ALGORITMI E STRUTTURE DATI

Laurea triennale in scienze informatiche

Magliani Andrea
Perego Luca

Università degli studi di Milano-Bicocca

A.A. 2022/2023

INDICE

Problema Computazionale e Algoritmi

1.1 Problema Computazionale

Relazione matematica tra input e output.
Un problema è definito come: $\pi \subseteq input \times output$

1.2 Istanza

Set di input specifici legati ad un determinato problema.

1.3 Algoritmo

Descrizione finita, composta da una sequenza di istruzioni elementari e non ambigue che, se eseguita, trasforma gli input in output.

1.4 Analisi degli Algoritmi

Gli algoritmi vengono **analizzati** per valutarne diversi aspetti:

- Correttezza: verificata con test e dimostrazioni;
- Efficienza: verificata misurando i tempi e lo spazio occupato;

Un algoritmo che risolve un problema per ogni sua istanza in un tempo finito è detto **corretto**.

Un algoritmo che, per almeno una delle istanze, non risolve correttamente il problema è detto **non corretto**.

1.5 Struttura dati

Un modo per memorizzare e manipolare dati.

Correttezza & Efficienza

2.1 Dimostrazione di Correttezza

Invariante di ciclo: metodo per dimostrare la correttezza di un algoritmo contenente un loop. L'invariante di ciclo si divide in 3 fasi:

- **Inizializzazione**: dimostra la correttezza per la prima iterazione;
- **Conservazione**: l'algoritmo è corretto per ogni valore di i e questa incrementa correttamente ad ogni iterazione;
- **Conclusione**: assumendo la condizione del ciclo False, l'algoritmo termina restituendo il risultato corretto;

2.2 Calcolo dell'Efficienza

Un algoritmo efficiente utilizza il minor **tempo** e **risorse** possibili.
È necessario definire una funzione $T(n)$, ovvero il tempo di calcolo impiegato per gestire un input di lunghezza n.

Ad ogni tipo di istruzione viene assegnato un **valore temporale** di esecuzione, per poi contarne le occorrenze nel codice.

$T(n)$ equivale alla somma delle occorrenze di tutti i valori temporali.

In un algoritmo è presente:

Caso Migliore: $T_{migl}(n) \rightarrow$
Sottoinsieme delle istanze in cui l'algoritmo impiega meno.

Caso Peggiore: $T_{pegg}(n) \rightarrow$
Sottoinsieme delle istanze in cui l'algoritmo impiega di più.

Notazioni Asintotiche

3.1 O-Grande

O(n) rappresenta il **limite superiore** [asintoticamente] della funzione $T(n)$ di un algoritmo.

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, c, n_0 > 0,\ f(n) \leq c \cdot g(n)\ \ \forall n > n_0\} \qquad f(n) \in N \ \wedge\ f(n) > 0\ def.$$

3.2 Ω-Grande

Ω(n) rappresenta il **limite inferiore** [asintoticamente] della funzione $T(n)$ di un algoritmo.

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, c, n_0 > 0,\ 0 \leq c \cdot g(n) < f(n)\ \ \forall n > n_0\}$$

3.3 θ-Grande

θ(n) rappresenta la funzione che **delimita superiormente** ed **inferiormente** la funzione $T(n)$ di un algoritmo.

$$\theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, c_1, c_2, n_0 > 0,\ \ 0 \leq c_2 \cdot g(n) \leq f(n)\ \ \leq f(n) \leq c_1 \cdot g(n)\ \forall n > n_0\}$$

3.4 Gerarchie di crescita Asintotica

La crescita di $T(n)$ varia in base alla funzione a cui è associata.
La **scala di crescita** è:

$$c \rightarrow log\, n \rightarrow \sqrt{n} \rightarrow n \rightarrow n\, log\, n \rightarrow n^a [a > 1] \rightarrow a^n \rightarrow n! \rightarrow n^n$$

Caratteristiche degli Algoritmi

4.1 Stabile

Algoritmo che, se nel vettore di input sono presenti due valori **uguali**, mantiene l'ordine tra di loro anche nel vettore ordinato di output.

4.2 In-Place

Algoritmo che non utilizza una **struttura dati ausiliaria**, ma lavora direttamente sull'input.

Algoritmi di Ordinamento

5.1 Definizione

Gli algoritmi di ordinamento sono utilizzati per posizionare gli elementi di un insieme secondo una **relazione d'ordine**.

5.2 Struttura del problema

Ogni algoritmo di ordinamento condivide problema e risultato.

