Principio de Arquímedes:

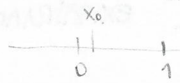
Si x es un número real, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$

(Permite comparar cualquier número con un natural)

Dem:

Sea $x \in \mathbb{R}$ y consideremos $\dot{X} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq x\}$

Si $x = x_0$ no hay $\mathbb{N}$ más grande



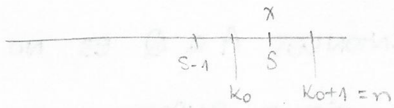
Si $\dot{X} = \phi$, en particular $1 > x$, luego se puede tomar $n = 1$

Si $\dot{X}$ es no vacío, como está acotado superiormente (por x) tiene un supremo $s = \sup \dot{X} \in \mathbb{R}$

Como $s-1$ no puede ser cota superior de $\dot{X}$ (pues s es la más chica)

debe existir $k_0 \in \dot{X}$ tal que $s-1 < k_0$

Tomando $n = k_0 + 1$ se tiene $n \in \mathbb{N}$ y además $n > s$



Por esto último $n \notin \dot{X}$, lo que nos dice que $n > x$ $\square$

Corolario:

Entre dos números reales distintos siempre hay un número racional.

Entre dos números reales distintos siempre hay un número irracional.

Dem:

Sean $a<b$ números reales. Entonces $b-a>0$ y en consecuencia $\frac{1}{b-a} > 0$

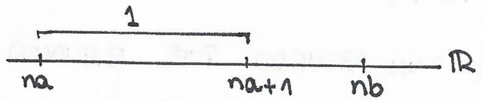
Existe por Principio de Arquímedes un número natural n tal que $n > \frac{1}{b-a}$

Se observa que:

$$nb = na + n(b-a) > na + 1$$

$nb = na + nb - na$

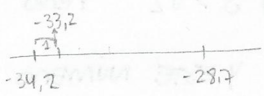
$n(b-a) > 1$



En consecuencia tiene que existir un número entero k entre na y nb.

Es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $na < k < nb$. Dividiendo por n se obtiene

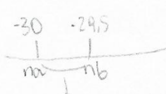
$a < \frac{k}{n} < b$ que nos dice que $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ está entre a y b.



La dist(na, nb) es mayor que 1

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ldots$

(si fuera < 1



no hay $k \in \mathbb{Z}$.

Ahora veamos que entre dos números reales siempre hay un irracional.

Volvemos a suponer $a<b$. Multiplicando por $\frac{1}{\sqrt{2}}$ obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a < \frac{1}{\sqrt{2}} b$$

Por lo anterior existe un número racional $\frac{k}{n}$ entre ellos, Es decir $\frac{1}{\sqrt{2}}a < \frac{k}{n} < \frac{1}{\sqrt{2}}b$

Multiplicando por $\sqrt{2}$ se obtiene $a < \frac{k}{n}\sqrt{2} < b$

Afirmamos que este número del medio es irracional:

Si fuera racional existirían $j, m \in \mathbb{Z}$ tales que $\frac{k}{n}\sqrt{2} = \frac{j}{m}$

Pero entonces $\sqrt{2} = \frac{j.n}{mk}$ sería racional, lo cual es falso. $\square$

Ejemplo 1.1.13:

Sea $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \text{ y } x > 0\}$

Entonces $A \subseteq \mathbb{Q}$ es no vacío y está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$, pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

Dem:

Que es no vacío es evidente pues $1 \in A$

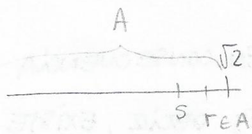
Por otro lado, $c = 2 \in \mathbb{Q}$ es una cota superior de A pues si $x \in A$ entonces $x^2 < 2 < 4$, con lo cual $|x| < 2$ y como $x > 0$ se tiene $x < 2$

Por último supongamos que existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s = \sup(A)$ (es una cota sup. y la más pequeña de ellas)

Hay tres posibilidades:

↳ $s = \sqrt{2}$ es imposible pues $\sqrt{2}$ no es racional

↳ $s < \sqrt{2}$ (y podemos suponer $s \geq 1$ pues $1 \in A$) Pero si tomamos r un número racional tal que $s < r < \sqrt{2}$ llegamos a un absurdo pues elevando al cuadrado obtenemos $r^2 < 2$ y como $r > 0$ (por ser mayor que s) se tiene $r \in A$. Esto contradice que s cota superior de A.



