1

Principio de Arquímedes:

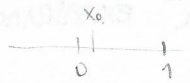
Si x es un número real, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$

(Permite comparar cualquier número con un natural)

Dem:

Sea $x \in \mathbb{R}$ y consideremos $\dot{X} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq x\}$

Si $x = x_0$ no hay $\mathbb{N}$ más grande



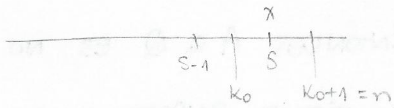
Si $\dot{X} = \phi$, en particular $1 > x$, luego se puede tomar $n = 1$

Si $\dot{X}$ es no vacío, como está acotado superiormente (por x) tiene un supremo $S = \sup \dot{X} \in \mathbb{R}$

Como $S-1$ no puede ser cota superior de $\dot{X}$ (pues S es la más chica)

debe existir $k_0 \in \dot{X}$ tal que $S - 1 < k_0$

Tomando $n = k_0 + 1$ se tiene $n \in \mathbb{N}$ y además $n > S$



Por esto último $n \notin \dot{X}$, lo que nos dice que $n > x$

$\square$

Corolario:

Entre dos números reales distintos siempre hay un número racional.

Entre dos números reales distintos siempre hay un número irracional.

Dem:

Sean $a < b$ números reales. Entonces $b - a > 0$ y en consecuencia $\frac{1}{b-a} > 0$

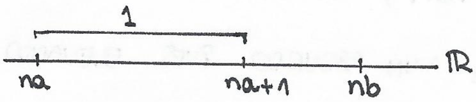
Existe por Principio de Arquímedes un número natural n tal que $n > \frac{1}{b-a}$

Se observa que:

$$nb = na + n(b-a) > na + 1$$

$nb = na + nb - na$

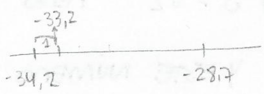
$n(b-a) > 1$



En consecuencia tiene que existir un número entero k entre na y nb.

Es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $na < k < nb$. Dividiendo por n se obtiene

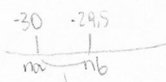
$a < \frac{k}{n} < b$ que nos dice que $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ está entre a y b.



La dist(na, nb) es mayor que 1

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ldots$

(si fuera < 1



no hay $k \in \mathbb{Z}$.

Ahora veamos que entre dos números reales siempre hay un irracional.

Volvemos a suponer $a < b$. Multiplicando por $\frac{1}{\sqrt{2}}$ obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a < \frac{1}{\sqrt{2}} b$$

Por lo anterior existe un número racional $\frac{k}{n}$ entre ellos, Es decir $\frac{1}{\sqrt{2}}a < \frac{k}{n} < \frac{1}{\sqrt{2}}b$

Multiplicando por $\sqrt{2}$ se obtiene $a < \frac{k}{n}\sqrt{2} < b$

Afirmamos que este número del medio es irracional:

si fuera racional existirían $j,m \in \mathbb{Z}$ tales que $\frac{k}{n}\sqrt{2} = \frac{j}{m}$

Pero entonces $\sqrt{2} = \frac{j \cdot n}{mk}$ sería racional, lo cual es falso. $\square$

Ejemplo 1.1.13:

Sea $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \text{ y } x > 0\}$

Entonces $A \subseteq \mathbb{Q}$ es no vacío y está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$, pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

Dem:

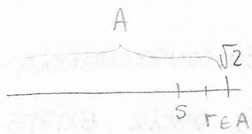
Que es no vacío es evidente pues $1 \in A$

Por otro lado, $c = 2 \in \mathbb{Q}$ es una cota superior de A pues si $x \in A$ entonces $x^2 < 2 < 4$, con lo cual $|x| < 2$ y como $x > 0$ se tiene $x < 2$

Por último supongamos que existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s = \sup(A)$ (es una cota sup. y la más pequeña de ellas)

Hay tres posibilidades:

- $s = \sqrt{2}$ es imposible pues $\sqrt{2}$ no es racional
- $s < \sqrt{2}$ (y podemos suponer $s \geq 1$ pues $1 \in A$) Pero si tomamos r un número racional tal que $s < r < \sqrt{2}$ llegamos a un absurdo pues elevando al cuadrado obtenemos $r^2 < 2$ y como $r > 0$ (por ser mayor que s) se tiene $r \in A$. Esto contradice que s cota superior de A.



O sea hay elementos de A más grandes que s

- $s > \sqrt{2}$ Pero entonces volvemos a elegir $t \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{2} < t < s$ y este número es una cota superior de A en $\mathbb{Q}$ más pequeña que s, lo cual es imposible. (Esto contradice s cota sup. más chica)

EJEMPLO 1.1.15:

HALLAR EL SUPREMO s DEL CONJUNTO $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. ¿$s \in A$?

AQUÍ EL CANDIDATO NATURAL ES $s = 1$ (QUE NO ES UN ELEMENTO DE A)

ES UNA COTA SUPERIOR PUES $1 - \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

FALTA VER QUE ES LA MENOR.

DE NUEVO: SI HUBIERA OTRA COTA SUPERIOR, DIGAMOS $s' < 1$

TOMEMOS $n_0 \in \mathbb{N}$ TALQUE $n_0 > \frac{1}{1-s'}$ QUE SIEMPRE SE PUEDE POR EL PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES.

$n_0(1-s') > 1$

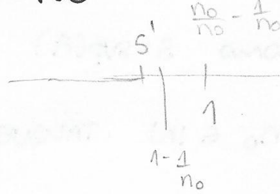
$n_0 - n_0 s' > 1$

$n_0 > n_0 s' + 1$

$\frac{n_0}{n_0} - \frac{1}{n_0} > s'$

ENTONCES DESPEJANDO SE OBTIENE $s' < \underbrace{1 - \frac{1}{n_0}}$ LO QUE CONTRADICE QUE s' SEA COTA SUPERIOR.

O SEA ENCONTRÉ UN $a \in A$ QUE ES MAYOR QUE EL SUPREMO Abs!



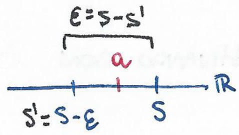
CARACTERIZACIÓN DEL SUPREMO:

PROP:

$A \subseteq \mathbb{R}$ ACOTADO SUPERIORMENTE Y s UNA COTA SUPERIOR

$s = \sup(A) \iff$ • DADO $\varepsilon > 0$, $\exists\, a \in A$ QUE CUMPLE $s - \varepsilon < a \leq s$

• $s \geq a \quad \forall a \in A$



DEM:

$\Rightarrow$) SI NO EXISTE $a \in A$ TALQUE $s - \varepsilon < a \Rightarrow \forall a \in A$ PASA QUE $a \leq s - \varepsilon$

LUEGO $s - \varepsilon$ COTA SUPERIOR

COMO s ES SUPREMO $\Rightarrow s \leq s - \varepsilon$ Abs! LUEGO $\exists\, a \in A$ TALQUE $s - \varepsilon < a$

$\Leftarrow$) POR EL ABSURDO DE NUEVO, SI $\exists\, s'$ COTA SUPERIOR TALQUE $s' < s$

SEA $\varepsilon = s - s'$. POR HIPÓTESIS: $\exists\, a \in A$ TALQUE $s - \varepsilon < a$

$s - (s - s') < a$

$s' < a$

Abs!

PUES s' COTA SUPERIOR

ÍNFIMO:

i ES EL ÍNFIMO DE A SII:

- $i \leq a \quad \forall a \in A$
- DADO $\varepsilon > 0$ EXISTE $a \in A$ TALQUE $i + \varepsilon > a$

PROPOSICIÓN 1.1.22:

SI $S = \sup(A)$ ENTONCES EXISTE UNA SUCESIÓN CRECIENTE $\{a_n\}$ DE ELEMENTOS DE A TALQUE $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$

DEM: DE 1.1.26

SEA $\varepsilon > 0$, QVQ' $\exists\, n_0$ TALQUE SI $n \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{|S - a_n| < \varepsilon}$ $\quad |a_n - S| = |S-a_n|$

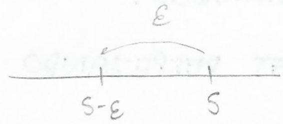
DEF. DE $\lim_{n\to+\infty} a_n = S$

COMO $a_n \leq S \ \forall n$

$\circledast \quad \underbrace{-\varepsilon < 0}_{\varepsilon > 0 \Rightarrow} < S - a_n \quad \forall n$

SEA $S' = S - \varepsilon$

COMO $S = \sup(A)$ "$\exists$ UN ELEMENTO DE A A LA DERECHA DE $S - \varepsilon$"



OSEA

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ TALQUE $S - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n$

$\forall n \geq n_0$ (a_n CRECIENTE)

$S < a_n + \varepsilon$

$S - a_n < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad S - a_n \leq \varepsilon$

COMBINANDO CON $\circledast$ TENGO:

$$-\varepsilon < S - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$|S - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\square$

PROPOSICIÓN 1.1.26: DEM.

SI $\{a_n\}$ ES UNA SUCESIÓN CRECIENTE Y ACOTADA SUPERIORMENTE, ENTONCES SI $S = \sup\{a_n\}$ SE TIENE $\lim_{n\to+\infty} a_n = S$

Proposición 2.2.8

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sean $P \in \bar{A}$ y $L \in \mathbb{R}$.

Son equivalentes:

1) $\lim\limits_{x \to P} f(x) = L$

2) $\forall$ sucesión $(P_n)_n \subseteq A$, $P_n \xrightarrow[n]{} P$, $P_n \neq P$

se tiene $f(P_n) \xrightarrow[n]{} L$ $\left[\lim\limits_{n \to \infty} f(P_n) = L\right]$

<u>Obs</u>:

Si $\exists$ $P_n \xrightarrow[n]{} P$, $Q_n \xrightarrow[n]{} P$, $P_n, Q_n \neq P$

$f(P_n) \xrightarrow[n]{} L_1$

$L_1 \neq L_2 \implies \nexists \lim\limits_{x \to P} f(x)$

$f(Q_n) \xrightarrow[n]{} L_2$

<u>Dem</u>: (de la Prop.)

