x_1-P_1) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(P+t(X-P))(x_2-P_2) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3}(P+t(X-P))(x_3-P_3)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_j}(P+t(X-P))(x_j-P_j)$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_j}(P+t(X-P))(x_j-P_j)$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P+t(X-P))(x_i-P_i) \right]' = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P+t(X-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j)$$

FÁCILMENTE SE PUEDE GENERALIZAR A $\mathbb{R}^n$:

$$h''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P+t(X-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j)$$

AHORA BUSCO $h'''(t)$:

$$h'''(t) = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P+t(x-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j)\right]' =$$

NUEVAMENTE, SUPONGO QUE $\underline{n=3}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P+t(x-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j)\right)' = \text{MIRO } \circledast$$

$$\circledast = \Bigg[\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j)\right)}_{\text{ANALIZO LA DERIVADA DE ESTO:}}(x_1-P_1) + \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j)\right)(x_2-P_2) + \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j)\right)(x_3-P_3)\Bigg]'$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j) = \underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(P+t(x-P))}}_{\text{AHORA ANALIZO LA DERIVADA DE ESTO:}}(x_1-P_1) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(P+t(x-P))(x_2-P_2) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3}(P+t(x-P))(x_3-P_3)$$

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(P+t(x-P))\right]' = \leadsto = \left\langle \nabla \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(P+t(x-P)),\ x-P \right\rangle$$

(MISMO PROCEDIMIENTO QUE ANTES)
[REGLA DE LA CADENA]

$$= \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_1}(P+t(x-P))(x_1-P_1) + \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(P+t(x-P))(x_2-P_2) + \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_3}(\ldots)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j)$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j)$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P+t(x-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j)\right]' = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(P+t(x-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j)(x_k-P_k)$$

GENERALIZANDO A $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(P+t(x-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j)(x_k-P_k) = h'''(t)$$

$\circledast = [A' + B' + C']$

A': $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_j \partial x_i}(P+t(x-P))(x_j-P_j)(x_i-P_i)$

B': $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x_2 \partial x_j \partial x_i}(P+t(x-P))(x_j-P_j)(x_i-P_i)$ ETC.