

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 5 – Metoda aproksymacji oparta o wielomiany Laguerre’a

Opis rozwiązania

Celem zadania było stworzenie programu implementującego metodę aproksymacji opartej o wielomiany Laguerre’a. Aproksymacja wielomianu to przybliżenie pewnej funkcji $f(x)$ za pomocą wielomianu n -tego stopnia $F(x)$. W tym zadaniu do tego celu wykorzystano wielomiany ortogonalne Laguerre’a postaci:

$$L_0(x)=1 \quad L_1(x)=x-1 \quad L_{k+1}(x)=(x-2k-1)L_k(x)-k^2L_{k-1}(x)$$

Współczynniki wielomianu aproksymacyjnego obliczono korzystając z poniższego wzoru:

$$\lambda_k = \frac{\int_0^\infty w(x) f(x) L_k(x) dx}{\int_0^\infty w(x) L_k(x) L_k(x) dx}$$

gdzie $w(x)$ to waga całkowania obliczana w metodzie Gaussa-Laguerre’a.

Do obliczania całki wykorzystano metodę całkowania z poprzedniego zadania (metodę Gaussa-Laguerre’a).

Błąd aproksymacji oblicza się ze wzoru

$$\|f - fn\| = \sqrt{\left(\int p(t) (f(t) - fn(t)) \cdot (f(t) - fn(t)) dt \right)}$$

gdzie $p(t)$ to funkcja wagowa e^{-t}

Użytkownik wybiera jedną z dostępnych funkcji, przy czym jedną z opcji jest wprowadzenie własnego wielomianu. Następnie podaje on żądany stopień wielomianu aproksymacyjnego, liczbę węzłów oraz przedział aproksymacji. Po wykonaniu obliczeń program wyświetla wykres umożliwiający porównanie funkcji bazowej z aproksymującą.