$1) \Rightarrow 2)$:

Sea $(P_n)_n \subseteq A$, $P_n \xrightarrow[n]{} P$, $P_n \neq P$ $\forall n$

Qvq' $f(P_n) \xrightarrow[n]{} L$

Sea $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ talque $\left[|f(x) - L| < \varepsilon \text{ si } x \neq P, x \in A, |x - p| < \delta \right]$ porque suponemos que vale 1)

Reemplazo x por P_n:

$P_n \in A$ ✓, $P_n \neq P$ ✓, $\exists$ n_0 talque $\|P_n - P\| < \delta$ ✓ si $n \geq n_0$ (pues $P_n \xrightarrow[n]{} P$)

$\Rightarrow |f(P_n) - L| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$

$\Rightarrow f(P_n) \xrightarrow[n]{} L$

$2) \Rightarrow 1)$

Lo probamos por el absurdo:

Tomo $\delta = \frac{1}{n}$, entonces busco $\underset{\in A}{x}$ para que $0 < |x - p| < \delta$

pero ya tengo que $0 < |x - p| < \frac{1}{n}$, bueno sea P_n el x que cumple eso

Negar que $\lim\limits_{x \to P} f(x) = L$ es decir que $\exists$ $\varepsilon > 0$ talque $\forall \delta > 0$ existe $x \in A$ con $0 < \|x - P\| < \delta$ y $\|f(x) - L\| \geq \varepsilon$. Tomemos $\underbrace{\delta = \frac{1}{n}}_{\text{en particular}}$ con $n \in \mathbb{N}$ y sea P_n el punto correspondiente.

Entonces $\|P_n - P\| < \frac{1}{n}$ talque $\|f(P_n) - L\| \geq \varepsilon \Rightarrow f(P_n) \underset{n}{\not\to} L$ <u>Abs!</u> [No vale 2)]

$P_n \in A$, $P_n \neq P$, $P_n \xrightarrow[n]{} P$

Tengo $P_n \xrightarrow[n]{} P$ pero $f(P_n) \underset{n}{\not\to} L$

LÍMITE DE SUCESIONES:

SEA $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ UNA SUCESIÓN DE PUNTOS DE $\mathbb{R}^n$ Y SEA $L \in \mathbb{R}^n$ SE DICE QUE

$$p_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} L \quad \text{CUANDO} \quad \|p_k - L\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\left[\lim_{k\to+\infty} p_k = L\right]$$

O SEA $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ k_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall \ k \geq k_0 \quad \|p_k - L\| < \varepsilon$

LÍMITE DE FUNCIONES:

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Y SEA $P = (a,b) \in A$. SE DICE QUE

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \in \mathbb{R} \quad \text{ó} \quad f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} L \in \mathbb{R}$$

CUANDO:

$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ / \ \forall \ (x,y) \in A$ TALQUE $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$ VERIFICA QUE $\|f(x,y) - L\| < \varepsilon$

DEF. CONTINUIDAD:

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Y SEA $P = (a,b) \in A$.

SE DICE QUE f ES CONTINUA EN P CUANDO $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

O SEA, $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ / \ \forall \ (x,y) \in A$ TALQUE $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$

SE VERIFICA QUE $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$

TEOREMA:

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Y SEA $P \in A$. SON EQUIVALENTES:

1) f ES CONTINUA EN P

2) $\forall$ SUCESIÓN $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ TALQUE $p_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ Y $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$, SE VERIFICA QUE

$$f(p_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(p)$$

DEM → OTRA HOJA

DEM:

(2'')

1) ⇒ 2) :

SE SABE QUE f ES CONTINUA EN P.

SEA $(p_n)_n$ SUCESIÓN TAL QUE $p_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Y ADEMÁS $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$

HAY QUE PROBAR QUE $f(p_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(P)$,

DEF. LÍMITE SUCESIONES

O SEA HAY QUE PROBAR QUE: $\left[\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_0 \quad |f(p_n) - f(p)| < \varepsilon\right]$

SEA $\varepsilon > 0$ COMO f ES CONTINUA EN P, SE SABE QUE EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE $\forall q \in A$ TAL QUE $\|q - p\| < \delta$ SE VERIFICA QUE $|f(q) - f(p)| < \varepsilon$ ①

DEF. f CONTINUA

DADO ESTE $\delta > 0$, COMO $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ ENTONCES:

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_0 \quad \|p_n - p\| < \delta$ ②

DEF. LÍM. SUC.

VAMOS A PROBAR QUE $\forall n \geq n_0 \quad |f(p_n) - f(p)| < \varepsilon$

SEA $n \geq n_0$ POR ② SE DEDUCE QUE $\|p_n - p\| < \delta$, ADEMÁS $p_n \in A$ POR HIPÓTESIS

POR ① SE DEDUCE QUE $|f(p_n) - f(p)| < \varepsilon$

2) ⇒ 1) :

f CUMPLE 2). HAY QUE PROBAR QUE f ES CONTINUA EN P.

SUPONEMOS QUE NO:

QUE CUMPLE LO PRIMERO PERO NO LO SEGUNDO

ENTONCES EXISTE $\varepsilon_0 > 0$ TAL QUE $\forall \delta > 0 \quad \exists q \in A \ / \ \|q - p\| < \delta$ PERO $|f(q) - f(p)| \geq \varepsilon_0$

TOMAMOS $\delta = \frac{1}{n} > 0$ CON $n \in \mathbb{N}$ ⇒ $\exists q_n \in A \ / \ \|q_n - p\| < \frac{1}{n}$ PERO $|f(q_n) - f(p)| \geq \varepsilon_0$

ENTONCES: $0 \leq \|q_n - p\| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\underset{\downarrow}{0} \leq \|q_n - p\| < \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}}$$

$\overset{\text{POR SANDWICH}}{\Rightarrow} \|q_n - p\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$

ADEMÁS $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(q_n) - f(p)| \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow |f(q_n) - f(p)| \not\to 0$

$\Rightarrow f(q_n) \not\to f(p)$

Abs! PUES CONTRADICE LA HIPÓTESIS 2)

LUEGO, f ES CONTINUA EN P.

TEOREMA (CONSERVACIÓN DE SIGNO):

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

a) SI $p \in A$, $p_n \xrightarrow[n]{} p$, $f(p_n) \leq 0$ $\forall n$

$\Rightarrow f(p) \leq 0$

a') SI $p \in A$, $p_n \xrightarrow[n]{} p$, $f(p_n) \geq 0$ $\forall n$

$\Rightarrow f(p) \geq 0$

b) SI $f(p) > 0$, $\exists\, r > 0$ TALQUE

SI $\underbrace{x \in A \text{ y } \|x - p\| < r}$ $\Rightarrow f(x) > 0$

b') SI $f(p) < 0$, $\exists\, r > 0$ TALQUE

SI $\underbrace{x \in A \cap B_r(p)}$ $\Rightarrow f(x) < 0$

$=$

"x CERCA DE p"

DEM. DE a):

SUPONGAMOS QUE $f(p) > 0$ Y LLEGUEMOS A UNA CONTRADICCIÓN:

SI FUESE $f(p) > 0$, TOMO $\varepsilon = \frac{f(p)}{2} > 0$. $p_n \xrightarrow[n]{} p$ POR HIPÓTESIS, COMO f ES CONTINUA ENTONCES

$f(p_n) \xrightarrow[n]{} f(p)$

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ TALQUE $\forall n \geq n_0$ $|f(p_n) - f(p)| < \varepsilon = \frac{f(p)}{2}$

LUEGO, $-\frac{f(p)}{2} < f(p_n) - f(p) < \frac{f(p)}{2}$ $\forall n \geq n_0$

$-\frac{f(p)}{2} + f(p) < f(p_n) - f(p) + f(p)$

$0 < \frac{f(p)}{2} < f(p_n)$ $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow f(p_n) > 0$ **Abs!** CONTRADICE LA HIPÓTESIS

$\Rightarrow$ DEBE SER $f(p) \leq 0$

(a' SALE ANÁLOGAMENTE)

DEM. DE b):

SUPONGAMOS QUE NO VALE b), ENTONCES $\forall r > 0$ $\exists\, x_r \in A$, $\|x_r - p\| < r$ y $f(x_r) \leq 0$

$f(p) > 0$

TOMANDO $r = \frac{1}{n} > 0$

EN PARTICULAR $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_n \in A$ TALQUE $\|x_n - p\| < \frac{1}{n}$ y $f(x_n) \leq 0$

TENGO $(x_n)_n \subseteq A$, $x_n \neq p$, $x_n \xrightarrow[n]{} p$ y $f(x_n) \leq 0$ $\underset{\text{POR a)}}{\Rightarrow}$ $f(p) \leq 0$ **Abs!** CONTRADICE LA HIPÓTESIS

$\Rightarrow \exists\, r > 0$ TALQUE $f(x) > 0$ SI $x \in A \cap B_r(p)$

(b' SALE ANÁLOGAMENTE)

Si una sucesión no está acotada (por ej. superiormente), entonces podemos extraer de ella una subsucesión creciente. Análogamente, si no está acotada inferiormente, podemos extraer una sucesión decreciente.
Generalizando:

Proposición 1.1.28:

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ que es monótona.

Dem:

Para armar la subsucesión, nos interesan los términos de la sucesión que son más grandes que todos los términos que les siguen, es decir los a_n tales que $a_n \geq a_k$ para todo $k \geq n$. Estos son términos dominantes (ó cumbre). Hay dos casos:

↳ Hay infinitos términos dominantes:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots \quad \text{con} \quad n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Por ser todos dominantes,

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots$$

Hemos construido una subsucesión decreciente.

↳ Hay finitos términos dominantes: (ó ninguno)

Por ser finitos hay uno que es el último (es decir de allí en adelante ningún término de la sucesión es dominante).

Tomemos a_{n_1} el primer término de la sucesión que viene después de este último dominante (si no hay ningún dominante en la sucesión tomamos $n_1 = 1$)

Existe entonces más adelante algún $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} > a_{n_1}$

(existe sino a_{n_1} sería dominante!)

Así siguiendo vamos hallando $n_k > \dots > n_2 > n_1$ tales que $a_{n_k} > \dots > a_{n_2} > a_{n_1}$

En este caso hemos construido una subsucesión creciente.

Corolario 1.1.29 (Bolzano-Weierstrass):

Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada (sup. o inf.) de números reales. Entonces existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ que es convergente.