Problema: Ordinamento di un vettore V di n elementi.
Input: Un vettore V di n elementi.
Output: Un vettore V t.c.:

- L'output è una permutazione di V;
- $\forall\, i \in [1, n-1] \quad V'[i] \leq V[i+1]$;

Teorema dell'esperto

6.1 Enunciato

Sia $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ $\quad a \geq 1,\ b > 1,\ f(n)\ asin.\ pos.$

1. se $\exists\, \varepsilon > 0\ t.c.\ f(n) = 0\left(n^{log_b a - \varepsilon}\right)$ allora $T(n) = \theta\left(n^{log_b a}\right)$
2. se $f(n) = \theta\left(n^{log_b a}\right)$ allora $T(n) = \theta\left(n^{log_b a} \cdot log\, n\right)$
3. se $\exists \varepsilon > 0\ t.c.\ f(n) = \Omega\left(n^{log_b a + \varepsilon}\right)$ e se $\exists\, c < 1\ t.c.\ a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$ $\forall n > n_0$ allora $T(n) = \theta(f(n))$

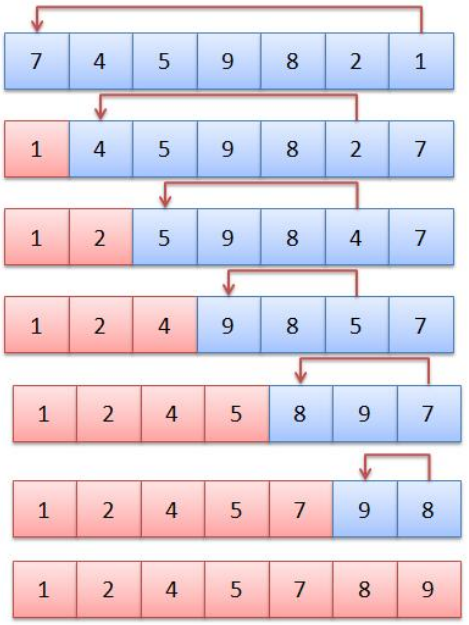
Selection sort

7.1 Pseudocodice

```
SELECTION_SORT (V)

      for i := 1 to V.length - 1

            posmin := i

            for j := i + 1 to V.length - 1

                  if V[posmin] > V[j] then

                        posmin := j

            scambia V[i] con V[posmin]
```

7.2 Funzionamento

Si cerca il numero minore navigando tutto il vettore e si mette nella posizione i, con i che varia dalla prima posizione del vettore fino all'ultima.



7.3 Correttezza

I primi i - 1 elementi di V sono i più piccoli i - 1 elementi di V ordinati in ordine crescente.
INIZIALIZZAZIONE

I primi 0 elementi di V^I sono i più piccoli 0 elementi di V ordinati in ordine crescente

CONSERVAZIONE

Corretto ad inizio e fine ciclo.

TERMINAZIONE

Corretto al termine dell'algoritmo.

7.4 Tempi di calcolo

CASO MIGLIORE e CASO PEGGIORE sono asintoticamente uguali.
$T(n) = \theta(n^2)$

7.5 Caratteristiche

STABILE

No, il selection sort non è un algoritmo di ordinamento stabile in quanto scambiando l'elemento di posizione i con l'elemento più piccolo dell'array, non sempre mantiene l'ordine originale degli elementi uguali nel vettore.

IN PLACE

Si, il selection sort è un algoritmo di ordinamento in place in quanto non utilizza altre strutture dati per ordinare il vettore in input.

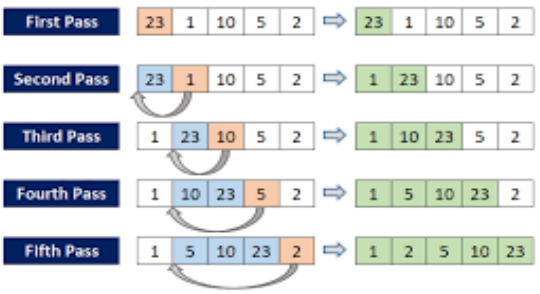
Insertion sort

8.1 Pseudocodice

```
INSERTION_SORT (V)

      for i := 2 to V.length

            j := i - 1
            key := V[i]

            while j >= 1 AND V[j] > Key

                  V[j + 1] := V[j]
                  V[j] := Key
                  j := j - 1
```

8.2 Funzionamento

Si parte dal secondo elemento del vettore in input e si controlla se l'elemento precedente è minore, nel caso si scambiano i due valori, si continua successivamente con l'elemento i + 1 fino alla fine dell'array.