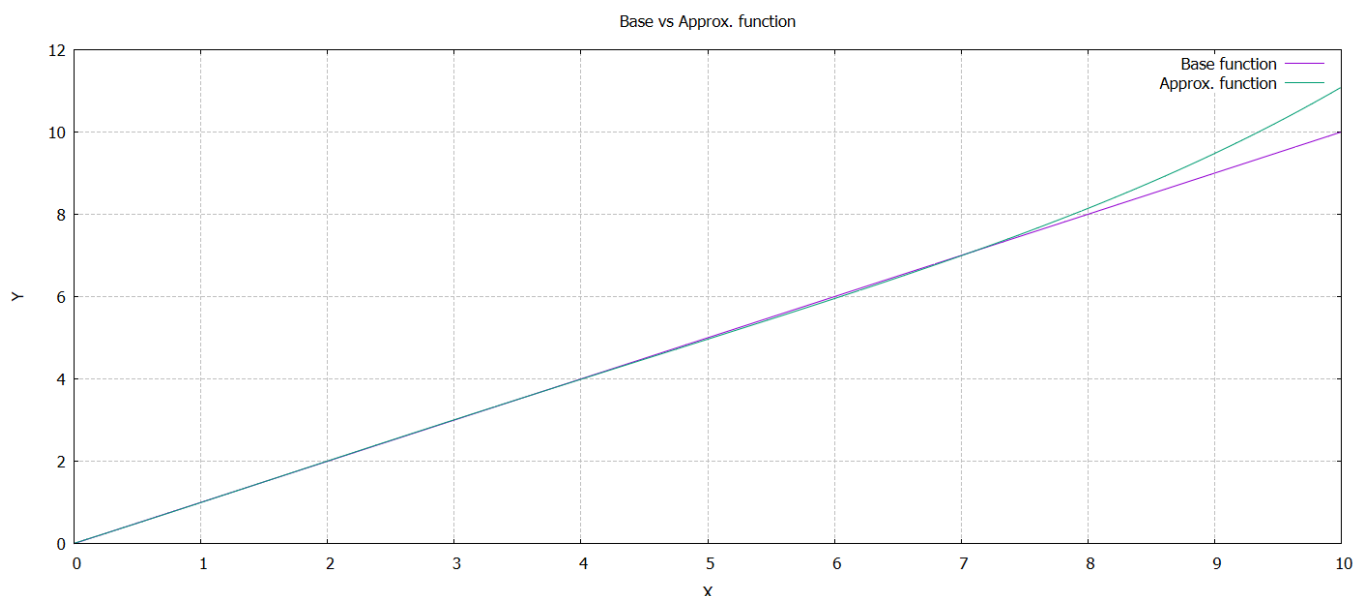
Wyniki

Wszystkie funkcje były aproksymowane na przedziale $[0,10]$ na 5 węzłach.

Wykresy przedstawiono tylko dla wielomianów stopnia 5.