O sea hay elementos de A más grandes que s

↳ $s > \sqrt{2}$ Pero entonces volvemos a elegir $t \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{2} < t < s$ y este número es una cota superior de A en $\mathbb{Q}$ más pequeña que s, lo cual es imposible. (Esto contradice s cota sup. más chica)

EJEMPLO 1.1.15:

HALLAR EL SUPREMO s DEL CONJUNTO $A=\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. ¿$s \in A$?

AQUÍ EL CANDIDATO NATURAL ES $s=1$ (QUE <u>NO</u> ES UN ELEMENTO DE A)

ES UNA COTA SUPERIOR PUES $1-\frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

FALTA VER QUE ES LA MENOR.

DE NUEVO: SI HUBIERA OTRA COTA SUPERIOR, DIGAMOS $s' < 1$

TOMEMOS $n_0 \in \mathbb{N}$ TALQUE $n_0 > \frac{1}{1-s'}$ QUE SIEMPRE SE PUEDE POR EL PRINCIPIO DE ARQUIMEDES.

$n_0(1-s') > 1$

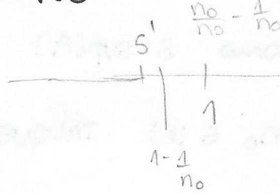
$n_0 - n_0 s' > 1$

$n_0 > n_0 s' + 1$

$\frac{n_0}{n_0} - \frac{1}{n_0} > s'$

ENTONCES DESPEJANDO SE OBTIENE $s' < \underbrace{1-\frac{1}{n_0}}$ LO QUE CONTRADICE QUE s' SEA COTA SUPERIOR.

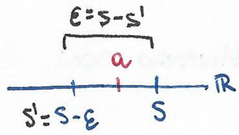
OSEA ENCONTRÉ UN $a \in A$ QUE ES MAYOR QUE EL SUPREMO <u>Abs!</u>



CARACTERIZACIÓN DEL SUPREMO:

PROP:

$A \subseteq \mathbb{R}$ ACOTADO SUPERIORMENTE Y s UNA COTA SUPERIOR



$s = \sup(A) \iff$ • DADO $\varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ QUE CUMPLE $s-\varepsilon < a \leq s$

• $s \geq a \quad \forall a \in A$

DEM:

$\Rightarrow$) SI NO EXISTE $a \in A$ TALQUE $s-\varepsilon < a \Rightarrow \forall a \in A$ PASA QUE $a \leq s-\varepsilon$

LUEGO $s-\varepsilon$ COTA SUPERIOR

COMO s ES SUPREMO $\Rightarrow s \leq s-\varepsilon$ <u>Abs!</u> LUEGO $\exists a \in A$ TALQUE $s-\varepsilon < a$

$\Leftarrow$) POR EL ABSURDO DE NUEVO, SI $\exists s'$ COTA SUPERIOR TALQUE $s' < s$

SEA $\varepsilon = s-s'$. POR HIPÓTESIS: $\exists a \in A$ TALQUE

$s-\varepsilon < a$

$s-(s-s') < a$

$s' < a$

<u>Abs!</u>

PUES s' COTA SUPERIOR

ÍNFIMO:

i ES EL ÍNFIMO DE A SII:

- $i \leq a \quad \forall a \in A$
- DADO $\varepsilon > 0$ EXISTE $a \in A$ TALQUE $i+\varepsilon > a$

PROPOSICIÓN 1.1.22:

SI $S = \sup(A)$ ENTONCES EXISTE UNA SUCESIÓN CRECIENTE $\{a_n\}$ DE ELEMENTOS DE A TALQUE $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$

DEM: DE 1.1.26

SEA $\varepsilon > 0$, QVQ' $\exists$ n_0 TALQUE SI $n \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{\overset{|a_n - S|}{\overset{\shortparallel}{|S - a_n|}} < \varepsilon}_{\text{DEF. DE } \lim_{n\to+\infty} a_n = S}$

COMO $a_n \leq S$ $\forall n$

$$\circledast \quad \underbrace{-\varepsilon < 0}_{\varepsilon > 0 \Rightarrow} < S - a_n \quad \forall n$$

SEA $S' = S - \varepsilon$

COMO $S = \sup(A)$ "$\exists$ UN ELEMENTO DE A A LA DERECHA DE $S - \varepsilon$"

ε

$S-\varepsilon$ S

OSEA

$\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ TALQUE $S - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n$

$\forall n \geq n_0$ (a_n CRECIENTE)

$S < a_n + \varepsilon$

$S - a_n < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad S - a_n \leq \varepsilon$

COMBINANDO CON $\circledast$ TENGO:

$$-\varepsilon < S - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$|S - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\square$

PROPOSICIÓN 1.1.26: DEM.