8.3 Correttezza

All'inizio di ogni iterazione i primi i-1 elementi di V^I sono i primi i-1 elementi di V in ordine crescente.

INIZIALIZZAZIONE

Il primo elemento di V^I è il primo elemento di V in ordine crescente

CONSERVAZIONE

Vero ad inizio e fine ciclo

TERMINAZIONE

Vero a fine algoritmo

8.4 Tempi di calcolo

CASO MIGLIORE

Il vettore V è già ordinato. Tmigl(n) = $\theta(n)$ -> T(n) = $\Omega(n)$

CASO PEGGIORE

V è ordinato in senso decrescente. Tpegg(n) = $\theta(n^2)$ -> T(n) = $O(n^2)$

8.5 Caratteristiche

STABILE

Si l'insertion sort è un algoritmo di ordinamento stabile in quanto mantiene l'ordine degli elementi uguali tra di loro.

IN PLACE

Si l'insertion sort è un algoritmo di ordinamento in place in quanto non utilizza strutture d'appoggio per eseguire le sue operazioni.

Mergesort

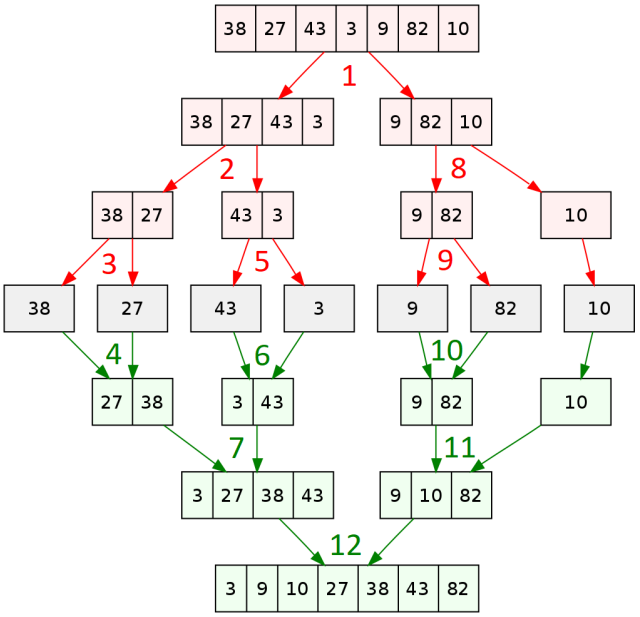
9.1 Pseudocodice

```
MERGESORT (V,l, r)

     if l < r then

          mid := floor[(l+r)/2]
          MERGESORT (V, l, mid)
          MERGESORT (V, mid+1, r)
          MERGE (V,l, mid, r)

MERGE (V, l, mid, r)

     T := Vettore di lunghezza r-l + 1
     i := l
     j := mid + 1
     k := 1

     while i <= mid AND j <= r do

          if V[i] <= V[j] then
               T[k] := V[i]
               i := i + 1

          else

               T[k] := V[j]
               j := j + 1

          k := k + 1

     while i <= min do

          T[k] := V[i]
          i := i + 1
          k := k + 1

     for k := 1 to T.length do

          V[l + k - 1] := T[k]
```

9.2 Funzionamento

Il mergesort utilizza la strategia di programmazione **divide et impera** per ridurre il problema in più sottoproblemi.

Una volta ottenuti i singoletti e arrivati nel caso base si esegue la procedura di merge, andando a unire i singoletti riordinandoli durante il processo.



9.3 Tempi di calcolo

a = 2 (volte che viene chiamato il metodo ricorsivo)
b = 2 (in quante porzioni divido l'array [mid = l+r / **2**]
f(n) = $\theta(n)$ (righe di codice che non c'entrano con la ricorsione)

quindi applico il secondo caso del teorema del maestro:

$\theta(n) = \theta(n^{log_2 2}) \rightarrow \theta(n) = \theta(n) \rightarrow T(n) = \theta(n^{log_2 2} \cdot log\, n) \rightarrow T(n) = \theta(n \cdot log\, n)$

Ricerca Dicotomica

Problema: Ricerca di un elemento in un vettore V ordinato.
Input: un vettore V di n elementi e un intero x.
Output: un intero n t.c. $n \in V \land n = x$

10.1 Pseudocodice

```
Ricerca_Dicotomica(V, x, l, r)

     if r < l then
          return false

     if r = l then
          return x == V[l]

     mid := floor((l+r)/2)

     if x > V[mid] then
          return Ricerca_Dicotomica(V, x, mid + 1, r)
     else
          return Ricerca_Dicotomica(V, x, l, mid)
```

10.2 Tempi di calcolo

Caso migliore e caso peggiore sono **asintoticamente uguali**: $T(n) = \Theta(log_2 n)$.