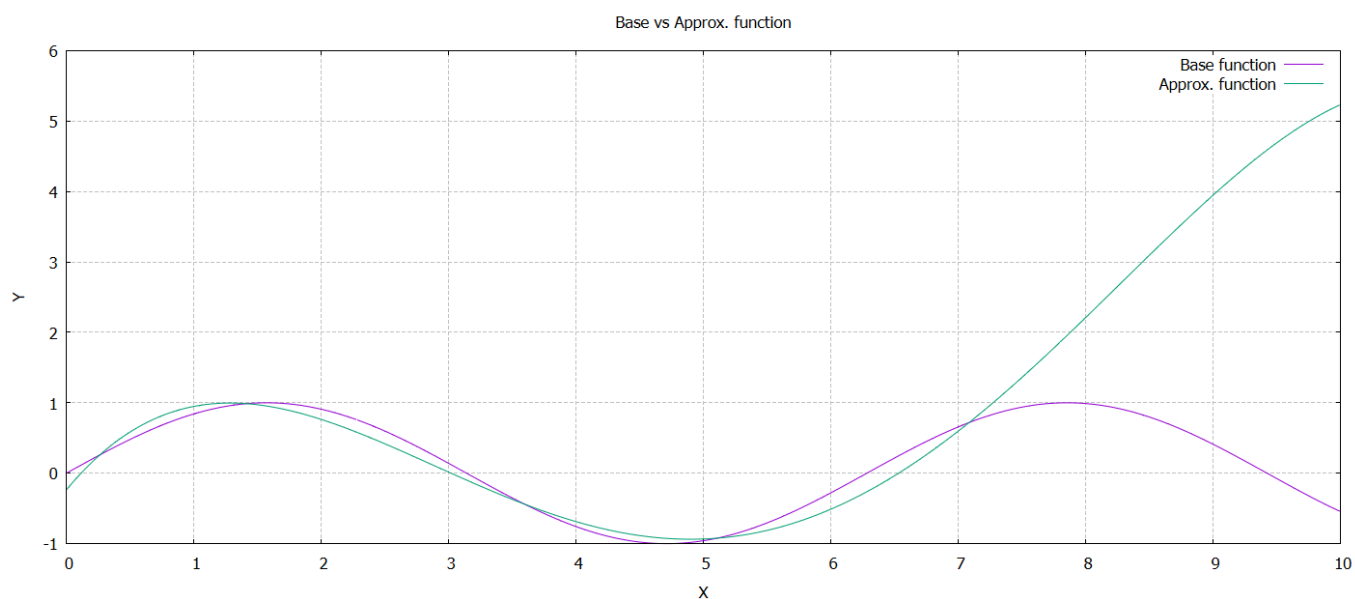
$$f(x) = |x|$$

Stopień wielomianu	5	10
Błąd aproksymacji	0.0276968	0.0678852



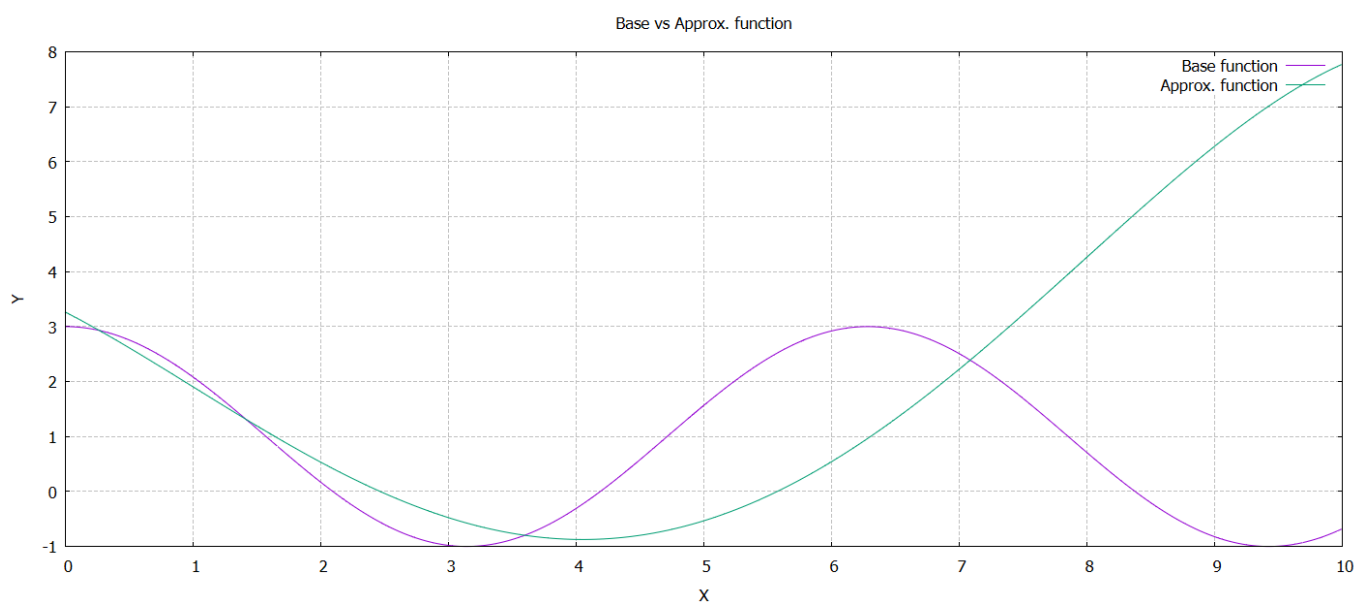
$$f(x) = \sin(x)$$

Stopień wielomianu	5	10
Błąd aproksymacji	0.000162993	0.419646



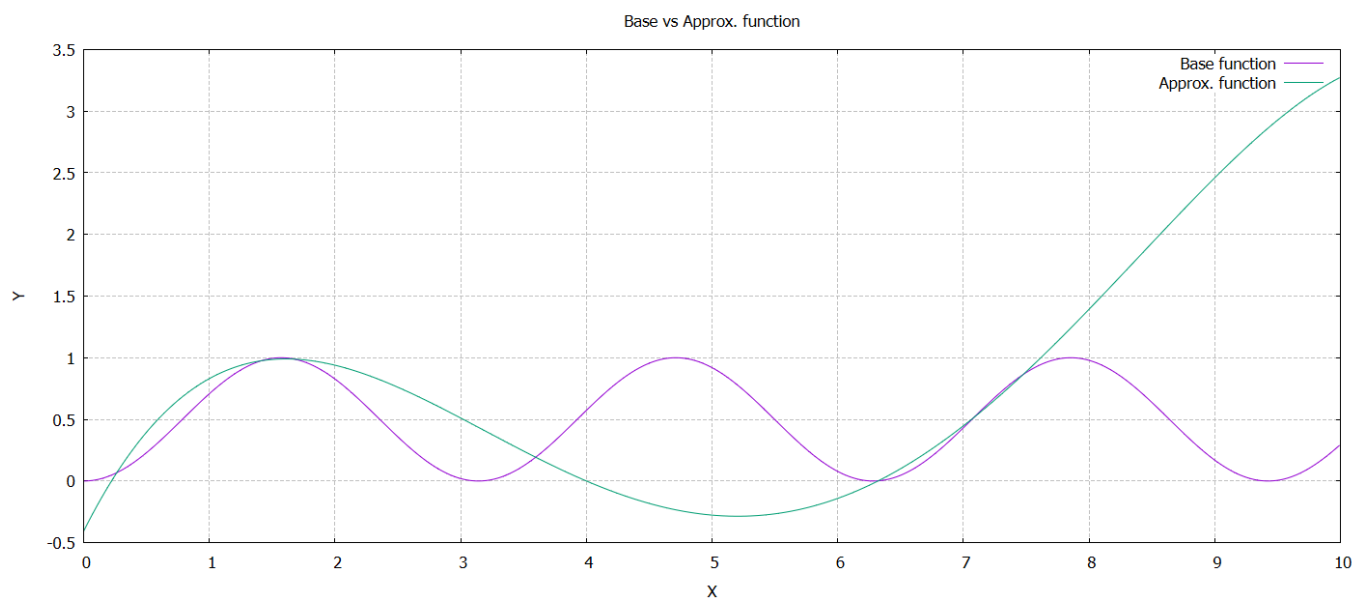
$$f(x) = 2 \cos(x) + 1$$

Stopień wielomianu	5	10
Błąd aproksymacji	0.00656155	0.26275



