Definition. Sei V eine Variablenmenge, d.h. $V \subseteq \{A_0, A_1, \dots\}$. Dann heißt eine Abbildung $B : V \to \{0, 1\}$ **Belegung**.

Sei $B : V \to \{0,1\}$ eine Belegung. Dann ist die von B induzierte **Bewertung** diejenige Abbildung $\hat{B} : F(V) \to \{0,1\}$ [1], die allen Formeln mit Variablen in V ihren durch die Belegung der Variablen gegebenen Wahrheitswert zuordnet. [2]

Abkürzend schreiben wir oft $B(\varphi)$ statt $\hat{B}(\varphi)$.

Beispiel. Sei $B : \{A, B\} \to \{0, 1\}$ die durch $B(A) = 1$ und $B(B) = 0$ gegebene Bewertung.

Dann ist $B(\varphi) = \hat{B}(\varphi) = 0$ für $\varphi \equiv A \to B$.

Lemma. *(Koinzidenzlemma (KL)) Seien $B_1 : V_1 \to \{0,1\}$, $B_2 : V_2 \to \{0,1\}$ Belegungen und φ eine Formel mit $V(\varphi) \subseteq V$. Es gelte $B_1 \restriction V(\varphi) = B_2 \restriction V(\varphi)$, d.h. $B_1(A) = B_2(A)$ für alle $A \in V(\varphi)$.*

Dann ist $B_1(\varphi) = B_2(\varphi)$.

Beispiel. Seien $B_1, B_2 : \{A, B, C\} \to \{0,1\}$ die durch $B_1(A) = 1, B_1(B) = B_1(C) = 0$ und $B_2(A) = B_2(C) = 1, B_2(B) = 0$ gegebenen Belegungen.

Dann gilt also $B_1(A) = B_2(A)$ und $B_1(B) = B_2(B)$, d.h. $B_1 \restriction \{A, B\} = B_2 \restriction \{A, B\}$. Weil $V(\varphi) = \{A, B\}$ für $\varphi \equiv A \to B$ gilt deshalb nach dem Koinzidenzlemma, dass $B_1(\varphi) = B_2(\varphi)$.

Definition. Eine Formel φ heißt **allgemeingültig** (ag$[\varphi]$) oder eine **Tautologie**, wenn jede Belegung $B : V(\varphi) \to \{0, 1\}$ diese wahr macht, d.h. $B(\varphi) = 1$.

Eine Formel φ heißt **erfüllbar** (erfb$[\varphi]$), wenn es mindestens eine Belegung $B : V(\varphi) \to \{0, 1\}$ gibt, die diese wahr macht.

Eine Formel φ heißt **kontradiktorisch** (kd$[\varphi]$), wenn jede Belegung $B : V(\varphi) \to \{0,1\}$ diese falsch macht.

Lemma.
(i) *ag*$[\varphi] \Rightarrow$ *erfb*$[\varphi]$

(ii) *ag*$[\varphi] \Leftrightarrow$ *kd*$[\neg\varphi]$

(iii) *erfb*$[\varphi] \Leftrightarrow$ *nicht kd*$[\varphi]$

(iv) *ag*$[\varphi]$ *&* *ag*$[\psi] \Leftrightarrow$ *ag*$[\varphi \wedge \psi]$

(v) *ag*$[\varphi \vee \psi] \Rightarrow$ *ag*$[\varphi]$ *oder ag*$[\psi]$

[1] Hierbei ist $F(V) = \{\varphi \colon V(\varphi) \subseteq V\}$ die Menge der Formeln, deren Variablen in V liegen.
[2] Für die induktive Definition der Bewertung einer Formel siehe Kapitel 1, Folie 54.

(vi) $\mathit{erfb}[\varphi]$ *&* $\mathit{erfb}[\psi] \Leftrightarrow \mathit{erfb}[\varphi \wedge \psi]$

(vii) $\mathit{erfb}[\varphi \vee \psi] \Rightarrow \mathit{erfb}[\varphi]$ *oder* $\mathit{erfb}[\psi]$

Definition. (i) φ äq ψ :$\Leftrightarrow$ für jedes $B : V(\varphi) \cup V(\psi) \to \{0,1\}$ gilt $B(\varphi) = B(\psi)$

(ii) φ impl ψ :$\Leftrightarrow$ für jedes $B : V(\varphi) \cup V(\psi) \to \{0,1\}$ mit $B(\varphi) = 1$ gilt $B(\psi) = 1$

Lemma. *(i)* φ *äq* $\psi \Leftrightarrow \mathit{ag}[\varphi \leftrightarrow \psi]$

(ii) φ *impl* $\psi \Leftrightarrow \mathit{ag}[\varphi \to \psi]$

Lemma. *(Einsetzungsregel) Sei* φ *allgemeingültig und* ψ *eine beliebige Formel. Dann ist auch* $\varphi[\psi/A]$ *allgemeingültig.* [3]

Beispiel. Sei ψ eine beliebige Formel. Eine Wahrheitstabelle zeigt, dass ag$[A \vee \neg A]$ gilt. Nach der Einsetzungsregel gilt dann auch ag$[\psi \vee \neg\psi]$.

[3] Dabei erhalten wir $\varphi[\psi/A]$, indem wir in φ alle Vorkommen von A durch ψ ersetzen.