Dem:

Por la proposición previa, podemos extraer de $\{a_n\}$ una subsucesión monótona (que está acotada por estar acotada la original)

Por la Proposición 1.1.26, esta subsucesión tiene a su vez una subsucesión convergente, la cual no es más que una subsucesión de la sucesión original. $\square$

Definición 1.1.30:

Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales tiende a $+\infty$ si para todo $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $a_n > M$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

Es decir que para cualquier cota que a mí se me ocurra, todos los términos de la sucesión son más grandes que esa cota a partir de un n_0

Análogamente, decimos que $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$ si $\forall\, M < 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $a_n < M$

Por la prop. 1.1.26 esta subsucesión tiene lím (que coincide con el sup.)

es decir converge

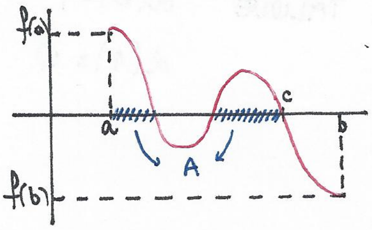
Dem B-W

TEOREMA 2.3.8 (BOLZANO): $\mathbb{R}$

Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) \cdot f(b) < 0$,
entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$

DEM:

Sup. que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ (el otro caso es similar)



$A = \{x \in [a,b] : f(x) > 0\} \subseteq [a,b]$

$A \neq \emptyset$ $(a \in A)$, A acotado superiormente $(a \leq x \leq b)$

Sea $c = \sup(A) \in \mathbb{R}$, $c \leq b$

$\exists (x_n)_n \subseteq A$ tal que $x_n \xrightarrow[n]{} c$ (tiende y es creciente) (existe una sucesión de elementos de A que tienden al supremo)

$f(x_n) > 0 \ \forall n$ pues $x_n \in A$

En particular $f(x_n) \geq 0 \ \forall n$ $\Rightarrow$ $f(c) \geq 0$

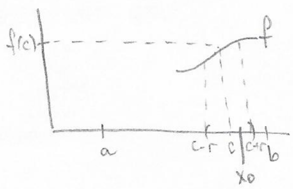
$x_n \xrightarrow[n]{} c$; f continua en c

f cont. en P:
Si $\{x_k\}$ es una sucesión tal que $x_k \xrightarrow[k]{} P$ en A
y $f(x_k) \leq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f(P) \leq 0$

Veamos que $f(c) = 0$

Si no lo fuera $f(c) > 0$

Como f continua $\Rightarrow$ Por Teo. de conservación de signo, $f(x) > 0$ para x "cerca" de c



OSEA

$\exists r > 0$ tal que $c - r < x < c + r \Rightarrow f(x) > 0$

Tomamos x_0 tal que $c < x_0 < c + r \Rightarrow f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \in A$

Pero $c = \sup(A) < x_0 \in A$
<u>Abs!</u> $(\sup(A) \geq a \ \forall a \in A)$

$\Rightarrow$ Debe ser $f(c) = 0$

TEOREMA 2.3.9 (BOLZANO): $\boxed{\mathbb{R}^n}$

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

SUPONGAMOS QUE EXISTEN $P, Q \in A$ TALES QUE $f(P) < 0$ y $f(Q) > 0$

Si A ES ARCONEXO y f ES CONTINUA, ENTONCES EXISTE $R \in A$ TALQUE $f(R) = 0$

DEM:

COMO A ES ARCOCONEXO $\exists\ \alpha: [0,1] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ CONTINUA TALQUE $\alpha(0) = P$, $\alpha(1) = Q$

SEA $g = f \circ \alpha$

$g: [0,1] \to \mathbb{R}$, g ESTÁ BIEN DEFINIDA y ES CONTINUA

$$g(0) = f(\alpha(0)) = f(P) \underset{\text{POR HIPOT.}}{<} 0$$

$$g(1) = f(\alpha(1)) = f(Q) > 0$$

LUEGO POR BOLZANO EN $\mathbb{R}$ $\exists\ c \in (0,1)$ TALQUE $g(c) = 0$

TOMO $R = \alpha(c) \in A$

$$\Rightarrow f(R) = f(\alpha(c)) = g(c) = 0$$

COROLARIOS 2.3.10:

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA. SUPONGAMOS QUE A ES ARCOCONEXO. ENTONCES:

1) DADOS $P, Q \in A$, f TOMA TODOS LOS VALORES INTERMEDIOS ENTRE $f(P)$ y $f(Q)$

INTERVALO $[f(P), f(Q)] \subseteq \operatorname{Im} f$

VER DEMO EN CUADERNO LAROTONDA → ESTÁ MUY BUENA

2) SEA $P \in A$, $Q \in \bar{A}$ Si $\lim_{x \to Q} f(x) = L$

y $f(P) < L$ $\Rightarrow [f(P), L) \subset \operatorname{Im} f$

Teorema 2.3.11 (Weierstrass):

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto y f continua en A.

Entonces existen $m, M \in \mathbb{R}$ talque

$$\forall x \in A \quad m \leq f(x) \leq M$$

(Im(f) está acotada)

Más aún existen $P_m, P_M \in A$ tales que

$$f(P_m) = \min\{f(x) : x \in A\} \qquad f(P_M) = \max\{f(x) : x \in A\}$$

(f alcanza extremos en A)

Obs:

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$

$\rightarrow \exists \; P \in A$ y $\{P_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ que converge a P

(Toda sucesión dentro de un compacto admite subsucesión con límite en el compacto)

Dem:

Veamos que f está acotada superiormente (análogo ver que es acotada inferiormente)

Supongamos que no es acotada:

Dado $k \in \mathbb{N}$, $\exists \; \{P_k\} \in A$ tq $f(P_k) \geq k$

Como A es compacto $\exists \; \{P_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión talque $P_{k_j} \longrightarrow P \in A$

$$\Rightarrow \lim_{j \to +\infty} f(P_{k_j}) = f(P) \qquad (f \text{ continua})$$

Por otro lado $f(P_{k_j}) \geq k_j$

$$\text{Luego} \quad \lim_{j \to +\infty} f(P_{k_j}) = +\infty$$

Abs!

Veamos que f alcanza un máximo en A (análogo ver el mínimo):

Sea $S = \sup_{x \in A} f(x)$

Sea $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ talque $f(P_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} S$ ⊛ [Proposición 1.1.22 (Hoja 2)]

Como A es compacto, existe $\{P_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión talque $P_{k_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} P \in A$

1) $f(P_{k_j}) \xrightarrow[j \to \infty]{} f(P)$ (f continua)

2) Por ⊛ $f(P_{k_j}) \xrightarrow[j \to \infty]{} S$ Por unicidad del límite $f(P) = S$ $\Rightarrow$ en P se alcanza un máximo.

DERIVADAS:

DECIMOS QUE f ES DERIVABLE EN x_0 SI

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

LA RECTA TANGENTE A LA GRÁFICA DE f QUE PASA POR $(x_0, f(x_0))$

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

TEOREMA 3.2.10:

FERMAT:

SEA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

SI f ES DERIVABLE EN $c\in(a,b)$ Y c ES UN EXTREMO LOCAL DE f

$$\Rightarrow f'(c)=0$$

DEM.

COMO c ES EXTREMO LOCAL $\exists\, r>0$ TALQUE $\forall x\in B_r(c)$
- $\nearrow f(x)\leq f(c)$ (MÁX. LOCAL)
- $\searrow f(x)\geq f(c)$ (MÍN. LOCAL)

SUPONGAMOS QUE c ES UN MÁXIMO LOCAL DE f (OSEA $f(x)\leq f(c)$):

CALCULEMOS $f'(c)$ USANDO LA DEFINICIÓN, CON LOS LÍMITES LATERALES:

SI $x=c+h$: $f(c+h)\leq f(c)$

$f(c+h)-f(c)\leq 0$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(c)\leq 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(c)\geq 0$$

COMO AMBOS LATERALES DEBEN SER IGUALES A $f'(c)$, LA ÚNICA POSIBILIDAD ES $f'(c)=0$

PROPOSICIÓN 3.2.11 (CAUCHY):

SEAN f, g CONTINUAS EN $[a,b]$ Y DERIVABLES EN (a,b), ENTONCES EXISTE $c \in (a,b)$ TALQUE

$$f'(c)\,(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$$

DEM:

$(f(x) - c_1)(g(b)-g(a)) \qquad (g(x)-c_2)(f(b)-f(a)) \qquad c_1, c_2$ ctes.

CONSIDEREMOS $h(x) = (f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) - (g(x)-g(a))(f(b)-f(a))$

h ES CONTINUA EN $[a,b]$ Y DERIVABLE EN (a,b)

$$h(a) = 0 = h(b)$$

POR ROLLE EXISTE $c \in (a,b)$ TALQUE $h'(c) = 0$

$$h'(x) = f'(x)(g(b)-g(a)) - g'(x)(f(b)-f(a))$$

$$0 = h'(c) = f'(c)(g(b)-g(a)) - g'(c)(f(b)-f(a))$$

$$f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$$

Obs:

Si $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow g(b) \neq g(b)$ POR ROLLE

Y EN ESTE CASO $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

PROPOSICIÓN 3.2.12 (L'HOSPITAL):

SEAN f, g FUNCIONES DERIVABLES EN UN ENTORNO DEL PUNTO $x=a$ (EXCEPTUANDO TAL VEZ EL MISMO PUNTO $x=a$). SUPONGAMOS QUE $g'(x) \neq 0$ PARA TODO $x \neq a$ Y QUE

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Si EXISTE EL LÍMITE
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

ENTONCES EXISTE
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

DEM:

PRIMERO OBSERVEMOS QUE PODEMOS EXTENDER A LAS FUNCIONES f, g AL PUNTO $x=a$ COMO $f(a)=g(a)=0$ Y QUEDAN CONTINUAS POR HIPÓTESIS.

ANALICEMOS $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (EL OTRO CASO ES ANÁLOGO)

COMO f Y g ERAN DERIVABLES EN UN ENTORNO DE a, EXISTE $\delta>0$ TAL QUE f Y g SON CONTINUAS EN $[a, a+\delta]$ Y DERIVABLES EN $(a, a+\delta)$

Obs: AFIRMO QUE g NO SE ANULA EN $(a, a+\delta)$

SI SE ANULARA:

SUP. $\exists\ x_0 \in (a, a+\delta)$ TALQUE $g(x_0)=0$

$g(a)=g(x_0)=0$ POR ROLLE HABRÍA $x_1 \in (a, x_0)$ TALQUE $g'(x_1)=0$

Abs! $\rightarrow$ POR HIPÓTESIS $g'(x)\neq 0\ \forall\ x\neq a$

TOMEMOS $x \in (a, a+\delta)$ Y APLIQUEMOS EL TEOREMA DE CAUCHY EN $[a, x]$ PARA OBTENER QUE EXISTE $c \in (a, x)$ DONDE

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - \overbrace{f(a)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

SI MUEVO EL x HACIA a, COMO c ESTÁ EN EL MEDIO TAMBIÉN VA A TENDER A a.

SI HACEMOS TENDER $x\to a^+$, SE DEDUCE QUE $c \to a^+$ TAMBIÉN, CON LO CUAL LA EXPRESIÓN DE LA IZQUIERDA TIENDE A L POR HIPÓTESIS.

LUEGO LA EXPRESIÓN DE LA DERECHA TAMBIÉN TIENDE A L.

