Adam Gorazda 189659
Maciej Kowalski 189701

Rok akademicki 2014/15
środa, 8:30

METODY NUMERYCZNE - LABORATORIUM

Zadanie 5 - Metoda aproksymacji oparta o wielomiany Hermite'a

Opis rozwiązania

Celem tego zadania było wykonianie programu, który wyznacza funkcję aproksymującą *y(x)* przy zastosowaniu wielomianów Hermite'a, zapisanych poprzez równanie rekurencyjne $G_{n+1}(x) = 2xG_n(x) - 2nG_{n-1}(x)$ przy warunkach początkowych $G_0(x) = 1$ oraz $G_1(x) = 2x$.

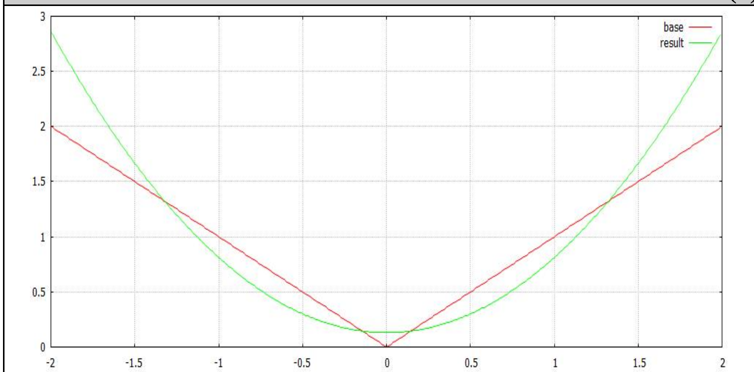
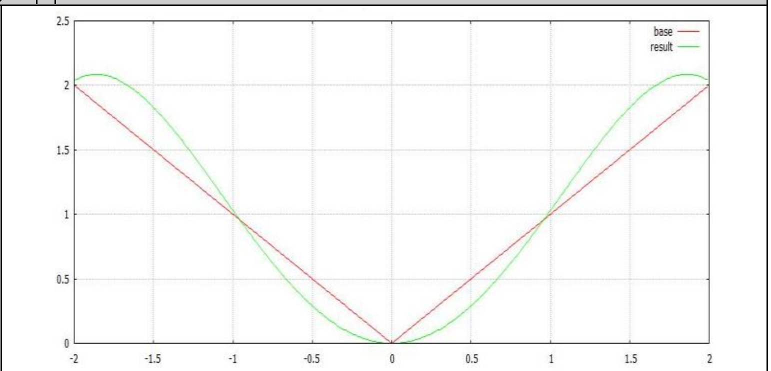
Aproksymacja pomaga na znalezieniu wzoru prostszej funkcji wielomianowej przybliżającej nam inną, bardziej złożoną funkcję, bez konieczności posiadania wiedzy o konkretnych punktach należących do danej funkcji, tak jak jest to w przypadku interpolacji.