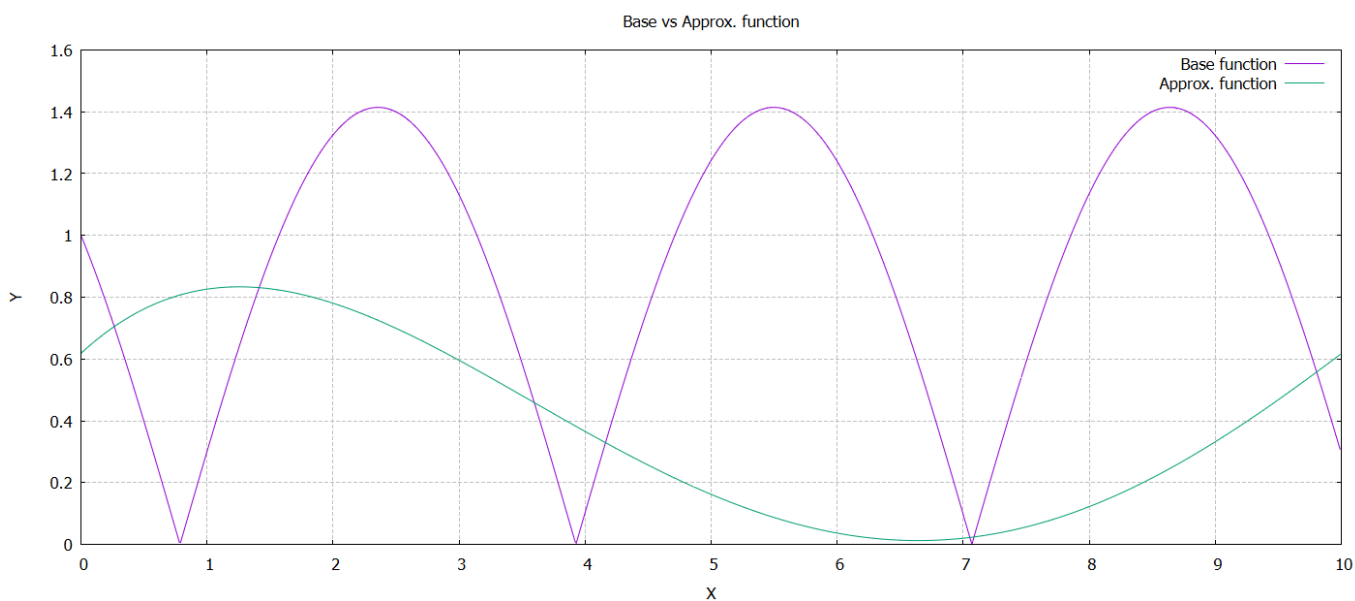
$$f(x) = \sin^2(x)$$

Stopień wielomianu	5	10
Błąd aproksymacji	0.0000121363	0.358828



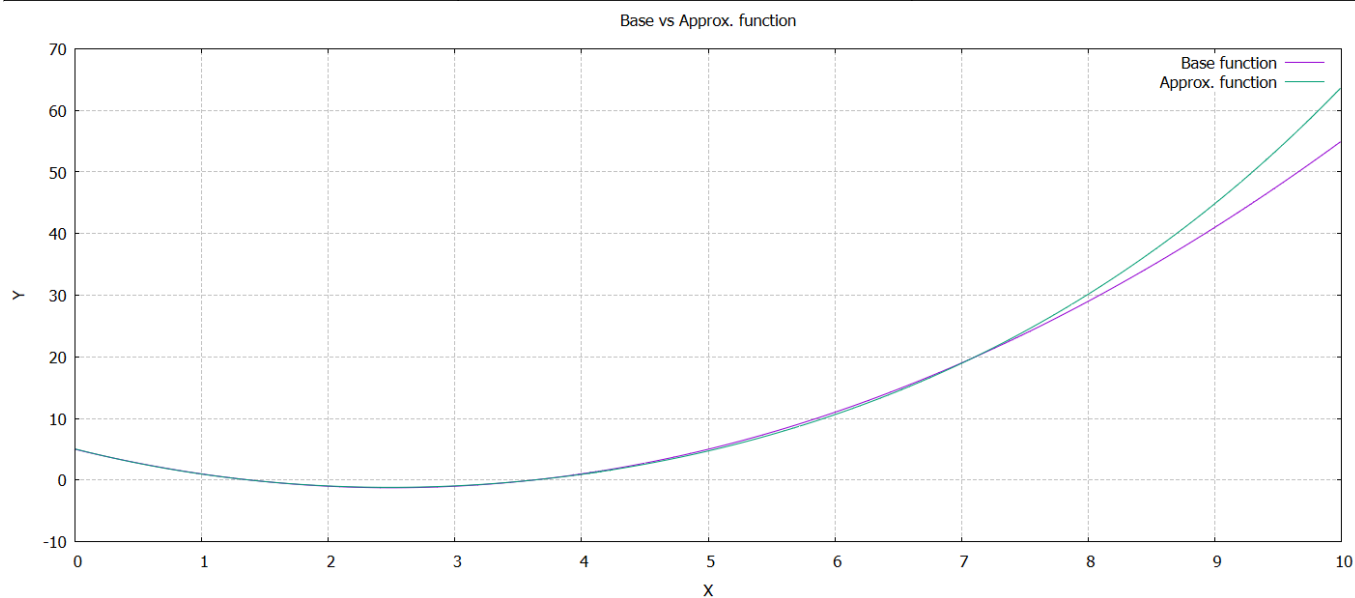
$$f(x) = |\sin(x) - \cos(x)|$$

Stopień wielomianu	5	10
Błąd aproksymacji	0.00202217	0.0890069



$$f(x) = x^2 - 5x + 5$$

Stopień wielomianu	5	10
Błąd aproksymacji	0.222582	0.690835



Wnioski

- Im wyższy stopień wielomianu aproksymacyjnego, tym mniej dokładna jest aproksymacja.
- Dokładność aproksymacji wzrasta wraz ze zwiększaniem liczby węzłów przy obliczaniu całki.
- Metoda ta najlepiej sprawdza się przy aproksymacji niezbyt skomplikowanych wielomianów. Niezbyt dokładnie radzi sobie z innymi funkcjami, np. funkcjami trygonometrycznymi.