DERIVADA DIRECCIONAL:

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^{\circ}$, $V \in \mathbb{R}^n$ $\|V\| = 1$

SI EXISTE $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(P+t.V) - f(P)}{t}$ LO DENOMINAMOS DERIVADA DIRECCIONAL DE f EN P

EN LA DIRECCIÓN V. SI EXISTE SE DENOTA $\dfrac{\partial f}{\partial v}(P)$

DERIVADAS PARCIALES:

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^{\circ}$, $e_j = (0, \dots, \underbrace{1}_{j}, \dots, 0)$ [1 EN LA COORD. j, 0 EN TODOS LOS DEMÁS]

LA j-ÉSIMA DERIVADA PARCIAL DE f EN P ES LA DERIVADA DIRECCIONAL

DE f EN P EN LA DIRECCIÓN e_j. SE LA NOTA $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{t \to 0} \frac{f(P+t.e_j) - f(P)}{t}$$

POR EJEMPLO, EN $\mathbb{R}^2$, LA DERIVADA PARCIAL RESPECTO A x SERÁ:

$v = e_1 = (1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P+t(1,0)) - f(P)}{t}$$

DEF. i):

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $F: A \to \mathbb{R}$, $P \in A$

DECIMOS QUE F ES DIFERENCIABLE EN P $\Leftrightarrow$ $\exists$ T TRANSFORMACIÓN LINEAL $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ TAL QUE:

$$\lim_{x \to P} \frac{|f(x) - f(P) - T(x-P)|}{\|x-P\|} = 0$$

¿QUÉ PINTA TIENE $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

$T = (t_1, \dots, t_n)$

$$T.x = (t_1, \dots, t_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t_1.x_1 + t_2.x_2 + \dots + t_n.x_n = \langle (t_1, \dots, t_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle$$

AFIRMO QUE SI F ES DIFERENCIABLE EN P

$\Rightarrow$

$$T = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(P), \frac{\partial F}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) \right)$$

DEF. ii):

SEA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^\circ$. SI EXISTEN LAS DERIVADAS PARCIALES DE f EN P, DECIMOS QUE f ES DIFERENCIABLE EN P SI

$$\lim_{x \to P} \frac{\left| f(x) - f(P) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)(x_1 - P_1) - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)(x_n - P_n) \right|}{\|x - P\|} = 0$$

EN ESE CASO A LA FUNCIÓN $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) . x_1 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)(x_n)$ LA DENOMINAMOS DIFERENCIAL DE f EN P Y LO ANOTAMOS Df_P

EN $\mathbb{R}^2$:

$F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A ABIERTO, $P \in A$, $P = (P_1, P_2)$

DECIMOS QUE F ES DIFERENCIABLE EN P SII:

$$\lim_{(x_1,x_2) \to (P_1,P_2)} \frac{\left| F(x_1,x_2) - F(P_1,P_2) - \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(P_1,P_2)(x_1 - P_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P_1,P_2)(x_2 - P_2) \right| \right.}{\|(x_1,x_2) - (P_1,P_2)\|} = 0$$

POR EJ:

EL CANDIDATO A PLANO TG. A F EN (P_1,P_2) ES

$\pi: z = F(P_1,P_2) + F_{x_1}(P)(x_1 - P_1) + F_{x_2}(P)(x_2 - P_2)$

ES EL PLANO TG. SI F ES DIF. EN P.

DEF.'s y Obs's:

- SI F ES DIFERENCIABLE EN P $\Rightarrow$ $\forall j$ EXISTE $\frac{\partial F}{\partial x_j}(P)$

  $\cancel{\Leftarrow}$

- GRADIENTE DE F EN P:

$$\nabla F(P) := \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(P), \frac{\partial F}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) \right)$$

- LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE A F EN P:

$$x_{n+1} = F(P) + \langle \nabla F, X - P \rangle$$

- SI F ES DIFERENCIABLE EN P, LA DIFERENCIAL DE F EN P ES UNA T.L. DE $\mathbb{R}^n$ A $\mathbb{R}$

$$DF_P(Y) = \langle \nabla F(P), Y \rangle = \sum_{i=1,\dots,n} F_{x_i}(P) . Y_i$$

- SE TIENE, POR LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ,

$$|DF_P(x)| = |\langle \nabla F(P), X \rangle| \leq \|\nabla F(P)\| . \|X\|$$

TEOREMA:

Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^\circ$

Si F es diferenciable en P $\Rightarrow$ F es continua en P

DEM:

Como F es diferenciable en P sabemos que:

$$\lim_{x \to P} \frac{|F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x-P \rangle|}{\|x-P\|} = 0$$

Sea $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|x-P\| < \delta$

$$\Rightarrow \frac{|F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x-P \rangle|}{\|x-P\|} < 1$$

Luego, si $0 < \|x-P\| < \delta$

$$\Rightarrow |F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x-P \rangle| < \|x-P\|$$

Quq

$F(x) \xrightarrow[x \to P]{} F(P)$

Por otro lado:

$$|F(x) - F(P)| = |F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x-P \rangle + \langle \nabla F(P), x-P \rangle|$$

$$\underset{\text{desig. }\Delta}{\leqslant} |F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x-P \rangle| + \underbrace{|\langle \nabla F(P), x-P \rangle|}_{\leqslant \text{ C-S}}$$

$$\underset{0<\|x-P\|<\delta}{\leqslant} \|x-P\| + \|\nabla F(P)\| . \|x-P\|$$

Entonces, si $0 < \|x-P\| < \delta$

$$|F(x) - F(P)| \leqslant (1 + \|\nabla F(P)\|)\, \|x-P\|$$

Tomando límite cuando $x \to P$:

$$\lim_{x \to P} |F(x) - F(P)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to P} F(x) = F(P)$$

$\Leftrightarrow$ F es continua en P

TEOREMA:

Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^\circ$.

Si F es diferenciable en P entonces existen todas las derivadas direccionales de F en P y además vale: $\frac{\partial F}{\partial v}(P) = \langle \nabla F(P), v \rangle \quad \forall\ v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$

DEM:

Como F es diferenciable en P sabemos que:

$$\lim_{x \to P} \frac{|F(x) - F(P) - \langle \nabla F(P), x - P \rangle|}{\|x - P\|} = 0$$

Como este límite existe, existe en particular el límite componiendo con cualquier curva que tenga límite P.

En particular si ponemos $X = P + t.V$ (con t suficientemente chico para que $X \in A$) se tiene:

$$\lim_{t \to 0} \frac{|F(P + t.V) - F(P) - \langle \nabla F(P), t.V \rangle|}{\|t.V\|} = 0$$

$\|t.v\| = \|t\|.\|v\| = |t|$

$$\lim_{t \to 0} \frac{|F(P + t.V) - F(P) - t. \langle \nabla F(P), V \rangle|}{|t|} = 0$$

$\langle A, 2B \rangle = 2 \langle A, B \rangle$

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{F(P + t.V) - F(P) - t. \langle \nabla F(P), V \rangle}{t} \right| = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{F(P + tV) - F(P)}{t} - \frac{\cancel{t} \langle \nabla F(P), V \rangle}{\cancel{t}} \right| = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(P + tV) - F(P)}{t} - \langle \nabla F(P), V \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{F(P + tV) - F(P)}{t}}_{\frac{\partial F}{\partial v}(P)} = \langle \nabla F(P), V \rangle$$

Como existen todas las derivadas direccionales, en particular existen todas las derivadas parciales.

Proposición: (Observación 3.2.6 pag. 66)

Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^\circ$.

Si F es diferenciable en P entonces $\nabla F(P)$ es la dirección de mayor crecimiento de F en P.

Dem:

Como F es diferenciable en P, tomando v de norma unitaria:

$$\frac{\partial F}{\partial v}(P) = \langle \nabla F(P), v \rangle \leq |\langle \nabla F(P), v \rangle| \underset{\text{ₓ C-S}}{\leq} \|\nabla F(P)\| . \underbrace{\|v\|}_{=1} = \|\nabla F(P)\|$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial v}(P) \leq \|\nabla F(P)\| \quad \forall v$$

Lo que nos muestra que la derivada direccional a lo sumo vale $\|\nabla F(P)\|$

Por otro lado, si $\nabla F(P) \neq 0$, tomando $V_p = \frac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|}$ se tiene:

→ gradiente de F en P normalizado, un versor con la misma dirección que $\nabla F(P)$

$$\frac{\partial F}{\partial v_p}(P) = \langle \nabla F(P), \frac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|} \rangle$$

$$= \frac{1}{\|\nabla F(P)\|} \langle \nabla F(P), \nabla F(P) \rangle = \frac{\|\nabla F(P)\|^2}{\cancel{\|\nabla F(P)\|}} = \|\nabla F(P)\|$$

$\Rightarrow$ En $V_p = \frac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|}$ hay máximo crecimiento.

$$\underbrace{\left|\frac{\partial F}{\partial v}(P)\right|}_{} \leq \|\nabla F(P)\|$$

Este alcanzará máximo valor cuando sea $= \|\nabla F(P)\|$

TEOREMA:

SEA $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Y $P \in A^\circ$. SI EXISTEN TODAS LAS DERIVADAS PARCIALES $\frac{\partial F}{\partial x_j}(P)$ $\forall\, j = 1, \dots, n$ Y SON CONTINUAS EN UN ENTORNO DE $P \Rightarrow F$ ES DIFERENCIABLE EN P.

OSEA,

SI F ES C^1 EN UN ENTORNO DE $P \Rightarrow F$ ES DIFERENCIABLE.