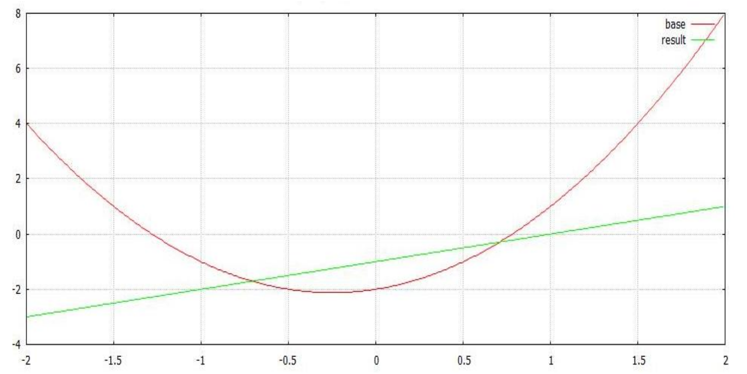
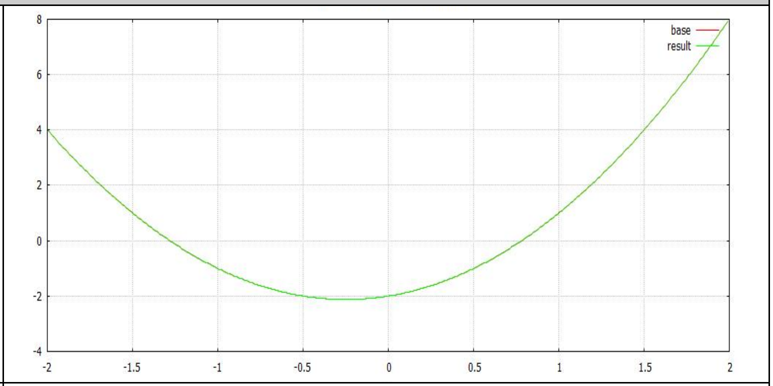
Przy aproksymacji wykorzystaliśmy kwadraturę Gaussa - Hermite'a, służącą do liczenia całek z przedziału (-∞, +∞), o postaci $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} H_i f(x_i)$ gdzie x_i to węzły kwadratury Gaussa - Hermite'a (miejsca zerowe odpowiednich wielomianów Hermite'a), a H_i to wagi kwadratury Gaussa - Hermite'a. Wartości te zostały znalezione w tablicach.

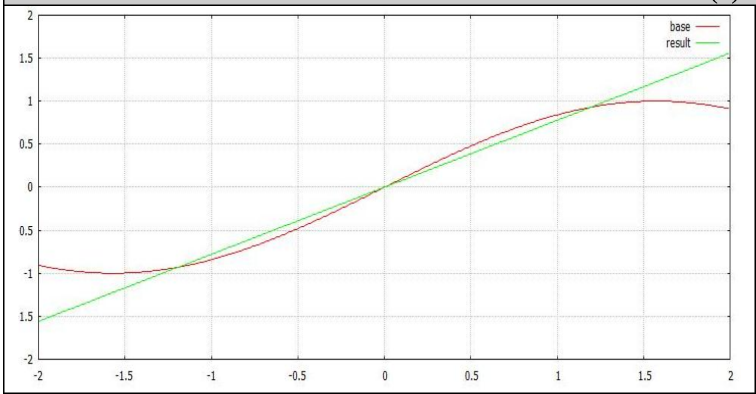
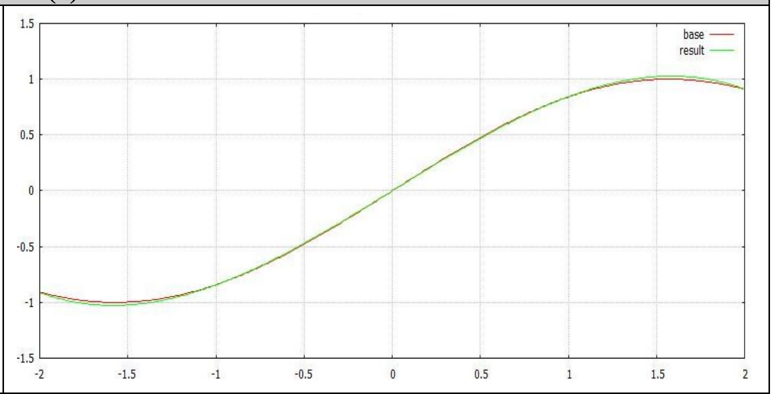
Samą funkcję aproksymujemy przy pomocy wzoru $f(x) = \sum_{k=0}^{n} G_k(x) a_k$, gdzie G_k to wielomiany Hermite'a, a a_k są to współczynniki obliczane ze wzoru $a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^k\, k!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_k(x) e^{-x^2} dx$. Znajdująca się we wzorze *f(x)* to funkcja aproksymowana, a *k* przyjmuje wartości z przedziału *k* = 0, 1, 2..., *n*. Błąd został wyliczony dzięki sumie arytmetycznej różnicy wartości funkcji między równoodległymi węzłami znajdującymi się w przedziale naszych działań.