Problema di selezione

Input: un vettore V di n interi distinti, un intero **i** t.c $1 \leq i \leq n$.
Output: Il valore di V che è maggiore di esattamente i-1 elementi di V.

11.1 Pseudocodice

```
SELEZIONE (V, i, l, r)

     if l = r then
          return V[l]

     cut := RANDOM_PARTITION (V, l, r)
     dim_sx := cut - l + 1

     if i <= dim_sx then
          return SELEZIONE (V, i, l, cut)

     return SELEZIONE (V, i - dim_sx, cut + 1, V)
```

11.2 Tempi di calcolo

Caso peggiore: $\theta(n^2)$

Caso migliore: $\theta(n)$

Si può notare che il caso peggiore è $\theta(n^2)$ quindi asintoticamente maggiore del caso peggiore di un algoritmo di ordinamento come il mergesort, che potremmo usare per riordinare il nostro vettore in input e risolvere facilmente il nostro problema di ricerca, quindi, perchè usare questo algoritmo e non ordinare l'array prima col mergesort?

Utilizzando random partition rendiamo l'algoritmo randomico e non più deterministico ed il suo tempo di calcolo diventa $\theta(n)$ in quanto non consideriamo il caso peggiore essendo un evenienza molto sfortunata e improbabile con l'approccio randomico, per cui l'algoritmo di selezione sviluppato è asintoticamente più veloce rispetto al mergesort, essendo $\theta(n)$ asintoticamente minore di $\theta(n \cdot log\, n)$.

Counting sort

12.1 Pseudocodice

```
COUNTING_SORT (A, k)

      C := vettore di k elementi

      for i := 1 to k
            C[i] := 0

      for j := 1 to A.length
            C[A[j]] := C[A[j] + 1]

      for i := 2 to k
            C[i] := C[i - 1] + C[i]

      B := vettore con n elementi

      for j := A.length down to 1
            B[C[A[j]]] := A[j]
            C[A[j]] := C[A[j]] - 1

      return B
```

12.2 Tempi di calcolo

Primo for: $\theta(k)$
Secondo for: $\theta(n)$
Terzo for: $\theta(k)$
Quarto for: $\theta(n)$

$T(n, k) = \theta(n + k) \quad con\ k = O(n)$
$\rightarrow T(n) = \theta(n)$

Radix sort

13.1 Funzionamento

Ordina l’array iniziando l’ordinamento dalla cifra meno significativa e scalando fino a quella più significativa, è conveniente usarlo su array di dimensioni non troppo elevate, in modo da sfruttare al massimo il suo tempo di esecuzione lineare.

13.2 Pseudocodice

```
RADIXSORT(A)

     for i := 1 to k
          ordina A secondo l’i-esima cifra meno significativa con
          ord.stabile
```

Heap Binario

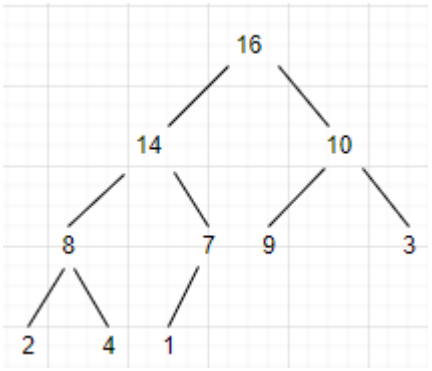
14.1 Definizione

Memorizzato come array + **proprietà**, ma che può essere visto come albero binario quasi completo (completo almeno a sinistra).

Come memorizziamo l'heap:

A = 16 14 10 8 7 9 3 2 4 1

Come vediamo l'heap:



Come calcoliamo la posizione dei nodi nell'array:

parent(i) := floor $(\frac{i}{2})$
left(i) := $2 \cdot i$
right(i) := $(2 \cdot i) + 1$

14.2 Proprietà

1. length → quanti elementi contiene l'array
2. heap_size → quanti elementi dell'array sono nell'heap
3. max heap → un heap che soddisfa: $A[parent(i)] \geq A[i]$
4. min heap → un heap che soddisfa: $A[parent(i)] \leq A[i]$

Attenzione: Se un array non rispetta almeno una tra le proprietà max-heap e min-heap allora l'array **non è** un heap.

14.3 Nomenclatura