Obs:

SI f ES DERIVABLE EN UN ENTORNO DE x PARA h SUFICIENTEMENTE CHICO, POR LAGRANGE:

$$f(x+h) - f(x) = f'(c_h)\cdot h \quad \text{DONDE } c_h \in \operatorname{int}(x, x+h)$$

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\quad c \in (a,b)$

$a = x$

$b = x+h$

DEM:

QUEREMOS VER QUE $\lim_{h\to 0} \frac{|F(P+h) - F(P) - \langle \nabla F(P), h\rangle|}{\|h\|} = 0$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left|F(P+h) - F(P) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(P)\cdot h_j\right|}{\|h\|} = 0$$

$$F(P+h) - F(P) = F(p_1+h_1, p_2+h_2, \dots, p_n+h_n) - F(p_1, \dots, p_n)$$

$$= \boxed{F(p_1+h_1, p_2+h_2, \dots, p_n+h_n) - F(p_1, p_2+h_2, \dots, p_n+h_n)}$$

$$+ F(p_1, p_2+h_2, \dots, p_n+h_n) - F(p_1, p_2, p_3+h_3, \dots, p_n+h_n)$$

$$+ F(p_1, p_2, p_3+h_3, \dots, p_n+h_n) - F(p_1, p_2, p_3, p_4+h_4, \dots, p_n+h_n)$$

$c_1 \in \operatorname{int}(p_1+h_1, p_1)$

$$+ \dots$$

$$+ F(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}+h_{n-1}, p_n+h_n) - F(p_1, \dots, p_{n-1}, p_n)$$

USANDO LAGRANGE PARA 1 VARIABLE

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1}(c_1)\cdot h_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(c_2)\cdot h_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(c_n)\cdot h_n$$

$c_1 = (a_1, p_2+h_2, \dots, p_n+h_n) \quad a_1 \in \operatorname{int}(p_1, p_1+h_1)$

$c_2 = (p_1, a_2, p_3+h_3, \dots, p_n+h_n) \quad a_2 \in \operatorname{int}(p_2, p_2+h_2)$

$\vdots$

$c_n = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, a_n) \quad a_n \in \operatorname{int}(p_n, p_n+h_n)$

ENTONCES, TENÍAMOS:

$$\frac{\left|F(P+h) - F(P) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(P).h_j\right|}{\|h\|} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(c_j).h_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(P).h_j}{\|h\|} =$$

$$\frac{\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}(c_1)h_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(c_2)h_2 - \frac{\partial F}{\partial x_1}(p_1)h_1 - \frac{\partial F}{\partial x_2}(p_2)h_2\right|}{\|h\|} \leq \frac{\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}(c_1)h_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}(p_1)h_1\right|}{\|h\|} + \frac{\left|\frac{\partial F}{\partial x_2}(c_2)h_2 - \frac{\partial F}{\partial x_2}(p_2)h_2\right|}{\|h\|}$$

$$= \frac{\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(c_j) - \frac{\partial F}{\partial x_j}(P)\right).h_j\right|}{\|h\|} \underset{\neq\Delta}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}(c_j) - \frac{\partial F}{\partial x_j}(P)\right|}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} . \frac{|h_j|}{\|h\|} \leq 1$$

$\rightarrow |h_j| \leq \|h\|$

Si $h \to 0 \Rightarrow c_j \to P$

Como $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)$ son continuas en un entorno de $P \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\partial F}{\partial x_j}(c_j) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(P)$

Luego,

$$\lim_{h\to 0} \frac{|F(P+h) - F(P) - \langle \nabla F(P), h \rangle|}{\|h\|} = 0$$

$\Rightarrow F$ es diferenciable en P

TEOREMA DE LAGRANGE EN $\mathbb{R}^n$: (PROPOSICIÓN 3.3.1 PAG. 80) (12)

SEA $f: B_r(P) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DIFERENCIABLE. ENTONCES PARA TODO $Q, R \in B_r(P)$
($B_r(P)$: ABIERTO CONVEXO)
EXISTE UN PUNTO P_0 EN EL SEGMENTO QUE UNE Q CON R TAL QUE

$$f(Q) - f(R) = \langle \nabla f(P_0), Q - R \rangle$$

DEM:

SEA $g(t) = R + t(Q-R)$ → PARAMETRIZACIÓN DEL SEGMENTO QUE UNE Q CON R

$g(0) = R$

$g(1) = Q$

CONSIDEREMOS $h(t) = f(g(t))$

Y A ÉSTA LE VOY A APLICAR LAGRANGE EN $\mathbb{R}$
ENTONCES VEO QUE CUMPLA LAS HIPÓTESIS:

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONT EN $[0,1]$
DERIV EN $(0,1)$

$h(t)$ ESTÁ DEFINIDA EN $[0,1]$ Y ES DIFERENCIABLE EN $(0,1)$ POR LA REGLA DE LA CADENA.

MÁS AÚN, $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ ES UNA FUNCIÓN CONTINUA PUES f ES CONTINUA POR SER DIFERENCIABLE.

ENTONCES POR LAGRANGE EN $\mathbb{R}$:

EXISTE $c \in (0,1)$ TAL QUE

$$h(1) - h(0) = h'(c)(1-0)$$

$$f(g(1)) - f(g(0)) = h'(c)$$

$$f(Q) - f(R) = h'(c)$$

$$h'(c) = Df|_{g(c)} \cdot Dg|_c$$

$$Dg|_c = g'(c)$$

$g(t) = R + t(Q-R)$

$g'(t) = Q - R$

$$h'(c) = \nabla f(g(c)) \cdot (Q-R)$$

$$\Rightarrow g'(c) = Q - R$$

$$\Rightarrow f(Q) - f(R) = \langle \nabla f(\underbrace{g(c)}_{=P_0}), Q - R \rangle$$

Teorema de Fermat en $\mathbb{R}^n$:

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, A abierto. Supongamos que $P \in A$ es un extremo local de f. Entonces $Df_P = \nabla f(P) = 0$

Equivalentemente todas las derivadas parciales de f se anularán en P

Dem:

Supongamos que P es un máximo local de f (el otro caso es análogo)

Entonces, sea $r > 0$ / $B_r(P) \subseteq A$ y si $x \in B_r(P)$

$$\Rightarrow f(P) \geq f(x)$$

Sea $1 \leq j \leq n$:

Consideremos la función auxiliar $g(t) = f(P + t.e_j)$ — e_j vector de la base canónica.

Entonces $g: (-r, r) \to \mathbb{R}$ es una función derivable (por ser comp. de dif.) que tiene un máximo local en $t = 0$

pues $g(0) = f(P) \geq f(P + t.e_j) = g(t)$

El dominio de g es $(\ )$ para que toda la imagen de g me caiga dentro de la bola $B_r(P)$ (y así sé que f de cualquier cosa de ahí adentro será más chica que $f(P)$)

Por Fermat en $\mathbb{R}$ debe ser $g'(0) = 0 = \lim_{h \to 0} \dfrac{g(0+h) - g(0)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(P + he_j) - f(P)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_j}(P)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(P) = 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow Df_P = \nabla f(P) = 0$$

Polinomio de Taylor

En $\mathbb{R}$:

Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y sea $f \in C^n(I)$.
El polinomio de Taylor de grado n de f en el punto $a \in I^\circ$ es el único polinomio $P(x)$ de grado n tal que, para todo $k \in \{0,1,\dots,n\}$ verifica:

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

La expresión de P es:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

Además para todo $x \in I$ vale que:

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

Don[de] $R(x) = f(x) - P(x)$ es el resto, que verifica: $\lim\limits_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$

Teorema: Taylor con resto de Lagrange:

Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable.
Entonces dados $x, a \in I$, existe c estrictamente entre x y a tal que:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}}_{P(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{R(x)}$$

Dem:

Fi[jem]os $x, a \in I$, consideremos la función auxiliar $g: I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(t) = f(x) - \underbrace{f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!} - \dots - \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!}} - \frac{K(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

K es una constante apropiada tal que $g(a) = 0$ Intentaremos hallar el valor de K:

Como $g(t) = f(x) - P_f(t)$ entonces g es una función derivable $\underset{t \in (a,x)}{}$ de la variable t y continua en $[a,x]$. Además, como $g(x) = 0 = g(a) \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$ existe c entre x y a tal que $g'(c) = 0$

$$g'(t) = \left(f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2} - \frac{K(x-t)^3}{3!}\right)' \qquad -\frac{K}{3!}3(x-t)^2(-1) = -\frac{3}{6}K(x-t)^2$$

Por ejemplo, si $n=2$:

$$g'(t) = -\cancel{f'(t)} - \cancel{f''(t)(x-t)} + \cancel{f'(t)} - \frac{f'''(t)(x-t)^2}{2} + \cancel{f''(t)(x-t)} + \frac{K}{2}(x-t)^2$$

$$(f'(t)(x-t))' = f''(t)(x-t) + f'(t)(x-t)(-1)$$

$$g'(t) = \frac{-f^{(3)}(t)(x-t)^2}{2} + \frac{K(x-t)^2}{2}$$

$$0 = g'(c) = \left[- f^{(3)}(c) + K \right] \cdot \frac{(x-c)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad - f^{(3)}(c) + K = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad K = f^{(3)}(c)$$

EN GENERAL , $K = f^{(n+1)}(c)$

ENTONCES AHORA, EVALUANDO g EN EL PUNTO a:

$$\underset{0}{\overset{\shortparallel}{g(a)}} = f(x) - f(a) - \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} - f'(a)(x-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$c \in \operatorname{int}(x, a)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Teorema (Taylor en $\mathbb{R}^n$)

Conj. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo: Si dados $P, Q \in A \Rightarrow$ segmento$[P,Q] \subseteq A$

$\text{SEG}[P,Q] = \{P + t(Q-P) : t \in [0,1]\}$

Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A abierto convexo, F es $C^3(A)$

$P = (p_1, \dots, p_n) \in A$

$X = (x_1, \dots, x_n) \in A$

Se tiene:

$$F(x) = F(P) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)(x_i - p_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P)(x_j - p_j)(x_i - p_i) + R_p(x-P)$$

Más aún,

$$R_p(x-P) = \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(C)(x_i - p_i)(x_j - p_j)(x_k - p_k)$$

con C algún punto en el segmento entre x y P

y verifica que:

$$\lim_{x \to P} \frac{R_p(x-P)}{\|x-P\|^2} = 0$$

Obs: El pol. de Taylor de orden 1 de F es:

$$F(P) + \langle \nabla F(P), x-P \rangle = F(P) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)(x_i - p_i)$$

Dem:

Consideremos $X, P \in A$ y consideremos la función auxiliar $g(t) = F(P + t(x-P))$ que es C^3 en un entorno del intervalo $[0,1]$

Derivando obtenemos:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P + t(x-P))(x_i - p_i)$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P + t(x-P))(x_i - p_i)(x_j - p_j)$$

$$g'''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(P + t(x-P))(x_i - p_i)(x_j - p_j)(x_k - p_k)$$

Ver cálculos auxiliares.