SI $\{a_n\}$ ES UNA SUCESIÓN CRECIENTE Y ACOTADA SUPERIORMENTE, ENTONCES SI $S = \sup\{a_n\}$ SE TIENE $\lim_{n\to+\infty} a_n = S$

Proposición 2.2.8

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sean $P \in \bar{A}$ y $L \in \mathbb{R}$.

Son equivalentes:

1) $\lim_{x \to P} f(x) = L$

2) $\forall$ sucesión $(P_n)_n \subseteq A$, $P_n \xrightarrow[n]{} P$, $P_n \neq P$

se tiene $f(P_n) \xrightarrow[n]{} L$ $\left[\lim_{n \to \infty} f(P_n) = L\right]$

Obs:

Si $\exists$ $P_n \xrightarrow[n]{} P$, $Q_n \xrightarrow[n]{} P$, $P_n, Q_n \neq P$

$f(P_n) \xrightarrow[n]{} L_1$
$\quad L_1 \neq L_2 \quad \Rightarrow \nexists \lim_{x \to P} f(x)$
$f(Q_n) \xrightarrow[n]{} L_2$

Dem: (de la Prop.)

$1) \Rightarrow 2)$:

Sea $(P_n)_n \subseteq A$, $P_n \xrightarrow[n]{} P$, $P_n \neq P$ $\forall n$

Qvq' $f(P_n) \xrightarrow[n]{} L$

Sea $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que $\left[|f(x) - L| < \varepsilon \text{ si } x \neq P, x \in A, |x - p| < \delta \right]$ porque suponemos que vale 1)

Reemplazo x por P_n:

$P_n \in A$ ✓, $P_n \neq P$ ✓, $\exists$ n_0 tal que $\|P_n - P\| < \delta$ ✓ si $n \geq n_0$ (pues $P_n \xrightarrow[n]{} P$)

$\Rightarrow |f(P_n) - L| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$

$\Rightarrow f(P_n) \xrightarrow[n]{} L$

$2) \Rightarrow 1)$

Lo probamos por el absurdo:

Tomo $\delta = \frac{1}{n}$, entonces busco $x \in A$ para que $0 < |x - p| < \delta$

pero ya tengo que $0 < |x - p| < \frac{1}{n}$, bueno sea P_n el x que cumple eso

Negar que $\lim_{x \to P} f(x) = L$ es decir que $\exists$ $\varepsilon > 0$ tal que $\forall$ $\delta > 0$ existe $x \in A$ con $0 < \|x - P\| < \delta$ y $\|f(x) - L\| \geq \varepsilon$. Tomemos $\delta = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ (en particular) y sea P_n el punto correspondiente.

Entonces $\|P_n - P\| < \frac{1}{n}$ tal que $\|f(P_n) - L\| \geq \varepsilon$ $\Rightarrow f(P_n) \underset{n}{\not\to} L$ Abs! [no vale 2)]

$P_n \in A$, $P_n \neq P$, $P_n \xrightarrow[n]{} P$

Tengo $P_n \xrightarrow[n]{} P$ pero $f(P_n) \underset{n}{\not\to} L$

Límite de Sucesiones:

Sea $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$ y sea $L \in \mathbb{R}^n$ se dice que

$p_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} L$ cuando $\|p_k - L\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\left[\lim_{k\to+\infty} p_k = L\right]$

O sea $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ k_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ k \geq k_0\quad \|p_k - L\| < \varepsilon$

Límite de Funciones:

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $P=(a,b) \in A$. Se dice que

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$ ó $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} L \in \mathbb{R}$

cuando:

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ /\ \forall\ (x,y)\in A$ tal que $0 < \|(x,y)-(a,b)\| < \delta$ verifica que $\|f(x,y) - L\| < \varepsilon$

Def. Continuidad:

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $P=(a,b)\in A$.

Se dice que f es continua en P cuando $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

O sea, $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ /\ \forall\ (x,y)\in A$ tal que $0<\|(x,y)-(a,b)\|<\delta$

se verifica que $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$

Teorema:

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $P \in A$. Son equivalentes:

1) f es continua en P

2) $\forall$ sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $p_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$, se verifica que

$$f(p_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(p)$$

Dem → otra hoja