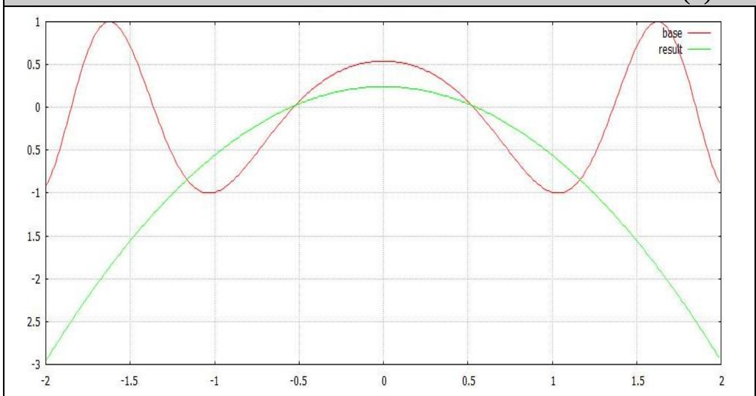
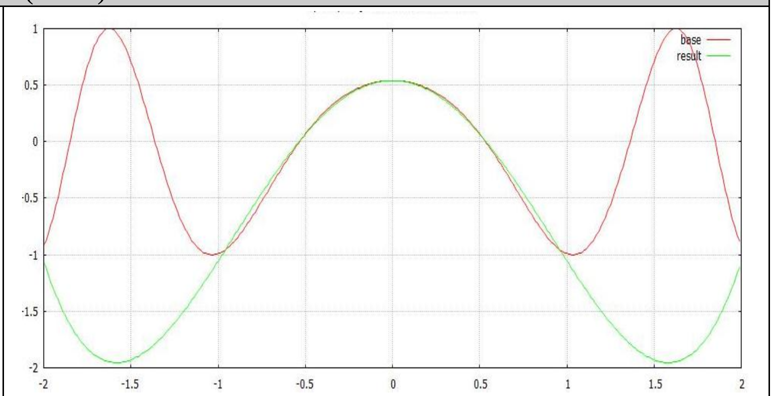
Wyniki

Wybrane przez nas funkcje były rysowane na przedziale od (-2, 2) przy pięciu węzłach całkujących.

F(x) = |x|	
	
Drugi stopień wielomianu Wielomian: $0.682426x^2 + 0.130022$ Błąd: 1.58716	Piąty stopień wielomianu Wielomian: $-0.173361x^4+1.202510x^2$ Błąd: 0.0580483

<table>
<tr><th colspan="2">F(x) = $2x^2 + x - 2$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Pierwszy stopień wielomianu
Wielomian: $0.999996x - 1.000003$
Błąd: 98.0248</td><td>Drugi stopień wielomianu
Wielomian: $1.999988x^2 + 0.999996x - 1.999997$
Błąd: 0.000502</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">F(x) = sin(x)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Drugi stopień wielomianu
Wielomian: $0.778781x$
Błąd: 0.860167</td><td>Piąty stopień wielomianu
Wielomian: $-0.128987x^3 + 0.972260x$
Błąd: 0.000163</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">F(x) = $\cos(2x^2+1)$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Drugi stopień wielomianu
Wielomian: $-0.798921x^2 + 0.232076$
Błąd: 8.42324</td><td>Piąty stopień wielomianu
Wielomian: $0.397635x^4 + 1.991825x^2 + 0.540302$
Błąd: 0.051552</td></tr>
</table>

Wnioski

Metoda aproksymacji przy pomocy wielomianów Hermite'a jest metodą efektywną dla prostych funkcji na wąskim przedziale wielomianu. Uzyskiwany błąd zmniejszał się wraz ze wzrostem stopnia wielomianu aproksymującego. Próby stworzenia wielomianu aproksymującego dla bardziej złożonych funkcji często kończą się porażką. Nie mamy pewności, czy jest to wina samego sposobu działania aproksymacji przy pomocy wielomianów Hermite'a czy też naszego programu.