AHORA UTILIZAMOS LA FÓRMULA DE TAYLOR EN $\mathbb{R}$ DE ORDEN 2 SOBRE g EN EL INTERVALO $[0,1]$ QUE NOS DICE:

$$g(1) = g(0) + g'(0)(1-0) + \frac{g''(0)}{2!}(1-0)^2 + \frac{g'''(c)(1-0)^3}{3!} \quad \text{CON } c \in (0,1)$$

REEMPLAZANDO SE TIENE:

$$F(x) = F(P) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)(x_i - P_i) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P)(x_i-P_i)(x_j-P_j)\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(\underbrace{P+c(x-P)}_{C})(x_i-P_i)(x_j-P_j)(x_k-P_k)\right)$$

$C = P + c(x-P)$ ES UN PUNTO EN EL SEGMENTO QUE UNE x CON P

$\square$

AHORA VEAMOS QUE $\lim_{x \to P} \frac{R_P(x-P)}{\|x-P\|^2} = 0$:

COMO F ES C^3 EN A, LAS DERIVADAS TERCERAS EXISTEN Y SON FUNCIONES CONTINUAS

$\left[\forall\, i,j,k \in \{1,\dots,n\} \ \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \text{ EXISTE Y ES CONTINUA EN } A\right]$

ALREDEDOR DE P, SON FUNCIONES ACOTADAS:

POR LO TANTO TOMANDO ALGÚN COMPACTO

$\overline{B}_r(P) = \{y \in \mathbb{R}^n \,/\, \|y-P\| \leq r\}$

LUEGO EXISTE $M>0$ TALQUE : $\left|\frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right| \leq M \quad \forall\, Q \in \overline{B}_r(P)$

POR OTRO LADO TENÍAMOS:

$$R_P(x-P) = \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c)(x_k-P_k)(x_j-P_j)(x_i-P_i)$$

SI $\|x-P\| < r \Rightarrow c \in \overline{B}_r(P)$

C ESTÁ ENTRE X Y P

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c)\right| \leq M$$

COMO $c \in \overline{B}_r(P)$

Cálculos auxiliares para la demo. de Taylor en $\mathbb{R}^n$:

Sea $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P, X \in A$

$$h(t) = g(P+t(X-P))$$

$$h'(t) = \langle \nabla g(P+t(X-P)), (X-P) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(P+t(X-P))(x_i-P_i)$$

$$h''(t) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial g}{\partial x_i}(P+t(X-P))(x_i-P_i) \Big)' \underbrace{(t)}_{\text{evaluado en } t} =$$

Para resolverla, supongo que $\underline{n=3}$, luego se podrá generalizar fácilmente:

$$\left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P+t(X-P))(x_i-P_i) \right]' = \left[\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_1}(P+t(X-P))}(x_1-P_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P+t(X-P))(x_2-P_2) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(P+t(X-P))(x_3-P_3) \right]'$$

Analizo la derivada de esto:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(P+t(X-P)) \right]'$$: uso regla de la cadena llamando:

$V=(v_1,v_2,v_3)$

$g(\bullet) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(V) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$h(t) = P+t(X-P) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

otra h nada que ver con aquella

$P=(P_1,P_2,P_3)$
$X=(x_1,x_2,x_3)$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(P+t(X-P)) \right]' = Dg|_{(P+t(X-P))} \cdot Dh|_t = \langle \nabla g(P+t(X-P)), \underbrace{X-P}_{=(x_1-P_1),(x_2-P_2),(x_3-P_3)} \rangle$$

$$= \langle \nabla \frac{\partial F}{\partial x_1}(P+t(X-P)), X-P \rangle$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(P+t(X-P))(x_1-P_1) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(P+t(X-P))(x_2-P_2) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3}(P+t(X-P))(x_3-P_3)$$ (*)

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_j}(P+t(X-P))(x_j-P_j)$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_j}(P+t(X-P))(x_j-P_j)$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P+t(X-P))(x_i-P_i) \right]' = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P+t(X-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j)$$

Fácilmente se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$:

$$h''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P+t(X-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j)$$

AHORA BUSCO $h'''(t)$:

$$h'''(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P+t(x-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j) \right]' =$$

NUEVAMENTE, SUPONGO QUE $\underline{n=3}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P+t(x-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j) \right)' = \text{MIRO } \circledast$$

$$\circledast = \Bigg[\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j) \right)}_{\text{ANALIZO LA DERIVADA DE ESTO:}}(x_1-P_1) + \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j) \right)(x_2-P_2) + \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j) \right)(x_3-P_3) \Bigg]'$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j) = \boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(P+t(x-P))}(x_1-P_1) + \boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(P+t(x-P))(x_2-P_2)} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3}(P+t(x-P))(x_3-P_3)$$

AHORA ANALIZO LA DERIVADA DE ESTO:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(P+t(x-P)) \right]' = \text{(MISMO PROCEDIMIENTO QUE ANTES) [REGLA DE LA CADENA]} = \left\langle \nabla \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(P+t(x-P)),\ x-P \right\rangle$$

$$= \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_1}(P+t(x-P))(x_1-P_1) + \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(P+t(x-P))(x_2-P_2) + \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_3}(\ldots)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j)$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_j}(P+t(x-P))(x_j-P_j)$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P+t(x-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j) \right]' = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(P+t(x-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j)(x_k-P_k)$$

GENERALIZANDO A $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(P+t(x-P))(x_i-P_i)(x_j-P_j)(x_k-P_k) = h'''(t)$$

$\circledast = [A' + B' + C']$

A': $\displaystyle \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_j \partial x_i}(P+t(x-P))(x_j-P_j)(x_i-P_i)$

B': $\displaystyle \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x_2 \partial x_j \partial x_i}(P+t(x-P))(x_j-P_j)(x_i-P_i)$

ETC.

POR OTRO LADO:

$$|x_i - p_i| \leq \|x-p\|$$
$$|x_j - p_j| \leq \|x-p\|$$
$$|x_k - p_k| \leq \|x-p\|$$

ENTONCES:

$$|R_p(x-p)| \underset{\|x-p\|<r}{\leq} \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M \cdot \|x-p\|^3\right)$$

$$\frac{|R_p(x-p)|}{\|x-p\|^2} \underset{\|x-p\|<r}{\leq} \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M \cdot \frac{\|x-p\|^{\cancel{3}}}{\cancel{\|x-p\|^2}} \xrightarrow{x \to p} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to p} \frac{R_p(x-p)}{\|x-p\|^2} = 0$$

TAMBIEN SE PUEDE DEMOSTRAR PARA ORDEN K HACIENDO L'HOSPITAL K VECES

Criterio de la Segunda Derivada.

Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(I)$, I intervalo abierto

$a \in I$ y $f'(a) = 0$

Entonces si:

$f''(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene en a un mínimo local estricto

$f''(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene en a un máximo local estricto

$f''(a) = 0 \Rightarrow$ depende de f

Dem:

Dado $x \in I$, por Taylor existe c entre x y a tal que:

$$f(x) = f(a) + \cancel{\underbrace{f'(a)}_{=0}(x-a)} + f''(c)\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) = f''(c)\frac{(x-a)^2}{2} \quad ⊛$$

Si $f''(a) < 0$, como f'' continua por ser f C^2 existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq I$

y $\forall y \in B_r(a)$ vale que $f''(y) < 0$

Si tomo $x \in B_r(a)$ entonces como c está entre x y $a \Rightarrow c \in B_r(a)$ ← este c es un y en particular

Por lo tanto $f''(c) < 0$

$$\Rightarrow ⊛ = \quad f(x) - f(a) = \underbrace{f''(c)}_{<0}\underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}}_{>0 \text{ si } x \neq a}$$

$$f(x) - f(a) < 0$$

$$f(x) < f(a) \quad \forall x \in B_r(a)$$

$\Rightarrow a$ es un máximo local estricto

El caso de $f''(a) > 0$ es análogo:

$$\leadsto \quad f(x) - f(a) = \underbrace{f''(c)}_{>0}\underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}}_{>0 \text{ si } x \neq a}$$

$$f(x) - f(a) > 0$$

$$f(x) > f(a) \quad \forall x \in B_r(a)$$

$\Rightarrow a$ es un mínimo local estricto

TEOREMA DE CLAIRAUT-SCHWARZ.

SEA $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CON A ABIERTO. SI F ES $C^2(A)$ ENTONCES LAS DERIVADAS CRUZADAS COINCIDEN, ES DECIR

PARA TODO $i,j \in \{1,\dots,n\}$ SE TIENE

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(P) \qquad \text{PARA TODO } P \in A$$

Obs:

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ABIERTO, $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

F ES $C^2(A)$ SI $\forall\, j,k \in \{1,\dots,n\}$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}$ EXISTEN Y SON CONTINUAS EN A.

DEM:

SUPONGAMOS PARA SIMPLIFICAR $n=2$. CONSIDEREMOS ENTONCES $F(x,y)$ Y UN PUNTO $P=(a,b) \in A$

QUEREMOS VER QUE $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a,b) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(a,b)$

DEFINIMOS LA FUNCIÓN AUXILIAR:

$$g(t) = F(a+t,b+t) - F(a+t,b) + F(a,b) - F(a,b+t)$$
$$= [F(a+t,b+t) - F(a+t,b)] - [F(a,b+t) - F(a,b)]$$

PARA RECORDARLA:

$-$ $(a,b+t)$	$+$ $(a+t,b+t)$
$+$ (a,b)	$-$ $(a+t,b)$

DEFINIMOS AHORA $\varphi(y) = F(a+t,y) - F(a,y)$

ENTONCES $g(t) = \varphi(b+t) - \varphi(b) = \varphi'(b)t + \varphi''(c)\dfrac{t^2}{2}$ CON $c \in \operatorname{int}(b,b+t)$

VEAMOS POR QUE OCURRE ESTO:

USANDO TAYLOR: $\varphi(y) = \varphi(b) + \varphi'(b)(y-b) + \varphi''(c)\dfrac{(y-b)^2}{2}$ CON $c \in \operatorname{int}(y,b)$

ENTONCES, SI $y = b+t$:

$$\varphi(b+t) = \varphi(b) + \varphi'(b)t + \varphi''(c)\frac{t^2}{2} \quad \text{CON } c \in \operatorname{int}(b,b+t)$$

VEAMOS LAS DERIVADAS DE φ:

$$\varphi'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(a+t,y) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,y)$$

$$\varphi''(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a+t,y) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,y)$$

$$g(t) = \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a+t,b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)}_{\varphi'(b)} t + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a+t,c) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,c)\right)}_{\varphi''(c)} \frac{t^2}{2}$$

AHORA DIVIDIMOS POR t^2 Y MIRAMOS EL LÍMITE CUANDO $t \to 0$:

$$\frac{g(t)}{t^2} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a+t,b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}{t} + \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a+t,c) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,c)}{2}$$

ANALIZAMOS CADA LÍMITE POR SEPARADO:

↳ $$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a+t,b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}{t} \underset{\text{DEF. DERIV. PARCIAL}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(a,b) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a,b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \lim_{t\to 0} \frac{f(P+t) - f(P)}{t}$$

↳ POR OTRO LADO OBSERVEMOS QUE:

$$(a+t,c) \xrightarrow[t\to 0]{} (a,b) \qquad \text{PUES } c \in \operatorname{int}(b,b+t)$$

$$(a,c) \xrightarrow[t\to 0]{} (a,b)$$

COMO F ES $C^2(A)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ES CONTINUA, POR LO TANTO:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a+t,c) \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,b)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,c) \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,b)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a+t,c) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,c)\right)}_{\to 0} = 0$$

LUEGO,
$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a,b)$$

HESSIANO.

DEF:

F de clase $C^2(A)$, $P \in A$, se define la matriz Hessiana de F en P como:

$$HF_P = \begin{pmatrix} - \nabla\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)(P) - \\ - \nabla\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)(P) - \\ \vdots \\ - \nabla\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)(P) - \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Uso en Taylor:

En $\mathbb{R}^n$:

$y \in \mathbb{R}^n$, $\langle HF_P \cdot y, y \rangle = ?$

$$HF_P \cdot y = \begin{pmatrix} - \nabla \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) - \\ \vdots \\ - \nabla \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_1}(P) \cdot y_j \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_2}(P) \cdot y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_n}(P) y_j \end{pmatrix}$$

$$\langle HF_P \cdot y, y \rangle = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_1}(P) y_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_n}(P) y_j \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(P) y_j \right) y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(P) y_j y_i$$

Volviendo a Taylor:

$$F(x) = F(P) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)(x_i - P_i) + \frac{1}{2}\overbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(P)(x_i - P_i)(x_j - P_j) \right)} + R_P(x-P)$$

Luego,

$$F(x) = F(P) + \langle \nabla F(P), x - P \rangle + \frac{1}{2} \underbrace{\langle HF(P)(x-P), x - P \rangle} + R_P(x-P)$$

En $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = f(p_1,p_2) + \underbrace{f_x(p)(x-p_1) + f_y(p)(y-p_2)}_{= \langle \nabla f(p), (x,y)-(p_1,p_2) \rangle} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(f_{xx}(p)(x-p_1)^2 + 2 f_{xy}(p)(x-p_1)(y-p_2) + f_{yy}(p)(y-p_2)^2 \right)}_{= (x-p_1 \;\; y-p_2) \underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix}}_{Hf(p)} \begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \end{pmatrix}} + R_2(x,y)$$

Obs:

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \;\; y)\begin{pmatrix} ax+by \\ bx+dy \end{pmatrix} = x(ax+by) + y(bx+cy) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Formas Cuadráticas:

Sea $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definimos la forma cuadrática asociada a T como

$$Q_T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$Q_T(x) = \langle TX, X \rangle$$

En 2 variables:

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$= (x \;\; y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Obs:

$$Q_T(t.X) = t^2 Q_T(X) \quad , t \in \mathbb{R}$$

Saca el escalar como cuadrado. De ahí el nombre.

$$\langle T(tX), tX \rangle = t^2 \langle TX, X \rangle = t^2 Q_T(X)$$

Nombres:

↳ Q es definida positiva $\iff$ $Q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

↳ Q es definida negativa $\iff$ $Q(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$

↳ Q es indefinida $\iff$ $\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Q(x_1) > 0$ y $Q(x_2) < 0$

LEMA 5.2.6:

SEA $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN C^3, CON A ABIERTO Y $P \in A$. SUPONGAMOS QUE $\nabla F(P) = 0$

ENTONCES:

1) SI EXISTE $V \in \mathbb{R}^n$ TALQUE $Q_P(V) < 0$, ENTONCES A LO LARGO DE LA RECTA $P + tV$ (PARA t SUFICIENTEMENTE CHICO) LA FUNCIÓN F TIENE UN MÁXIMO EN P.

ES DECIR $g(t) = F(P+tV)$ TIENE UN MÁXIMO LOCAL EN $t=0$

2) SI EXISTE $W \in \mathbb{R}^n$ TALQUE $Q_P(W) > 0$, ENTONCES A LO LARGO DE LA RECTA $P + tW$ (PARA t SUFICIENTEMENTE CHICO) LA FUNCIÓN F TIENE UN MÍNIMO EN P.

ES DECIR $h(t) = F(P+tW)$ TIENE UN MÍNIMO LOCAL EN $t=0$

DEM:

PROBAMOS 1). 2) SALE DE MANERA SIMILAR.

POR LA FÓRMULA DE TAYLOR, ESCRIBIENDO $X = P + tV$ SE TIENE:

$$F(P+tV) = F(P) + t^2 Q_P(V) + R_P(tV)$$

$\nabla F(P) = 0$

$Q_P(V) = \frac{1}{2} \langle HF_P V, V \rangle$

$Q_P(tV) = t^2 Q_P(V)$

PARA t SUFICIENTEMENTE CHICO.

SACANDO FACTOR COMÚN $t^2 \|V\|^2$ SE OBTIENE:

$$F(P+tV) = F(P) + t^2 \|V\|^2 \left[\underbrace{\frac{Q_P(V)}{\|V\|^2}}_{<0 \text{ POR HIP.}} + \frac{R_P(tV)}{\|tV\|^2} \right]$$

COMO $\dfrac{R_P(tV)}{\|tV\|^2} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

$\exists \delta > 0$ tal que

ENTONCES $\left[\dfrac{Q_P(V)}{\|V\|^2} + \dfrac{R_P(tV)}{\|tV\|^2} \right] < 0$ si $|t| < \delta$

ENTONCES ME QUEDA $F(P+tV) = F(P) + [\text{ALGO} < 0]$ $\Rightarrow$ OSEA $F(P+tV)$ ES $F(P)$ MENOS ALGO

OSEA $F(P)$ ES MÁS GRANDE QUE $F(P+tV)$

$\Rightarrow F(P+tV) < F(P)$ si $|t| < \delta$

$\Rightarrow g(t) = F(P+tV)$ TIENE MÁXIMO EN $t=0$

LUEGO, JUNTANDO LOS DOS PUNTOS ANTERIORES:

$$\begin{cases} Q_P\left(\frac{x-P}{\|x-P\|}\right) > 0 \\ \frac{R(x-P)}{\|x-P\|^2} \xrightarrow[x\to P]{} 0 \end{cases}$$

TENEMOS QUE $\frac{1}{2}\langle HF_P \frac{(x-P)}{\|x-P\|}, \frac{x-P}{\|x-P\|} \rangle + \frac{R(x-P)}{\|x-P\|^2} > 0$ SIEMPRE POSITIVO Y MAYOR QUE 0

POR LO TANTO NOS QUEDA:

$$F(x) = F(P) + \|x-P\|^2 \left[\text{TÉRMINO MAYOR A } 0\right]$$

POR LO QUE $F(x)$ ES SIEMPRE $F(P)$ MÁS UN POQUITO, LO QUE SIGNIFICA QUE $F(P) < F(x)$ PARA TODO x EN UN ENTORNO DE P.

LA DEMOSTRACIÓN PARA EL CASO DEFINIDO NEGATIVO ES SIMILAR.

SI Q_P ES INDEFINIDA, EXISTEN DOS VECTORES $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ TALES QUE $Q_P(z_1) > 0$ y $Q_P(z_2) < 0$

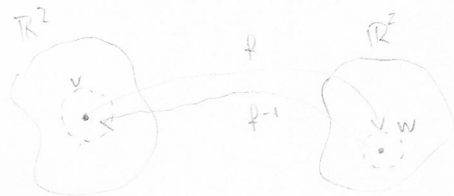
POR EL LEMA 5.2.6, A LO LARGO DE LAS TRAYECTORIAS $P+tz_1$, $P+tz_2$, LA FUNCIÓN F ES RESPECTIVAMENTE MAYOR Y MENOR QUE $F(P)$, CON LO CUAL P NO PUEDE SER NI MÁXIMO NI MÍNIMO, ES UN PUNTO SILLA.

Teorema de la Función Inversa.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $P \in A$, $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Si F es $C^1(A)$ y $DF(P)$ es inversible $(\det DF(P) \neq 0)$, entonces:

Existen entornos V y W de P y $F(P)$ respectivamente tales que $F: V \to W$ es biyectiva y diferenciable. Además su inversa $F^{-1}: W \to V$ también es diferenciable.



Si $F(P) \in W$ con $P \in V$:

$$DF^{-1}\big|_{F(P)} = \left[DF|_P\right]^{-1}$$

Inversión matrices 2x2:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad ad - bc \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA.

EN $\mathbb{R}^2$:

SEA $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DE CLASE C^1 Y $S = \{(x,y) \in A : F(x,y) = 0\}$

SUPONGAMOS $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$ PARA $p \in S$

ENTONCES:

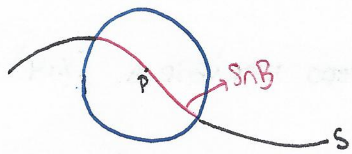
1) EXISTE UN INTERVALO $I \in \mathbb{R}$ ABIERTO, UNA FUNCIÓN DERIVABLE $\varphi: I \to \mathbb{R}$

Y UNA BOLA B ALREDEDOR DE P TAL QUE:

$$S \cap B = \text{Graf}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$$

2) $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in S \cap B$ Y $\nabla F(x,y)$ ES PERPENDICULAR A S EN $S \cap B$

3) $\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$



EL TEOREMA BÁSICAMENTE ME DICE QUE SI LA DERIVADA RESPECTO A UNA VARIABLE NO SE ANULA, ENTONCES PUEDO DESPEJAR ESA VARIABLE EN FUNCIÓN DE LA OTRA (Ú OTRAS)

POR EJ: EN $\mathbb{R}^2$: SI $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow y = \varphi(x)$ EN $\mathbb{R}^3$: SI $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \Rightarrow z = \varphi(x,y)$

EN $\mathbb{R}^n$:

SEA $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DE CLASE C^1 Y $S = \{x \in \mathbb{R}^n / F(x) = c\}$. SI $p \in S$ TAL QUE ALGUNA DE LAS DERIVADAS DE F NO SE ANULA EN P, ENTONCES:

1) EXISTEN $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ABIERTO Y B BOLA DE $\mathbb{R}^n$ ALREDEDOR DE P Y UNA FUNCIÓN $\varphi: W \to \mathbb{R}$ TAL QUE $S \cap B = \text{Graf}(\varphi)$

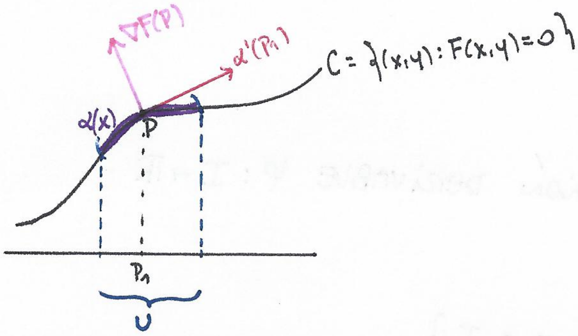
2) SE TIENE $\nabla F(Q) \neq 0 \quad \forall x \in S \cap B$ Y ALLÍ EL PLANO TANGENTE A S EN EL PUNTO Q TIENE ECUACIÓN: $\langle \nabla F(Q), x - Q \rangle = 0$

3) SI LA DERIVADA K-ÉSIMA $(k \in \{1, \dots, n\})$ NO SE ANULA EN P, ENTONCES NO SE ANULA EN $S \cap B$ Y $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $i \neq k$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, \overbrace{\varphi(y)}^{\text{K-ÉSIMO LUGAR}}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{\frac{\partial F}{\partial x_k}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, \varphi(y), y_{k+1}, \dots, y_n)} \quad \forall y \in W$$

COROLARIO:

DADO UN PUNTO P EN UNA CURVA DE NIVEL C DE UNA FUNCIÓN $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ QUE ES C^1, SI $\nabla F(P) \neq 0$ ENTONCES $\nabla F(P)$ ES PERPENDICULAR A LA RECTA TANGENTE A LA CURVA C EN P.



DEM:

COMO $\nabla F(P) \neq 0$ SUPONGAMOS QUE $\frac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0$. ENTONCES POR TEO. FUNCIÓN IMPLÍCITA EXISTE UNA FUNCIÓN φ C^1 TALQUE $\varphi: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CON U UN ENTORNO ALREDEDOR DE p_1 Y ADEMÁS $y = \varphi(x)$ $\forall x \in U$. COMO $p_1 \in U$ ENTONCES $\varphi(p_1) = p_2$

SI $x \in U$ ENTONCES PUEDO ESCRIBIR A (x,y) COMO $\underbrace{(x, \varphi(x))}_{\text{SON PUNTOS DEL GRÁFICO DE } \varphi}$ $\in C$ → Y SÉ QUE $Graf(\varphi) = C \cap U$

$\alpha(x) = (x, \varphi(x))$ ES UNA PARAMETRIZACIÓN DE C CERCA DE P

$\alpha: U \to \mathbb{R}^2$ $\quad \alpha(p_1) = P$

VECTOR TANGENTE A C EN P: $\alpha'(p_1) \underset{\text{REGLA DE LA CADENA}}{=} (1, \varphi'(p_1))$

COMO $(1, \varphi'(p_1))$ ES TANGENTE A LA CURVA C Y YO QUERÍA VER QUE $\nabla F(P)$ ES PERPENDICULAR A C ENTONCES:

QUIERO PROBAR QUE: $\langle \nabla F(P), (1, \varphi'(p_1)) \rangle = 0$

2 MANERAS DE PROBAR ESTO:

SABEMOS QUE $F(x, \varphi(x)) = 0$ PUES $(x, \varphi(x)) \in C$

SI DERIVAMOS:

$\langle \nabla F(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle = 0$

SI $x = p_1$

$\langle \nabla F(P), (1, \varphi'(p_1)) \rangle = 0$ ✓

DESARROLLANDO ESE PRODUCTO INTERNO NOS QUEDA:

$$\langle \nabla F(P), (1, \varphi'(p_1)) \rangle = \frac{\partial F}{\partial x}(P) \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(P) \cdot \varphi'(p_1)$$

USANDO EL TEO. FUNCIÓN IMPLÍCITA SABEMOS QUE

$$\varphi'(p_1) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(p_1, \varphi(p_1))}{\frac{\partial F}{\partial y}(p_1, \varphi(p_1))} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(P)}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(P) + \cancel{\frac{\partial F}{\partial y}(P)} \cdot \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(P)}{\cancel{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}} = \frac{\partial F}{\partial x}(P) - \frac{\partial F}{\partial x}(P) = 0$$ ✓

TEOREMA DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

SEAN $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ FUNCIONES C^1. $P \in A$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}$

SUPONGAMOS $\nabla g(P) \neq 0$, ENTONCES:

SI $F|_S$ TIENE UN MÁXIMO Ó MÍNIMO EN P

$\Rightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ TALQUE $\nabla F(P) = \lambda . \nabla g(P)$

DEM: $(\mathbb{R}^2)$

$P = (P_1, P_2)$. COMO $\nabla g(P) \neq 0$ SUPONGAMOS QUE $\frac{\partial g}{\partial y}(P) \neq 0$ (EL CASO $\frac{\partial g}{\partial x}(P) \neq 0$ ES ANÁLOGO)

POR EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA EXISTE $I \subseteq \mathbb{R}$ (QUE CONTIENE A P_1), $\varphi: I \to \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN C^1 Y UNA BOLA $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ALREDEDOR DE P TALQUE $S \cap B = Graf(\varphi)$

$(x, \varphi(x))$ SON LOS PUNTOS DEL GRÁFICO DE φ, Y COMO ÉSTE ES $S \cap B$

ENTONCES LOS PUNTOS $(x, \varphi(x))$ PERTENECEN A S

ENTONCES $g(x, \varphi(x)) = c$

DERIVANDO ESA ESA ÚLTIMA EXPRESIÓN:

$$\langle \nabla g(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle = 0$$

EN PARTICULAR, SI $x = P_1$:

$$\langle \nabla g(P), (1, \varphi'(P_1)) \rangle = 0 \quad \text{ENTONCES} \quad (1, \varphi'(P_1)) \perp \nabla g(P) \quad (1)$$

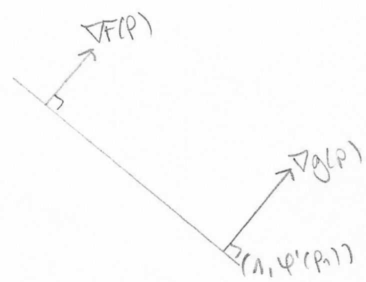
POR OTRO LADO,

COMO $F|_S$ TIENE EXTREMO EN P, ENTONCES LA FUNCIÓN $x \longmapsto F(x, \varphi(x))$

TIENE EXTREMO EN $x = P_1$

LUEGO, POR FERMAT, SU DERIVADA SE ANULA EN $x = P_1$

$$\langle \nabla F(P), (1, \varphi'(P_1)) \rangle = 0 \quad \text{ENTONCES} \quad (1, \varphi'(P_1)) \perp \nabla F(P) \quad (2)$$



LUEGO, MIRANDO (1) Y (2):

$\nabla F(P)$ ES MÚLTIPLO DE $\nabla g(P)$

ES DECIR $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ TAL QUE $\nabla F(P) = \lambda \nabla g(P)$.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL.

1) $f(x)=c$ ES CONSTANTE EN $[a,b]$ $\Rightarrow$ f ES INTEGRABLE

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

3) f INTEGRABLE EN $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall\ c \in [a,b]$ f ES INTEGRABLE EN $[a,c]$ Y $[c,b]$

Y ADEMÁS: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4) Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall\ x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

5) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA $\Rightarrow$ f ES INTEGRABLE EN $[a,b]$

6) f INTEGRABLE EN $[a,b]$ $\Rightarrow$ $|f|$ ES INTEGRABLE EN $[a,b]$

Y ADEMÁS $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

7) MÁS EN GENERAL, SI $|f(x)| \leq M$ EN $[a,b]$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$

8) $b=a$ $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES.

SUP. $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA.

SEAN $m=\min\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$, $M=\max\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$

ENTONCES:

$$\left[m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \right] \text{①}$$

Y ADEMÁS, EXISTE $c \in (a,b)$ TALQUE

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c)$$

DEM:

① ES CONSECUENCIA DEL HECHO QUE $\forall\ x\in[a,b]$ $\quad m\leq f(x)\leq M$

COMO $[a,b]$ COMPACTO
f CONTINUA, ENTONCES
POR WEIERSTRASS
f ALCANZA MÁX. Y
MÍN. EN $[a,b]$

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\Leftrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$\underset{b-a>0}{\Leftrightarrow} m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

LUEGO, TAMBIÉN POR WEIERSTRASS, EXISTEN $p_1,p_2\in[a,b]$ TALES QUE $f(p_1)=m$, $f(p_2)=M$

SUP. QUE $p_1\leq p_2$ POR BOLZANO EN EL INTERVALO $[p_1,p_2]$ EXISTE $c\in[p_1,p_2]\subseteq[a,b]$

TALQUE $f(c)=\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

BOLZANO:
$a<b$
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA.

$\forall\ \gamma$ TQ' $f(a)<\gamma<f(b)$

$\Rightarrow \exists\ c\in(a,b)$ TQ' $f(c)=\gamma$

$f(p_1) < \int \leq f(p_2)$

$\exists\ c\in(p_1,p_2)$ TQ' $f(c)=\int$

Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in(a,b)$

Dem:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}=$$

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{\cancel{x}+h-\cancel{x}}\underset{\text{TVMI}}{=}f(c)\quad \text{para } c\in(x,x+h)$$

$$\underset{\text{TVMI}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(c)\cdot\cancel{h}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}f(c)=f(x)$$

$c\xrightarrow[h\to 0]{}x$

$\Rightarrow$ como f continua $f(c)\xrightarrow[h\to 0]{}f(x)$

Con esto queda demostrado que F es derivable en (a,b) (y por lo tanto también será continua en (a,b)) y que $F'(x)=f(x)$

Restaría probar que F es continua en los bordes:

Falta probar que F es continua en los bordes:

En a:

Como f es continua en el compacto $[a,b]\Rightarrow\exists\ M>0$ talque $|f(t)|\leq M\ \ \forall\ t\in[a,b]$

$$|F(x)-F(a)|=\left|\int_a^x f(t)\,dt-\underbrace{\cancel{\int_a^a f(t)\,dt}}_{=0}\right|=\left|\int_a^x f(t)\,dt\right|\leq\int_a^x|f(t)|\,dt\leq\int_a^x M\,dt=M(x-a)\xrightarrow[x\to a^+]{}0$$

$$\Rightarrow F(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}F(a)$$

En b:

$$|F(x)-F(b)|=\left|\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^b f(t)\,dt\right|=\left|-\int_x^b f(t)\,dt\right|=\left|\int_x^b f(t)\,dt\right|\leq\int_x^b|f(t)|\,dt\leq\int_x^b M\,dt=M(b-x)\xrightarrow[x\to b^-]{}0$$

$$\Rightarrow F(x)\xrightarrow[x\to b^-]{}F(b)$$

Regla de Barrow.

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, y sea $G: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) talque $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$

Entonces $$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Dem:

Como f es una función continua, por el T.F.C.I, debe existir $F(x) = \int_a^x f$ tal que $F'(x) = f$. Pero como $F'(x) = f(x) = G'(x)$, necesariamente $G(x) = F(x) + C$ para algún $C \in \mathbb{R}$.

Entonces

$$G(b) - G(a) = F(b) \cancel{+C} - F(a) \cancel{-C} = F(b) - F(a)$$
$$= \int_a^b f(x)\partial x - \int_a^a f(x)\partial x = \int_a^b f(x)\partial x - 0 = \int_a^b f(x)\partial x$$